Глава 3

Теорија графова

3.1 Увод

Теорија графова је математичка дисциплина чија је примена данас веома значајна у рачунарству, теорији електричних кола, теорији система аутоматског управљања, теорији коначних аутомата, операционим истраживањима, теорији поузданог преноса информација, као и у хемији, економским наукама, социологији, биологији и др. Осим тога, теорија графова се примењује и у другим математичким дисциплинама, нпр. у теорији скупова, топологији, теорији игара и линеарном програмирању. Првим резултатом из теорије графова сматра се Ојлерово решење проблема **кенигсбершких мостова** из 1736. године, о коме ће бити речи касније. Дуго након тога, теорија графова је била скуп неповезаних, углавном помоћних и спорадичних тврђења у тада већ афирмисаним математичким дисциплинама, као што су алгебра, геометрија и анализа. Резултати те врсте су углавном осциловали између „озбиљне“ и рекреативне математике. Тренутком заснивања теорије графова као самосталне математичке дисциплине сматра се објављивање Кенигове[1] монографије 1936. године, када је термин **граф** ушао у општу употребу. Овај термин је први употребио математичар Силвестер[2] у свом раду из 1878. године. Кениг је у својој монографији навео свега 110 до тада објављених радова у којима се термин граф експлицитно појављује. Међу њиховим ауторима били су познати научници попут Кирхофа[3],

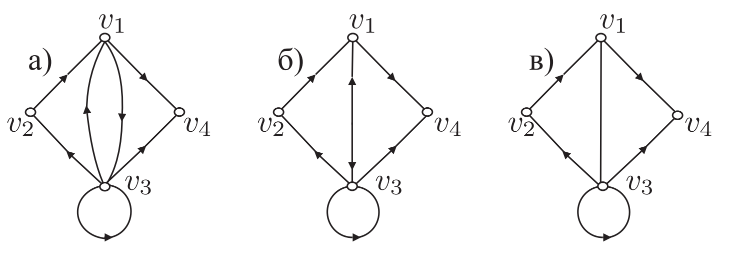
[1] Dénes König (1884–1944), мађарски математичар
[2] James Joseph Sylvester (1814–1897), енглески математичар
[3] Gustav Robert Kirhhoff (1824–1887), немачки физичар

Кејлија[4] и Куратовског[5]. Од тада граф постаје општеприхваћен појам, па су језиком теорије графова постављани и решавани бројни занимљиви проблеми. У 60-тим годинама прошлог века почиње снажан развој истраживања у теорији графова и њеним применама који траје до данас. Необично интензиван развој и велику популарност теорија графова је доживела захваљујући, пре свега, наглом развоју модерних информационих технологија. Осим тога, јасна геометријска представа коју граф садржи и која је блиска интуитивном схватању особина и веза објеката представљених графом, допринела је широком спектру примене графова. С друге стране, графови постају универзално математичко средство којим је могуће описати и моделирати најразличитије, и сасвим апстрактне математичке структуре.

3.2 Графови

Дефиниција 3.1. *Нека је V непразан скуп и $\rho \subseteq V \times V$ бинарна релација скупа V. Уређен пар $G = (V, \rho)$ се назива* ***граф****. Елементи скупа V су* ***чворови*** *графа, а елементи скупа ρ* ***гране*** *графа.*

Граф се може геометријски представити цртежом у равни, при чему чворове графа $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ представљамо произвољним, међусобно различитим тачкама у равни, а гране графа линијама које повезују одговарајуће чворове. Ако $(v_i, v_j) \in \rho$, тада тачке које одговарају чворовима v_i и v_j спајамо непрекидном глатком линијом оријентисаном на цртежу стрелицом од v_i ка v_j. Ако $(v_i, v_j) \notin \rho$, тада чворови v_i и v_j на цртежу нису директно повезани.



Слика 3.1

Ако $(v_i, v_j) \in \rho$ и $(v_j, v_i) \in \rho$, где су v_i и v_j произвољни чворови графа, тада се на цртежу понекад не повлаче две линије између чворова v_i и

[4] Arthur Cayley (1821–1895), енглески математичар
[5] Kazimierz Kuratowsky (1896–1980), пољски математичар

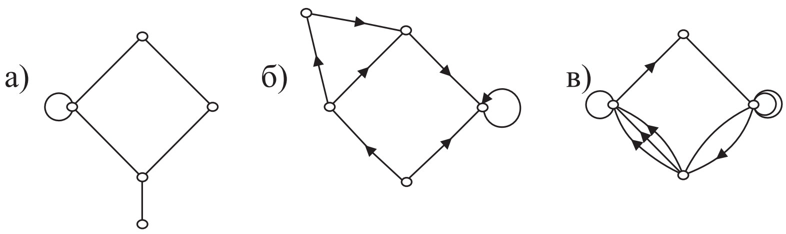
v_j, већ се јединствена линија двострано оријентише или се уопште не оријентише. Грана која повезује чвор са самим собом назива се петља.

Пример 3.1. Граф $G = (V, \rho)$, где је $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ и $\rho = \{(v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_1), (v_3, v_1), (v_3, v_2), (v_3, v_3), (v_3, v_4)\}$, представљен је на слици 3.1 на три еквивалентна начина.

Дефиниција 3.2. *Граф $G = (V, \rho)$ је **симетричан** или **неоријентисан** ако и само ако је ρ симетрична релација.*

Код неоријентисаних графова све гране су двострано оријентисане, односно неоријентисане, због чега се при представљању оваквих графова цртежом одговарајуће стрелице изостављају.

Дефиниција 3.3. *Граф $G = (V, \rho)$ је **антисиметричан** или **оријентисан** ако и само ако је ρ антисиметрична релација.*



Слика 3.2

Пример 3.2. На слици 3.2 а) и 3.2 б) приказан је један неоријентисан, односно оријентисан граф, респективно. С обзиром на то да петља повезује чвор са самим собом, њена оријентација нема значаја, због чега је уобичајено да се код петље стрелица на цртежу изоставља.

Постоје графови који нису ни оријентисани ни неоријентисани, какав је граф представљен на слици 3.1. Ако при представљању графа не замењујемо сваки пар грана супротне оријентације једном неоријентисаном граном, тада се одговарајући граф назива **диграф**. Такав је, на пример, граф представљен на слици 3.1 а). Оријентисане и неоријентисане графове можемо такође схватити као диграфове. Наиме, оријентисани графови су диграфови код којих не постоји ниједан пар различитих чворова спојених са две гране супротне оријентације, док су неоријентисани графови диграфови код којих не постоји ниједан пар различитих чворова спојених тачно једном оријентисаном граном.

Геометријска представа, односно цртеж графа, сугерише да је могуће дефинисати графове код којих између два чвора постоји више од једне гране исте оријентације (тзв. вишеструке гране). Такви графови се називају **мултиграфови**. Они могу садржати и вишеструке петље. На слици 3.2 в) је приказан један мултиграф. Прецизније, мултиграф се може дефинисати на следећи начин.

Дефиниција 3.4. *Нека је V непразан скуп и E једна фамилија елемената скупа $V \times V$. Уређен пар $G = (V, E)$ назива се* ***мултиграф****, при чему су елементи скупа V чворови мултиграфа, а елементи фамилије E гране мултиграфа.*

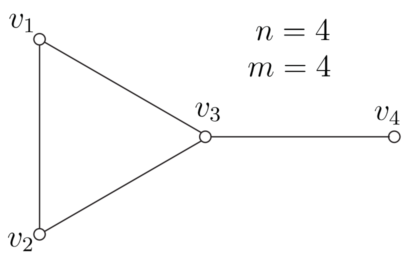
Граф је специјалан случај мултиграфа. Појам оријентисаног, односно неоријентисаног мултиграфа, дефинишу се аналогно одговарајућим појмовима код графова.

Произвољан граф $G = (V, \rho)$ се често означава са $G = (V, E)$, где је E скуп уређених парова елемената скупа V, тј. скуп грана. Дакле, граф је задат ако је познат његов скуп чворова и скуп грана. У случају неоријентисаног графа G користи се иста ознака $G = (V, E)$, при чему је сада E скуп неуређених парова елемената из скупа V, односно скуп неоријентисаних (двострано оријентисаних) грана.

Графови (мултиграфови) могу бити **коначни** или **бесконачни**, зависно од тога да ли је скуп чворова V коначан или бесконачан.

У оквиру ове књиге ћемо, ако другачије не нагласимо, под појмом граф подразумевати коначан, неоријентисан граф без петљи и вишеструких грана. Такви графови се у литератури често срећу под називом **прости графови**.

На слици 3.3 дат је граф $G = (V, E)$, где је $V = \{v_1, v_2, v_3,\ v_4\}$ и $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$.



Слика 3.3

Број чворова графа G зове се **ред графа** и означава се са n, док се број грана означава са m. Уобичајено је да се грана $\{v, w\}$, где су v и w чворови графа G, означава са vw.

Ако је $e = vw$ грана графа G, тада за грану e кажемо да **спаја** чворове v и w, а за ове чворове кажемо да су **суседни**. Осим тога, кажемо да је грана e **инцидентна** или **суседна** чворовима v и w, као и да су чворови v и w **инцидентни** грани $e = vw$. Скуп свих чворова графа G који су суседни чвору v означава се са $N_G(v)$ (или краће са $N(v)$) и зове се **суседство** или **околина** чвора v. За све гране графа G које су инцидентне истом чвору кажемо да су **суседне гране**. Ако је неки чвор једна од крајњих тачака извесне гране, каже се да се та грана **стиче** у овом чвору. **Степен** чвора v у графу $G = (V, E)$, у ознаци $d_G(v)$ (или краће $d(v)$), је број његових суседа, тј. $d_G(v) = |N_G(v)|$. Степен чвора се може дефинисати и као број грана које се стичу у том чвору. У случају да чвор има петљу, тада је њен допринос степену чвора једнак 2 (по другој конвенцији допринос петље степену чвора је 1).

У случају диграфа, ако грана e спаја чворове v и w и оријентисана је од v ка w, каже се да ова грана **излази** из чвора v, а **улази** у чвор w. Осим тога, каже се и да је чвор v **почетни**, а чвор w **завршни** чвор гране $e = vw$. У диграфу се за сваки чвор дефинише његов **улазни степен**, као број грана које улазе у тај чвор, односно **излазни степен**, као број грана које излазе из тог чвора. Петља се овде сматра и улазном и излазном граном за одговарајући чвор.

Минималан и **максималан степен** графа $G = (V, E)$, у ознаци $\delta(G)$ и $\Delta(G)$, респективно, дефинишу се са

$$\delta(G) = \min_{v \in V} d_G(v), \qquad \Delta(G) = \max_{v \in V} d_G(v).$$

Чвор степена 0 графа G зове се **изоловани чвор**, док се чвор степена 1 зове **висећи чвор** или **лист**.

Збир степена свих чворова графа једнак је двоструком броју грана, јер свака грана доприноси збиру степена чворова два пута - по једанпут за сваки крајњи чвор гране. Дакле, важи следећа теорема.

Теорема 3.1. *У произвољном графу* $G = (V, E)$*, при чему је* $|E| = m$*, важи*

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2m \,. \tag{3.1}$$

Последица 3.1. *У произвољном графу је број чворова непарног степена паран.*

Доказ. Уколико произвољан граф G садржи непаран број чворова непарног степена, тада је збир $\sum_{v \in V} d_G(v)$ непаран број, супротно тврђењу теореме 3.1. □

Последица 3.1 је у литератури позната као теорема о руковању:

У сваком друштву је број особа које су се руковале непаран број пута паран.

Овде особе из друштва представљају чворове графа, при чему између два чвора постоји грана уколико су се одговарајуће особе руковале.

Пример 3.3. Доказати да у сваком графу постоје два чвора истог степена.

Решење. Како за степен d произвољног чвора v из графа G са n чворова важи да је $0 \leqslant d \leqslant n-1$, закључујемо да ако су степени свих чворова у графу различити, тада бројеви $0, 1, \ldots, n-1$ представљају степене чворова тог графа. Међутим, ово је немогуће, јер са једне стране постоји изолован чвор (степена 0), а са друге стране стране чвор степена $n-1$ суседан са свим преосталим чворовима у графу. △

3.3 Степени чворова и графички низови

Графу $G = (V, E)$ са скупом чворова $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ може се придружити низ степена његових чворова $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, при чему је $d_i = d(v_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и чворови графа су означени тако да су њихови степени дати у нерастућем или неопадајућем поретку, тј. важи да је $n-1 \geqslant d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n \geqslant 0$ или $0 \leqslant d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n \leqslant n-1$.

Обрнуто не мора да важи, тј. ако је $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ произвољан неопадајући или нерастући низ целих бројева, не мора да постоји граф чији су то степени чворова. За низ целих бројева $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ кажемо да је **графички низ** ако постоји граф $G = (V, E)$ чији је то низ степена чворова. Следеће тврђење, које су независно један од другог доказали Хавел[6] и Хакими[7], омогућава да се одреди који су низови графички.

Теорема 3.2. *Низ целих бројева $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, такав да је $n-1 \geqslant d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n \geqslant 0$, је графички ако и само ако је низ*

$$(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$$

графички.

[6] Vaclav Havel, чешки математичар

[7] Seifollah Louis Hakimi (1932–2005), иранско-амерички математичар

Доказ. Уведимо ознаке

$$D = (d_1, d_2, \ldots, d_n), \quad D' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n).$$

Претпоставимо да је низ D' графички. Тада постоји граф $G' = (V', E')$ са скупом чворова $V' = \{v_2, v_3, \ldots, v_n\}$, такав да је $d_{G'}(v_2) = d_2 - 1$, $d_{G'}(v_3) = d_3 - 1, \ldots, d_{G'}(v_{d_1+1}) = d_{d_1+1} - 1$, $d_{G'}(v_{d_1+2}) = d_{d_1+2}, \ldots, d_{G'}(v_n) = d_n$. Додавањем новог чвора v_1 и нових грана v_1v_2, $v_1v_3, \ldots, v_1v_{d_1+1}$ добија се граф G чији је низ степена чворова управо низ D, одакле произилази да је D графички низ.

Обратно, претпоставимо да је D графички низ. Одатле следи да постоји бар један граф са скупом чворова $V = V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и низом степена чворова D, тј. граф у коме је $d(v_i) = d_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Означимо са G онај од тих графова у коме чвор v_1 има највише суседа из скупа $S = \{v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}\}$, тј. онај граф за који је број $|N_G(v_1) \cap S|$ максималан. Доказаћемо да је $N_G(v_1) = S$.

Претпоставимо да је $N_G(v_1) \neq S$. Тада постоји чвор v_i, $2 \leqslant i \leqslant d_1 + 1$, такав да $v_1v_i \notin E(G)$. Како је $d(v_1) = d_1$, постоји чвор v_j, $d_1 + 2 \leqslant j \leqslant n$, такав да $v_1v_j \in E(G)$. С обзиром на то да је $i < j$ и D је нерастући низ, следи да је $d_i = d_G(v_i) \geqslant d_j = d_G(v_j)$. Како $v_1v_i \notin E(G)$ и $v_1v_j \in E(G)$, закључујемо да постоји чвор v_k, такав да $v_1v_k \in E(G)$ и $v_jv_k \notin E(G)$. Нека је G_1 граф добијен од графа G уклањањем грана v_1v_j и v_iv_k и додавањем нових грана v_1v_i и v_jv_k. Према конструкцији графа G_1 закључујемо да је његов низ степена чворова такође низ D, при чему је $|N_{G_1}(v_1) \cap S| = |N_G(v_1) \cap S| + 1$, што је контрадикција са избором графа G. Дакле, важи да је $N_G(v_1) = S$. Нека је даље G' граф добијен од графа G уклањањем чвора v_1, заједно са свим гранама инцидентним са v_1. Тада је G' граф са низом степена чворова D', одакле следи да је D' графички низ. □

ПРИМЕР 3.4. Утврдити да ли је низ $(5, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1)$ графички.

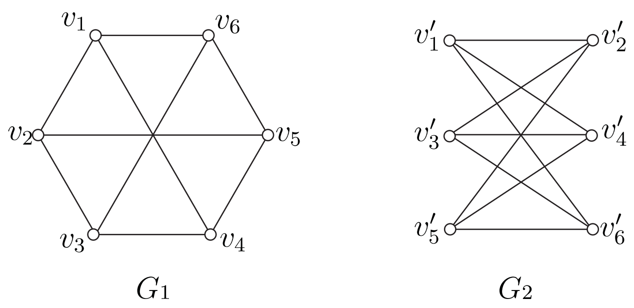
Решење. Према теореми 3.2 низ $D = (5, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1)$ је графички ако и само ако је низ $D' = (4, 3, 3, 2, 1, 2, 1, 1)$ графички. Како низ D' садржи пет непарних бројева, према последици 3.1 он није графички, па није графички ни низ D. △

3.4 Изоморфизам графова

Дефиниција 3.5. *Два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ су* ***изоморфна*** *ако постоји бијекција $f : V_1 \to V_2$ која одржава особину суседности* *чворова, тј.*

$$(\forall v, w \in V_1)\ \ (vw \in E_1 \Leftrightarrow f(v)f(w) \in E_2)\,.$$

Пресликавање f зове се **изоморфизам**, а чињеницу да су графови G_1 и G_2 изоморфни означавамо са $G_1 \cong G_2$.



Слика 3.4

Пример 3.5. Графови G_1 и G_2 са слике 3.4 су изоморфни, а одговарајући изоморфизам је пресликавање

$$f = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_6 \\ v'_1 & v'_2 & \cdots & v'_6 \end{pmatrix}.$$

Релација изоморфности два графа је рефлексивна, симетрична и транзитивна, односно представља релацију еквиваленције у скупу свих графова, па је можемо прогласити за једнакост графова. Према томе, графови су једнаки ако и само ако су изоморфни.

Из дефиниције изоморфности два графа произилази да су изоморфни графови у ствари исти графови, али различито представљени, односно нацртани. Проблем изоморфизма графова је веома тежак и до данас није пронађен одговарајући алгоритам за његово решавање који би био значајно различит од непосредног проверавања.

С обзиром на то да изоморфни графови имају исту структуру, можемо увести још једну важну дефиницију.

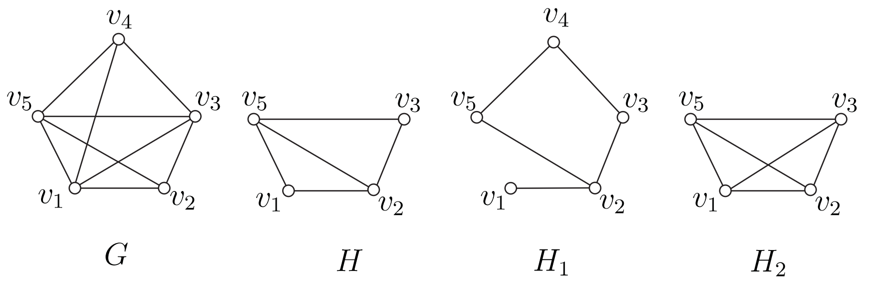
Дефиниција 3.6. *Функција i, дефинисана на скупу графова, се назива* ***инваријанта графова*** *ако за свака два изоморфна графа G_1 и G_2 важи да је $i(G_1) = i(G_2)$.*

Инваријанте графова зависе од структуре графа, а не од начина на који је граф означен. Постоји пуно инваријанти графова, као што су број чворова у графу, број грана у графу, број чворова степена 1, низ степена чворова (сортиран у неопадајући поредак), итд. Оне представљају главни предмет проучавања теорије графова, а могу се, између осталог, користити приликом провере да ли су одговарајући графови изоморфни.

3.5 Подграфови

Дефиниција 3.7. *Нека су $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ два графа. Граф G' је **подграф** графа G, у ознаци $G' \subseteq G$, ако и само ако је $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. Ако је $V' = V$, за граф G' се каже да је **разапињући** (**покривајући**) **подграф** графа G. Кажемо да је граф G' **индуковани подграф** графа G ако је $V' \subseteq V$ и $E' = E \cap V' \times V'$, тј. граф G' садржи све гране графа G чији су крајњи чворови у V'. У том случају каже се да је граф G' индукован скупом V' и означава се са $G' = G[V']$.*

Према претходној дефиницији, индуковани подграф датог графа G се добија тако што се уочи неки подскуп V' скупа чворова V графа G, а затим се из графа G удаље сви остали чворови, као и гране које су суседне удаљеним чворовима. На тај начин у индукованом подграфу остају само гране које повезују међусобно чворове из V'. Ако је $V' \neq V$, каже се да је G' **прави индуковани подграф** графа G.

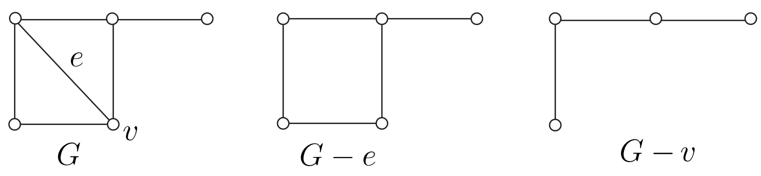


Слика 3.5

Пример 3.6. На слици 3.5 приказан је граф G, његов подграф H, разапињући подграф H_1 и индуковани подграф H_2. Подграф H_2 је индукован скупом чворова $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$.

Ако је e грана графа G, тада је граф $G - e$ подграф графа G добијен из G изостављањем гране e. Аналогно, $G - \{e_1, \ldots, e_k\}$ је подграф графа

G добијен из G изостављањем грана $e_1, \ldots, e_k$. Ако је v чвор графа G, тада је $G - v$ индуковани подграф графа G добијен из G изостављањем чвора v и свих грана графа G које су инцидентне чвору v. Аналогно, граф $G - \{v_1, \ldots, v_k\}$ је индуковани подграф графа G добијен из G изостављањем чворова $v_1, \ldots, v_k$, као и свих грана инцидентних било коме од њих. Ови појмови илустровани су на слици 3.6.



Слика 3.6

3.6 Повезаност графа

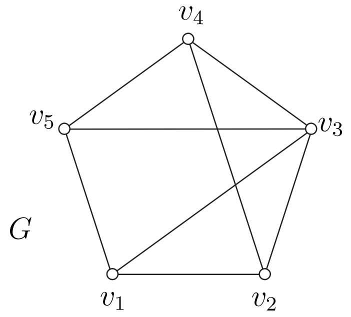
Дефиниција 3.8. *Низ грана $v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_k$ графа G (или краће $W = v_0v_1v_2 \ldots v_{k-1}v_k$) зове се **шетња** дужине k у графу G. Чвор v_0 је **почетни**, а чвор v_k **завршни** чвор шетње, док су чворови $v_1, \ldots, v_{k-1}$ **унутрашњи** чворови шетње. Шетња са почетним чвором v_0 и завршним чвором v_k зове се $(v_0 - v_k)$-шетња и каже се да **спаја** чворове v_0 и v_k. Шетња $W' = v_iv_{i+1} \ldots v_{j-1}v_j$ $(0 \leqslant i < j \leqslant k)$ представља део шетње W између чворова v_i и v_j и означава се са $W' = W[v_i, v_j]$.*

Шетња дефинисана на претходни начин дозвољава понављање чворова и грана.

Дефиниција 3.9. *Шетња $W = v_0v_1 \ldots v_k$ чије су све гране различите, назива се **стаза** дужине k. Шетња W чији су сви чворови различити назива се **пут** (**отворени пут**) дужине k.*

У графу G, представљеном на слици 3.7, $v_1v_3v_2v_4v_5v_3v_1v_2$ је једна $(v_1 - v_2)$-шетња дужине 7, $v_1v_3v_4v_5v_1v_2$ је једна $(v_1 - v_2)$-стаза дужине 5, док је $v_1v_3v_2v_4v_5$ један $(v_1 - v_5)$-пут дужине 4.

Шетња или стаза $W = v_0v_1v_2 \ldots v_{k-1}v_k$ је **затворена** ако је $v_0 = v_k$. Шетња у којој су сви чворови $v_0, v_1, \ldots, v_k$ међусобно различити, осим почетног и крајњег чвора који се поклапају, зове се **контура** (**затворени пут** или **циклус**).



Слика 3.7

Контура је **парна** ако садржи паран број грана, односно **непарна**, у супротном случају.

У графу G, представљеном на слици 3.7, $v_1v_2v_3v_4v_5v_3v_1$ је једна затворена шетња дужине 6, а $v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ је контура дужине 5.

Дефиниција 3.10. *Граф G је повезан ако се свака два његова чвора могу повезати путем. У супротном, граф је неповезан.*

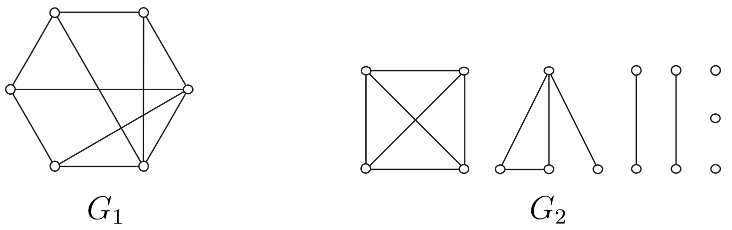
Неповезан граф се састоји од два или више одвојених делова који се називају **компоненте повезаности** (или краће, **компоненте**) графа. Компонента повезаности графа којој припада неки чвор v је подграф образован скупом свих оних чворова који се могу спојити путем са чвором v, укључујући ту и чвор v. Број компоненти повезаности графа G означава се са $\omega(G)$. Из дефиниције повезаности графа следи да је граф повезан ако и само ако има само једну компоненту повезаности.

Ако су $G_1, \ldots, G_k$ $(k \geqslant 2)$ компоненте повезаности графа G, тада је $V(G_i) \cap V(G_j) = \emptyset$, $i, j = 1, \ldots, k$, $i \neq j$, и притом важи да је $V(G) = V(G_1) \cup \cdots \cup V(G_k)$ и $E(G) = E(G_1) \cup \cdots \cup E(G_k)$.

Дефиниција 3.11. *Подграф G_1 графа G је максималан у односу на неку особину, ако он има ту особину, а њу нема ниједан од подграфова графа G у којима се G_1 садржи као прави подграф.*

Уз овакву терминологију, компоненте повезаности графа G су његови максимални повезани подграфови.

Пример 3.7. Граф G_1, приказан на слици 3.8, је повезан, док је граф G_2 неповезан и састоји се од седам компоненти повезаности.



Слика 3.8

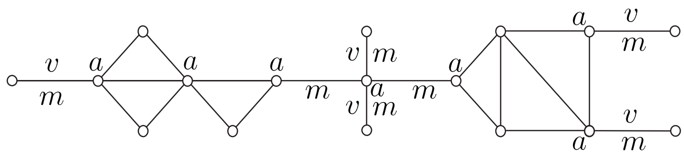
У вези са питањем повезаности графова интересантни су и следећи појмови.

Дефиниција 3.12. ***Артикулациони*** (***везивни***) *чвор графа је чвор чијим се удаљавањем из графа повећава број компоненти повезаности графа.*

Мост *графа је грана чијим се удаљавањем из графа повећава број компоненти повезаности графа. Грана која је инцидентна са чвором степена* 1 *назива се* ***висећа грана****.*

Свака висећа грана представља мост графа. Крајеви сваког моста, који није висећа грана, су артикулациони чворови. Ако је мост и висећа грана графа (са више од два чвора), тада је тачно један од његових крајњих чворова артикулациони чвор.

Пример 3.8. За граф на слици 3.9 са a, m, v означени су, редом, артикулациони чворови, мостови и висеће гране.



Слика 3.9

Дефиниција 3.13. *Нека је* $G = (V, E)$ *повезан граф.* ***Растојање*** $d_G(u, v)$ *(или* $d(u, v)$*) два чвора* $u, v \in V$ *је дужина најкраћег пута између* u *и* v *у графу* G*.* ***Ексцентрицитет*** $\mathrm{ecc}(u)$ *чвора* $u \in V$ *је највеће растојање од чвора* u *до свих осталих чворова у графу, тј.* $\mathrm{ecc}(u) = \max\limits_{v \in V} d_G(u, v)$*.* ***Дијаметар*** $D(G)$ *графа* G *је највећи ексцентрицитет, односно* $D(G) = \max\limits_{u \in V} \mathrm{ecc}(u)$*, док је* ***радијус*** $r(G)$ *графа* G *најмањи ексцентрицитет, тј.* $r(G) = \min\limits_{u \in V} \mathrm{ecc}(u)$*.*

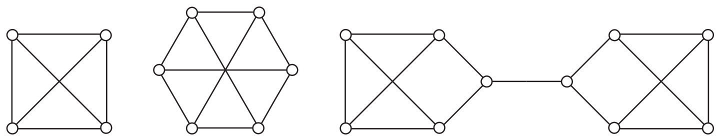
У случају да граф G није повезан, растојање између чворова може се дефинисати за сваки пар чворова из исте компоненте повезаности на начин описан у претходној дефиницији. За чворове u и v из различитих компоненти повезаности графа G, узима се, по конвенцији, да је $d_G(u, v) = \infty$. У том случају су и дијаметар и радијус графа G недефинисани, односно, по конвенцији се узима да су и они једнаки ∞.

3.7 Неке посебне класе графова

Међу бројним графовима поједини су, због својих специфичних особина, добили посебна имена. У овом одељку наводимо неколико таквих врста (класа) графова.

Дефиниција 3.14. *Граф G чији су сви чворови степена r зове се* ***регуларан граф степена*** **r** (*или* **r*-регуларан граф***).

ПРИМЕР 3.9. Неколико регуларних графова степена 3 представљено је на слици 3.10.



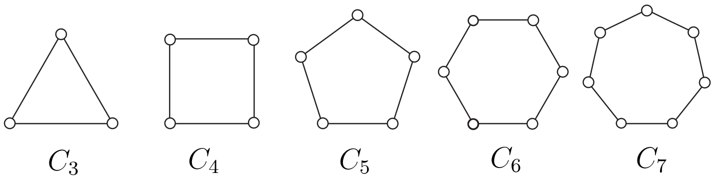
Слика 3.10

Из једнакости (3.1) следи да регуларан граф степена r има $m = \frac{1}{2}nr$ грана, одакле закључујемо да је потребан услов за егзистенцију регуларних графова степена r са n чворова да бар један од бројева n и r буде паран.

Посебно су интересантни регуларни графови степена два.

Дефиниција 3.15. *Повезан регуларан граф степена два зове се* ***контура*** (*или* ***циклус***). *Контура са n чворова означава се са C_n.*

Коначан регуларан граф степена 2 има за компоненте повезаности контуре. Ово не важи за бесконачне графове. Супротан пример је граф чији чворови одговарају целобројним тачакама бројне осе, а суседни су само они чворови чије је међусобно растојање (по оси) једнако 1.



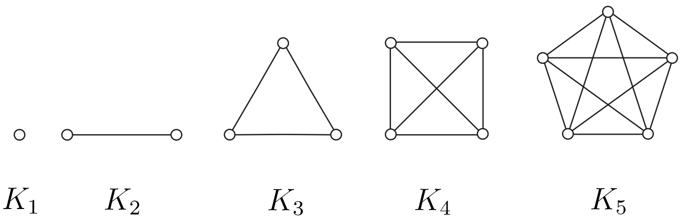
Слика 3.11

Пример 3.10. Контуре C_3, C_4, C_5, C_6 и C_7 приказане су на слици 3.11. За неке од контура често се употребљавају и називи из геометрије (троугао, четвороугао, петоугао, ...).

Дефиниција 3.16. *Граф чија су свака два чвора суседна зове се* ***комплетан*** *или* ***потпун граф****. Комплетан граф са n чворова означава се са K_n.*

Комплетан граф K_n је регуларан граф степена $n-1$ и има $m = \dfrac{n(n-1)}{2} = \dbinom{n}{2}$ грана.

Пример 3.11. На слици 3.12 приказани су комплетни графови K_1, K_2, K_3, K_4 и K_5.



Слика 3.12

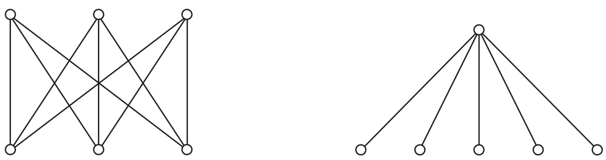
Дефиниција 3.17. ***Празан граф*** *је граф у коме не постоји ниједан пар суседних чворова, тј. састоји се само од изолованих чворова. Празан граф је* 0*-регуларан граф.*

Дефиниција 3.18. ***Бипартитан граф*** *$G = (V, E)$ је граф чији се скуп чворова V може разбити на два дисјунктна скупа X и Y, тако да свака грана $e \in E$ спаја неки чвор из скупа X са неким чвором из скупа Y. Скупови X и Y називају се* ***партитивни скупови*** (*или* ***класе***).

Дефиниција 3.19. ***Комӣлеӣан биӣарӣиӣан ѓраф*** *(или* ***бикомӣлеӣан ѓраф****) је биӣарӣиӣан ѓраф код коѓа је сваки чвор ӣрвоѓ скуӣа (класе) суседан са сваким чвором друѓоѓ скуӣа (класе). Ако ӣарӣиӣивни скуӣови садрже r и s чворова,ресӣекӣивно, ӣада се комӣлеӣан биӣарӣиӣан ѓраф означава са $K_{r,s}$.*

Бикомплетни графови се називају још и **потпуни бихроматски графови**. Комплетан бипартитан граф $K_{1,n-1}$ зове се **звезда**. Звезда са n чворова означава се и са S_n.

Пример 3.12. На слици 3.13 приказан је комплетан бипартитан граф $K_{3,3}$ и звезда $S_6 = K_{1,5}$.



$K_{3,3}$ $K_{1,5}$

Слика 3.13

Дефиниција 3.20. *k-**ӣарӣиӣан ѓраф** је ѓраф чији се скуӣ чворова може разбиӣи на k међусобно дисјункӣних скуӣова (који се називају класе или ӣарӣиӣивни скуӣови), ӣако да свака ѓрана сӣаја два чвора која ӣриӣадају различиӣим ӣарӣиӣивним скуӣовима.* ***Комӣлеӣан** k**-ӣарӣиӣан ѓраф*** *(или k**-комӣлеӣан ѓраф**) је k-ӣарӣиӣан ѓраф, ӣакав да су свака два чвора из различиӣих ӣарӣиӣивних скуӣова ӣовезана ѓраном, а ниједна ѓрана не ӣовезује чворове из исӣоѓ ӣарӣиӣивноѓ скуӣа. Ако ӣарӣиӣивни скуӣови садрже редом $n_1, n_2, \ldots, n_k$ чворова, ӣада се комӣлеӣан k-ӣарӣиӣан ѓраф означава са $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$.*

3.8 Чворна и гранска повезаност

Дефиниција 3.21. *За скуӣ чворова $U \subseteq V$ кажемо да је* ***раздвајајући скуӣ чворова*** *или* ***чворни сеӣараӣор*** *ѓрафа $G = (V, E)$ ако ѓраф $G - U$ има више од једне комӣоненӣе ӣовезаносӣи.*

Сваки граф различит од комплетног графа садржи чворни сепаратор. Наиме, ако је граф неповезан, тада је $U = \emptyset$. Ако је $G \neq K_n$ повезан граф, тада постоје два несуседна чвора v и w у графу G, одакле следи да је скуп $U = V - \{v, w\}$ раздвајајући скуп чворова у графу G, јер је граф $G - U$ неповезан (састоји се од два изолована чвора v и w).

Дефиниција 3.22. ***Чворна повезаност*** *(или краће* ***повезаност****)* $\kappa(G)$ *графа* G $(G \neq K_n)$ *је минималан број чворова чијим уклањањем из графа настаје неповезан или тривијалан граф (тј. граф* K_1 *који се састоји само од једног изолованог чвора), односно*

$$\kappa(G) = \min |U|,$$

где је U *чворни сепаратор графа* G.

Комплетан граф K_n не садржи ниједан раздвајајући скуп чворова, али се удаљавањем $n-1$ чворова своди на тривијалан граф K_1, одакле следи да је $\kappa(K_n) = n-1$. Према дефиницији чворне повезаности графа важи да је $\kappa(G) = 0$ ако и само ако је граф G неповезан граф или је $G \cong K_1$, док је $\kappa(G) = 1$ ако и само ако G је повезан граф са бар једним артикулационим чвором или је $G \cong K_2$.

Дефиниција 3.23. *Граф* G *је* ***чворно*** k***-повезан*** *(или краће* k***-повезан****) ако је* $\kappa(G) \geqslant k$, *тј. ако остаје повезан након уклањања било којих* ℓ *чворова, где је* $\ell < k$.

Граф са бар једном граном је 1-повезан ако и само ако је повезан. 2-повезани графови не садрже артикулационе чворове, а њихова карактеризација ће бити дата у наставку.

Менгер[8] је 1927. године доказао да је повезаност графа у вези са бројем дисјунктних путева који спајају различите чворове графа. Да бисмо изложили његов резултат, дефинисаћемо неколико неопходних појмова.

Дефиниција 3.24. *Два пута који повезују чворове* u *и* v *су чворно дисјунктна (тј. дисјунктна у односу на чворове) ако осим чворова* u *и* v *немају других заједничких чворова.*

Дефиниција 3.25. *За скуп* $S \subseteq V$ *каже се да* ***раздваја*** *чворове* u *и* v *графа* $G = (V, E)$ *ако ови чворови припадају различитим компонентама повезаности графа* $G - S$.

[8] Karl Menger (1902–1985), аустријско-амерички математичар

Сада ћемо изложити Менгерову теорему, која представља један од фундаменталних резултата теорије графова. Доказ ове теореме, због опширности, неће бити наведен.

Теорема 3.3. (**Менгер**) *Најмањи број чворова који раздваја несуседне чворове u и v једнак је највећем броју дисјунктних $(u-v)$-путева.*

Користећи Менгерову теорему, Витни[9] је 1932. године доказао следеће тврђење, које такође наводимо без доказа.

Теорема 3.4. *Нетривијалан граф је (чворно) k-повезан ако и само ако за свака два различита чвора u и v постоји бар k дисјунктних $(u-v)$-путева у графу G.*

Специјалан случај ове теореме (за $k = 2$) је следећи резултат којим се даје карактеризација 2-повезаних графова.

Последица 3.2. *Граф са n $(n \geqslant 3)$ чворова је 2-повезан ако и само ако свака два његова чвора леже на контури.*

Комплетно уопштење теореме 3.4, које наводимо без доказа, доказао је Дирак[10] 1960. године.

Теорема 3.5. *Ако је G k-повезан граф $(k \geqslant 2)$, тада сваких k чворова графа G леже на контури.*

Претходно уведени појмови дефинишу се и полазећи од грана графа.

Дефиниција 3.26. *За скуп грана $F \subseteq E$ кажемо да је* ***раздвајајући скуп грана*** *или* ***грански сепаратор*** *графа $G = (V, E)$ ако граф $G - F$ има више од једне компоненте повезаности.*

Сваки нетривијалан граф (тј. граф различит од K_1) има грански сепаратор. У случају неповезаног графа важи да је $F = \emptyset$, док је код повезаног нетривијалног графа G скуп свих грана F инцидентних са датим чвором v један грански сепаратор графа G, јер је $G - F$ неповезан граф са изолованим чвором v.

Дефиниција 3.27. ***Гранска повезаност*** *$\kappa_1(G)$ нетривијалног графа G је минималан број грана чијим уклањањем из графа настаје неповезан или тривијалан граф, односно*

$$\kappa_1(G) = \min |F|,$$

где је F грански сепаратор графа G.

[9] Hassler Whitney (1907–1989), амерички математичар

[10] Gabriel Andrew Dirac (1925–1984), мађарско-британски математичар

Према дефиницији гранске повезаности графа важи да је $\kappa_1(G) = 0$ ако и само ако је G неповезан или тривијалан граф, док је $\kappa_1(G) = 1$ ако и само ако је G повезан граф који садржи бар један мост.

Дефиниција 3.28. *Граф G је **грански k-повезан** ако је $\kappa_1(G) \geqslant k$, тј. ако остаје повезан након уклањања било којих ℓ грана, где је $\ell < k$.*

Витни је 1932. године доказао следеће тврђење.

Теорема 3.6. *За сваки граф G важе неједнакости*

$$\kappa(G) \leqslant \kappa_1(G) \leqslant \delta(G), \tag{3.2}$$

где је $\delta(G)$ минималан степен чвора у графу G.

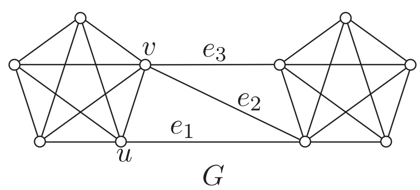
Доказ. Ако је G неповезан или тривијалан граф K_1, тада је $\kappa(G) = \kappa_1(G) = \delta(G)$ и неједнакости (3.2) важе.

Претпоставимо да је G повезан граф са бар два чвора.

Доказ друге неједнакости у (3.2) произилази из чињенице да се удаљавањем $\delta(G)$ грана суседних чвору минималног степена сигурно добија неповезан граф.

Докажимо прву неједнакост у (3.2). Полазећи од произвољног скупа од $\kappa_1(G)$ грана чијим удаљавањем граф постаје неповезан, може се одабрати највише $\kappa_1(G)$ чворова (за сваку удаљену грану по један крајњи чвор) чије удаљавање из графа такође обезбеђује да је резултујући граф неповезан, одакле следи да је $\kappa(G) \leqslant \kappa_1(G)$. □

Пример 3.13. За граф G са слике 3.14 важи да је $\kappa(G) = 2$, $\kappa_1(G) = 3$, $\delta(G) = 4$. Одговарајући чворни и гранески сепаратори су $U = \{u, v\}$ и $F = \{e_1, e_2, e_3\}$.



Слика 3.14

3.9 Графови и матрице

Графу G са скупом чворова $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ и скупом грана $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ могу се придружити различите матрице. Навешћемо неке од њих које се најчешће примењују.

Матрица инциденције чворова и грана графа G је $n \times m$ матрица $R(G) = (r_{ij})$, дефинисана са

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако је чвор } v_i \text{ инцидентан са граном } e_j, \\ 0, & \text{у супротном случају.} \end{cases}$$

Број јединица у i-тој врсти ове матрице једнак је броју грана инцидентних са чвором v_i, тј. његовом степену $d(v_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. С друге стране, у свакој колони се налазе по тачно две јединице, што одговара чињеници да је свака грана инцидентна са два чвора.

Користе се и општије матрице инциденције, чији су елементи, осим 0 и 1, и други бројеви. У случају оријентисаних графова или диграфова користи се матрица инциденције чворова и грана $S(G) = (s_{ij})$ са елементима $-1, 0, 1$, која се дефинише са

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако грана } e_j \text{ излази из чвора } v_i, \\ -1, & \text{ако грана } e_j \text{ улази у чвор } v_i, \\ 0, & \text{ако } v_i \text{ и } e_j \text{ нису суседни елементи.} \end{cases}$$

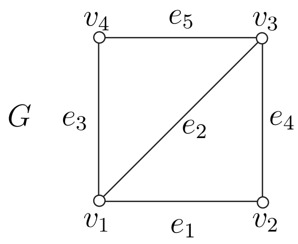
Матрица суседства графа G је $n \times n$ матрица $A(G) = (a_{ij})$, дефинисана са

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако су чворови } v_i \text{ и } v_j \text{ суседни,} \\ 0, & \text{у супротном случају.} \end{cases}$$

Матрица суседства A неоријентисаног графа је симетрична матрица, тј. $A = A^T$, при чему је број јединица у i-тој врсти (и i-тој колони) једнак $d(v_i)$. На главној дијагонали (у случају графа без петљи) налазе се нуле. Регуларни графови степена r имају матрицу суседства у чијој се свакој врсти и свакој колони налази тачно r јединица. Матрица суседства комплетних графова има на главној дијагонали елементе једнаке нули, док су сви остали елементи матрице једнаки 1.

За матрицу суседства $A = (a_{ij})$ оријентисаног графа важи

$$a_{ij} = 1 \Rightarrow a_{ji} = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \ i \neq j.$$



Слика 3.15

За граф G са слике 3.15 матрица инциденције чворова и грана, односно матрица суседства је

$$R(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теорема 3.7. *Нека је $A = (a_{ij})$ матрица суседства произвољног графа G чији су чворови $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Елемент $a_{ij}^{(k)}$ из i-те врсте и j-те колоне матрице A^k једнак је броју различитих $(v_i - v_j)$-шетњи дужине k у графу G.*

Доказ. Доказ изводимо математичком индукцијом по k. За $k = 1$ теорема је тачна на основу дефиниције матрице суседства A.

Претпоставимо да теорема важи за $k = s \geqslant 1$.

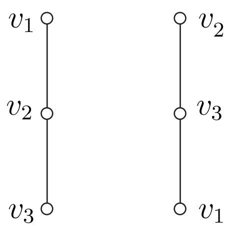
По дефиницији матричног множења, елемент на позицији (i, j) у матрици $A^{s+1} = A \cdot A^s$ једнак је

$$a_{ij}^{(s+1)} = a_{i1}a_{1j}^{(s)} + a_{i2}a_{2j}^{(s)} + \cdots + a_{in}a_{nj}^{(s)}.$$

Нека су $v_{t_1}, v_{t_2}, \ldots, v_{t_\ell}$ чворови до којих се може доћи из чвора v_i шетњом дужине 1. Тада је

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(s+1)} &= a_{it_1}a_{t_1 j}^{(s)} + a_{it_2}a_{t_2 j}^{(s)} + \cdots + a_{it_\ell}a_{t_\ell j}^{(s)} \\ &= a_{t_1 j}^{(s)} + a_{t_2 j}^{(s)} + \cdots + a_{t_\ell j}^{(s)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

По индуктивној претпоставци $a_{t_p j}^{(s)}$, $p = 1, 2, \ldots, \ell$, представља број $(v_{t_p} - v_j)$-шетњи дужине s, а то је истовремено и број $(v_i - v_j)$-шетњи



Слика 3.16

дужине $s+1$ које пролазе кроз чвор v_{t_p}. Сумирањем оваквих израза за свако t_p добија се број свих $(v_i - v_j)$-шетњи дужине $s+1$, тј. израз (3.3). $\square$

Изоморфни графови могу имати различите матрице суседства. На слици 3.16 су представљена два изоморфна графа G_1 и G_2 (тј. један граф са две различите нумерације) чије су матрице суседства A_1 и A_2 дате са

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

С обзиром на то да су изоморфни графови у ствари исти графови, само различито представљени, и имајући у виду дефиницију матрице суседства, закључујемо да се матрице суседства изоморфних графова могу добити једна из друге одговарајућим пермутовањем врста и колона, при чему је битно да се иста пермутација примењује и на врсте и на колоне. Да бисмо формулисали услов изоморфности графова чије су матрице суседства A_1 и A_2, потребно је увести појам пермутационе матрице.

Дефиниција 3.29. ***Пермутациона матрица*** *је квадратна матрица која у свакој врсти и свакој колони има тачно један елемент једнак* 1*, а сви остали елементи матрице су једнаки* 0.

Ако се матрица A помножи (здесна) пермутационом матрицом P, добија се матрица која настаје пермутовањем колона матрице A, док се множењем (слева) матрице A матрицом P^T добија матрица која настаје пермутовањем врста матрице A истом пермутацијом. Како је пермутациона матрица P ортогонална матрица, тј. $P^{-1} = P^T$, следи да ће два графа G_1 и G_2 бити изоморфна ако њихове матрице суседства A_1 и A_2 задовољавају релацију $A_2 = P^{-1}A_1P$, где је P нека пермутациона матрица.

Пример 3.14. За матрице суседства A_1 и A_2 графова са слике 3.16 важи релација $A_2 = P^{-1}A_1P$, где је P пермутациона матрица

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.10 Операције са графовима

Над једним или више графова могу се вршити разне операције чији је резултат такође неки граф.

Дефинисаћемо једну унарну и неколико бинарних операција.

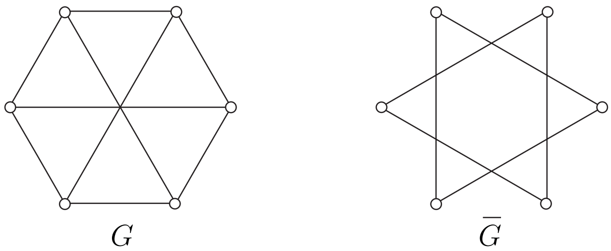
3.10.1 Комплемент графа

Најпре ћемо дефинисати операцију комплементирања графа која је унарна операција.

Дефиниција 3.30. ***Комплемент*** *$\overline{G}$ графа G је граф чији се скуп чворова поклапа са скупом чворова графа G, при чему су два чвора суседна у $\overline{G}$ ако и само ако ти чворови нису суседни у G.*

Из дефиниције следи да је $\overline{(\overline{G})} = G$, тј. комплемент комплемента је полазни граф. Комплемент комплетног графа K_n је празан граф, због чега се он означава са $\overline{K}_n$.

Пример 3.15. На слици 3.17 приказан је један пар узајамно комплементарних графова.



Слика 3.17

Матрица суседства $\overline{A}$ графа $\overline{G}$ може се изразити помоћу матрице суседства A графа G. Наиме, према дефиницији комплемента графа, важи да је $\overline{A} = J - A - I$, где је са J означена матрица чији су сви елементи једнаки 1, а $I = I_n$ је јединична матрица одговарајућег реда.

Теорема 3.8. *Ако је G неповезан граф, тада је његов комплемент $\overline{G}$ повезан, тј. бар један од графова G и $\overline{G}$ је повезан граф.*

Доказ. Потребно је доказати да су у графу $\overline{G}$ произвољна два чвора v и w повезана путем. Како је граф G неповезан, он има бар две компоненте повезаности.

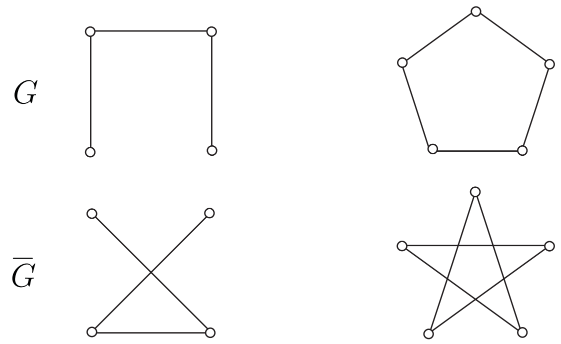
У доказу разликујемо два случаја.

Ако чворови v и w припадају различитим компонентама повезаности графа G, тада су они суседни у графу $\overline{G}$, тј. повезани су путем дужине 1.

Ако чворови v и w припадају истој компоненти повезаности графа G, тада постоји чвор u који не припада тој компоненти повезаности. На основу дефиниције комплемента, чвор u је у графу $\overline{G}$ суседан са чворовима v и w, одакле следи да су чворови v и w повезани путем дужине 2 у графу $\overline{G}$. □

Дефиниција 3.31. *Граф G је* ***самокомплементаран*** *ако и само ако је изоморфан свом комплементу $\overline{G}$.*

Граф K_1 је тривијалан пример самокомплементарног графа. Још неки примери самокомплементарних графова дати су на слици 3.18.



Слика 3.18

За самокомплементарне графове важи следећа теорема.

Теорема 3.9. *Ако је G самокомплементаран граф са n чворова, тада је $n \equiv 0 \pmod 4$ или $n \equiv 1 \pmod 4$.*

Доказ. Нека је G граф са n чворова и m грана. Како је $G \cong \overline{G}$, комплемент $\overline{G}$ такође има n чворова и m грана. Обједињавањем скупова грана графова G и $\overline{G}$ добија се комплетан граф, па је $2m = \frac{n(n-1)}{2}$. Одавде је $n(n-1) = 4m$, тј. $4|n(n-1)$. Како су $n-1$ и n узастопни природни бројеви, тачно један од њих је непаран и узајамно прост са бројем 4. Одавде следи да $4|n$ или $4|n-1$, тј. $n \equiv 0 \pmod 4$ или $n \equiv 1 \pmod 4$. □

3.10.2 Унија и потпуни производ графова

Дефинисаћемо две бинарне операције над графовима – унију и потпуни производ графова.

Дефиниција 3.32. *Нека су $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ два графа чији су скупови чворова V_1 и V_2 дисјунктни.* ***Унија*** *$G_1 \cup G_2$ графова G_1 и G_2 је граф $G = (V, E)$, такав да је $V = V_1 \cup V_2$ и $E = E_1 \cup E_2$.*

Према претходној дефиницији следи да је граф унија својих компоненти повезаности.

Дефиниција 3.33. ***Потпуни производ*** *$G_1 \nabla G_2$ графова G_1 и G_2 је граф који се добија од графа $G_1 \cup G_2$ тако што се сваки чвор из G_1 повеже граном са сваким чвором из G_2.*

Ако са A_1 и A_2 означимо матрице суседства графова G_1 и G_2, редом, тада се, при погодној нумерацији чворова, матрице суседства графова $G_1 \cup G_2$ и $G_1 \nabla G_2$ могу представити у облику

$$\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_1 & J \\ J^T & A_2 \end{bmatrix},$$

где су O и J нула матрица и матрица чији су сви елементи једнаки 1 (одговарајућег реда), респективно.

Имајући у виду дефиницију комплемента графа, као и претходне дефиниције, непосредно се закључује да важи

$$\overline{G_1 \cup G_2} = \overline{G}_1 \nabla \overline{G}_2, \quad \overline{G_1 \nabla G_2} = \overline{G}_1 \cup \overline{G}_2.$$

3.11 Стабла

Стабла представљају једну од најједноставнијих, али истовремено и најважнијих класа графова. Стабла су посебно значајна због своје разноврсне примене у електротехници, рачунарству, физици, хемији, итд.

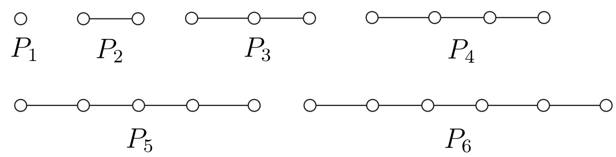
3.11.1 Дефиниција и особине стабала

Дефиниција 3.34. *Повезан граф који не садржи контуре као подграфове назива се* ***стабло*** *или* ***дрво****. Неповезан граф без контура назива се* ***шума****.*

Компоненте повезаности шуме су стабла. Уобичајена ознака за стабло је T. Стабло је **нетривијално** ако има више од једног чвора, у супротном је **тривијално**. У наставку ћемо разматрати само нетривијална стабла и ту чињеницу нећемо посебно истицати.

Дефиниција 3.35. *Стабло у коме ниједан чвор нема степен већи од два назива се* ***пут****. Пут са n чворова означава се са P_n.*

Пример 3.16. На слици 3.19 приказани су путеви са највише шест чворова.



Слика 3.19

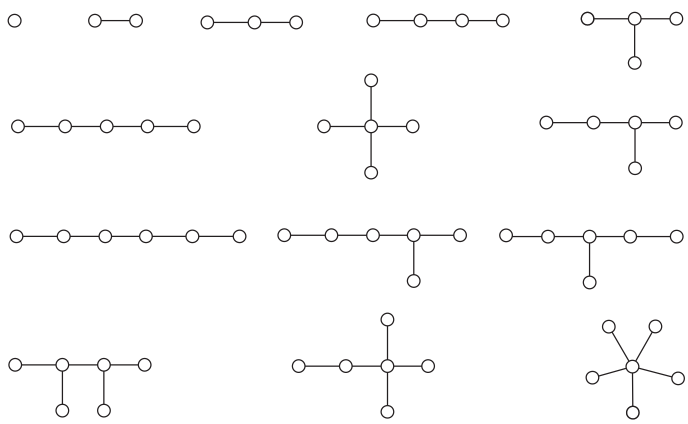
Подсетимо се да се стабло са n чворова које садржи $n-1$ чворова степена 1 назива звезда и означава са $S_n = K_{1,n-1}$.

На слици 3.20 приказана су сва неизоморфна стабла са највише шест чворова. Граф K_1 је једино стабло са једним чвором. То стабло је тривијално стабло. Такође, постоје јединствена стабла са два и три чвора. То су $P_2(\cong S_2)$ и $P_3(\cong S_3)$. Са порастом броја чворова, број различитих стабала нагло расте. Стабла са n чворова добијају се од стабала са $n-1$ чворова додавањем једног чвора и једне гране на све могуће начине, искључујући већ добијена изоморфна стабла.

Најважније особине стабала су изложене у следећим теоремама.

Теорема 3.10. *Свака два чвора стабла повезана су јединственим путем.*

Доказ. Нека су u и v два произвољна чвора стабла T. Како је стабло повезан граф, чворови u и v су повезани путем у стаблу T. Докажимо да је овај пут јединствен. Ако у стаблу T постоје два различита $(u-v)$-пута, P' и P'', тада постоји грана пута P' која не припада путу P''. Нека је



Слика 3.20

$e = w_1w_2$ прва грана пута P' (при кретању путем P' из чвора w_1 у чвор w_2) која не припада путу P'' и нека је w_2' први следећи чвор пута P' који истовремено припада и путу P''. Тада делови путева P' и P'' између чворова w_1 и w_2' образују контуру у стаблу T, што је у супротности са дефиницијом стабла. Дакле, чворови u и v повезани су јединственим путем у стаблу T. □

Теорема 3.11. 1° *Стабло садржи бар два чвора степена* 1.

2° *Ако је* u *чвор степена* 1 *стабла* T, *тада је граф* $T - u$ *такође стабло.*

Доказ. 1° Нека је T стабло и $P = u_1u_2\dots u_k$, $k \geq 2$, најдужи пут у стаблу T. Доказаћемо да су чворови u_1 и u_k степена 1. Претпоставимо, супротно, да чвор u_1, осим u_2, има бар још једног суседа v. Ако $v \notin V(P)$ тада је $vu_1u_2\dots u_k$ пут у T дужи од P, што је контрадикција са избором пута P. Ако $v \in V(P)$, тада је $v = u_i$ за неко i, $2 < i \leqslant k$. Међутим, тада је $u_1u_2\dots u_iu_1$ контура у T, што је контрадикција са чињеницом да је T стабло. Дакле, чвор u_1 је степена 1. Аналогно се доказује да је и чвор u_k степена 1.

2° Докажимо најпре да је граф $T - u$ повезан, односно да за свака два чвора из $T - u$ постоји пут који их спаја. Нека су u_1 и u_2 произвољни чворови графа $T - u$. Како чворови u_1 и u_2 припадају стаблу T, према теореми 3.10 постоји јединствени пут P у T који их повезује. Унутрашњи чворови пута P су степена најмање 2, одакле следи да су различити од чвора u. Дакле, пут P припада графу $T - u$, па закључујемо да је граф $T - u$ повезан. Како стабло T не садржи контуре, ни његов подграф

$T - u$ не садржи контуре, одакле произилази да је $T - u$ повезан граф без контура, тј. стабло. □

Теорема 3.12. *Стабло са n чворова има $n - 1$ грана.*

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по броју чворова n.

За $n = 1$ постоји само тривијално стабло K_1 које нема грана. За $n = 2$ постоји јединствено стабло P_2 које садржи тачно једну грану, па тврђење важи.

Претпоставимо да тврђење важи за сва стабла са мање од n чворова и посматрајмо стабло T са n чворова. Према теореми 3.11 стабло T садржи чвор u степена 1, при чему је граф $T - u$ такође стабло са $n - 1$ чворова. За стабло $T - u$ према индуктивној претпоставци важи да је $|E(T - u)| = (n - 1) - 1 = n - 2$. Како је $|E(T)| = |E(T - u)| + 1$, то је $|E(T)| = n - 1$, па тврђење важи и за произвољно стабло са n чворова. □

Теорема 3.13. *Сваки повезан граф садржи стабло као покривајући (разапињући) подграф.*

Доказ. Ако је граф G стабло, доказ је завршен. У супротном, граф G садржи бар једну контуру C. Нека је uv произвољна грана графа G која припада контури C тог графа. Тада у графу G постоје најмање два пута који повезују чворове u и v. Нека су то путеви Q' и $Q'' = uv$. Доказаћемо да је граф $G - uv$, добијен удаљавањем гране uv из графа G, повезан. Нека су w_1 и w_2 произвољни чворови графа $G - uv$. Ови чворови су у графу G повезани путем P. Ако грана uv не припада путу P, тада је P пут у графу $G - uv$ који повезује чворове w_1 и w_2. Ако грана uv припада путу P, тј. $P = w_1 \ldots uv \ldots w_2$, тада пут $P' + Q' + P''$ повезује чворове w_1 и w_2 у графу $G - uv$, где су $P' = [w_1, u]$ и $P'' = [v, w_2]$ делови пута P. Дакле, ако из графа G удаљимо произвољну грану која припада некој контури тог графа нећемо нарушити повезаност графа. Понављањем овог поступка све док у графу постоји нека контура, на крају се добија повезан граф без контура, тј. стабло. Добијено стабло је покривајући подграф полазног графа. □

Непосредна последица теорема 3.12 и 3.13 је следеће тврђење.

Последица 3.3. *Сваки повезан граф са n чворова садржи најмање $n - 1$ грана. Граф са n чворова и мање од $n - 1$ грана је неповезан.*

Теорема 3.14. *Удаљавањем било које гране из стабла добија се неповезан граф.*

Доказ. Удаљавањем произвољне гране из стабла са n чворова добија се граф са мање од $n-1$ грана који је према последици 3.3 неповезан. $\square$

Теорема 3.15. *Ако се у стабло укључи нова грана између несуседних чворова добија се граф који садржи тачно једну контуру.*

Доказ. Према теореми 3.13, несуседни чворови између којих је укључена нова грана су у стаблу повезани јединственим путем, одакле следи да гране тог пута са новом граном образују контуру. Јединственост добијене контуре произилази из јединствености пута између уочених несуседних чворова. $\square$

Пример 3.17. Ако је $(5, 4, 3, 2, 1, 1, \ldots, 1)$ низ степена чворова стабла, одредити колико има јединица у том низу.

Решење. Означимо са n и m број чворова, односно број грана, посматраног стабла. Како је $m = n-1$, то је $2(n-1) = 5+4+3+2+(n-4)\cdot 1$, одакле следи да је $n = 12$, па је тражени број јединица једнак 8. $\triangle$

Пример 3.18. Колико компоненти има шума са 100 чворова и 90 грана?

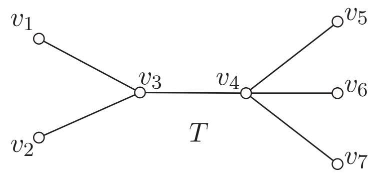
Решење. Нека је T шума са $k = \omega(T)$ компоненти $T_1, T_2, \ldots, T_k$ и означимо са n_i број чворова компоненте T_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Важи да је $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = 100$. Како је свака компонента шуме стабло, следи да је $90 = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_k - 1)$, тј. $90 = 100 - k$, одакле добијамо да је број компоненти шуме једнак 10. $\triangle$

3.11.2 Коренска стабла

У разним применама су од посебног значаја коренска стабла. Значајна је њихова примена у рачунарским наукама, на пример, у организацији база података, у кодирању и декодирању низова карактера, у теоријском рачунарству за приказивање математичких формула итд. Коренска стабла налазе примену и у ботаници, као и у генеалогији (за приказивање родбинских односа у виду породичних стабала).

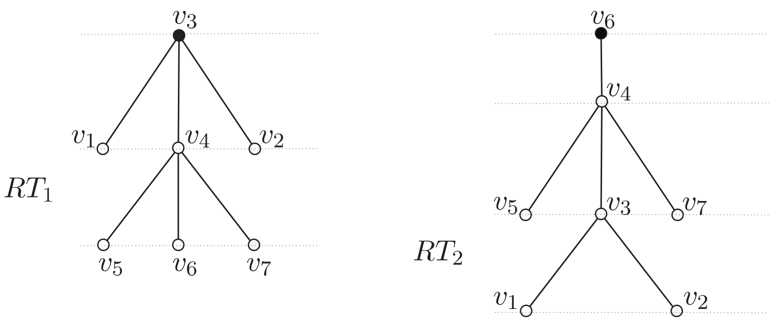
Дефиниција 3.36. *Стабло у коме је један чвор посебно издвојен назива се* ***коренско стабло****, при чему се издвојени чвор назива* ***корен*** *стабла.*

Коренско стабло означавамо као уређен пар $RT = (T, r)$, где је T стабло, а r његов корен.



Слика 3.21

Од једног стабла можемо добити више различитих коренских стабала, бирајући различите чворове за корен стабла. На слици 3.22 представљена су два коренска стабла RT_1 и RT_2 добијена од стабла T са слике 3.21, при чему је у коренском стаблу RT_1 за корен изабран чвор v_3, док је RT_2 коренско стабло чији је корен чвор v_6 (корен је представљен као црни чвор). Према наведеној конвенцији, ова стабла можемо означити и са $RT_1 = (T, v_3)$, односно, $RT_2 = (T, v_6)$.



Слика 3.22

Сваки чвор v коренског стабла $RT = (T, r)$ повезан је јединственим путем са кореном r тог стабла, одакле следи да се чворови коренског стабла могу класификовати у односу на њихово растојање од корена, увођењем појма нивоа чвора.

Дефиниција 3.37. ***Ниво чвора*** *v коренског стабла $RT = (T, r)$ је једнак дужини пута у стаблу T од корена r до чвора v, тј. растојању између чворова r и v и означава се са $n(v)$. Највећи ниво чвора у коренском стаблу назива се* ***висина*** *коренског стабла и означава се са h.*

Пут од корена до сваког чвора коренског стабла је јединствен, па је ниво сваког чвора једнозначно одређен. Ниво корена једнак је 0, а нивои суседних чворова се разликују за 1. На тај начин се, у односу на корен, може извршити разбијање скупа чворова V коренског стабла на скупове V_i, $0 \leqslant i \leqslant h$, при чему је V_i скуп чворова на растојању i од корена, односно скуп чворова који припадају i-том нивоу. Дакле, скуп чворова V коренског стабла може се представити као $V = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_h$.

Пример 3.19. Нивои коренског стабла RT_1 са слике 3.22 приказани су у табели

чвор	v_3	v_1	v_4	v_2	v_5	v_6	v_7
ниво	0	1	1	1	2	2	2

,

а висина овог стабла је $h = 2$.

Нивои чворова коренског стабла RT_2 дати су у табели

чвор	v_6	v_4	v_5	v_3	v_7	v_1	v_2
ниво	0	1	2	2	2	3	3

,

а његова висина је $h = 3$.

При геометријском представљању коренског стабла обично се сви чворови истог нивоа налазе на истој висини, при чему се чворови различитих нивоа представљају одозго надоле, према свом растућем нивоу. Стабла RT_1 и RT_2 са слике 3.22 су геометријски представљена на претходно описани начин.

Коренска стабла налазе примену у генеалогији за формирање породичних стабала, због чега је уобичајено да су у терминологији везаној за коренска стабла користе генеалошки појмови, односно називи одговарајућих родбинских односа.

Дефиниција 3.38. *Нека је $RT = (T, r)$ коренско стабло са скупом чворова V.*

Ако су чворови $u, v \in V(T)$ суседни и важи да је $n(u) = n(v) - 1$, каже се да је чвор u ***родитељ*** *чвора v, а чвор v је* ***дете*** *чвора u.*

Сваки чвор из V(T) који нема децу назива се ***лист*** *(или* ***терминални****, односно* ***завршни*** *чвор). Сваки чвор из $V(T)$ који није лист зове се* ***унутрашњи*** *чвор стабла.*

Преци *чвора $v \in V(T)$, који није корен, су сви чворови различити од v који припадају путу у стаблу T од корена r до чвора v.* ***Потомци*** *чвора $v \in V(T)$, који није лист, су сви чворови из $V(T)$ који имају чвор v као претка.*

Подстабло *са кореном $v \in V(T)$ коренског стабла RT је подграф стабла RT индукован чвором v и свим његовим потомцима.*

Пример 3.20. За коренско стабло RT_1 са слике 3.22 важи:

- чвор v_3 је родитељ чворова v_1, v_2 и v_4, односно чворови v_1, v_2 и v_4 су деца чвора v_3;
- листови стабла RT_1 су чворови v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, а његови унутрашњи чворови су v_3 и v_4;
- преци чвора v_6 су чворови v_3 и v_4, а потомци чвора v_3 су чворови $v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_7$;
- подстабло са кореном v_4 индуковано је чворовима v_4, v_5, v_6, v_7.

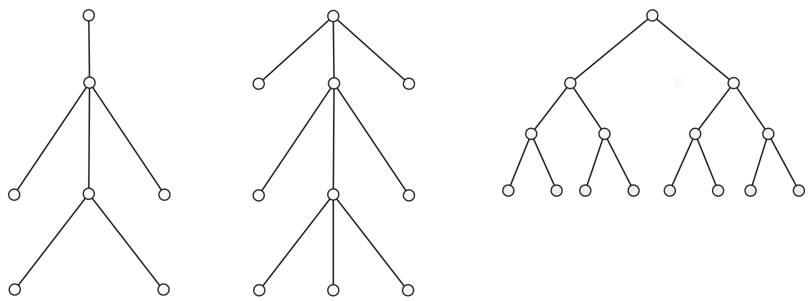
У зависности од тога колико деце може имати сваки чвор, коренска стабла се могу класификовати на следећи начин.

Дефиниција 3.39. *Коренско стабло се назива m-арно стабло ако и само ако сваки његов унутрашњи чвор има највише m деце. За $m = 2$ одговарајуће стабло се назива **бинарно** стабло.*

Стриктно *m-арно стабло је стабло чији сваки унутрашњи чвор има тачно m деце.*

Потпуно *m-арно стабло је стриктно m-арно стабло код кога сви листови имају исти ниво.*

Пример 3.21. На слици 3.23 приказана су три стабла, од којих је прво 3-арно стабло (понекад се назива и тринарно стабло), које није стриктно, друго стабло је стриктно 3-арно стабло, а треће је потпуно бинарно стабло.

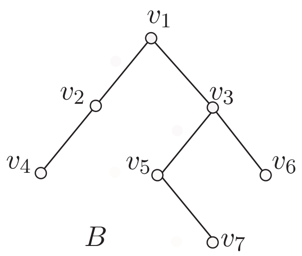


Слика 3.23

У потпуном бинарном стаблу на нивоу i постоји тачно 2^i чворова, одакле следи да је број чворова потпуног бинарног стабла висине h

једнак
$$n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^h = 2^{h+1} - 1,$$
при чему је број терминалних чворова (листова) једнак $2^h = \dfrac{n+1}{2}$, док унутрашњих чворова има $2^h - 1 = \dfrac{n-1}{2}$.

Код бинарних стабала понекад је потребно да се разликују деца сваког унутрашњег чвора и у складу са тим уводи се појам уређеног стабла у коме су деца сваког унутрашњег чвора дата у одређеном поретку.



Слика 3.24

Дефиниција 3.40. ***Уређено бинарно стабло*** *B је бинарно стабло у коме се за сваки унутрашњи чвор једно његово дете сматра за лево, а друго за десно. У случају да чвор има само једно дете, оно је или лево или десно дете.*

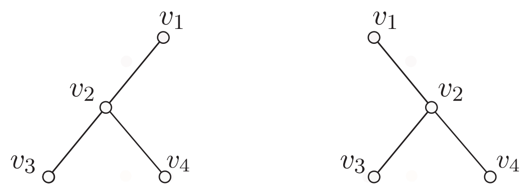
Лево подстабло *унутрашњег чвора v уређеног бинарног стабла B је подстабло стабла B са кореном у левом детету чвора v.*

Десно подстабло *унутрашњег чвора v уређеног бинарног стабла B је подстабло стабла B са кореном у десном детету чвора v.*

ПРИМЕР 3.22. У бинарном стаблу B са слике 3.24 чвор v_5 је лево дете, а чвор v_6 десно дете унутрашњег чвора v_3. Чвор v_5 има само десно дете, а то је чвор v_7. Лево подстабло чвора v_1 је подстабло са кореном v_2 индуковано чворовима v_2 и v_4. Десно подстабло чвора v_1 је подстабло са кореном v_3 индуковано чворовима v_3, v_5, v_6, v_7.

ПРИМЕР 3.23. Одредити колико има уређених бинарних стабала са четири чвора (означена са v_1, v_2, v_3, v_4) код којих је чвор v_1 корен, чвор v_2 његово дете, а чворови v_3 и v_4 су деца чвора v_2.

Решење. Како у овом стаблу чвор v_2 може бити лево или десно дете, постоје два бинарна стабла са траженим особинама, и она су приказана на слици 3.25. △



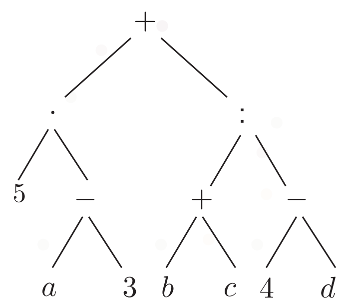
Слика 3.25

Коренским стаблима се представљају различите хијерархијске структуре, а посебно хијерархијске структуре података у рачунарству. При томе нарочито значајну улогу имају бинарна стабла која се, између осталог, могу користити при приказивању алгебарских формула, у организацији скупа уређених података у рачунару, у кодирању података итд. Размотрићемо примену бинарних стабала у представљању алгебарских формула.

Често се у рачунарству једна алгебарска формула представља у облику стриктног уређеног бинарног стабла које се формира на следећи начин. Бинарне операције формуле се приказују као унутрашњи чворови овог стабла, док његовим листовима одговарају променљиве и константе формуле. За сваки унутрашњи чвор важи да његово лево подстабло приказује леву подформулу, а десно подстабло приказује десну подформулу над којима се врши операција додељена овом чвору. Чворови операција мањег приоритета имају мањи ниво, док чворови операција већег приоритета имају већи ниво. На тај начин ће операција најмањег приоритета, тј. она која се последња извршава приликом израчунавања формуле, одговарати корену бинарног стабла. Да би стабло које се додељује алгебарској формули било стриктно, потребно је да она садржи само бинарне операције.

Пример 3.24. Алгебарску формулу $5\cdot(a-3)+(b+c):(4-d)$ представити помоћу стриктног уређеног бинарног стабла.

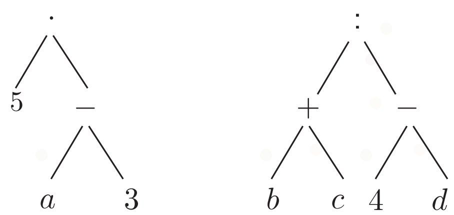
Решење. Овој алгебарској формули одговара уређено бинарно стабло приказано на слици 3.26. Листовима стабла одговарају променљиве и константе алгебарске формуле, тј. симболи $5, a, 3, b, c, 4, d$, док су унутрашњим чворовима додељени симболи операција формуле. Корену



Слика 3.26

стабла одговара операција $+$ која је најнижег приоритета. Лево подстабло корена одговара подформули $5 \cdot (a-3)$, а десно подстабло корена одговара подформули $(b+c) : (4-d)$. $\triangle$

Једна алгебарска формула се може реконструисати на основу свог бинарног стабла коришћењем неког од алгоритама за обилазак свих чворова бинарног стабла. Постоје три стандардна начина обиласка чворова – **КЛД**, **ЛКД** и **ЛДК**. Слова **К, Л, Д** су скраћенице од речи **корен, лево** и **десно подстабло**, па називи ових обилазака означавају редослед по којима се они врше. На пример, код **КЛД** обиласка прво обилазимо корен стабла, затим цело његово лево подстабло и на крају цело његово десно подстабло, при чему при обиласку сваког подстабла користимо исти **КЛД** принцип (слика 3.27).



Слика 3.27

Пример 3.25. Одредити редослед обиласка чворова бинарног стабла приказаног на слици 3.26 при КЛД, ЛКД и ЛДК обиласку овог стабла.

Решење. При **КЛД** обиласку овог стабла, где се прво обилази корен, затим лево подстабло и на крају десно подстабло, редослед обиласка чворова је

$$+ \quad \cdot \quad 5 \quad - \quad a \quad 3 \quad : \quad + \quad b \quad c \quad - \quad 4 \quad d.$$

При **ЛКД** обиласку овог стабла, где се прво обилази лево подстабло, затим корен и на крају десно подстабло, редослед обиласка чворова је

$$5 \quad \cdot \quad a \quad - \quad 3 \quad + \quad b \quad + \quad c \quad : \quad 4 \quad - \quad d.$$

При **ЛДК** обиласку овог стабла, где се прво обилази лево, затим десно подстабло, па корен, редослед обиласка чворова је

$$5 \quad a \quad 3 \quad - \quad \cdot \quad b \quad c \quad + \quad 4 \quad d \quad - \quad : \quad + .$$

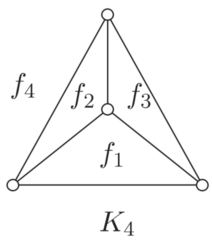
$\triangle$

3.12 Планарни графови

Дефиниција 3.41. *Граф се може* ***сместити у раван*** *ако се може нацртати у равни тако да му се гране не секу, односно ако га је могуће представити у равни тако да заједничка тачка две гране може бити само чвор графа који представља заједничку крајњу тачку тих грана. За граф кажемо да је* ***планаран*** *ако се може сместити у раван.*

Ако је планаран граф смештен у равни, он дели раван на више области, од којих је једна бесконачна, а остале су коначне. Свака коначна област зове се **окце** или **ћелија**.

Пример 3.26. Граф K_4, представљен на слици 3.28, је планаран и дели раван на области f_1, f_2, f_3, f_4, при чему је f_4 спољашња област, која је бесконачна (неограничена).

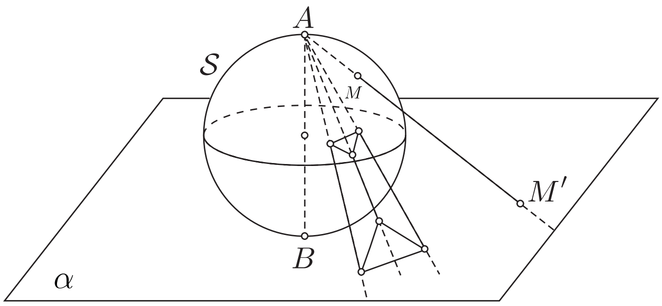


Слика 3.28

Пример планарног графа је граф придружен мрежи путева, ако не постоје надвожњаци или саобраћајне петље. Постоје и разне техничке примене у којима је потребно да одговарајући граф буде планаран.

Осим смештања графова у равни, може се говорити о смештању графова и на некој другој површи, нпр. сфери. У том случају се чворови графа представљају тачкама на сфери, а гране луковима кривих које припадају сфери и које осим чворова које повезују немају других заједничких тачака.

Граф G који се може сместити у раван, може се сместити и на сферу, и обрнуто. Заиста, претпоставимо да је граф могуће сместити на сферу $\mathcal{S}$. Уочимо произвољну тачку A сфере $\mathcal{S}$ која се не поклапа ни са једним чвором графа G, нити припада некој грани овог графа. Означимо са B дијаметрално супротну тачку тачке A (слика 3.29). Нека је α тангентна раван сфере $\mathcal{S}$ кроз тачку B. **Стереографска пројекција** сфере на раван



Слика 3.29

је пресликавање $\pi_A : \mathcal{S} \setminus \{A\} \to \alpha$ дефинисано са $\pi_A(M) = M'$, где је M' тачка пресека праве MA и равни α. Ово пресликавање је бијекција скупа тачака сфере без тачке A, тј. скупа $\mathcal{S} \setminus \{A\}$, на скуп тачака равни α. Стереографска пројекција π_A графа G који је смештен на сфери $\mathcal{S}$ је планаран граф G' смештен у равни α. Аналогно тврђење важи и у обрнутом смеру, где је одговарајућа бијекција инверзно пресликавање π_A^{-1}, које слика планаран граф смештен у равни α у граф смештен на сфери $\mathcal{S}$. Имајући у виду претходна разматрања, планаран граф се некад дефинише као граф који се може сместити у раван или на сферу.

Међу најважније резултате теорије графова убраја се Ојлерова теорема за планарне графове.

Теорема 3.16. (**Ојлер**) *Повезан планаран граф са n чворова и m грана дели раван на $f = m - n + 2$ области.*

Доказ. Доказ изводимо математичком индукцијом по броју грана.

Минималан број грана повезаног графа са n чворова је $n-1$ и такав граф представља стабло (теорема 3.12 и последица 3.3). Стабло не ограничава ни једну коначну област, па је $f=1$. Како је $(n-1)-n+2=1$, у овом случају важи Ојлерова формула.

Претпоставимо да тврђење важи за све повезане планарне графове са мање од m грана и посматрајмо повезан планаран граф G са n чворова и m $(m>n-1)$ грана који дели раван на f области. Како је $m \geqslant n$, граф G садржи бар једну контуру C. Нека је e произвољна грана која припада контури C. Ова грана је гранична за две области, па њеним уклањањем из графа од две области које она раздваја настаје једна, одакле следи да граф $G-e$ дели раван на $f-1$ области. Како грана e није мост, јер припада контури, следи да је $G-e$ повезан планаран граф са n чворова, $m-1$ грана и $f-1$ области за који према индуктивној претпоставци важи Ојлерова формула, тј. $f-1=(m-1)-n+2$, одакле добијамо да за граф G са m грана важи $f=m-n+2$. □

Једноставно се доказује да важи следеће уопштење Ојлерове формуле.

Теорема 3.17. *За планаран граф са n чворова, m грана, f области и $\omega(G)$ компоненти повезаности важи једнакост $f=m-n+1+\omega(G)$.*

Ојлерова теорема има бројне последице. У наставку ћемо навести неке од њих.

Теорема 3.18. *Ако је G повезан планаран граф са n чворова и m грана у коме најкраћа контура има дужину g, тада је $m \leqslant \dfrac{g(n-2)}{g-2}$.*

Доказ. Нека је f број области које планаран граф G одређује у равни. Свака област $\mathcal{O}_i$, $i=1,2,\ldots,f$, ограничена је, по претпоставци, са најмање g грана, тј. важи да је $|\mathcal{O}_i| \geqslant g$. Како свака грана припада двема областима (тј. свака грана се по два пута појављује као граница области, и то за исту област, ако је грана мост, односно за две различите области, у супротном), важи да је

$$2m=\sum_{i=1}^{f}|\mathcal{O}_i| \geqslant g\cdot f,$$

тј.

$$f \leqslant \frac{2m}{g}. \tag{3.4}$$

Са друге стране, како је G планаран граф, према Ојлеровој теореми важи да је $2 = n - m + f$, одакле, имајући у виду (3.4), добијамо

$$2 = n - m + f \leqslant n - m + \frac{2m}{g} = n - \frac{m(g-2)}{g},$$

тј.

$$m \leqslant \frac{g(n-2)}{g-2}.$$

□

Последица 3.4. *У повезаном планарном графу постоји бар један чвор степена мањег од* 6*, тј. за минимални степен чвора* δ *важи да је* $\delta \leqslant 5$.

Доказ. Нека је δ минималан степен чвора повезаног планарног графа G. Како је свака област коју граф G одређује у равни ограничена са најмање три гране, добијамо, применом теореме 3.18 (за $g = 3$)

$$n \cdot \delta \leqslant \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m \leqslant 6n - 12,$$

тј.

$$\delta \leqslant 5.$$

□

Дефиниција 3.42. *Планаран граф* G *је* **максималан** *ако додавањем ма које нове гране престаје да буде планаран, тј. граф* $G + uv$ *је непланаран за сваки пар несуседних чворова* $u, v \in V(G)$.

Све области максималног планарног графа (укључујући и бесконачну) су троуглови, одакле, применом теореме 3.18 (за $g = 3$), закључујемо да важи следеће тврђење.

Последица 3.5. *За сваки планаран граф са* n $(n \geqslant 3)$ *чворова и* m *грана важи да је* $m \leqslant 3n - 6$.

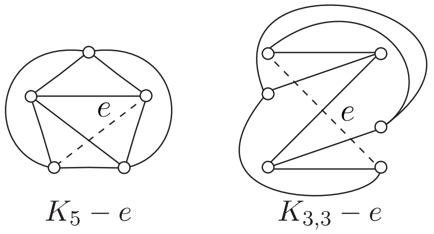
Последица 3.6. *Граф* K_5 (*потпуни пентаграф*) *није планаран граф.*

Доказ. Претпоставимо да је граф K_5 планаран. Како је $n = 5$ и $m = 10$, применом Ојлерове формуле добијамо да је $f = m - n + 2 = 7$. Како је свака област коју граф K_5 одређује у равни ограничена са најмање три гране, следи да је $2m \geqslant 3f$, тј. $20 \geqslant 21$, што је немогуће. □

Последица 3.7. *Граф* $K_{3,3}$ (*потпуни битриграф*) *није планаран граф.*

Доказ. Претпоставимо да је граф $K_{3,3}$ планаран. Како је $n = 6$ и $m = 9$, применом Ојлерове формуле добијамо да је $f = m - n + 2 = 5$. Свака област коју граф $K_{3,3}$ одређује у равни ограничена је са најмање четири гране, па је $2m \geqslant 4f$, тј. $18 \geqslant 20$, што је немогуће. □

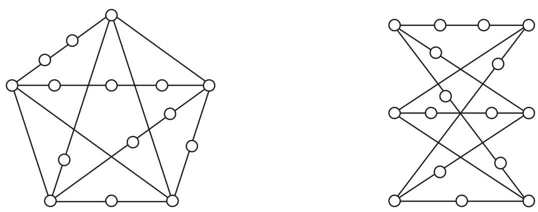
Пример 3.27. Графови $K_5 - e$ и $K_{3,3} - e$ (e је произвољна грана ових графова) су планарни, јер се могу представити у равни тако да им се гране не секу (слика 3.30).



Слика 3.30

Сваки подграф планарног графа је планаран, одакле следи, имајући у виду последице 3.6 и 3.7, да граф који садржи неки од графова K_5 или $K_{3,3}$ као подграф није планаран. Очигледно, сваки потпуни граф са више од четири чвора је непланаран.

Дефиниција 3.43. *Потподела гране $e = uv$ графа G врши се уметањем нових чворова $w_1, w_2, \ldots, w_k$, $k \geqslant 0$, степена 2 између чворова u и v, тј. заменом гране $e = uv$ путем $uw_1w_2 \ldots w_kv$. Граф G' добијен потподелом неких грана графа G, назива се* ***потподела*** *графа G.*



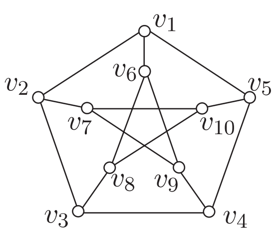
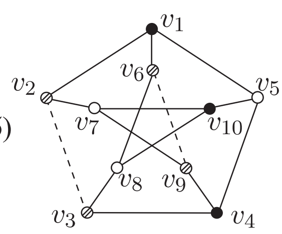
Слика 3.31

Према дефиницији потподеле и последицама 3.6 и 3.7 следи да граф који садржи потподелу графа K_5 или потподелу графа $K_{3,3}$ (приказане на слици 3.31) није планаран. Међутим, важи и обрнуто тврђење. Овај значајан резултат, којим су у потпуности окарактерисани планарни графови, доказали су, независно један од другог, Понтрјагин[11] 1929. године и Куратовски 1930. године.

Теорема 3.19. (**Понтрјагин–Куратовски**) *Граф је планаран ако и само ако не садржи као подграф ни граф K_5, ни граф $K_{3,3}$, ни неку њихову поӣподелу.*

Доказ ове теореме, који се може наћи у [25], је веома сложен, због чега га нећемо наводити.

Пример 3.28. Доказати да Петерсенов[12] граф, приказан на слици 3.32 а), није планаран.

а)  б) 

Слика 3.32

Решење. Доказаћемо да Петерсенов граф није планаран на два начина.

Први начин. Уочимо подграф Петерсеновог графа добијен избацивањем грана v_2v_3 и v_6v_9, приказан на слици 3.32 б). Овај подграф представља потподелу потпуног битриграфа $K_{3,3}$, при чему црни чворови v_1, v_4, v_{10} чине једну партицију скупа чворова графа $K_{3,3}$, бели чворови v_5, v_7, v_8 чине другу партицију, а преостали чворови чине потподелу одговарајућих грана. Према теореми 3.19 Петерсенов граф није планаран.

Други начин. Претпоставимо да је Петерсенов граф планаран. Како је $n = 10$ и $m = 15$, применом Ојлерове формуле добијамо да је $f = m - n + 2 = 7$. Свака област коју Петерсенов граф одређује у равни ограничена са најмање пет грана, одакле следи да је $2m \geqslant 5f$, односно $30 \geqslant 35$, што је немогуће. △

[11] Lev Semenovich Pontryagin (1908–1988), руски математичар
[12] Julius Petersen (1839–1910), дански математичар

Пример 3.29. Доказати да је потребан услов да граф G и његов комплемент $\overline{G}$ буду планарни дат са $n^2 - 13n + 24 \leqslant 0$, где је n, $n \geqslant 3$, број чворова ових графова.

Решење. Означимо са m и $\overline{m}$ број грана графова G и $\overline{G}$, респективно. Како је $m + \overline{m} = \binom{n}{2}$, следи да је $\max\{m, \overline{m}\} \geqslant \frac{1}{2}\binom{n}{2}$, одакле, на основу последице 3.5, следи да је $\frac{1}{2}\binom{n}{2} \leqslant 3n - 6$, односно $n^2 - 13n + 24 \leqslant 0$. $\triangle$

3.12.1 Примена у геометрији

Сваком полиедру P може се придружити планаран граф $G(P)$ који се добија као његова стереографска пројекција. Наиме, полиедар P се може деформисати тако да се око њега може описати сфера, при чему се не мења број темена, ивица и страна полиедра. Овај поступак се може извести тако да се, након пројектовања темена и ивица полиедра зрацима из центра сфере, на сфери добија граф, који одговара полиедру, чије се гране не секу, тј. граф који је смештен на сфери. Стереографском пројекцијом се добијени граф са сфере пројектује на раван која додирује сферу, при чему је потребно да се центар пројекције не налази на некој грани или у неком чвору графа са сфере. На тај начин се у равни добија планаран граф $G(P)$ чији је број чворова, грана и области једнак броју темена, ивица и страна полиедра P, респективно.

Обрнуто тврђење не важи, тј. за произвољан повезан планаран граф H не мора да постоји полиедар P такав да је $G(P) \cong H$. Наиме, како из сваког темена полиедра излазе бар три ивице, следи да је $\delta(H) \geqslant 3$ један од потребних услова да H буде придружени граф неког полиедра.

Нека је $G = G(P)$ повезан планаран граф који одговара полиедру P. Означимо са F, E и V скуп страна, ивица и темена полиедра P, редом, а са f, m и n број области, грана и чворова графа G, редом. Тада је $|F| = f$, $|E| = m$, $|V| = n$. На основу Ојлерове теореме за планарне графове, важи следеће тврђење.

Теорема 3.20. *За сваки полиедар са n темена, m ивица и f страна важи да је $f - m + n = 2$.*

Ако са f_k означимо број страна полиедра ограничених са k ивица, а са n_k број темена полиедра из којих излази k ивица, $k \geqslant 3$, тада је

$$\sum_{k \geqslant 3} k f_k = \sum_{k \geqslant 3} k n_k = 2m. \tag{3.5}$$

На основу последице 3.4 следи да у сваком полиедру постоји теме из кога излази највише 5 ивица. Слично тврђење важи и за стране полиедра.

Теорема 3.21. *Сваки полиедар садржи страну ограничену многоуглом који има највише* 5 *страница.*

Доказ. Претпоставимо да су све стране полиедра ограничене многоугловима који имају бар 6 страница. Одавде следи да је $f_3 = f_4 = f_5 = 0$. Из (3.5) следи да је

$$2m = \sum_{k \geqslant 6} k f_k \geqslant \sum_{k \geqslant 6} 6 f_k = 6 \sum_{k \geqslant 6} f_k = 6f,$$

односно

$$f \leqslant \frac{1}{3} m. \tag{3.6}$$

Слично, из

$$2m = \sum_{k \geqslant 3} k n_k \geqslant \sum_{k \geqslant 3} 3 n_k = 3 \sum_{k \geqslant 3} n_k = 3n,$$

добијамо

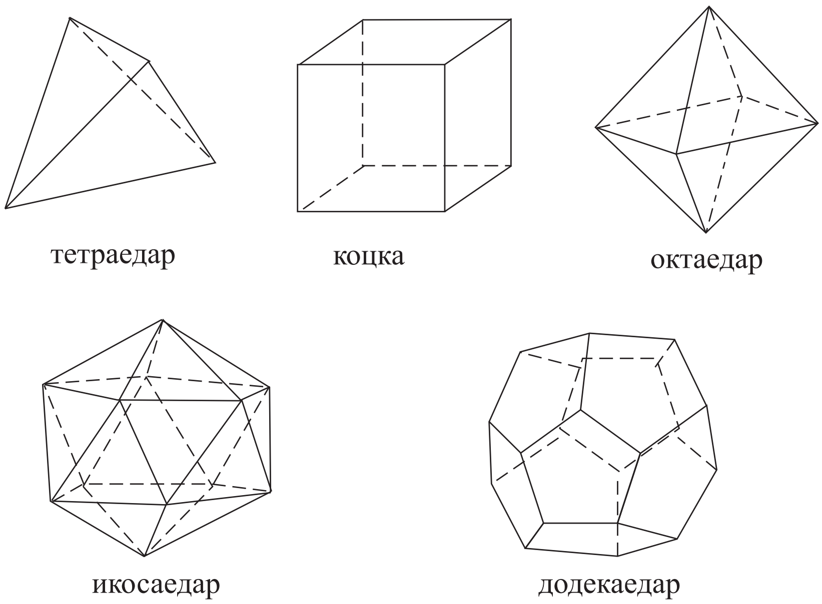
$$n \leqslant \frac{2}{3} m. \tag{3.7}$$

Заменом (3.6) и (3.7) у Ојлеровој формули $f - m + n = 2$, добијамо да је $m = f + n - 2 \leqslant \frac{1}{3}m + \frac{2}{3}m - 2$, тј. $m \leqslant m - 2$, што је немогуће. □

Дефиниција 3.44. ***Правилан полиедар*** *или* ***Платоново тело*** *је полиедар чије су све стране међусобно подударни многоуглови и из чијег сваког темена излази исти број ивица.*

За правилан полиедар важи да је $f = f_s$ и $n = n_t$, за неке $s, t \geqslant 3$. Правилних полиеадра има пет и то је било познато још античким математичарима пре више од 2000 година. То су тетраедар, коцка (хексаедар), октаедар, икосаедар и додекаедар (слика 3.33). Њихове стереографске пројекције приказане су на слици 3.34.

Теорема 3.22. *Постоји тачно пет правилних полиедара.*



Слика 3.33

Доказ. Нека је P правилан полиедар и $G(P)$ њему придружен планаран граф. Тада је $f - m + n = 2$, одакле, користећи једнакости (3.5), добијамо

$$\begin{aligned} -8 &= 4m - 4f - 4n = 2m + 2m - 4f - 4n \\ &= \sum_{k \geqslant 3} k f_k + \sum_{k \geqslant 3} k n_k - 4 \sum_{k \geqslant 3} f_k - 4 \sum_{k \geqslant 3} n_k \\ &= \sum_{k \geqslant 3} (k-4) f_k + \sum_{k \geqslant 3} (k-4) n_k. \end{aligned}$$

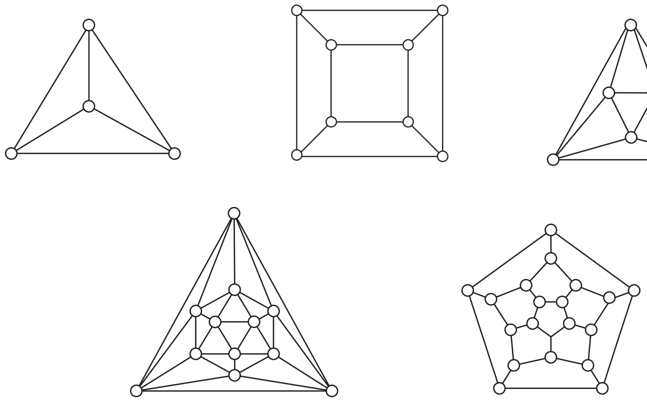
Како је $f = f_s$ и $n = n_t$, за неке $s, t \geqslant 3$, следи да је

$$-8 = (s-4) f_s + (t-4) n_t.$$

На основу последице 3.4 и теореме 3.21 важи $3 \leqslant s,\ t \leqslant 5$. Осим тога, из једнакости (3.5) добијамо да је $s f_s = t n_t = 2m$, односно $s f_s - t n_t = 0$.

Посматрајмо систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} (s-4) f_s + (t-4) n_t &= -8 \\ s f_s - t n_t &= 0 \end{aligned}$$



Слика 3.34

по непознатим f_s и n_t, $3 \leqslant s,\ t \leqslant 5$. Овај систем је немогућ за $s = t = 4$, а има решење

$$f_s = \frac{-8t}{t(s-4)+s(t-4)}\,, \quad n_t = \frac{-8s}{t(s-4)+s(t-4)},$$

ако је $s \neq 4$ или $t \neq 4$.

Добијена решења су позитивна ако је $t(s-4)+s(t-4) < 0$, односно у следећих пет случајева.

1) Ако је $s = t = 3$, тада је $f_3 = n_3 = 4$ и полиедар P је **тетраедар**.

2) Ако је $s = 3$ и $t = 4$, тада је $f_3 = 8$, $n_4 = 6$ и полиедар P је **октаедар**.

3) Ако је $s = 3$ и $t = 5$, тада је $f_3 = 20$, $n_5 = 12$ и полиедар P је **икосаедар**.

4) Ако је $s = 4$ и $t = 3$, тада је $f_4 = 6$, $n_3 = 8$ и полиедар P је **коцка** (**хексаедар**).

5) Ако је $s = 5$ и $t = 3$, тада је $f_5 = 12$, $n_3 = 20$ и полиедар P је **додекаедар**.

Користећи геометријске аргументе, лако се доказује да су ово једини правилни полиедри у сваком појединачном случају. □

3.13 Бојење графова

Дефиниција 3.45. *Граф се* ***боји*** *тако што се сваком чвору придружује нека боја, тј. сваки чвор се боји једном бојом. Граф је* ***правилно обојен*** *ако* *су свака два суседна чвора обојена различитим бојама. Правилно бојење графа у којем је употребљено k боја зове се k-**бојење**.*

Дефиниција 3.46. ***Хроматски број*** *$\chi(G)$ графа G једнак је најмањем броју боја потребних да се граф правилно обоји. Ако је $\chi(G) = k$, за граф G кажемо да је k-**хроматски**, а ако је $\chi(G) \leqslant k$, кажемо да је граф G k-**обојив**.*

Пример 3.30. Важи да је $\chi(K_n) = n$, $\chi(P_n) = 2$ $(n \geqslant 2)$, $\chi(C_n) = 2$, ако је n паран број, односно $\chi(C_n) = 3$, у супротном. Ако је G бипартитан граф, тада је G 2-обојив граф, при чему је $\chi(G) = 1$ ако и само ако је $G \cong \overline{K}_n$ (тј. G се састоји само од изолованих чворова), док је сваки непразан бипартитан граф 2-хроматски (или **бихроматски**).

Скуп свих чворова графа обојених истом бојом назива се **хроматска класа**. Произвољна два чвора из исте хроматске класе су несуседна. За њих кажемо да су **независни**. Према дефиницији хроматског броја, следи да је он једнак минималном броју дисјунктних подскупова (хроматских класа) на које се може разбити скуп чворова графа, тако да су чворови сваког подскупа независни.

Следећа два тврђења непосредно следе из дефиниције хроматског броја.

Теорема 3.23. *Ако је H подграф графа G, тада је $\chi(H) \leqslant \chi(G)$.*

Теорема 3.24. *Ако су $G_1, G_2, \ldots, G_s$, $s \geqslant 1$, компоненте повезаности графа G, тада је $\chi(G) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} \chi(G_i)$.*

Ако граф G садржи као подграф комплетан граф са k чворова, тада је $\chi(G) \geqslant k$. Комплетни подграфови са највећим бројем чворова називају се **клике** графа. Ако са $K(G)$ означимо број чворова произвољне клике графа, тада је

$$\chi(G) \geqslant K(G).$$

Наведена доња граница за хроматски број графа може бити доста груба, тј. постоје графови без троуглова (код којих је $\chi(G) = 2$) са произвољно великим хроматским бројем.

Теорема 3.25. *За сваки природан број k постоји k-хроматски граф који не садржи троуглове.*

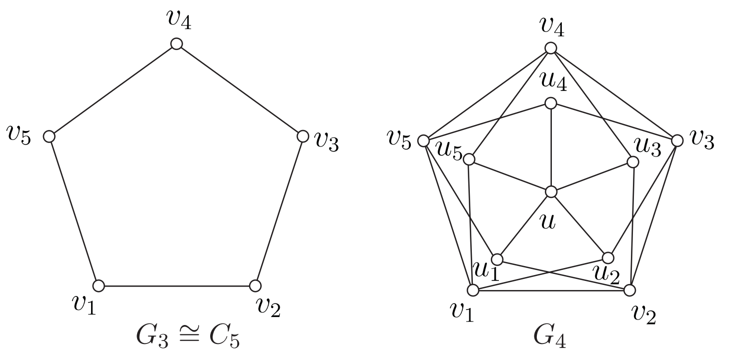
Доказ. Доказ изводимо математичком индукцијом по k. За $k = 1, 2, 3$ тражени графови су редом K_1, K_2, C_5 и за њих тврђење важи.

Нека је G_k k-хроматски граф ($k \geqslant 3$) који не садржи троуглове. Показаћемо да се овај граф може трансформисати у $(k+1)$-хроматски граф G_{k+1} који такође не садржи троуглове. Конструкција коју ћемо навести потиче од Мисиелског[13]. Нека је

$$V(G_k) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \quad V(G_{k+1}) = V(G_k) \cup \{u, u_1, u_2, \ldots, u_n\},$$

где су $u, u_1, u_2, \ldots, u_n$ нови чворови, при чему је чвор u суседан са сваким од чворова u_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, док је сваки чвор u_i суседан са свим суседима чвора v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, као и са чвором u. Осим тога, све гране графа G_k су садржане у графу G_{k+1}.

На слици 3.35 је приказан граф G_4, познат као Гречеов[14] граф, добијен описаном конструкцијом од графа $G_3 \cong C_5$ који је 3-хроматски граф без троуглова. Гречеов граф је 4-хроматски и не садржи троуглове.



Слика 3.35

Доказаћемо да је граф G_{k+1}, добијен описаном конструкцијом Мисиелског, $(k+1)$-хроматски граф без троуглова.

Докажимо најпре да је G_{k+1} граф без троуглова. Како никоја два чвора u_i и u_j нису суседна, следи да чвор u не припада ниједном троуглу. По индуктивној претпоставци G_k је граф без троуглова, па према конструкцији графа G_{k+1} закључујемо да само чворови v_i, v_j и u_s (за неке вредности i, j, s) могу да образују троугао у графу G_{k+1}. У том случају, према конструкцији графа G_{k+1}, важи да је $i \neq s, j \neq s$, v_iv_j, v_iv_s,

[13] Jan Mycielski, пољско-амерички математичар, рођен 1932. године
[14] Herbert Grötzsch (1902–1993), немачки математичар

$v_j v_s \in E(G_k)$, одакле произилази да чворови v_i, v_j и v_s образују троугао у графу G_k, што је немогуће.

Докажимо сада да је граф G_{k+1} $(k+1)$-хроматски. Како је $\chi(G_k) = k$, следи да постоји k-бојење графа G_k у коме је чвор v_i обојен бојом $c(v_i)$. Проширимо ово k-бојење графа G_k на $(k+1)$-бојење графа G_{k+1}, тако што чвор u_i обојимо бојом $c(v_i)$, а чвор u бојимо новом $(k+1)$-ом бојом. Добијено бојење је правилно, јер $u_i u_j \notin E(G)$ и $u_i v_i \notin E(G)$, одакле следи да је $\chi(G_{k+1}) \leqslant k+1$.

Докажимо да је $\chi(G_{k+1}) > k$. Довољно је доказати да из егзистенције k-бојења графа G_{k+1} следи егзистенција $(k-1)$-бојења графа G_k, супротно претпоставци да је $\chi(G_k) = k$.

Претпоставимо да постоји правилно k-бојење графа G_{k+1}. Означимо ово бојење са c. Имајући у виду да $uu_i \in E(G_{k+1})$, следи да је $c(u) \neq c(u_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Како је $\chi(G_k) = k$, неки од чворова графа G_k обојени су истом бојом као чвор u. Нека је H скуп свих чворова v_i графа G_k, таквих да је $c(v_i) = c(u)$. Уочимо даље бојење c' графа G_k у коме су сви чворови из скупа $V(G_k) \setminus H$ обојени истим бојама као при бојењу c, док сваки чвор $v_i \in H$ добија боју $c'(v_i) = c(u_i)$. На тај начин је добијено бојење c' графа G_k у коме је употребљено $k-1$ боја. Докажимо да је c' правилно бојење графа G_k. Претпоставимо супротно, тј. да у графу G_k постоје суседни чворови v_i и v_j обојени истом бојом при бојењу c', односно да је $c'(v_i) = c'(v_j)$. Очигледно, свака два суседна чвора из $V(G_k) \setminus H$ обојена су различитим бојама, а свака два чвора из H су несуседна. Одавде следи да један од чворова v_i, v_j припада скупу $V(G_k) \setminus H$, док други припада скупу H. Нека је, на пример, $v_i \in H$, $v_j \in V(G_k) \setminus H$. Како је $c'(v_i) = c(u_i)$ и $c'(v_j) = c(v_j)$, закључујемо да је $c(u_i) = c(v_j)$. Према конструкцији графа G_{k+1} следи да су u_i и v_j суседни чворови у графу G_{k+1} који су обојени истом бојом при бојењу c, одакле произилази да бојење c није правилно, супротно претпоставци. Дакле, важи да је $\chi(G_{k+1}) > k$, што заједно са $\chi(G_{k+1}) \leqslant k+1$ имплицира да је $\chi(G_{k+1}) = k+1$. □

Посматрањем степена свих чворова графа, односно максималног степена Δ, може се добити једна горња граница за хроматски број графа.

Теорема 3.26. *За хроматски број $\chi(G)$ повезаног графа G важи*

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1. \tag{3.8}$$

Доказ. Тврђење доказујемо математичком индукцијом по броју чворова n. За $n = 1$ важи да је $G \cong K_1$, па је $\Delta(G) = 0$, $\chi(G) = 1$ и тврђење важи.

Претпоставимо да тврђење важи за све графове са мање од n чворова и посматрајмо граф G са n чворова. Нека је $v \in V(G)$ произвољан чвор графа G и $G' = G - v$. Према индуктивној претпоставци важи да је $\chi(G') \leqslant \Delta(G') + 1 \leqslant \Delta(G) + 1$, одакле следи да постоји $(\Delta(G) + 1)$-бојење графа G'. Како је $d_G(v) \leqslant \Delta < \Delta(G) + 1$, постоји бар једна боја којом, при овом бојењу, није обојен ниједан сусед чвора v. Ако чвор v обојимо том бојом, добијамо једно $(\Delta(G) + 1)$-бојење графа G, одакле следи да је $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$. $\square$

Непосредна последица претходне теореме је да граф чији је хроматски број једнак k обавезно садржи чвор чији је степен једнак најмање $k-1$. Наведена горња граница (3.8) за хроматски број графа може бити доста груба. На пример, за звезду $S_n = K_{1,n-1}$ важи да је $\Delta(S_n) = n-1$, док је $\chi(S_n) = 2$. Међутим, ова горња граница је најбоља могућа, у смислу да за поједине графове важи једнакост у релацији (3.8). За контуру непарне дужине C_{2k+1} је $\Delta(C_{2k+1}) = 2$, а $\chi(C_{2k+1}) = 3$. Осим тога, за комплетан граф K_n је $\Delta(K_n) = n - 1$, док је $\chi(K_n) = n$. Брукс[15] је 1941. године доказао да су то једини графови за које важи једнакост у релацији (3.8). Наиме, важи следеће тврђење.

Теорема 3.27. (**Брукс**) *Ако је G повезан граф који није ни непарна контура ни комплетан граф, тада је $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.*

Доказ ове теореме, који се може наћи у [25], изостављамо због сложености.

Ердеш[16] и Ловас[17] су уопштили тврђење теореме 3.25 доказавши следеће тврђење.

Теорема 3.28. *За свака два природна броја k и ℓ, $k \geqslant 2$, $\ell \geqslant 3$, постоји k-хроматски граф у коме је дужина најкраће контуре већа од ℓ.*

3.13.1 Бихроматски графови

У општем случају, веза између структуре графа и његовог хроматског броја је компликована. Међутим, у случају бихроматских графова, тј. графова који се могу обојити са две боје, Кениг је доказао да је ова веза једноставна и изражена следећом теоремом.

[15] Rowland Leonard Brooks (1916–1993), енглески математичар
[16] Paul Erdös (1913–1996), мађарски математичар
[17] László Lovász, мађарски математичар, рођен 1948. године

Теорема 3.29. (**Кениг**) *Непразан граф је бихроматски ако и само ако не садржи као подграф ниједну контуру са непарним бројем чворова.*

Доказ. Претпоставимо најпре да је G бихроматски граф. Ако G садржи као подграф непарну контуру C_{2k+1}, тада је према теореми 3.23 $\chi(G) \geqslant \chi(C_{2k+1}) = 3$, што је супротно претпоставци.

Обратно, претпоставимо да непразан граф G не садржи као подграф ниједну непарну контуру и докажимо да је свака нетривијална компонента (тј. компонента различита од K_1) графа G бихроматски граф. У том случају је према теореми 3.24 и граф G бихроматски.

Нека је H произвољна нетривијална компонента графа G и $v \in V(H)$ произвољан чвор. Нека су скупови $X, Y \subseteq V(H)$ дефинисани са

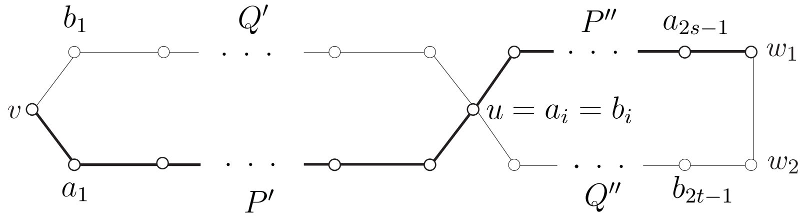
$$X = \{x \in V(H) \mid d(v,x)\,\text{је паран број}\},$$

$$Y = \{y \in V(H) \mid d(v,y)\,\text{је непаран број}\}.$$

Како је $d(v,v) = 0$, следи да $v \in X$. Осим тога, како је H нетривијална компонента графа G, следи да је и $Y \neq \emptyset$. Скупови X и Y су дисјунктни и важи да је $X \cup Y = V(H)$. Доказаћемо да свака грана из $E(H)$ повезује неки чвор скупа X са неким чвором скупа Y, одакле следи да је граф H бипартитан (са партитивним скуповима X и Y), а тиме и бихроматски граф.

Претпоставимо најпре да постоји грана $w_1w_2 \in E(H)$, при чему w_1, $w_2 \in X$. Обележимо са P и Q, респективно, најкраћи $(v - w_1)$-пут и најкраћи $(v - w_2)$-пут. Према дефиницији скупа X, оба пута су парне дужине. Нека је, на пример, $P = va_1a_2 \ldots a_{2s-1}w_1$ и $Q = vb_1b_2 \ldots b_{2t-1}w_2$, при чему је $s, t \geqslant 1$. Нека је u последњи заједнички чвор путева P и Q, при пролазу по њима из чвора v у чворове w_1 и w_2, респективно (може бити и $u = v$). Претпоставимо да је $u \neq v$. У том случају, чвор u се поклапа са неким чвором a_i, $1 \leqslant i \leqslant 2s-1$, на путу P, односно са неким чвором b_j, $1 \leqslant j \leqslant 2t-1$, на путу Q. Претпоставимо да је $i > j$ и означимо са P', P'', Q', Q'' делове путева P и Q, такве да је $P' = [v, a_i]$, $P'' = [a_i, w_1]$, $Q' = [v, b_j]$, $Q'' = [b_j, w_2]$. Ако са $d(P)$ означимо дужину пута P, како је $i > j$, следи да је $d(P') > d(Q')$, односно $d(P) = d(P') + d(P'') > d(Q') + d(P'')$, одакле произилази да је $Q' + P''$ краћи $(v - w_1)$-пут од пута P, супротно претпоставци. Аналогно се показује да не може бити ни $i < j$, одакле следи да је $i = j$. Дакле, $u = a_i = b_i$ (слика 3.36).

Путеви P и Q су парне дужине, одакле следи да су дужине путева $P'' = [u, w_1]$ и $Q'' = [u, w_2]$ исте парности. Ако је C контура која се састоји од



Слика 3.36

путева P'', Q'' и гране w_1w_2, тада је њена дужина $d(C) = d(P'')+d(Q'')+1$, што је непаран број. До истог закључка долазимо и када је $u = v$. У том случају контура C се састоји од путева P и Q и гране w_1w_2, па је такође непарне дужине. Дакле, компонента H садржи непарну контуру C, супротно претпоставци.

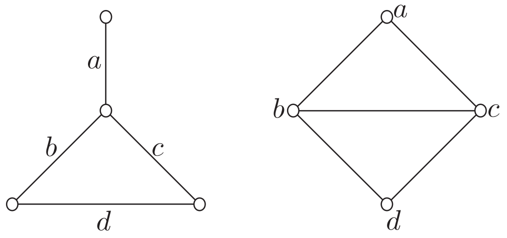
Слично се доказује да су свака два чвора из Y несуседна, одакле следи да компонента H садржи само гране које повезују чворове из скупа X са чворовима из скупа Y, односно H је непразан бипартитан, тј. бихроматски граф. □

3.13.2 Бојење грана графа

Осим бојења чворова графа, у теорији графова се сусрећемо и са бојењем грана графа, као и бојењем и чворова и грана графа. Правилно бојење графа се у овим случајевима дефинише аналогно правилном бојењу чворова графа. Наиме, бојење грана графа је правилно ако су сваке две суседне гране, тј. гране које су инцидентне истом чвору, обојене различитим бојама. При бојењу и чворова и грана графа, реч је о правилном бојењу ако су свака два суседна чвора и сваке две суседне гране графа обојени различитим бојама, при чему крајњи чвор сваке гране мора имати боју која се разликује од боје те гране. Међутим, проблем бојења грана, односно и чворова и грана графа, може се свести на проблем бојења чворова, као што ће бити показано. У том циљу, увешћемо појам графа грана и тоталног графа.

Дефиниција 3.47. ***Граф грана*** *$L(G) = (V_1, E_1)$ графа $G = (V, E)$ је граф чији су чворови у узајамно једнозначној кореспонденцији са гранама графа G, при чему су два чвора из V_1 суседна ако и само ако су њима одговарајуће гране из E суседне.*

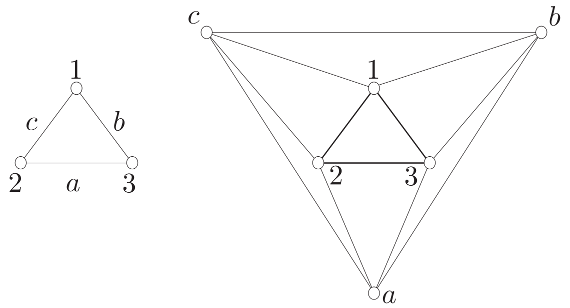
На слици 3.37 је приказан граф G и његов граф грана $L(G)$.



Слика 3.37

Дефиниција 3.48. ***Тотални граф*** *$T(G) = (V_2, E_2)$ графа $G = (V, E)$ је граф чији су чворови у узајамно једнозначној кореспонденцији са чворовима и гранама скупа $V \cup E$, при чему су два чвора из V_2 суседна ако и само ако су одговарајући елементи из $V \cup E$ суседни (ако су из истог скупа) или инцидентни (ако је један из V, а други из E).*

На слици 3.38 је приказан граф G и његов тотални граф $T(G)$.



Слика 3.38

Проблем правилног бојења грана, односно и чворова и грана графа G своди се на правилно бојење чворова његовог графа грана, односно његовог тоталног графа, респективно. Аналогно хроматском броју графа, дефинише се **хроматски индекс графа**, у ознаци $\chi'(G)$, као минималан број боја потребних да се гране графа правилно обоје. У случају бојења и чворова и грана графа дефинише се величина $\chi''(G)$ као минималан број боја потребних за правилно бојење и чворова и грана графа. Имајући у виду везу између правилног бојења грана графа и правилног бојења чворова његовог графа грана, закључујемо да је $\chi'(G) = \chi(L(G))$. Слично, у случају бојења и чворова и грана графа, имајући у виду дефиницију тоталног графа, важи да је $\chi''(G) = \chi(T(G))$.

3.13.3 Проблем четири боје

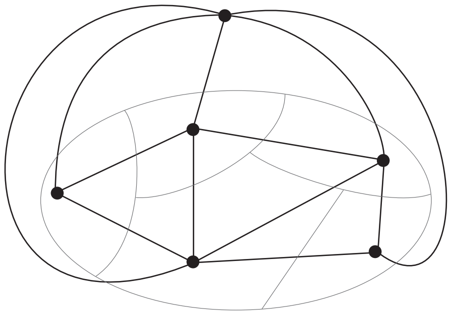
Један од најпознатијих проблема везаних за бојење графова је **проблем четири боје**. Замислимо у равни (или на сфери) географску карту на којој су уцртане државе, при чему се територија сваке државе састоји само од једне регије на карти, а не од више неповезаних подручја. Да бисмо разликовали државе, желимо да их обојимо тако да државе са заједничком границом буду обојене различитим бојама. Проблем се састоји у томе да се одреди минималан број боја потребних да се таква географска карта обоји на описани начин.

Проблем је 1852. године уочио лондонски студент Гатри[18], који је био ангажован на бојењима карти лондонских округа. Сваки округ је, због прегледности, био обојен посебном бојом, при чему су суседни окрузи (под суседним се подразумевају они окрузи са заједничком границом, али не и они који имају једну или више изолованих заједничких тачака) обојени различитим бојама. Гатри је приметио да при тим условима није било довољно мање од четири боје, док је са четири боје било могуће обојити карту на тражени начин. Наметнуло се питање да ли је и за бојење других карти, и то не само стварних, већ свих карти са наведеним особинама које се могу замислити, довољно четири боје. Помоћ је потражио од Де Моргана[19], професора математике на Универзитету у Лондону. Први писани текст о проблему четири боје је писмо које је крајем 1852. године Де Морган послао Хамилтону[20], у коме је објаснио проблем и потражио помоћ. Проблем је постао познат тек након Де Морганове смрти, 1878. године, када га је Кејли изложио на састанку лондонског математичког друштва, а недуго затим објавио први чланак о њему, и то у географском, а не математичком часопису, у коме је изложио тежину проблема и признао да није успео да га реши.

Први озбиљан покушај решавања проблема начинио је Кемпе[21] 1880. године, да би десет година касније, 1890. године, Хивуд[22] открио грешку у овом доказу. Међутим, ни сам Хивуд није успео да реши проблем, већ је доказао да се свака мапа може обојити са пет боја. Од тада је велики број математичара покушавао да реши проблем, да би тек 1976. године

[18] Francis Guthrie (1831–1899), јужноафрички математичар
[19] Augustus De Morgan (1806–1871), британски математичар
[20] William Rowan Hamilton (1805–1865), ирски математичар
[21] Alfred Bray Kempe (1849–1922), британски математичар
[22] Percy John Heawood (1861–1955), британски математичар

то пошло за руком математичарима Апелу[23], Хејкену[24] и Коху[25] и то уз значајну помоћ рачунара и коришћење резултата низа математичара који су објављивани у претходном периоду. До данас није познато да ли је могуће решити овај проблем без употребе рачунара.



Слика 3.39

Проблем четири боје може се превести на језик теорије графова. У том циљу, дефинисаћемо појам **мапе** или **карте**.

Дефиниција 3.49. ***Мапа*** *или* ***карта*** *је повезан планаран граф који нема мостова, односно грански* 2*-повезан планаран граф.*

Свакој карти може се придружити један планаран граф, тако што се свакој области (регији) на карти придружи по један чвор графа, при чему су чворови који одговарају суседним регијама повезани гранама (слика 3.39). При томе, под суседним регијама подразумевамо оне које имају заједничку граничну линију, али не и оне које се додирују само у једној тачки. На тај начин се проблем бојења регија на карти своди на проблем бојења чворова планарног графа тако да никоја два суседна чвора немају исту боју.

Проблем четири боје преведен на језик теорије графова гласи:

Доказати да је сваки планаран граф 4*-обојив.*

Хивуд је доказао да се свака географска карта може обојити са пет боја, односно доказао је да важи следеће тврђење.

Теорема 3.30. *Сваки планаран граф је* 5*-обојив.*

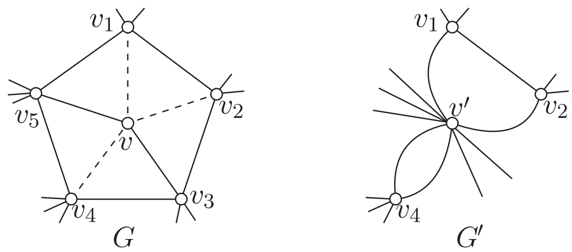
[23] Kenneth Appel (1932–2013), амерички математичар

[24] Wolfgang Haken, амерички математичар, рођен 1928. године

[25] John Koch, амерички математичар

Доказ. Доказ изводимо математичком индукцијом по броју чворова n. За сваки планаран граф са $n \leqslant 5$ чворова резултат је тривијалан, јер је сваки такав граф 5-обојив.

Претпоставимо да тврђење важи за све планарне графове са мање од n чворова и посматрајмо планаран граф G са n чворова. На основу последице 3.4 планаран граф G садржи бар један чвор степена не већег од 5. Нека је то чвор v.



Слика 3.40

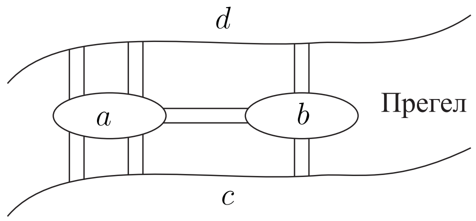
Претпоставимо најпре да је чвор v степена мањег од 5. Удаљимо из графа G чвор v заједно са њему суседним гранама. Добијени граф је на основу идуктивне претпоставке 5-обојив. Вратимо чвор v назад у граф. Како је за бојење чворова суседних чвору v потребно највише 4 боје, следи да чвор v можемо обојити једном од преосталих боја.

Посматрајмо сада случај када је чвор v степена 5. Нека су v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 чворови суседни чвору v у графу G. Према последици 3.6 чворови v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 не образују потпуни пентаграф K_5 у графу G, одакле следи да постоји бар један пар чворова који није повезан граном. Нека су то, на пример, чворови v_3 и v_5. Уклонимо из графа G гране vv_1, vv_2 и vv_4, а затим удаљимо и гране vv_3 и vv_5, а све гране које долазе до чворова v_3 и v_5 продужимо до новог чвора који ћемо означити са v' (слика 3.40). Тиме смо избацили чворове v_3 и v_5 из графа G. Добијени граф G' је по индуктивној претпоставци 5-обијив. Бојење графа G' одређује и бојење графа G. Наиме, како чворови v_3 и v_5 нису суседни, добијају боју чвора v'. За бојење чворова v_1, v_2 и v_4 потребне су највише три боје, одређене бојењем графа G'. Сада је за бојење чвора v потребна још једна боја, чиме је теорема доказана. $\square$

3.14 Ојлерови и Хамилтонови графови

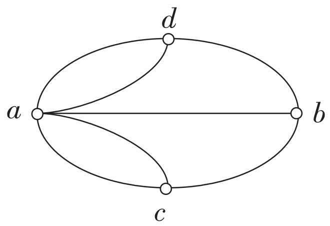
3.14.1 Ојлерови графови

Један од најстаријих познатих проблема који је у вези са графовима је тзв. **проблем кенигсбершких мостова**. Кроз некадашњи пруски град Кенигсберг (данашњи Калињинград) протиче река Прегел, на којој се налазе два острва, повезана међусобно и са обалама реке помоћу седам мостова (слика 3.41).



Слика 3.41

Грађани Кенигсберга су покушавали да одговоре на питање да ли је могуће обићи свих седам мостова, тако да сваки пређу тачно једанпут. Чувени швајцарски математичар Ојлер је 1736. године доказао да то није могуће и формулисао потребне и довољне услове да такав обилазак постоји. Ојлеров резултат се сматра првим резултатом, а тиме и почетком теорије графова. Ојлер је свакој обали и острву придружио по један чвор графа, док су мостови представљали гране између њих. На тај начин добијен је један мултиграф, представљен на слици 3.42.



Слика 3.42

Дефиниција 3.50. ***Ојлерова контура*** *графа (мултиграфа) G је затворена стаза која садржи све гране графа G. Граф (мултиграф) који има Ојлерову контуру назива се* ***Ојлеров граф*** *(Ојлеров мултиграф).*

Ојлеров пут *у графу (мултиграфу) G је стаза која која садржи све гране из G (не мора бити затворена). Граф (мултиграф) који има Ојлеров пут назива се **полуојлеров граф** (полуојлеров мултиграф).*

У доказу главне теореме о Ојлеровим графовима користићемо следеће тврђење.

Лема 3.1. *Ако је степен сваког чвора графа G већи од 1, тј. $\delta(G) \geqslant 2$, тада граф G садржи контуру.*

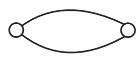
Доказ. Нека је $P = v_1v_2 \dots v_k$ најдужи пут у графу G. Чвор v_1 може бити суседан само са чворовима пута P, тј. $N(v_1) \subseteq V(P)$, јер би у супротном у графу G постојао дужи пут од пута P. Како је $d(v_1) \geqslant 2$, постоји чвор v_i, $3 \leqslant i \leqslant k$, такав да $v_1v_i \in E(G)$, одакле следи да је $v_1v_2 \dots v_iv_1$ контура у G. □

Одговор на питање који графови поседују Ојлерову контуру даје следећа теорема.

Теорема 3.31. (**Ојлер**) *Повезан мултиграф са бар једном граном је Ојлеров ако и само ако је сваки његов чвор парног степена.*

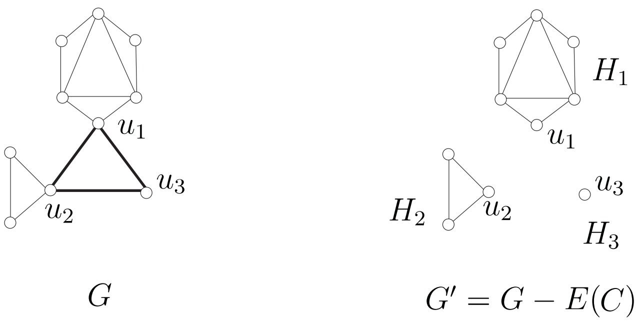
Доказ. Нека је мултиграф G Ојлеров. Ако се крећемо по Ојлеровој контури мултиграфа G, онда увек када неком граном дођемо у неки чвор, користимо другу грану за напуштање тог чвора. Како морамо проћи кроз све гране Ојлерове контуре и вратити се у почетни чвор, степени свих чворова су парни.

Обратно, претпоставимо да су степени свих чворова повезаног мултиграфа G парни и докажимо да G садржи Ојлерову контуру. Доказ изводимо математичком индукцијом по броју грана m.



Слика 3.43

За повезани мултиграф са две гране, представљен на слици 3.43, тврђење је тачно. Претпоставимо да тврђење важи за мултиграфове са мање од m грана и посматрајмо повезан мултиграф G са m грана чији су сви чворови парног степена. Мултиграф G је повезан, а степени свих његових чворова су парни, одакле следи да је $\delta(G) \geqslant 2$, па на основу леме 3.1 постоји контура C у G. Нека је $G' = G - E(C)$ мултиграф добијен удаљавањем свих грана које припадају контури C из мултиграфа



Слика 3.44

G (слика 3.44). Сви чворови мултиграфа G' су такође парног степена. Наиме, ако $v \in V(C)$, тада је $d_{G'}(v) = d_G(v) - 2$, док за $v \notin V(C)$ важи да је $d_{G'}(v) = d_G(v)$. Мултиграф G' не мора бити повезан. Нека су $H_1, H_2, \ldots, H_t$ компоненте повезаности мултиграфа G', $t \geqslant 1$. Свака од компоненти H_i, $1 \leqslant i \leqslant t$, је повезан граф чији су сви чворови парног степена, па према индуктивној претпоставци садржи Ојлерову контуру (затворену стазу) s_i. Осим тога, како је мултиграф G повезан, свака од затворених стаза $s_1, s_2, \ldots, s_t$ има бар један заједнички чвор са контуром C. Сада се затворена Ојлерова стаза мултиграфа G формира тако што се, почевши од произвољног чвора са контуре C, крећемо по контури, и кад год наиђемо на неки чвор u који се налази на затвореној стази s_i коју нисмо обишли, из њега скренемо и обиђемо целу стазу s_i, вратимо се у чвор u, а затим настављамо обилазак крећући се по контури C, са потребним скретањима за остале стазе s_j. Дакле, тврђење је тачно и за мултиграф са m грана који задовољава услове теореме. $\square$

Последица претходне теореме је следеће тврђење.

Теорема 3.32. *Повезан мултиграф G са бар једном граном је полуојлеров ако и само ако садржи 0 или 2 чвора непарног степена.*

Доказ. Ако мултиграф поседује Ојлеров пут, тј. затворену Ојлерову стазу или Ојлерову стазу, тада аналогно доказу првог дела претходне теореме, закључујемо да је сваки његов чвор парног степена (у случају затворене Ојлерове стазе), односно садржи два чвора (почетни и крајњи) непарног степена (у случају постојања Ојлерове стазе).

Ако повезан нетривијалан мултиграф G има све чворове парног степена, тада према претходној теореми следи да G садржи затворену Ојлерову стазу, одакле произилази да је G Ојлеров, а тиме и полуојлеров граф.

Претпоставимо да повезан мултиграф G има два чвора u и v непарног степена. Нека је G' мултиграф добијен од G додавањем новог чвора w и грана uw и vw. Тада су сви чворови повезаног мултиграфа G' парног степена, па он садржи затворену Ојлерову стазу s. Уклањањем чвора w из G' добија се Ојлерова стаза у мултиграфу G која полази из чвора u и завршава се у чвору v. □

Напомена 3.1. *Повезаност мултиграфа представља, осим у тривијалним случајевима, потребан услов за егзистенцију Ојлерове стазе. Наиме, од неповезаних мултиграфова Ојлерову стазу могу евентуално имати само они чије све гране припадају једној компоненти.*

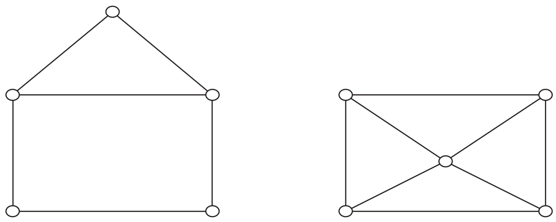
Пример 3.31. Обилазак мостова у Кенигсбергу није могућ, јер одговарајући граф, приказан на слици 3.42, садржи 4 чвора непарног степена, па према претходној теореми он није ни полуојлеров, а самим тим ни Ојлеров.

Пример 3.32. Ако је у графу G број чворова непарног степена једнак $2k$, $k \geqslant 1$, доказати да тада у графу G постоји k стаза, таквих да свака грана припада једној од тих стаза.

Решење. Нека је G' граф добијен од графа G додавањем чвора v суседног са сваким од $2k$ чворова непарног степена у G. Тада су у графу G' степени свих чворова парни, па према Ојлеровој теореми у графу G' постоји затворена стаза C која садржи све гране графа G'. Како је степен чвора v једнак $2k$, затворена стаза C се састоји од k грански дисјунктних затворених стаза $C_1, C_2, \ldots, C_k$ са заједничким чвором v. Удаљавањем чвора v из графа G', заједно са свим њему инцидентним гранама, свака од затворених стаза C_i се трансформише у стазу P_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, при чему, имајући у виду дефиницију затворене стазе C, свака грана графа G припада једној од тих стаза. △

Ојлерове стазе су значајне за организације које у великим градовима разносе пошту, наплаћују рачуне или врше услуге по домаћинствима, јер ће вршење таквих послова бити изведено најрационалније ако се кроз сваку улицу прође тачно једанпут. Један од најпознатијих проблема ове врсте је **проблем кинеског поштара**. Наиме, поштар ујутру узима писма, обилази улице у свом реону и на крају радног времена се враћа у пошту, што ће бити изведено најрационалније ако кроз сваку улицу прође тачно једанпут. Ово је могуће само ако је одговарајући граф, придружен проблему, Ојлеров, док се у осталим случајевима тражи оптимално решење које ће обезбедити да поштар хода што је мање могуће.

Ојлерове стазе појављују се и у задацима тзв. рекреативне математике. Наиме, ако је потребно да се задата фигура у равни, која се састоји од извесног броја тачака (чворова) и линија које их повезују, нацрта „у једном потезу“, тј. без подизања оловке са папира, тако да се сваком линијом пређе тачно једанпут, док је кроз чворове дозвољено пролазити више пута, то значи да треба нацртати једну Ојлерову стазу у датом графу. На слици 3.45 су представљене две фигуре (које подсећају на отворено и затворено писмо), од којих је прву могуће, а другу немогуће нацртати на описани начин.



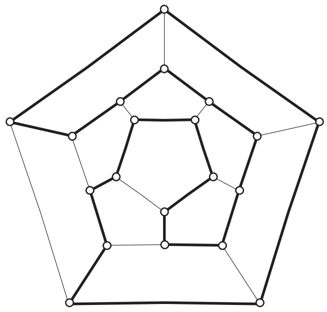
Слика 3.45

3.14.2 Хамилтонови графови

Појам Хамилтонових графова везује се за познатог ирског математичара Хамилтона. Он је је 1857. године представио занимљиву игру на додекаедру, једном од пет правилних полиедара са 20 темена и 12 страна које представљају правилне петоуглове, при чему се у сваком темену сустичу по три стране. Темена додекаедра Хамилтон је обележио именима 20 великих градова тог времена, а циљ игре је био да се обиђу сви градови и врати се у полазни град. При томе, било је дозвољено кретање дуж ивица додекаедра, кроз свако теме (град) дозвољено је проћи тачно једном, а пут почиње и завршава се у истом темену (граду). У циљу боље прегледности, уместо додекаедра ћемо посматрати његову стереографску пројекцију у равни (слика 3.46). Тада се Хамилтонов „пут око света“ своди на контуру која пролази кроз све чворове тако добијеног графа тачно једанпут. На слици је тражена контура која представља решење Хамилтоновог проблема представљена подебљаним линијама. Занимљива је чињеница да је две године пре него што је Хамилтон представио своју игру, британски математичар Киркман[26] поставио проблем да се утврди да ли је могуће у датом графу полиедра пронаћи

[26] Thomas Kirkman (1806–1895), британски математичар

контуру која кроз свако теме пролази тачно једанпут. Дакле, иако је Хамилтонова игра изазвала више интересовања за графове касније назване Хамилтоновим графовима, њих је први проучавао Киркман.



Слика 3.46

Дефиниција 3.51. ***Хамилшонова коншура*** *у графу је коншура (зашворени йуш) која садржи све чворове графа, а граф у коме йосшоји шаква коншура назива се* ***Хамилшонов граф****.*

Хамилшонов йуш *у графу је йуш који садржи све чворове графа. Граф који има Хамилшонов йуш назива се* ***йолухамилшонов граф****.*

Сличним проблемима су се, и пре Хамилтона (и Киркмана), бавили многи математичари. Најпознатији такав проблем је **проблем коњичког скока** (коњ или скакач је шаховска фигура), који се може формулисати на следећи начин.

Да ли је могуће скакачем (коњем) обићи сва йоља шаховске шабле, шако да се свако йоље обиђе шачно једанйуш?

Еквивалентна, графовска формулација овог проблема гласи:

Да ли у графу йридруженом скакачу йосшоји Хамилшонов йуш?

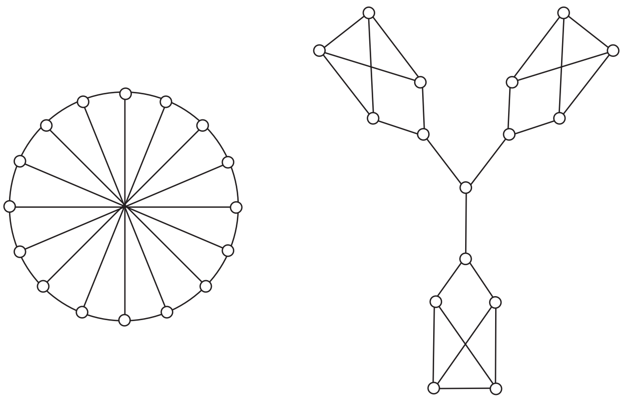
На слици 3.47 је приказано једно решење проблема коњичког скока на класичној шаховској табли димензије 8×8. О овом проблему постоји обимна литература. Испитивана је егзистенција решења на шаховским таблама различитих димензија, као и начин конструкције и број решења. Доказано је да проблем коњичког скока има решење на свим правоугаоним таблама димензије $m \times n$ $(m, n \geqslant 3)$, осим табли 3×3, 3×5, 3×6 и 4×4.

Проблем карактеризације Хамилтонових графова је један од најтежих и још увек нерешених проблема теорије графова. За разлику

30	21	50	9	32	19	52	7
49	10	31	20	51	8	33	18
22	29	48	61	42	27	6	53
11	60	41	28	45	62	17	34
40	23	64	47	26	43	54	5
59	12	25	44	63	46	35	16
24	39	2	57	14	37	4	55
1	58	13	38	3	56	15	36

Слика 3.47

од Ојлерових (или полуојлерових) графова, чија егзистенција зависи само од степена чворова, код Хамилтонових (или полухамилтонових) графова то није случај. На слици 3.48 су приказана два графа са по 16 чворова и истим низом степена чворова (оба графа су регуларна, степена 3). Први граф има не само Хамилтонов пут, већ и Хамилтонову контуру, док други граф не поседује Хамилтонов пут.



Слика 3.48

Пример 3.33. Наћи пример графа који је:

(1) истовремено Ојлеров и Хамилтонов;

(2) Хамилтонов, али не и Ојлеров;

(3) Ојлеров, али не и Хамилтонов;

(4) није ни Ојлеров ни Хамилтонов.

Решење. (1) Контура C_n је истовремено Ојлеров и Хамилтонов граф.

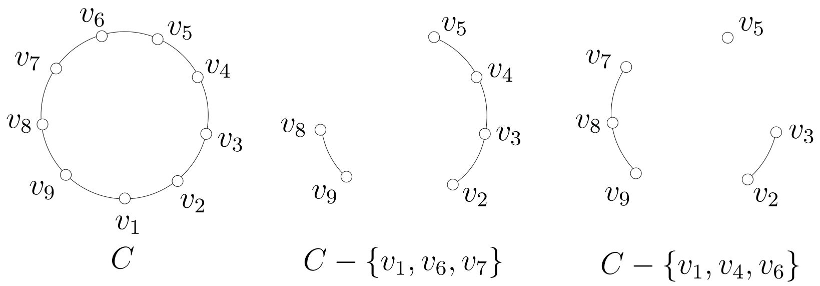
(2) Потпуни граф K_4 није Ојлеров, а јесте Хамилтонов граф.

(3) Потпуни бипартитан граф $K_{2,3}$ јесте Ојлеров, а није Хамилтонов граф.

(4) Звезда $S_4 = K_{1,3}$ није ни Ојлеров ни Хамилтонов граф. △

У литератури је формулисано више потребних и више довољних услова да граф буде Хамилтонов, али међу њима не постоји ниједан који је истовремено и потребан и довољан. У наставку ће бити изложени неки потребни, односно довољни услови да граф буде Хамилтонов.

Теорема 3.33. *Ако је G Хамилтонов граф, тада за сваки прави непразан подскуп $S \subset V(G)$ важи $\omega(G - S) \leq \mid S \mid$, где је са $\omega(G - S)$ означен број компоненти повезаности графа $G - S$.*



Слика 3.49

Доказ. Нека је C Хамилтонова контура графа G. Тада је $V(G) = V(C)$ и за сваки прави непразан подскуп S скупа $V(G)$ испуњено је $\omega(C - S) \leqslant |S|$. Наиме, уклањањем чворова из скупа S, контура C се распада на један или више дисјунктних путева, чији број није већи од броја елемената скупа S, јер уклањањем сваког новог чвора из S добијамо нов пут ако тај чвор није суседан у C са неким претходно избаченим чвором. Једнакост у овој неједнакости важи само у случају када никоја два чвора из S нису суседи у C и тада се контура C распада на тачно $|S|$ дисјунктних путева (слика 3.49).

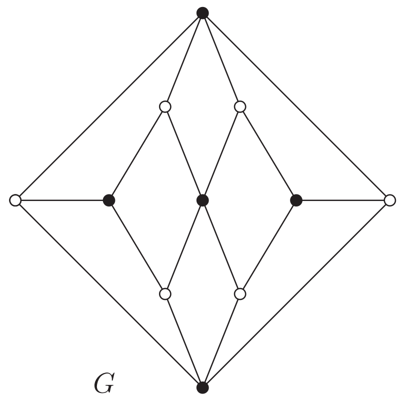
С обзиром на то да је $E(C) \subseteq E(G)$, следи да је $E(C - S) \subseteq E(G - S)$, одакле произилази да је $\omega(G - S) \leqslant \omega(C - S)$, јер се додавањем нових грана не повећава број компоненти графа.

Имајући у виду наведене неједнакости закључујемо да је $\omega(G - S) \leqslant \omega(C - S) \leqslant |S|$, чиме је тврђење доказано. □

Резулатат наведен у теореми 3.33 је често погодан при доказивању да дати граф није Хамилтонов. Наиме, потребно је погодно изабрати подскуп $S \subset V(G)$, такав да је $\omega(G - S) > |S|$.

Пример 3.34. Доказати да Хершелов[27] граф, приказан на слици 3.50, није Хамилтонов.

Решење. Означимо посматрани граф са G, а за скуп S изаберимо скуп од 5 црних чворова графа G. Како је $G - S \cong \overline{K}_6$, то је $\omega(G - S) = 6$, па граф G није Хамилтонов. $\triangle$



Слика 3.50

Услов из теореме 3.33 није и довољан услов за Хамилтонове графове. За Петерсенов граф G, приказан на слици 3.32 а), може се показати да је $\omega(G-S) \leqslant |S|$ за сваки прави непразан подскуп $S \subset V(G)$, а Петерсенов граф није Хамилтонов.

Уколико у теореми 3.33 посматрамо само једночлане скупове S добијамо следећу последицу.

Теорема 3.34. *Сваки Хамилтонов граф је* 2*-повезан.*

Обрнуто тврђење и у овом случају не важи. На пример, посматрајмо граф $K_{2,3}$ који је 2-повезан. Ако за скуп S изаберемо партитивни скуп са 2 чвора овог графа, тада је $K_{2,3} - S \cong \overline{K}_3$, па је $\omega(K_{2,3} - S) = 3 > 2 = |S|$, одакле, према теореми 3.33, следи да граф $K_{2,3}$ није Хамилтонов.

[27] Alexander Stewart Herschel (1836–1907), британски астроном

Довољни услови за Хамилтонове графове су много бројнији од потребних. Најпознатији су Дираков, Ореов[28], као и Бондијев[29] и Хваталов[30].

Теорема 3.35. (**Бонди, Хватал**) *Нека је G граф са n чворова, $n \geqslant 3$, и v и w два несуседна чвора у G, таква да је $d(v) + d(w) \geqslant n$. Тада је граф G Хамилтонов ако и само ако је граф $G + vw$ Хамилтонов.*

Доказ. Ако је граф G Хамилтонов, тада је очигледно и граф $G + vw$ Хамилтонов.

Обратно, претпоставимо да је граф $G + vw$ Хамилтонов, док граф G то није. Тада грана vw припада Хамилтоновој контури графа $G + vw$, а граф G садржи Хамилтонов пут који повезује чвор v са чвором w. Нека су чворови овог пута означени редом са $v = v_1, v_2, \ldots, v_n = w$. Дефинишимо скупове $S, T \subseteq V(G)$ са

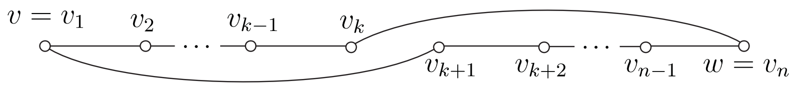
$$S = \{v_k \mid vv_{k+1} \in E(G)\},$$

$$T = \{v_k \mid v_k w \in E(G)\}.$$

Тада $v = v_1 \in S$, $v_{n-1} \in T$ и важи да је $|S| = d(v)$, $|T| = d(w)$. На основу претпоставке теореме закључујемо да важи неједнакост

$$|S| + |T| = d(v) + d(w) \geqslant n. \tag{3.9}$$

Како $w \notin S \cup T$, то је $|S \cup T| < n$, одакле, имајући у виду (3.9), закључујемо да је $S \cap T \neq \emptyset$, тј. постоји чвор $v_k \in S \cap T$. Дакле, постоји чвор v_k, такав да $vv_{k+1} \in E(G)$ и $v_k w \in E(G)$, па граф G садржи Хамилтонову контуру $vv_{k+1}v_{k+2} \ldots v_{n-1}wv_kv_{k-1} \ldots v_2v$ (слика 3.51), што је супротно претпоставци да граф G није Хамилтонов. □



Слика 3.51

Последица претходне теореме је следећа Ореова теорема.

[28] Øystein Ore (1899–1968), норвешки математичар
[29] John Adrian Bondy, британско-канадски математичар, рођен 1944. године
[30] Václav Chvátal, чешко-канадски математичар, рођен 1946. године

Теорема 3.36. (**Оре**) *Ако је G граф са n, $n \geqslant 3$, чворова, такав да за свака два несуседна чвора v и w важи да је $d(v) + d(w) \geqslant n$, тада је G Хамилтонов граф.*

Доказ. Додајући гране између несуседних чворова графа G (докле год у графу G постоје несуседни чворови) и примењујући теорему 3.35, добијамо да је граф G Хамилтонов ако и само ако је комплетан граф K_n Хамилтонов. Како је комплетан граф K_n Хамилтонов за $n \geqslant 3$, тврђење теореме важи. □

Директна последица Ореове теореме је Диракова теорема.

Теорема 3.37. (**Дирак**) *Ако је G граф са n, $n \geqslant 3$, чворова, такав да је $d(v) \geqslant \frac{1}{2}n$ за сваки чвор $v \in V(G)$, тада је G Хамилтонов граф.*

Пример 3.35. На двору краља Артура скупило се $2n$ витезова, од којих сваки међу присутнима има највише $n-1$ непријатеља. Доказати да је витезове могуће распоредити око округлог стола тако да ниједан витез не седи поред свог непријатеља.

Решење. Нека је сваки од $2n$ витезова представљен једним чвором графа G, при чему су два чвора суседна у G ако и само ако одговарајући витезови нису непријатељи. Како сваки витез има највише $n-1$ непријатеља међу присутнима, следи да је степен сваког чвора графа G једнак најмање $2n-1-(n-1)=n$, одакле, према Дираковој теореми, следи да у графу G постоји Хамилтонова контура која одговара траженом распореду витезова око округлог стола. △

Пример 3.36. Нека је G граф са n чворова и $m \geqslant \dfrac{n^2-3n+6}{2}$ грана. Доказати да граф G има Хамилтонову контуру.

Решење. Како је $\dfrac{n(n-1)}{2} - (n-3) = \dfrac{n^2-3n+6}{2}$, граф G се може схватити као делимични граф комплетног графа K_n из кога је удаљено не више од $n-3$ грана. За произвољна два несуседна чвора v_i и v_j овог графа важи да је $d_i + d_j \geqslant 2(n-2)-(n-4)=n$, одакле према теореми Ореа следи да граф G има Хамилтонову контуру. △

На крају наводимо још један важан проблем везан за Хамилтонове графове. То је **проблем трговачког путника** који гласи:

Дат је скуп од n градова које трговачки путник треба да обиђе по једанпут, тако да пут заврши у граду из кога је кренуо. Одредити редослед обиласка градова при коме су трошкови пута минимални.

У графовској формулацији овог проблема користе се **тежински графови**, тј. графови код којих је свакој грани додељена одређена тежина (у случају проблема трговачког путника тежина гране представља трошкове пута између одговарајућих градова). На језику теорије графова проблем трговачког путника гласи:

У задатом тежинском графу одредити Хамилтонову контуру најмање тежине.

Овај проблем је значајан у области операционих истраживања, као и у теоријском рачунарству. Како сам проблем тражења Хамилтонове контуре изискује доста (рачунарског) времена, пронађен је велики број хеуристика које дају „приближно оптимално решење“. Доказано је да проблем трговачког путника представља тзв. NP-комплетан проблем, односно сви познати алгоритми за његово решавање имају експоненцијалну сложеност.

3.15 Број унутрашње и спољашње стабилности графа

Дефиниција 3.52. *Нека је $G = (V, E)$ произвољан граф. Подскуп S скупа чворова V зове се* ***унутрашње стабилан*** *или* ***независан*** *скуп графа G ако су свака два чвора из S несуседна у G, тј. за сваки пар чворова $v, w \in S$ важи $vw \notin E$.*

Према претходној дефиницији следи да подграф $G[S]$ графа G индукован унутрашње стабилним скупом S не садржи ниједну грану, односно састоји се само од изолованих чворова.

Дефиниција 3.53. *Нека је $\mathcal{S}$ скуп свих унутрашње стабилних скупова графа G.* ***Број унутрашње стабилности*** *$\alpha(G)$ графа G дефинише се са*

$$\alpha(G) = \max_{S \in \mathcal{S}} |S|.$$

Скупови $S \in \mathcal{S}$ за које је $|S| = \alpha(G)$ називају се максимални унутрашње стабилни или максимални независни скупови графа G.

Максималан унутрашње стабилан скуп графа се може довести у везу са кликом графа. Наиме, ако је S максималан унутрашње стабилан скуп чворова графа G, тада су свака два чвора из S несуседна у графу G, односно суседна у његовом комплементу $\overline{G}$, одакле, због максималности скупа S, следи да чворови из S формирају клику (потпуни подграф са максималним бројем чворова) у $\overline{G}$, па важи једнакост

$$\alpha(G) = K(\overline{G}).$$

Број унутрашње стабилности $\alpha(G)$ графа G се може довести у везу и са његовим хроматским бројем $\chi(G)$. Како су при правилном бојењу графа сви чворови исте боје међусобно несуседни, они образују унутрашње стабилан скуп графа, одакле следи да број чворова исте боје није већи од $\alpha(G)$. Претпоставимо да граф G има n чворова и означимо са n_i број чворова обојених i-том бојом, $i = 1, 2, \ldots, \chi(G)$. Тада је $n_i \leqslant \alpha(G)$ за свако i, а како је $\sum\limits_{i=1}^{\gamma(G)} n_i = n$, то је

$$\alpha(G)\chi(G) \geqslant n,$$

тј.

$$\alpha(G) \geqslant \frac{n}{\chi(G)}. \tag{3.10}$$

Према Бруксовој процени хроматског броја (неједнакост (3.8)) важи да је $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$, где је са $\Delta(G)$ означен максималан степен графа G. Комбинујући овај резултат и неједнакост (3.10), закључујемо да важи следеће тврђење.

Теорема 3.38. *За број унутрашње стабилности $\alpha(G)$ графа G важи неједнакост*

$$\alpha(G) \geqslant \frac{n}{\Delta(G) + 1}.$$

Појам унутрашње стабилних скупова графа се може довести у везу са неким занимљивим шаховским проблемима. У том циљу, показаћемо најпре како се свакој шаховској фигури може придружити одговарајући граф. Сваком пољу шаховске табле придружује се по један чвор графа, при чему су два произвољна чвора v и w овог графа спојена граном ако и само ако одговарајућа фигура може у једном потезу да пређе са поља v на поље w и обрнуто.

Положај више фигура исте врсте на шаховкој табли, при коме се оне међусобно не нападају, одговара у графу придруженом тој фигури једном унутрашње стабилном скупу. Максималан број фигура исте врсте које се могу поставити на шаховску таблу тако да се међусобно не нападају представља број унутрашње стабилности придруженог графа.

За шаховску фигуру даму (краљицу) на табли димензије 8×8 број унутрашње стабилности придруженог графа једнак је 8, док је за произвољну таблу димензије $n \times n$ тај број једнак n, за $n \geqslant 4$, односно $1, 1, 2$ за $n = 1, 2, 3$, респективно. За топа, односно ловца, важи да је $\alpha(G) = n$, односно $\alpha(G) = 2n - 2$, на табли димензије $n \times n$.

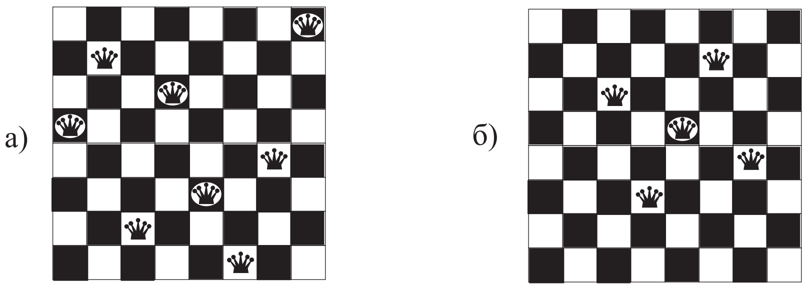
У шаховској литератури познат је **проблем осам дама** објављен 1848. године, који гласи:

На колико се начина 8 *дама може поставити на шаховску таблу димензије* 8×8, *тако да се међусобно не нападају?*

У графовској интерпретацији овај проблем гласи:

Колико има максималних унутрашње стабилних скупова у графу придруженом шаховској фигури дами?

Проблем осам дама решио је Наук[31] 1850. године. Постоји укупно 92 решења, а једно од решења је приказано на слици 3.52 а).



Слика 3.52

Проблем размештања дама није решен у општем случају, када се уместо табле димензије 8×8 посматра произвољна табла димензије $n \times n$.

Појам унутрашње стабилних скупова графа има, осим за решавање шаховских проблема, и друге различите примене. Поменућемо везу овог појма и једног проблема из теорије кодова који исправљају грешке.

Посматрајмо скуп уређених n-торки облика $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при чему $x_i \in \{1, 2, \ldots, b\}$. Оваквих уређених n-торки има b^n. Две n-торке су међусобне једнаке ако и само ако су им све одговарајуће

[31] Franz Nauck

координате једнаке. Каже се да су n-торке $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ на растојању d ако имају тачно d различитих координата (овакво растојање n-торки назива се Хемингово[32] растојање).

Код кодовског растојања $d = 2\ell + 1$ има особину да ако се приликом преношења произвољне n-торке кода кроз систем везе погрешно пренесе не више од ℓ координата n-торке, у пријемном уређају се одговарајућа n-торка може реконструисати.

Један од важних проблема у теорији кодова који исправљају грешке је следећи:

Колико у датом скупу n-торки постоји n-торки чија међусобна растојања нису мања од d, тј. колико n-торки садржи највећи код кодовског растојања d?

Овај проблем се може формулисати као проблем теорије графова на следећи начин. Означимо са $G_{nb\ell}$ граф чији чворови одговарају описаним n-торкама, при чему су два чвора суседна ако и само ако је растојање одговарајућих n-торки мање од $d = 2\ell + 1$. Број чворова овог графа једнак је b^n. Како постоји $\binom{n}{k}(b-1)^k$ n-торки које су на растојању k, $1 \leqslant k \leqslant n$, од сваке n-торке, следи да је сваки чвор графа суседан са $\sum\limits_{k=1}^{2\ell} \binom{n}{k}(b-1)^k$ других чворова. Дакле, $G_{nb\ell}$ је регуларан граф.

Графовска интерпретација постављеног проблем гласи:

Одредити број унутрашње стабилности графа $G_{nb\ell}$.

Проучавање особина графа $G_{nb\ell}$ је значајно не само за наведени, већ и за друге проблеме теорије кодова који исправљају грешке.

Осим унутрашње стабилних скупова дефинишу се и спољашње стабилни скупови графа.

Дефиниција 3.54. *Подскуп T скупа чворова V графа $G = (V, E)$ назива се спољашње стабилан скуп графа G, ако из сваког чвора који не припада скупу T води бар једна грана у неки од чворова из T.*

Дефиниција 3.55. *Нека је $\mathcal{T}$ скуп свих спољашње стабилних скупова графа G. **Број спољашње стабилности** $\beta(G)$ графа G дефинише се са*

$$\beta(G) = \min_{T \in \mathcal{T}} |T|.$$

Скупови $T \in \mathcal{T}$ за које је $|T| = \beta(G)$ називају се минимални спољашње стабилни скупови графа G.

[32] Richard Hamming (1915–1998), амерички математичар

Појам спољашње стабилности графа се, слично појму унутрашње стабилности графа, доводи у везу са шаховским проблемом познатим као **проблем пет дама** који гласи:

Колико је најмање дама потребно поставити на шаховску таблу да би сва поља била нападнута, ако дама напада и поље на коме се налази?

За решење постављеног проблема потребно је најмање пет дама. Показано је да има укупно 4860 решења, а једно од њих је приказано на слици 3.52 б). Решења проблема пет дама представљају минималне спољашње стабилне скупове у графу придруженом шаховској фигури дами.

Пример 3.37. Нека чворови $v_1, v_2, \ldots, v_k$, чији су степени $d_1, d_2, \ldots, d_k$, респективно, образују спољашње стабилан скуп у графу са n чворова. Доказати да важи неједнакост

$$k + \sum_{i=1}^{k} d_i \geqslant n.$$

Решење. Нека је $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ спољашње стабилан скуп у графу $G = (V, E)$ са n чворова. По дефиницији спољашње стабилног скупа, из сваког чвора скупа $V \setminus T$ води бар једна грана у неки од чворова из T. Како је $|V \setminus T| = n - k$, ових грана има бар $n - k$, одакле следи тражена неједнакост. $\triangle$

Дефиниција 3.56. *Подскуп скупа чворова V графа $G = (V, E)$ који је истовремено и унутрашње и спољашње стабилан скуп графа G назива се* ***језгро графа****.*

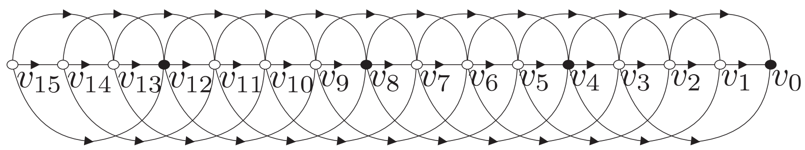
Појам језгра графа има примену у теорији игара. Посматрајмо једну игру на графу коју играју два играча тако што наизменично бирају чворове графа. Најпре се одреди један произвољан чвор графа, затим први играч бира неки од чворова до кога се може стићи граном из почетног чвора, док други играч бира неки од чворова до кога води грана из чвора који је изабрао први играч, итд. Игру губи онај играч који не може више да изабере ниједан чвор.

Следеће тврђење указује на везу између стратегије играња описаних игара и појма језгра графа.

Теорема 3.39. *Играч који изабере чвор из језгра графа не може (при правилној игри) да изгуби.*

Доказ. Претпоставимо да у игри учествују два играча, A и B, при чему игру почиње играч A. Ако играч A изабере чвор из језгра графа, тада играч B мора да изабере чвор ван језгра, јер је језгро унутрашње стабилан скуп графа. Како је језгро и спољашње стабилан скуп, то из сваког чвора ван језгра води бар једна грана у неки од чворова из језгра, па играч A поново бира чвор из језгра и ситуација се понавља, одакле следи да играч A не може да изгуби игру. $\square$

Сваки граф не мора да има језгро и језгро не мора бити јединствено.



Слика 3.53

Пример 3.38. У кутији се налази 15 куглица. Играчи A и B узимају наизменично по једну, две или три куглице. Игру губи онај играч који не може да узме више ниједну куглицу када дође на ред. Ко побеђује при правилној игри?

Решење. Игра се може интерпретирати као игра на графу са слике 3.53. Чворови графа су означени са v_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, 15$, тако да чвор v_i одговара стању игре „у кутији се налази i куглица“. Играч који изабере чвор из језгра графа (језгро се састоји од црних чворова) добија игру. $\triangle$