Простор ограничених линеарних пресликавања

Нека је $(X, \|\cdot\|_X)$ нормиран простор. За произвољне операторе $A, B \in L(X)$, композиција оператора A и B, у ознаци $A \circ B$, дефинише се са

$$(A \circ B)(x) = A(B(x)), \quad x \in X.$$

Ако $A, B \in L(X)$, тада $A \circ B \in L(X)$. Заиста,

$$\|(A \circ B)(x)\|_X = \|A(B(x))\|_X \leqslant \|A\| \cdot \|Bx\|_X \leqslant \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|_X, \quad x \in X,$$

па је

$$\|A \circ B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|.$$

На претходном предавању смо доказали да је $(L(X,Y), \|\cdot\|)$ нормиран простор. Природно је да се питамо да ли је или под којим условима је Банахов.

Показаћемо да је $L(X,Y)$ Банахов простор у случају када је $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Банахов простор.

Да бисмо ово показали, навешћемо и доказати две помоћне леме.

Лема 1. *Нека је $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Банахов простор и $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев низ из $L(X,Y)$. Тада за свако $x \in X$ постоји $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n x = Ax$ и ако је пресликавање $A : X \to Y$ дато са $A : x \to Ax$, тада је $A \in L(X,Y)$.*

Доказ. Низ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је Кошијев у $L(X,Y)$, тј. за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ да је

$$\|A_n - A_m\| < \varepsilon, \quad n, m \geqslant n_0(\varepsilon). \tag{1}$$

Приметимо да за свако $n, m \in \mathbb{N}$ важи

$$\|A_n x - A_m x\|_Y \leqslant \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|_X, \quad x \in X. \tag{2}$$

Користећи (1) и (2), за свако $\varepsilon > 0$ и свако $x \in X$ постоји $n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ да је

$$\|A_n x - A_m x\|_Y < \varepsilon, \quad n, m \geqslant n_0(\varepsilon, x).$$

Дакле, низ $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ је Кошијев у Y, а како је Y комплетан простор, следи да постоји $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n x$, за свако $x \in X$. Нека је $Ax = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n x$, $x \in X$.

За свако $n \in \mathbb{N}$ оператор A_n је линеаран, тј.

$$A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha A_n x + \beta A_n y, \quad x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{F},$$

па пуштајући да $n \to +\infty$ добијамо

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y, \quad x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{F},$$

одакле следи линеарност оператора A.

Докажимо још ограниченост оператора A. Користећи услов да је низ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев у $L(X,Y)$, из неједнакости

$$\big|\|A_n\| - \|A_m\|\big| \leqslant \|A_n - A_m\|$$

закључујемо да је низ $(\|A_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев у $\mathbb{R}$. Сваки Кошијев низ је ограничен, па постоји константа $M > 0$ да је

$$\|A_n\| \leqslant M, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

За свако $x \in X$ је

$$\|A_n x\|_Y \leqslant \|A_n\| \cdot \|x\|_X,$$

што са (3) даје

$$\|A_n x\|_Y \leqslant M\|x\|_X, \quad x \in X.$$

Непрекидност норме нам обезбеђује да је

$$\|Ax\|_Y = \|\lim_{n\to+\infty} A_n x\|_Y = \lim_{n\to+\infty} \|A_n x\|_Y \leqslant M\|x\|_X, \quad x \in X,$$

одакле је $\|A\| \leqslant M$.

На основу свега доказаног закључујемо да $A \in L(X,Y)$. □

Лема 2. *За пресликавање* A *из леме* 1. *важи* $\lim_{n\to+\infty} \|A_n - A\| = 0$.

Доказ. Низ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је Кошијев у $L(X,Y)$, тј. за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ да је

$$\|A_n - A_m\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n, m \geqslant n_0(\varepsilon). \tag{4}$$

Како је

$$\|A_n x - A_m x\|_Y \leqslant \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|_X, \quad x \in X,$$

користећи (4) добијамо

$$\|A_n x - A_m x\|_Y \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|x\|_X, \quad x \in X,\, n, m \geqslant n_0(\varepsilon). \tag{5}$$

Пуштајући у (5) да $m \to +\infty$ добијамо

$$\|A_n x - Ax\|_Y \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|x\|_X, \quad x \in X, n \geqslant n_0(\varepsilon).$$

Из последње неједнакости закључујемо да је $\|A_n - A\| < \varepsilon$, за свако $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. □

Користећи леме 1. и 2. лако се изводи следећа теорема.

Теорема 1. *Нека је* $(X, \|\cdot\|_X)$ *нормиран и* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *Банахов простор. Тада је* $(L(X,Y), \|\cdot\|)$ *Банахов простор.*

Напомена. *Приметимо да ако је* $Y = \mathbb{R}$ *или* $Y = \mathbb{C}$, *простор* $L(X,Y)$ *је увек Банахов и назива се дуални простор простора* X *и означава са* X'.

У претходним лемама су се јављале две различите врсте конвергенција низова оператора. Дефинисаћемо их и дати њихов међусобни однос.

Дефиниција 1. *Низ* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *из* $L(X,Y)$ *тачкасто конвергира ка* $A \in L(X,Y)$ *ако за свако* $x \in X$ *је*

$$Ax = \lim_{n\to+\infty} A_n x.$$

Низ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *из* $L(X,Y)$ *конвергира по норми ка* $A \in L(X,Y)$ *ако је*

$$\lim_{n\to+\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Напомена. Из неједнакости

$$\|A_n x - Ax\|_Y \leqslant \|A_n - A\| \cdot \|x\|_X, \quad x \in X,$$

следи да

$$\lim_{n\to+\infty} \|A_n - A\| = 0$$

повлачи да је

$$\lim_{n\to+\infty} A_n x = Ax, \quad x \in X.$$

Дакле, из конвергенције по норми следи тачкаста конвергенција. Обрнуто не важи у општем случају.

Пример 1. *Нека је* $X = Y = \ell_2$ *и* $A_n : \ell_2 \to \ell_2$, $n \in \mathbb{N}$, *линеарна пресликавања дата са*

$$A_n x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots), \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2.$$

Показаћемо да је:

1° $\lim\limits_{n\to+\infty} \|A_n x - Ix\|_{\ell_2} = 0$, $x \in \ell_2$, *где је* $Ix = x$, $x \in \ell_2$;

2° $\|A_n - I\| \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

1° *Према дефиницији оператора* A_n, $n \in \mathbb{N}$, *следи да је*

$$\|A_n x - Ix\|_{\ell_2} = \|(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) - (x_1, x_2, \ldots)\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{+\infty} |x_i|^2}. \tag{6}$$

Како $x \in \ell_2$, *то ред* $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2}$ *конвергира, па остатак конвергентног реда* $\sqrt{\sum\limits_{i=n+1}^{+\infty} |x_i|^2}$ *тежи* 0 *кад* $n \to +\infty$. *Из* (6) *добијамо*

$$\|A_n x - Ix\|_{\ell_2} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Закључујемо да низ ограничених линеарних оператора $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *конвергира тачкасто ка* I.

2° *Нека је* $e_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ пута}}, 1, 0, \ldots)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тада је* $\|e_n\|_{\ell_2} = 1$ *и*

$$\begin{aligned}\|A_n - I\| &= \sup_{\|x\|_{\ell_2}=1} \|A_n x - Ix\|_{\ell_2} \geqslant \|A_n(e_{n+1}) - I(e_{n+1})\|_{\ell_2} \\ &= \|(0,0,0,\ldots) - e_{n+1}\|_{\ell_2} = \|e_{n+1}\|_{\ell_2} = 1,\end{aligned}$$

па низ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *не конвергира по норми ка оператору* I. ◊

Напомена. Уведене дефиниције нам омогућавају да краће (другачије) искажемо тврђења дата у лемама 1. и 2.

Инверзни оператор

Нека су $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ нормирани простори.

Дефиниција 2. *За линеарни оператор $A : X \to Y$ кажемо да има инверзни оператор A^{-1} ако постоји пресликавање $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \to X$, где је $\mathcal{R}(A) = \{Ax \mid x \in X\}$, такво да је $A^{-1}(Ax) = x$, $x \in X$.*

Напомена. Приметимо да оператор A има инверзни ако је A инјективан, тј. „1-1“ оператор.

Теорема 2. *Ако линеарни оператор $A : X \to Y$ има инверзни оператор $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \to X$, онда је A^{-1} линеаран оператор на простору $\mathcal{R}(A)$.*

Доказ. Према претпоставци, A^{-1} постоји, па је $A^{-1}(Ax) = x$, $x \in X$.

Нека је $y \in \mathcal{R}(A)$ произвољно. Тада постоји $x \in X$ такво да је $Ax = y$, па је $A^{-1}(Ax) = A^{-1}y$, тј $x = A^{-1}y$. Закључујемо да је $A(A^{-1}y) = Ax = y$, за свако $y \in \mathcal{R}(A)$.

Нека су $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(A)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Користећи линеарност оператора A и $A^{-1}(Ax) = x$, $x \in X$, важи да је

$$\begin{aligned} A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) &= A^{-1}(\alpha A(A^{-1}y_1) + \beta A(A^{-1}y_2)) = A^{-1}(A(\alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2)) \\ &= \alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2, \end{aligned}$$

односно A^{-1} је линеаран оператор. □

Следећа теорема нам даје потребне и довољне услове за постојање ограниченог инверног линеарног оператора $A^{-1} : Y \to X$, где $A \in L(X, Y)$.

Теорема 3. *Нека су $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ нормирани простори и $A : X \to Y$ линеаран ограничен и „на“ оператор. Ако постоји $m > 0$ да је*

$$\|Ax\|_Y \geqslant m\|x\|_X, \quad x \in X, \tag{7}$$

тада постоји $A^{-1} \in L(Y, X)$.

Доказ. Доказаћемо најпре да је A инјективно пресликавање. Нека $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$. Тада је $\|x_1 - x_2\|_X > 0$ и из

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_Y = \|A(x_1 - x_2)\|_Y \geqslant m\|x_1 - x_2\|_X > 0,$$

следи да је $Ax_1 \neq Ax_2$. Дакле, пресликавање A је бијективно („на“ по претпоставци и доказали смо да је „1-1“) и закључујемо да постоји $A^{-1} : Y \to X$ који је линеаран на Y (видети теорему 2.). Докажимо, још, да је A ограничен оператор. Заиста, ако у (7) уместо x ставимо $A^{-1}y$, добијамо

$$\|A(A^{-1}y)\|_Y \geqslant m\|A^{-1}y\|_X,$$

тј. $\|y\|_Y \geqslant m\|A^{-1}y\|_X$, па је

$$\|A^{-1}y\|_X \leqslant \frac{1}{m}\|y\|_Y, \quad y \in Y.$$

Закључујемо да је A^{-1} ограничен оператор, па самим тим $A^{-1} \in L(Y, X)$. □

За линеарни оператор $A \in L(X)$ који има инверзни, од великог је значаја да се A^{-1} изрази у облику погодном за рад. Следећа теорема нам даје довољне услове за то.

ТЕОРЕМА 4. *Нека је X Банахов простор и $A \in L(X)$ такав да је $\|A\| \leqslant q < 1$. Тада $I - A$ има инверзни оператор, који је ограничен и важи*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n, \quad A^0 = I.$$

НАПОМЕНА. Доказ ове теореме нећемо наводити.

Ако $A, B \in L(X)$ и постоје $A^{-1}, B^{-1} \in L(X)$, тада постоји $(A \circ B)^{-1} \in L(X)$ и важи

$$(A \circ B)^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1}.$$

Заиста,

$$(A \circ B)^{-1}(A \circ B) = B^{-1}(A^{-1}(A \circ B)) = B^{-1} \circ B = I,$$

а ограниченост следи из

$$\|B^{-1} \circ A^{-1}\| \leqslant \|B^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

ВАЖНЕ ТЕОРЕМЕ ФУНКЦИОНАЛНЕ АНАЛИЗЕ

Следећа теорема представља једну од најважнијих теорема у функционалној анализи. Принцип униформне ограничености говори о томе да фамилија ограничених линеарних оператора на Банаховом простору, која је униформно ограничена за сваку појединачну тачку, мора бити униформно ограничена у операторској норми.

ТЕОРЕМА 5. (**Принцип униформне ограничености**) *Нека је $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ оператора из $L(X,Y)$ где је $(X, \|\cdot\|_X)$ Банахов простор, а $(Y, \|\cdot\|_Y)$ нормиран простор. Претпоставимо да за свако $x \in X$ постоји $M_x > 0$ да важи*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\|_Y \leqslant M_x.$$

Тада постоји $M > 0$ да важи $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| \leqslant M$.

ПОСЛЕДИЦА. *Нека је $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ оператора из $L(X,Y)$ где је $(X, \|\cdot\|_X)$ Банахов простор, а $(Y, \|\cdot\|_Y)$ нормиран простор. Ако постоји $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n x$, за свако $x \in X$, и ако је $A : X \to Y$ дефинисано са*

$$Ax = \lim_{n\to+\infty} A_n x, \quad x \in X,$$

тада $A \in L(X,Y)$.

ДОКАЗ. Како је $Ax = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n x$, $x \in X$, следи да је $A : X \to Y$ линеарно пресликавање јер за све $x, y \in X$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, важи

$$A(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to+\infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to+\infty} (\alpha A_n x + \beta A_n y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Докажимо да је A ограничен оператор. Низ $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира за свако $x \in X$, па следи да је $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\|_Y = M_x \in \mathbb{R}$. На основу Принципа униформне ограничености постоји $M > 0$ да је $\|A_n\| \leqslant M$ за све $n \in \mathbb{N}$. Како је

$$\|Ax\|_Y = \|\lim_{n\to+\infty} A_n x\|_Y = \lim_{n\to+\infty} \|A_n x\|_Y \leqslant \lim_{n\to+\infty} (\|A_n\| \cdot \|x\|_X) \leqslant M\|x\|_X,$$

одакле следи да је $\|A\| \leqslant M$, па је A ограничен оператор. □

Често се користи специјалан случај Принципа униформне ограничености, познат под називом Банах-Штајнхаусова теорема. Она је јако важна и применљива у нумеричкој анализи и користи се као главни алат за показивање да је дуални простор од ℓ_p изоморфан са ℓ_q где је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

ТЕОРЕМА 6. (**Банах-Штајнхаусова теорема**) *Нека су* $(X, \|\cdot\|_X)$ *и* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *Банахови простори и* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *низ из* $L(X,Y)$. *Потребан и довољан услов да за свако* $x \in X$ *постоји* $\lim_{n\to+\infty} A_n x$ *и да је* $\lim_{n\to+\infty} A_n x = Ax$, $x \in X$, *и* $A \in L(X,Y)$, *јесте да постоји* $\lim_{n\to+\infty} A_n x$ *за све* $x \in D$ *где је* D *густ скуп у* X *и да је* $\|A_n\| \leqslant M$ *за све* $n \in \mathbb{N}$ *где је* $M > 0$.

НАПОМЕНА. Из хипотезе у Банах-Штајнхаусовој теореми не следи да низ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира по норми ка A.

Следећа теорема је позната као Рисова теорема о репрезентацији ограничене линеарне функционеле дефинисане на Хилбертовом простору.

ТЕОРЕМА 7. *Нека је* $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *Хилбертов простор и* F *ограничена линеарна функционела на* $\mathcal{H}$. *Тада постоји јединствен елемент* $y \in \mathcal{H}$ *такав да је* $F(x) = \langle x, y\rangle$, $x \in \mathcal{H}$, *и важи* $\|F\| = \|y\|_{\mathcal{H}}$.

ДОКАЗ. Ако је $F(x) = 0$, $x \in \mathcal{H}$, тада је $y = \mathbf{0}$ јединствен елемент из $\mathcal{H}$ за који важи $\langle x, y\rangle = 0$ за све $x \in \mathcal{H}$.

Претпоставимо да $\{x \in \mathcal{H} \mid F(x) \neq 0\} \neq \emptyset$. Означимо са $\mathcal{N}(F) = \{x \in \mathcal{H} \mid F(x) = 0\}$, то је прави затворен потпростор од $\mathcal{H}$ и важи $\mathcal{H} = \mathcal{N}(F) \oplus \mathcal{N}(F)^\perp$. Закључујемо да постоји $\omega \in \mathcal{N}(F)^\perp$, тј. $F(\omega) \neq 0$. Нека је

$$z = \frac{\omega}{F(\omega)} \in \mathcal{H}.$$

Приметимо да $z \in \mathcal{N}(F)^\perp$ и да је $F(z) = 1$. За свако $x \in \mathcal{H}$ је $x - F(x)z \in \mathcal{N}(F)$ јер је

$$F(x - F(x)z) = F(x) - F(x)F(z) = 0.$$

За $z \in \mathcal{N}(F)^\perp$ и $x - F(x)z \in \mathcal{N}(F)$ имамо да је $\langle x - F(x)z, z\rangle = 0$, тј. $\langle x, z\rangle - F(x)\langle z, z\rangle = 0$, односно $\langle x, z\rangle - F(x)\|z\|^2 = 0$, па је

$$F(x) = \left\langle x, \frac{z}{\|z\|^2}\right\rangle, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Добијамо тражени елемент $y = \frac{z}{\|z\|^2}$.

Докажимо јединственост елемента y. Претпоставимо да постоји $u \in \mathcal{H}$, $u \neq y$, тако да је $F(x) = \langle x, u\rangle$, $x \in \mathcal{H}$.За свако $x \in \mathcal{H}$ је испуњено $\langle x, u - y\rangle = 0$, па је $u - y \in \mathcal{H}^\perp = \{\mathbf{0}\}$, тј. $u = y$.

Још је потребно доказати да је $\|F\| = \|y\|$. Како је $F(x) = \langle x, y\rangle$, $x \in \mathcal{H}$, то је

$$\|F(x)\| = |F(x)| = |\langle x, y\rangle \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \quad x \in \mathcal{H},$$

па је

$$\|F\| \leqslant \|y\|. \tag{8}$$

За $y = \dfrac{z}{\|z\|^2}$ је $\|y\| = \dfrac{1}{\|z\|}$. Како је $F(z) = 1$, то је

$$|F(y)| = \Big|F\Big(\frac{z}{\|z\|^2}\Big)\Big| = \frac{|F(z)|}{\|z\|^2} = \frac{1}{\|z\|^2} = \|y\|^2,$$

па је

$$\|F\| = \sup_{\substack{y' \in \mathcal{H} \\ y' \neq \mathbf{0}}} \frac{|F(y')|}{\|y'\|} \geqslant \frac{|F(y)|}{\|y\|} = \|y\|,$$

одакле је

$$\|F\| \geqslant \|y\|. \tag{9}$$

Користећи неједнакости (8) и (9) добијамо да је $\|F\| = \|y\|$. □

Напомена. Ако је f ограничена линеарна функционела на $\mathcal{H}$, тј. $f \in \mathcal{H}'$, тада према Рисовој теореми постоји $y \in H$ тако да је $f(x) = \langle x, y\rangle$, $x \in \mathcal{H}$, па се може дефинисати пресликавање $J : f \to y$, $f \in \mathcal{H}'$, простора $\mathcal{H}'$ у простор $\mathcal{H}$. Ово пресликавање $J : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ је хомеоморфизам и антилинеарно пресликавање, тј. важи

$$J(\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha} J(f) + \overline{\beta} J(g), \quad f, g \in \mathcal{H}', \alpha, \beta \in \mathbb{F},$$

и изометрично је $\|J(f)\| = \|f\|$.

Теорема 8. *Дуални простор $\mathcal{H}'$ Хилбертовог прострора $\mathcal{H}$ је такође Хилбертов простор ако скаларни производ у $\mathcal{H}'$ уведемо са*

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}'} = \langle J(g), J(f)\rangle_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \mathcal{H}'.$$