Конјуговани оператор на Банаховим просторима

Нека су $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Банахови простори над истим пољем скалара $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ и $A \in L(X, Y)$.

Ако $f \in Y' = L(Y, \mathbb{F})$, тада сложено пресликавање

$$f \circ A : x \to (f \circ A)(x) = f(Ax), \quad x \in X,$$

дефинише елемент $g = f \circ A \in X' = L(X, \mathbb{F})$ јер за свако $x \in X$ важи

$$|g(x)| = |f(Ax)| \leqslant \|f\| \cdot \|Ax\|_Y \leqslant \|f\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_X.$$

Пресликавање $A' : Y' \to X'$ дефинисано са $A'f = g = f \circ A$ је такво да важи

$$\|A'f\|_{X'} \leqslant \|A\| \cdot \|f\|_{Y'}, \quad f \in Y',$$

па је $\|A'\| \leqslant \|A\|$. Линеарност пресликавања A' је очигледна. Дакле, $A' \in L(Y', X')$.

Дефиниција 1. *Нека су $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Банахови простори над истим пољем скалара $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ и $A \in L(X, Y)$. Оператор $A' \in L(Y', X')$ такав да је*

$$(A'f)(x) = f(Ax), \quad x \in X, f \in Y',$$

назива се конјуговани оператор оператора A.

Теорема 1. *Ако $A \in L(X, Y)$, тада је $\|A'\| = \|A\|$.*

Доказ. **(За већу оцену.)** Како је $\|A'f\|_{X'} \leqslant \|A\| \cdot \|f\|_{Y'}$ за свако $f \in Y'$, то је

$$\|A'\| \leqslant \|A\|. \tag{1}$$

Уочимо произвољно $x \in X$ такво да је $\|x\|_X = 1$. На основу Hanh-Banach-ове теореме[1] имамо да је

$$\|Ax\|_Y = \sup_{\substack{g \in Y' \\ \|g\|_{Y'} = 1}} |g(Ax)|.$$

Нека се супремум достиже за функционелу f (дакле, $f \in Y'$, $\|f\|_{Y'} = 1$ и $\|Ax\|_Y = |f(Ax)|$). Тада

$$\|Ax\|_Y = |f(Ax)| = |(A'f)(x)| \leqslant \|A'f\|_{X'} \cdot \|x\|_X \leqslant \|x\|_X \cdot \|A'\| \cdot \|f\|_{Y'} = \|A'\| \cdot \|x\|_X,$$

па је

$$\|A\| \leqslant \|A'\|. \tag{2}$$

На основу неједнакости (1) и (2), закључујемо да је $\|A\| = \|A'\|$. $\square$

[1] **Hanh-Banach-ова теорема.** Нека је X Банахов простор. Тада за свако $x \in X$ важи $\|x\|_X = \sup\limits_{\substack{g \in X' \\ \|g\|_{X'} = 1}} |g(x)|$ и супремум се достиже.

ТЕОРЕМА 2. *Ако* $A, B \in L(X,Y)$ *и* $\alpha \in \mathbb{F}$, *тада*

1° $(\alpha A)' = \alpha A'$;

2° $(A+B)' = A' + B'$.

ДОКАЗ. 1° Нека $A \in L(X,Y)$ и $\alpha \in \mathbb{F}$. За свако $x \in X$, користећи хомогеност функционеле $f \in L(Y,\mathbb{F})$, добијамо

$$((\alpha A)'f)(x) = f((\alpha A)x) = f(\alpha Ax) = \alpha(f(Ax)) = \alpha(A'f)(x).$$

2° Нека су $A, B \in L(X,Y)$. За свако $x \in X$, користећи адитивност функционеле f, добијамо

$$(A+B)'f(x) = f((A+B)(x)) = f(Ax+Bx) = f(Ax) + f(Bx) = A'(f)(x) + B'(f)(x),$$

одакле закључујемо да је $(A+B)' = A' + B'$. □

ТЕОРЕМА 3. *Ако су* X, Y *и* Z *Банахови простори над истим пољем скалара* $\mathbb{F}$ *и ако* $A \in L(Y,Z)$ *и* $B \in L(X,Y)$, *тада* $AB \in L(X,Z)$ *и* $(AB)' = B'A'$.

ДОКАЗ. За свако $f \in Z' = L(Z,\mathbb{F})$ и свако $x \in X$ важи

$$((AB)'f)(x) = f((AB)(x)) = f(A(Bx)) = (A'f)(Bx) = B'(A'f)(x) = ((B'A')f)(x),$$

одакле је $(AB)' = B'A'$. □

Додатак за већу оцену. Докажимо да је дуални (конјуговани) простор простора $\mathbb{R}^n$, тј. простор свих ограничених линеарних функционела на $\mathbb{R}^n$, изоморфан са $\mathbb{R}^n$.

Нека је $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ база простора $\mathbb{R}^n$. За неко $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ је $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Нека је f линеарна функционела на $\mathbb{R}^n$. Тада је

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i,$$

где је $a_i = f(e_i)$, $i = \overline{1,n}$. На основу неједнакости Хелдера ($p = q = 2$), добијамо

$$|f(x)| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \|x\|_{\mathbb{R}^n},$$

па је

$$\|f\| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Нека је $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Тада

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\mathbb{R}^n},$$

па је

$$\|f\| \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) добијамо $\|f\| = \|a\|_{\mathbb{R}^n}$. Стога, пресликавање из $\mathbb{R}^n$ у $\mathbb{R}^n$ дато са $f \mapsto a$ где је $a_i = f(e_i)$ $i = \overline{1,n}$, чува растојање, линеарно и бијективно па је изоморфизам ових простора.

Пример 1. *Нека је A оператор на $\mathbb{R}^n$ и нека је $A = (a_{ij})_{n\times n}$ његова матрична репрезентација. Тада за $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ је $y = Ax$ где је $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ за*

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Неке је f линеарна функционела на $\mathbb{R}^n$). Тада је $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$. Стога је

$$\begin{aligned} f(Ax) &= \sum_{i=1}^{n} f_i y_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_i x_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i \Big) x_j = \sum_{j=1}^{n} \phi_j x_j, \end{aligned}$$

где је $\phi_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$.

Вектор $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) \in \mathbb{R}^n$ је добијен од вектора $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ трансформацијом $\phi = A'f$ где је пресликавање A' репрезентовано транспонованом матрицом A^T матрице A.

Адјунговани оператор на Хилбертовом простору

Нека је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор и $A \in L(\mathcal{H})$. За фиксирано $y \in \mathcal{H}$ дефинишемо пресликавање $f(x) = \langle Ax, y\rangle$, $x \in \mathcal{H}$. Важи да је f линеарна функционела на $\mathcal{H}$ јер $f : \mathcal{H} \to \mathbb{F}$ и применом неједнакости Коши-Шварца добијамо

$$|f(x)| = |\langle Ax, y\rangle| \leqslant \|Ax\| \cdot \|y\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|A\| \cdot \|y\|_{\mathcal{H}} \cdot \|x\|_{\mathcal{H}}.$$

Закључујемо да је функционела f ограничена. Дакле, $f \in \mathcal{H}'$ па из Рисове леме следи да постоји $z \in \mathcal{H}$ тако да је

$$f(x) = \langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Како се мења y, мења се и z и можемо уочити пресликавање $A^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ дато са $A^* : y \to z$.

Дефиниција 2. *Пресликавање $A^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ дато са*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle, \quad x, y \in \mathcal{H},$$

назива се адјунговани оператор оператора $A \in L(X, Y)$.

Теорема 4. *Ако $A \in L(\mathcal{H})$, тада:*

1° $A^* \in L(\mathcal{H})$;

2° $A^{**} = A$;

3° $\|A^*\| = \|A\|$;

4° $(A+B)^* = A^* + B^*, \ B \in L(\mathcal{H})$;

5° $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*, \ \alpha \in \mathbb{F}$;

6° $(AB)^* = B^* A^*$;

7° $\|A^* A\| = \|A\|^2$.

ДОКАЗ. 1° Нека $x, y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Тада

$$\begin{aligned} \langle x, A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle &= \langle Ax, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle \\ &= \overline{\alpha} \langle Ax, y_1 \rangle + \overline{\beta} \langle Ax, y_2 \rangle \\ &= \overline{\alpha} \langle x, A^* y_1 \rangle + \overline{\beta} \langle x, A^* y_2 \rangle \\ &= \langle x, \overline{\alpha} A^* y_1 + \overline{\beta} A^* y_2 \rangle, \quad x \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

одакле је $A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha} A^* y_1 + \overline{\beta} A^* y_2$.

Доказати ограниченост оператора A^*. Нека је $f(x) = \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$, $x \in \mathcal{H}$. Применом Рисове теореме следи

$$\|f\| = \|A^* y\|_{\mathcal{H}}. \tag{5}$$

Како је $\|f\| \leqslant \|A\| \cdot \|y\|_{\mathcal{H}}$, из (5) следи

$$\|A^* y\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|A\| \cdot \|y\|_{\mathcal{H}},$$

тј. $\|A^*\| \leqslant \|A\|$, па је $A^* \in L(\mathcal{H})$.

2° Како $A^* \in L(\mathcal{H})$, следи да постоји $(A^*)^* \in L(\mathcal{H})$, краће ћемо га означавати са A^{**}, и при томе је

$$\langle A^* x, y \rangle = \langle x, A^{**} y \rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}. \tag{6}$$

Како је

$$\langle A^* x, y \rangle = \overline{\langle y, A^* x \rangle} = \overline{\langle Ay, x \rangle} = \langle x, Ay \rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}, \tag{7}$$

из (6) и (7) добијамо

$$\langle x, A^{**} y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Следи да је $\langle x, A^{**} y - Ay \rangle = 0$, за свако $x \in \mathcal{H}$, па је $A^{**} y - Ay = \mathbf{0}$, за свако $y \in \mathcal{H}$, односно $A^{**} = A$.

3° Како је $\|A^*\| \leqslant \|A\|$ и $\|A\| = \|A^{**}\| \leqslant \|A^*\|$, то је $\|A^*\| = \|A\|$.

4° За свако $x, y \in \mathcal{H}$ је

$$\begin{aligned} \langle x, (A+B)^* y \rangle &= \langle (A+B)x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle + \langle Bx, y \rangle \\ &= \langle x, A^* y \rangle + \langle x, B^* y \rangle = \langle x, A^* y + B^* y \rangle \\ &= \langle x, (A^* + B^*) y \rangle, \end{aligned}$$

одакле закључујемо да је $(A+B)^* y = (A^* + B^*) y$ за свако $y \in \mathcal{H}$, па је $(A+B)^* = A^* + B^*$.

5° За свако $x, y \in \mathcal{H}$ важи

$$\langle x, (\alpha A)^* y \rangle = \langle (\alpha A) x, y \rangle = \langle \alpha A x, y \rangle = \alpha \langle x, A^* y \rangle = \langle x, \overline{\alpha} A^* y \rangle = \langle x, (\overline{\alpha} A^*) y \rangle,$$

одакле закључујемо да је $(\alpha A)^* y = (\overline{\alpha} A^*) y$ за свако $y \in \mathcal{H}$, па је $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.

6° Из $\langle x, (AB)^* y\rangle = \langle (AB)x, y\rangle = \langle Bx, A^* y\rangle = \langle x, B^* A^* y\rangle$, за свако $x, y \in \mathcal{H}$, добијамо да је $(AB)^* = B^* A^*$.

7° Како је $\|A^* A\| \leqslant \|A^*\| \cdot \|A\| = \|A\|^2$ и

$$\|Ax\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle Ax, A^{**}x\rangle = \langle A^* Ax, x\rangle \leqslant \|A^* Ax\|_{\mathcal{H}} \cdot \|x\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|A^* A\| \cdot \|x\|_{\mathcal{H}}^2,$$

то је $\|A\|^2 \leqslant \|A^* A\|$, па је $\|A\|^2 = \|A^* A\|$. □

Пример 2. *Нека је $\mathcal{H} = \ell_2$ и $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ оператор левог померања дат са $Ax = y$ где је $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ тако да је $y_1 = 0$ и $y_n = x_{n-1}$, односно $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots)$.*

За свако $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из ℓ_2 је

$$\langle Ax, y\rangle = x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + x_3\overline{y_4} + \cdots = \langle x, (y_2, y_3, y_4, \ldots)\rangle,$$

одакле добијамо да је $A^* x = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$, односно A^* је оператор десног померања.

Назив адјунговани оператор је резервисан за Хилбертове просторе. Уочимо везу адјунгованог и конјунгованог оператора.

За $f \in \mathcal{H}'$ постоји тачно једно $y \in \mathcal{H}$ тако да је $f(x) = \langle x, y\rangle$, $x \in \mathcal{H}$, и $J : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ дат са $J(f) = y$ је бијективно, изометрично и антилинеарно пресликавање. Ако $A \in L(\mathcal{H})$, тада је

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Даље је $\langle Ax, y\rangle = f(Ax) = (A'f)(x)$, за свако $x, y \in \mathcal{H}$ и $\langle x, A^* y\rangle = f(x) = J^{-1}(A^* y)(x)$, $x, y \in \mathcal{H}$, па је

$$A'(J^{-1}y)(x) = J^{-1}(A^* y)(x), \quad x, y \in \mathcal{H},$$

тј. $A'(J^{-1}y) = J^{-1}(A^* y)$, за свако $y \in \mathcal{H}$, тј. $A'(J^{-1}) = J^{-1}(A^*)$, одакле је $A' = J^{-1}A^* J$ или $A^* = JA'J^{-1}$.

Пример 3. *Нека је A оператор на $\mathbb{R}^n$ и нека је $A = (a_{ij})_{n\times n}$ његова матрична репрезентација. Тада оператору A^* одговара матрична репрезентација таква да је $A^* = \overline{A^T}$.*

Дефиниција 3. *Нека $A \in L(\mathcal{H})$.*

1° *Оператор A је самоадјунгован ако је $A^* = A$.*

2° *Оператор A је косоадјунгован ако је $A^* = -A$.*

3° *Оператор A је унитаран ако је $A^* A = AA^* = I$.*

4° *Оператор A је нормалан ако је $A^* A = AA^*$.*

Напомена. Произвољан опратор A може се приказати у облику збира једног самоадјунгованог и једног косоадјунгованог оператора, тј. $A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*) = A_1 + A_2$, где је $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*) = A_1^*$ и $A_2^* = \frac{1}{2}(A^* - A) = -A_2$.

ПРИМЕР 4. *Нека је* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ограничен низ комплексних бројева и* $\|a\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. *Нека је* $M_a : \ell_2 \to \ell_2$ *дат са* $M_a x = (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *За* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *из* ℓ_2 *важи*

$$\langle M_a x, y\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{\overline{a_n} y_n} = \langle x, M_{\overline{a}} y\rangle,$$

где је $\overline{a} = (\overline{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$. *Стога је* $M_a^* = M_{\overline{a}}$. *Специјално,* M_a *је самоадјунгован ако и само ако је* a *низ реалних бројева.*

СЛАБА КОНВЕРГЕНЦИЈА У НОРМИРАНОМ ПРОСТОРУ

Већ смо говорили о слабој конвергенцији у пред-Хилбертовом простору.

ДЕФИНИЦИЈА 4. (***Слаба конвергенција***) *Низ вектора* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *у пред-Хилбертовом простору* X *слабо конвергира ка вектору* $x \in X$ *ако* $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ *када* $n \to +\infty$ *за свако* $y \in X$. *У том случају пишемо* $x_n \xrightarrow{s} x$ $(n \to +\infty)$.

Услов из претходне дефиниције може се заменити са $\langle x_n - x, y\rangle \to 0$ када $n \to +\infty$ за свако $y \in X$.
Одмах се поставља питање односа између слабе и јаке конвергенције.

ТЕОРЕМА 5. *Јако конвергентан низ слабо конвергира, тј.*

$$x_n \to x,\ n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad x_n \xrightarrow{s} x\ (n \to +\infty).$$

ДОКАЗ. Претпоставимо да низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ јако конвергира ка x, односно $\|x_n - x\| \to 0$ када $n \to +\infty$. Из Коши-Шварцове неједнакости имамо

$$0 \leqslant |\langle x_n - x, y\rangle| \leqslant \|x_n - x\| \cdot \|y\| \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Одатле имамо да $\langle x_n - x, y\rangle \to 0$ када $n \to +\infty$ за свако $y \in X$, тј. низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ слабо конвергира ка x. □

ТЕОРЕМА 6. *Ако* $x_n \xrightarrow{s} x$ $(n \to +\infty)$ *и* $\|x_n\| \to \|x\|$, $n \to +\infty$, *онда* $x_n \to x$, $n \to +\infty$.

ДОКАЗ. Ако $x_n \xrightarrow{s} x$ $(n \to +\infty)$, онда за свако $y \in X$ имамо $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$, $n \to +\infty$. Отуда, $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle = \|x\|^2$ када $n \to +\infty$. Сада,

$$\begin{aligned}\|x_n - x\|^2 &= \langle x_n - x, x_n - x\rangle \\ &= \langle x_n, x_n\rangle - \langle x_n, x\rangle - \langle x, x_n\rangle + \langle x, x\rangle \\ &= \|x_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x_n, x\rangle + \|x\|^2 \to \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 = 0, \quad n \to +\infty.\end{aligned}$$

Дакле, низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ јако конвергира ка x. □

У коначно-димензионим просторима ова два појма се поклапају. Примере низова који слабо конвергирају треба тражити у бесконачно-димензионим просторима.

ПРИМЕР 5. *Низ* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *није конвергентан у* ℓ_2 *јер није Кошијев. Наиме,* $\|e_m - e_n\| = \sqrt{2}$*, за свако* $m, n \in \mathbb{N}$*,* $m \neq n$*. Међутим, он слабо конвергира нули. Пошто је* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ортонормирана база простора* ℓ_2*, онда важи Парсевалова једнакост тј.*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, x\rangle|^2 = \|x\|^2, \quad x \in \ell_2.$$

Како ред $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, x\rangle|^2$ *конвергира, његов општи члан тежи нули, па* $\langle e_n, x\rangle \to 0$*, за свако* $x \in \ell_2$*, а* $\mathbf{0}$ *је једини вектор ортогоналан на свим векторима простора, па је*

$$\langle e_n, x\rangle \to \langle \mathbf{0}, x\rangle, \quad x \in \ell_2,$$

тј. по дефиницији низ $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *слабо конвергира ка* $\mathbf{0}$.

Сада ћемо све претходно уопштити на произвољан нормиран простор.

ДЕФИНИЦИЈА 5. *Нека је* $(X, \|\cdot\|_X)$ *произвољан нормиран простор. Низ* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *у простору* X *слабо конвергира ка тачки* $x_0 \in X$ *ако за сваку функционелу* $f \in X'$ *низ* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *конвергира ка* $f(x_0)$*. Пишемо* $x_n \xrightarrow{s} x$ $(n \to +\infty)$*, и* x_0 *се назива слаба гранична вредност низа* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ТЕОРЕМА 7. *Нека је* $(X, \|\cdot\|_X)$ *произвољан нормиран простор,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *низ из* X *и* $x_0 \in X$*. Ако* $x_n \to x_0$ *када* $n \to +\infty$*, тада* $x_n \xrightarrow{s} x_0$ $(n \to +\infty)$*. У општем случају, тврђење у обрнутом смеру не важи.*

ДОКАЗ. Нека је f линеарна и ограничена функционела на X и $x_n \to x_0$ када $n \to +\infty$. Тада

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n - x_0)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_n - x_0\|_X \to 0, \quad n \to +\infty,$$

па закључујемо да $f(x_n) \to f(x_0)$ када $n \to +\infty$, односно $x_n \xrightarrow{s} x$ $(n \to +\infty)$. □

ТЕОРЕМА 8. 1) *Ако низ* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *слабо конвергира ка* x_0*, тада је тачка* x_0 *јединствено одређена.*
2) *Ако* $x_n \xrightarrow{s} x$ $(n \to +\infty)$ *и* $y_n \xrightarrow{s} y$ $(n \to +\infty)$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$*, тада*

$$\alpha x_n + \beta y_n \xrightarrow{s} \alpha x + \beta y \ (n \to +\infty).$$

ТЕОРЕМА 9. *Ако је простор* X *коначно-димензионалан, тада се појмови јаке и слабе конвергенције низа поклапају.*

ДОКАЗ. Да из јаке конвергенције следи слаба конвергенција је већ показано. Докажимо обрнуто тврђење. Нека је $p \in \mathbb{N}$ димензија простора X. Како је X изоморфан са $\mathbb{F}^p$, довољно је доказати тврђење у $\mathbb{F}^p$, где $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Нека је $x_n = (\xi_1(n), \xi_2(n), \ldots, \xi_p(n)) \in \mathbb{F}^p$, $n \in \mathbb{N}$, и $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_p^0) \in \mathbb{F}^p$. Претпоставимо да $x_n \xrightarrow{s} x$ $(n \to +\infty)$ и нека су $f_\nu \in (\mathbb{F}^p)'$ дате са $f_\nu(x) = \xi_\nu$, $\nu = \overline{1,p}$, где је $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$. Како $x_n \xrightarrow{s} x$ $(n \to +\infty)$, тада $f_\nu(x_n) \to f_\nu(x_0)$, $n \to +\infty$, за свако $\nu = \overline{1,p}$, односно $\xi_\nu(n) \to \xi_\nu^0$, $n \to +\infty$, за свако $\nu = \overline{1,p}$. Самим тим је

$$\|x_n - x_0\|_{\mathbb{F}^p} = \Big(\sum_{\nu=1}^{p} |\xi_\nu(n) - \xi_\nu^0|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0, \quad n \to +\infty,$$

па $x_n \to x_0$, када $n \to +\infty$. □