# Увод

## Мера као уопштење Еуклидских мера

Класична теорија мера и интеграла представља једну од најважнијих области математике из које су се касније развиле теорија вероватноће, стохастичка анализа, теорија фрактала итд.

Као уопштење појмова дужине, површине и запремине у Еуклидском простору, апстрактна теорја мера је настала на прелазу из 19. у 20. век прошлог миленијума. Међу зачетницима ове теорије су Emil Borel, Anri Lebeg, Johan Radon, Konstantin Karateodori и многи други. Након тога наступило је потпуно ново схватање концепта функција и њихових особина попут непрепрекидности, диференцијабилности и интеграбилности, што је довело до снажног развоја математичке анализе.

У оквиру курсева Анализа 2 и Анализа 4 на скупу $\mathbb{R}^n$ се изучавају методи рачунања дужине, површине, запремине итд. у Еуклидском смислу. Теорија мере и интеграла (који се изучавају у оквиру курса Мера и интеграција на мастер студијама) ће дати одговарајућу апаратуру да се то уради за много шири класу функција (функције које ће бити мерљиве и интеграбилне у смислу Лебега на $\mathbb{R}^n$), али уједно уводи и појам мере и интеграла не само на $\mathbb{R}^n$ већ и на врло апстрактним просторима $X$ који могу бити и бесконачно димензионални или не морају уопште да имају векторску структуру. На пример, мера може да буде и мера пребрајања (кардинални број скупа) или мера вероватноће неког догађаја (важно је да савладате основе теорију мере које су дате у овом курсу јер ћете све особине мере поново имати у оквиру предмета Теорија вероватноће).

У основи теорије мера лежи идеја о рачунању површина позната још из античке Грчке: прво се уведе мера за правоугаонике, троуглове и остале полигоне, а површина произвољне фигуре се апроксимира површином полигона изнутра и споља, па се пусти да број страница полигона тежи бесконачности. Одговарајући појам овој идеји јесте појам спољне мере, а улогу полигона преузимају отворени и затворени скупови помоћу којих се врши апроксимација споља и изнутра.

Особина која би се очекивала од неке функције коју називамо мером, по аналогији на површине, јесте да је она транслационо-инваријантна односно да је $\mu(A + c) = \mu(A) + c$ или ротационо-инваријантна, као и да је адитивна, односно да је укупна мера два дисјунктна скупа једнака збиру мера појединачних скупова тј. да је $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Прва два захтева се одбацују јер би подразумевала векторску структуру на скупу $X$ и нису релевантна за општу теорију, док трећи постаје управо дефиниција апстрактне мере.

Други важан појам који се јавља у теорији мере јесте пребројивост скупова индекса са којима се ради. Адитивност мере се тако уопштава на тзв. $\sigma$-адитивност, односно захтева се да је $\mu\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ за произвољну пребројиву дисјунтну фамилију скупова $A_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Стижемо, најпре, до питања који скупови се уопште могу мерити, односно шта чини фамилију мерљивих скупова. Намеће се природна претпоставка да та фамилија мора бити затворена у односу на пребројив број примена свих могућих скуповних операција (пресек, унија, комплемент).

## $\sigma$-АЛГЕБРЕ

Нека је $X \neq \emptyset$ и $\mathcal{P}(X)$ његов партитивни скуп. Поставља се питање која је најпогоднија фамилија $\mathcal{A}$ подскупова од $X$ за коју би постојало пресликавање $\mu : A \to \mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$, са вредностима у $\overline{\mathbb{R}}$. Другим речима, одредимо најпре који су то скупови које можемо да меримо.

Дефиниција 1. *Фамилију $\mathcal{A}$ подскупова од $X$ називамо $\sigma$-алгебра скупова на $X$ ако важи:*

1° $X \in \mathcal{A}$;

2° *за сваки скуп $A$ који припада $\sigma$-алгебри $\mathcal{A}$ и његов комплемент $A^C$ припада $\mathcal{A}$, тј.*

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A};$$

3° *унија пребројиво много елемената из $\mathcal{A}$ такође припада $\mathcal{A}$, тј.*

$$A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

*Скуп $X$ са $\sigma$-алгебром $\mathcal{A}$ називамо простор са $\sigma$-алгебром и означавамо га са $(X, \mathcal{A})$.*

Напомена 1. Приметимо да услов 1° може да се замени условом $\emptyset \in \mathcal{A}$ јер нам то омогућава услов 2°.

Напомена 2. Ако се услов 3° замени условом да буде затворена за формирање коначних унија, добијамо дефиницију алгебре скупова на $X$. Очигледно да је свака $\sigma$-алгебра уједно и алгебра, док обрнуто није тачно (видети примере 3 и 4).

Лема 1. *Нека је $(X, \mathcal{A})$ простор са $\sigma$-алгебром. Тада важи:*

1° *$\emptyset \in \mathcal{A}$;*

2° *ако $A_i \in \mathcal{A}$, $i = \overline{1, n}$, тада $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$;*

3° *ако $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, тада $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$;*

4° *ако $A_i \in \mathcal{A}$, $i = \overline{1, n}$, тада $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$;*

5° *ако $A, B \in \mathcal{A}$, тада $A \setminus B \in \mathcal{A}$.*

Пример 1. *Нека је $X \neq \emptyset$. Фамилије $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X\}$ су $\sigma$-алгебре и то $\mathcal{A}_1$ је највећа, а $\mathcal{A}_2$ најмања $\sigma$-алгебра.*

ПРИМЕР 2. *Нека је* $X = \mathbb{R}$. *Фамилија*

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ је највише пребројив или } A^C \text{ је највише пребројив}\}$$

*је* $\sigma$*-алгебра на* $\mathbb{R}$. *Заиста, ако је* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *низ из* $\mathcal{A}$ *и ако су сви скупови* $A_n$, $n \in \mathbb{N}$, *највише пребројиви, онда је и* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *највише пребројив скуп, а ако је неки* $A_{n_0}^C$ *највише пребројив, онда је*

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)^C \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^C \subseteq A_{n_0}^C,$$

*па је* $\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)^C$ *највише пребројив скуп и зато* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Навешћемо сада примере алгебре које нису $\sigma$-алгебре.

ПРИМЕР 3. *Нека је* $X$ *било који бесконачан скуп.* $\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid A \text{ коначан или } A^C \text{ коначан}\}$ *је алгебра на* $X$. *Међутим, фамилија* $\mathcal{A}$ *није* $\sigma$*-алгебра јер ако је* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *низ различитих тачака из* $X$, *онда скупови* $A_n := \{x_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *припадају фамилији* $\mathcal{A}$, *а* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *и* $\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n)^C$ *су бесконачни скупови.*

ПРИМЕР 4. *Нека фамилија* $\mathcal{A}$ *садржи* $\emptyset$ *и све подскупове од* $\mathbb{R}$ *који се могу приказати као унија коначно много интервала облика* $(a, b]$, $(a, +\infty)$ *и* $(-\infty, b]$ *где су* $a, b \in \mathbb{R}$. *Фамилија* $\mathcal{A}$ *је алгебра али није* $\sigma$*-алгебра. Заиста, нека су* $a, b \in \mathbb{R}$ *такви да је* $b - a > 1$. *Тада је* $(a, b - \frac{1}{n}] \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. *Како је* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (a, b - \frac{1}{n}] = (a, b)$ *и* $(a, b) \notin \mathcal{A}$, *фамилија* $\mathcal{A}$ *нема својство* $3^\circ$.

ЛЕМА 2. *Нека је* $X \neq \emptyset$ *и* $\mathcal{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, *било којиа фамилија* $\sigma$*-алгебри на скупу* $X$. *Тада је* $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$, *такође,* $\sigma$*-алгебра на скупу* $X$.

ПРИМЕР 5. *Унија* $\sigma$*-алгебри не мора да буде* $\sigma$*-алгебра. Нека је* $X = \{1, 2, 3\}$. *Тада су* $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$ *и* $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X, \{2\}, \{1, 3\}\}$ $\sigma$*-алгебре на* $X$. *Како је*

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\},$$

*а* $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, *то* $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ *нема својство* $3^\circ$, *па није* $\sigma$*-алгебра на* $X$.

Следећа последица је важна при конструкцији $\sigma$-алгебре.

ПОСЛЕДИЦА. Нека је $\mathcal{F}$ било која фамилија подскупова скупа $X$. Тада је

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap\{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ је } \sigma\text{-алгебра}, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}\}$$

најмања $\sigma$-алгебра која садржи фамилију $\mathcal{F}$ и називамо је $\sigma$-алгебра генерисана са $\mathcal{F}$.

У теорији мере од изузетне важности је Борелова $\sigma$-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Теорема 1. *Борелова $\sigma$-алгебра $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ је генерисана са:*

1° *интервалима* $(a,b), \quad a<b,\ a,b\in\mathbb{R}$;

2° *интервалима* $[a,b],\ a<b,\ a,b\in\mathbb{R}$;

3° *интервалима* $(a,b], \quad a<b,\ a,b\in\mathbb{R}$;

4° *интервалима* $[a,b), \quad a<b,\ a,b\in\mathbb{R}$;

5° *интервалима* $(a,+\infty),\ a\in\mathbb{R}$;

6° *интервалима* $(-\infty,a),\ a\in\mathbb{R}$;

7° *интервалима* $[a,+\infty),\ a\in\mathbb{R}$;

8° *интервалима* $(-\infty,a],\ a\in\mathbb{R}$.

Доказ. *Сваки отворен скуп у $\mathbb{R}$ је пребројива унија отворених интервала, па је довољно показати да $\sigma-$алгебра коју генеришу интервали из наведене фамилије садржи отворене интервале. Докажимо на пример 2°. Означимо са $\mathcal{B}'_{\mathbb{R}}$ $\sigma-$алгебру коју генеришу затворени интервали. Како је*

$$(a,b)=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right]\in\mathcal{B}'_{\mathbb{R}},$$

*за произвољне $a<b,\ a,b\in\mathbb{R}$, па је $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\subseteq\mathcal{B}'_{\mathbb{R}}$. Из*

$$[a,b]=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right)\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}},$$

*за произвољне $a<b,\ a,b\in\mathbb{R}$, следи да је $\mathcal{B}'_{\mathbb{R}}\subseteq\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.*
*Дакле, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}=\mathcal{B}'_{\mathbb{R}}$.* □

Борелови скупови су сви отворени интервали, сви затворени интервали, све њихове пребројиве уније и сви њихови пребројиви пресеци.

Пример 6. *Нека је $S$ скуп свих бројева из интервала $[0,1]$ који у свом децималном запису садрже цифру 7. Доказати да је $S$ Борелов скуп.*

*Нека $S_n$ представља скуп свих бројева који на $n$-том децималном месту имају цифру 7, тј.* $S_1=[0,7;0,8)$, $S_2=[0,07;0,08)\cup[0,17;0,18)\cup[0,27;0,28)\cup\cdots\cup[0,67;0,68)\cup[0,87;0,88)\cup[0,97;0,98)$, *итд. Закључујемо да је*

$$S_n=\bigcup_{k=0}^{10^{n-1}-1}\left[\frac{k}{10^{n-1}}+\frac{7}{10^n},\frac{k}{10^{n-1}}+\frac{8}{10^n}\right).$$

*Сваки скуп из ове уније је Борелов скуп јер је $[a,b)=(c,b)\cap[a,d]$ за $c<a<b<d$, па је $S_n$, $n\in\mathbb{N}$, Борелов скуп, а онда је и $S=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}S_n$ Борелов скуп.*

## Мера на $\sigma$-алгебри

Већ смо поменули да $\mu$ треба да узима вредности из $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} = [-\infty, +\infty]$. Зато је важно операције $+$ и $\cdot$ као и релацију $\leqslant$ са $\mathbb{R}$ проширити на $\overline{\mathbb{R}}$.

Уређење $\leqslant$ са $\mathbb{R}$ се проширује на $\overline{\mathbb{R}}$ са $-\infty < x < +\infty$, $x \in \mathbb{R}$.

Операције сабирање и множење се проширују са:

$$x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty;$$

$$x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty;$$

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty,\ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty, \text{ако је } x > 0;$$

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty,\ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty, \text{ако је } x < 0;$$

$$+\infty + \infty = +\infty;$$

$$-\infty - \infty = -\infty;$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Не дефинишу се $+\infty + (-\infty)$ нити $(-\infty) + \infty$. Међутим, у теорији мере се показало корисним дефинисати

$$0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = 0.$$

Дефиниција 2. *Нека је $(X, \mathcal{A})$ простор са $\sigma$-алгебром. Мера $\mu$ на $\mathcal{A}$ је функција $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ за коју важи:*

1° $0 \leqslant \mu(A) \leqslant +\infty$ *за свако* $A \in \mathcal{A}$;

2° $\mu(\emptyset) = 0$;

3° *ако је* $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, *дисјунктна фамилија скупова, тада је*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

*Уређена тројка $(X, \mathcal{A}, \mu)$ се назива мерљив простор или простор са мером. Елементи $\sigma$-алгебре $\mathcal{A}$ се називају мерљиви скупови.*

Мера је тривијална ако је $\mu(A) = 0$, $A \in \mathcal{A}$. Мера је коначна ако за свако $A \in \mathcal{A}$ је $\mu(A) < +\infty$. Мера је $\sigma$-коначна ако је $X$ пребројива унија мерљивих скупова тако да сваки од њих има коначну меру.

Пример 7. *Нека је $(X, \mathcal{A})$ $\sigma$-алгебра и $x_0 \in X$. За $A \in \mathcal{A}$ дефинишимо:*

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A, \\ 0, & x_0 \notin A. \end{cases}$$

*Функција $\mu$ је ненегативна и за $A_n \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, важи:*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu\left(A_n\right).$$

*То следи из чињенице да $x_0 \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ ако и само ако постоји тачно један индекс $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да $x_0 \in A_{n_0}$, па и на левој и на десној страни имамо вредност $1$.*

ПРИМЕР 8. *Нека је $X \neq \emptyset$ и $\mathcal{A}$ $\sigma$-алгебра на $X$. Функција*

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & A \neq \emptyset, \\ 0, & A = \emptyset, \end{cases}$$

*није мера јер за $A_1, A_2 \neq \emptyset$, $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ је $\mu(A_1 \cup A_2) = 1$, $\mu(A_1) + \mu(A_2) = 2$, па $\mu$ не задовољава особину $\sigma$-адитивности.*

ТЕОРЕМА 2. *Нека је $(X, \mathcal{A}, \mu)$ простор са нетривијалном мером. Мера $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ има следећа својства.*

1° (**Монотоност**) *За свако $A, B \in \mathcal{A}$ из $A \subseteq B$ следи $\mu(A) \leqslant \mu(B)$. Специјално, ако је $\mu(A) < +\infty$, онда је $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

2° ($\sigma-$ **субадитивност**) *За сваки низ $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ скупова из $\mathcal{A}$ важи*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

3° (**Непрекидност за растуће низове**) *Нека је $A_n \subseteq A_{n+1}$, где $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Тада је*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

4° (**Непрекидност за опадајуће низове**) *Нека је $A_n \supseteq A_{n+1}$, где $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Ако је $\mu(A_1) < +\infty$, тада је*

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

ДОКАЗ. 1° Из $A, B \in \mathcal{A}$ следи да $B \setminus A = B \cap A^C \in \mathcal{A}$. Како је $B = A \cup (B \setminus A)$ и $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, због $\sigma$-адитивности и ненегативности мере је

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geqslant \mu(A).$$

2° Дефинишимо помоћне скупове $B_1 := A_1$, $B_n := A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \in \mathcal{A}$, $n \geqslant 2$. Очигледно је $B_n \subseteq A_n$, $n \in \mathbb{N}$, одакле због монотоности мере добијамо

$$\mu(B_n) \leqslant \mu(A_n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Скупови $B_n,\ n \in \mathbb{N}$, су међусобно дисјунктни и $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$. Користећи $\sigma$-адитивност мере $\mu$ и неједнакост (1), следи

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

$3^\circ$ Нека су међусобно дисјунктни скупови $B_n, n \in \mathbb{N}$, дефинисани на исти начин као у доказу тврђења $2^\circ$. Како је $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$ и $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots A_n \subseteq \cdots$, тада је $\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k = A_n$, па користећи $\sigma$-адитивности мере $\mu$, добијамо

$$\mu(A_n) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k),$$

одакле је

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

$4^\circ$ Скупови $A_1 \setminus A_n = A_1 \cap A_n^C \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, чине растући низ. При томе

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}(A_1 \setminus A_n) = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(A_1 \cap A_n^C) = A_1 \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^C\Big) = A_1 \cap \Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\Big)^C = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

Користећи тврђење $3^\circ$ добијамо

$$\mu\Big(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(A_1 \setminus A_n)\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n). \tag{2}$$

Како је $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \subseteq A_1$ и $\mu(A_1) < +\infty$, према $1^\circ$ важи да је $\mu\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \mu(A_1) < +\infty$. Сада је

$$\mu\Big(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) = \mu(A_1) - \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\Big),$$

а заједно са (2) даје

$$\mu(A_1) - \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) = \mu(A_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n),$$

одакле следи тврђење $4^\circ$. $\square$

## СПОЉНА МЕРА

ДЕФИНИЦИЈА 3. *Нека је $X$ непразан скуп, а $\mathcal{P}(X)$ његов партитивни скуп. Спољна мера на скупу $X$ је свака функција $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ са особинама:*

1° $\mu^*(\emptyset) = 0$,

2° (монотоност) *ако је $A \subseteq B \subseteq X$ тада је $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$,*

3° ($\sigma-$субадитивност) *за сваки низ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ скупова из $X$ важи $\mu^*\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n)$.*

ПРИМЕР 9. *Нека је функција $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ дата са*

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ 1, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

*Функција $\mu^*$ јесте спољна мера али није $\sigma$-адитивна па није мера на $\mathcal{P}(X)$ (видети пример 8.).*

Приметимо да је свака мера дефинисана на $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ уједно и спољна мера, обрнуто тврђење не важи у општем случају.

Нека је $X \neq \emptyset$ и $\mathcal{A}$ $\sigma$-алгебра на $X$ и $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ мера. Приметимо да ако је $B \subseteq X$мерљив, односно $B \in \mathcal{A}$, онда је

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^C), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Другим речима, мерљив скуп $B$ разбија сваки други мерљив скуп $A$ на два дисјунктна мерљива скупа $A \cap B$ и $A \cap B^C$ чије се мере сабирају. Ово својство нема спољна мера!

Нека је $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ спољна мера. Ако је $B \subseteq X$, због $\sigma$-субадитивности спољне мере $\mu^*$ је

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^C), \quad A \subseteq X. \tag{3}$$

Код неких спољних мера у неједнакости (3) може се појавити знак строго мање.

ДЕФИНИЦИЈА 4. *Нека је $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ спољна мера на скупу $X$. За скуп $B \subseteq X$ кажемо да је $\mu^*$-мерљив ако је за свако $A \subseteq X$ задовољено $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^C)$.*

НАПОМЕНА. Скупови $\emptyset$ и $X$ су по дефиницији $\mu^*$-мерљиви. Ако је скуп $B$ $\mu^*$-мерљив, онда је и $B^C$ $\mu^*$-мерљив. Због неједнакости (3), да би се доказало да је $B$ $\mu^*$-мерљив скуп, довољно је доказати да важи

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^C), \quad A \subseteq X. \tag{4}$$

Како неједнакост (4) очигледно важи за $\mu^*(A) = +\infty$, скуп $B \subseteq X$ је $\mu^*$-мерљив ако неједнакост $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^C)$ важи за сваки скуп $A \subseteq X$ такав да је $\mu^*(A) < +\infty$.

ТЕОРЕМА 3. (**Теорема Каратеодорија**) *Нека је $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ спољна мера на скупу $X$. Са $\mathcal{M}_{\mu^*}$ означимо фамилију свих $\mu^*$-мерљивих подскупова од $X$. Тада важе следећа тврђења.*

1. *$\mathcal{M}_{\mu^*}$ је $\sigma$-алгебра на скупу $X$.*
2. *Рестрикција функције $\mu^*$ на $\mathcal{M}_{\mu^*}$ је мера.*

## Лебегова мера на $\mathbb{R}$

Дефиниција 5. *Нека је $X$ нейразан скуй. Фамилију $\mathcal{C}$ йодскуйова од $X$ зовемо $\sigma$-йокривач од $X$ ако има следећа својсшва:*

1° $\emptyset \in \mathcal{C}$,

2° *йосшоји низ $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ чланова из $\mathcal{C}$ шакав да је $X = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} C_n$.*

Нека је $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ фамилија отворених интервала из $\mathbb{R}$ облика $(a,b)$, $a \leqslant b$. Како је $\emptyset = (a,a) \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ и $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}(-n,n)$, следи да је $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ $\sigma$-покривач скупа $\mathbb{R}$. Дефинишимо функција $\tau : \mathcal{C}_{\mathbb{R}} \to [0,+\infty]$ са

$$\tau((a,b)) := b - a, \quad a \leqslant b.$$

Очигледно је $\tau(\emptyset) = 0$.

Нека је $A$ подскуп од $\mathbb{R}$. Са $\mathcal{C}_A$ означимо фамилију свих низова $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $C_n \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$, који покривају скуп $A$, тј.

$$C_A = \Big\{ \big((a_i,b_i)\big)_{i\in\mathbb{N}} \mid a_i \leqslant b_i, A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty}(a_i,b_i) \Big\}.$$

Дефинишимо функцију $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ са

$$m^*(A) = \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \tau(C_i) \mid C_i \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}, A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i \Big\} = \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{+\infty} (b_i - a_i) \mid (a_i,b_i) \in \mathcal{C}_A, i \in \mathbb{N} \Big\}$$

где се инфимум узима по свим низовима $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ из $\mathcal{C}$ таквим да је $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} C_i$. Функција $m^*$ се назива Лебегова спољна мера на $\mathbb{R}$.

Теорема 4. *Лебегова сйољна мера $m^*$ је сйољна мера на $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

Доказ. (За већу оцену) Докажимо да за функцију $m^*$ важе особине спољне мере.

1° Како је $\emptyset \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \emptyset$, то на основу дефиниције $m^*$ и функције $\tau$, важи $m^*(\emptyset) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \tau(\emptyset) = 0$. Очигледно је $m^*(\emptyset) \geqslant 0$, па је $m^*(\emptyset) = 0$.

2° Ако је $A \subseteq B$, онда је сваки покривач скупа $B$ уједно и покривач од $A$, одакле следи да је $m^*(A) \leqslant m^*(B)$.

3° Нека је $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ подскупова од $X$. Треба показати да важи $m^*\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n)$.

Ако је $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n) = +\infty$, онда очигледно важи неједнакост.

Претпоставимо да је $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n) \leqslant +\infty$. Тада је $m^*(A_n) < +\infty$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Према дефиницији од $m^*(A_n)$, постоји низ скупова $(C_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ из $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ тако да је $A_n \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} C_{n,k}$ и ред $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \tau(C_{n,k})$ конвергира и важи

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \tau(C_{n,k}) < m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очигледно је $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} C_{n,k}$. Скупови $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$ су еквипотентни и нека је $s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ бијекција. Дакле, функцијом $s$ се низ скупова $(C_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ може преиндексирати у низ $(C_{s(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. При томе је

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{+\infty} C_{n,k} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_{s(n)}.$$

Добијамо да је

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tau\big(C_{s(n)}\big) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n) + \varepsilon,$$

па по дефиницији $m^*$ следи да је

$$m^*\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Доказали смо $\sigma$-субадитивност фунције $m^*$, чиме је завршен доказ да је Лебегова спољна мера $m^*$ спољна мера на $\mathbb{R}$. □

Пример 10. *Покажимо да је $m^*(\{a\}) = 0$ за свако $a \in \mathbb{R}$. Како је због ненегативности спољне мере $m^*(\{a\}) \geqslant 0$, довољно је показати да је $m^*(\{a\}) \leqslant 0$. Заиста, како је $\{a\} \subset (a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$ за свако $\varepsilon > 0$, из дефиниције $m^*$ добијамо $m^*(\{a\}) \leqslant \tau\big((a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})\big) = \varepsilon$, а због произвољности $\varepsilon > 0$, следи да је $m^*(\{a\}) = 0$.*

Пример 11. *Нека је $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ произвољан пребројив скуп. Тада је $m^*(E) = 0$.*

*За дато $\varepsilon > 0$ посматрајмо интервале*

$$\Big(a_1 - \frac{\varepsilon}{2^2}, a_1 + \frac{\varepsilon}{2^2}\Big), \ \Big(a_2 - \frac{\varepsilon}{2^3}, a_2 + \frac{\varepsilon}{2^3}\Big), \ \ldots, \ \Big(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\Big), \ldots$$

*Ови интервали покривају скуп $E$, и важи*

$$0 \leqslant m^*(E) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \cdots = \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

*Закључујемо да је $m^*(E) = 0$.*

Пример 12. *Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Тада је*

1° $m^*([a,b]) = b - a$,

2° $m^*([a,b)) = b - a$,

3° $m^*((a,b]) = b-a$,

4° $m^*((a,b)) = b-a$.

1° *Нека је* $\varepsilon > 0$ *произвољно. Отворени интервал* $(a-\frac{\varepsilon}{2}, b+\frac{\varepsilon}{2})$ *дужине* $\tau((a-\frac{\varepsilon}{2}, b+\frac{\varepsilon}{2})) = b-a+\varepsilon$ *прекрива сегмент* $[a,b]$, *тј.* $[a,b] \subset (a-\frac{\varepsilon}{2}, b+\frac{\varepsilon}{2})$. *Зато је*

$$m^*([a,b]) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{+\infty}(b_i-a_i) \mid (a_i,b_i) \in \mathcal{C}_{[a,b]} \leqslant \tau((a-\frac{\varepsilon}{2}, b+\frac{\varepsilon}{2})) = b-a+\varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

*па је*

$$m^*([a,b]) \leqslant b-a. \tag{5}$$

*Нека је* $(a_i,b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ *било који низ ограничених отворених интервала који покривају сегмент* $[a,b]$. *Како је* $[a,b]$ *компактан скуп у* $\mathbb{R}$, *отворени покривач* $(a_i,b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *има коначан потпокривач. Нека је* $[a,b] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$ *Како је*

$$[a,b] = [a,b] \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\Big) = \bigcup_{i=1}^{n}\Big([a,b]\cap(a_i,b_i)\Big),$$

*индукцијом по* $n$ *се доказује* $b-a \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$, *па је* $b-a \leqslant \sum\limits_{i=1}^{+\infty}(b_i-a_i)$. *Дакле, за сваки низ* $((a_i,b_i))_{i\in\mathbb{N}}$ *који покрива* $[a,b]$ *важи*

$$b-a \leqslant \inf\Big\{\sum_{i=1}^{+\infty}(b_i-a_i) \mid (a_i,b_i) \in \mathcal{C}_{[a,b]}\Big\} = m^*([a,b]).$$

2° *Како је* $[a,b] \supset [a,b)$ *и* $m^*$ *монотона функција, следи да је* $m^*([a,b)) \leqslant m^*([a,b]) = b-a$. *Докажимо, још, да је* $m^*([a,b)) \geqslant b-a$. *Нека је* $\varepsilon > 0$ *било који реалан број такав да је* $a < b-\varepsilon$. *Тада је* $[a,b-\varepsilon] \subset [a,b)$, *па због монотоности* $m^*$ *је* $m^*([a,b-\varepsilon]) \leqslant m^*([a,b))$. *Према* 1° *је* $m^*([a,b-\varepsilon]) = b-\varepsilon-a$ *и за свако* $\varepsilon > 0$ *добијамо* $b-\varepsilon-a \leqslant m^*([a,b])$, *одакле је* $b-a \leqslant m^*([a,b))$.

*Тврђења* 3° *и* 4° *се доказују слично као* 2°.

Дефиниција 6. *За скуп* $A \subseteq \mathbb{R}$ *кажемо да је мерљив у Лебеговом смислу или да је Лебегов скуп ако је* $m^*$*-мерљив.*

Са $\mathcal{M}_{m^*}$ означићемо скуп свих подскупова од $\mathbb{R}$ који су $m^*$-мерљиви. На основу теореме Каратеодорија они чине $\sigma$-алгебру на $\mathbb{R}$, а рестрикција Лебегове спољне мере на $\mathcal{M}_{m^*}$ назива се Лебегова мера $m$. Дакле, $A \in \mathcal{M}_{m^*}$ је $m^*(A) = m(A)$.

Користећи примере 10. и 11. закључујемо да је сваки највише пребројив скуп Лебегове мере нула. Обрнуто тврђење није тачно (погледати Канторов скуп, има Лебегову меру нула а непребројив је).

Сваки Борелов скуп на $\mathbb{R}$ је мерљив у Лебеговом смислу. Међутим, није сваки подскуп од $\mathbb{R}$ мерљив у Лебеговом смислу (видети пример 13.).

Пример 13. *На скупу* $I = [0,1]$ *уведена је релација* $\rho$ *са* $x\,\rho\,y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$. *Доказати:*

(*а*) $\rho$ *је релација еквиваленције;*

(*б*) *скуп* $A$ *у који улази по једна тачка из сваке од добијених класа еквиваленције није мерљив скуп.*

*Решење.* (*а*) *Како за свако* $x,y,z \in I$ *важи*

$(R)$ $x - x = 0 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x\,\rho\,x$,

$(S)$ $x\,\rho\,y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow -(y-x) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow y\,\rho\,x$,

$(T)$ $x\,\rho\,y \wedge y\,\rho\,z \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q} \wedge y - z \in \mathbb{Q} \Rightarrow (x-y) + (y-z) = x - z \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x\,\rho\,z$,

*релација $\rho$ јесте релација еквиваленције.*

*(б) Приметимо прво да је $C_x = C_y$ ако и само ако је $x - y \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$. За рационалан број $r$ дефинишемо скуп*

$$A_r = A + r = \{a + r \mid a \in A\}.$$

*Доказаћемо да је тада $I \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} A_r$ и да су за $p \neq q$ скупови $A_p$ и $A_q$ дисјунктни.*

*За свако $x \in I$ постоји $a \in A$ такво да $x \in C_a$. Тада је $x - a = r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, па је $x = a + r$, тј. $x \in A_r$, одакле следи да $x \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} A_r$.*

*Докажимо да су за $p \neq q$ скупови $A_p$ и $A_q$ дисјунктни. Претпоставимо супротно, тј. да постоје $p, q$, $p \neq q$ такви да је $A_p \cap A_q \neq \emptyset$, тј. постоји неко $x$ такво да $x \in A_p \cap A_q$. Тада постоје $a, b \in A$ такви да је $x = a + p$ и $x = b + q$. Како је $p \neq q$, следи да је $a \neq b$, што повлачи да $a$ није у релацији са $b$. С друге стране, из $a + p = b + q$ следи $a - b = q - p \in \mathbb{Q}$, одакле је $a\,\rho\,b$. Контрадикција.*

*Нека су $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ сви рационални бројеви из интервала $[-1,1]$ и дефинишимо скупове $A_n$ са $A_n = A_{r_n}$. Тада је $(A_n)$ низ дисјунктних скупова и важи $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subseteq [-1,2]$ (јер је $a \in [0,1]$, а $r \in [-1,1]$). Ако претпоставимо да је скуп $A$ мерљив, тада је и скуп $A_r$ мерљив за свако $r$ и важи $m(A_r) = m(A)$ и важи неједнакост*

$$1 = m(I) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(A) \leqslant 3.$$

*Уколико је $m(A) = 0$ последња неједнакост гласи $1 \leqslant 0 \leqslant 3$, док ако је $m(A) > 0$ имамо $1 \leqslant +\infty \leqslant 3$. Како су обе неједнакости нетачне, закључујемо да скуп $A$ није мерљив.*

Напомена. *Како је $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subseteq [-1,2]$, то је $1 \leqslant m^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leqslant 3$. Сви скупови $A_n$ су добијени транслацијом скупа $A$, па је $m^*(A_n) = m^*(A) = \alpha$. Спољна мера скупа $A$, односно скупова $A_n$, није нула јер важи $m^*\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n)$. Према томе, $m^*(A_n) = \alpha > 0$, па је $\sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha = +\infty$. Дакле, за дисјунктне скупове $A_n$, $n \in \mathbb{N}$, важи*

$$m^*\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) < \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A_n).$$

Пример 14. *Одредимо Лебегову меру следећих скупова.*

1. *Скуп $A = (0,5) \cap \mathbb{Q}$ је пребројив, па је $m(A) = 0$.*

2. *За скуп $B = (0,2]$ је $m^*(B) = 2 - 0$, одакле је $m(B) = 2$.*

3. *Скуп $C = \{5\}$ је једночлан, па је $m(C) = 0$.*

4. *За скуп* $D = [0,5)\backslash\mathbb{Q}$ *важи да је*

$$[0,5) = \Big([0,5)\backslash\mathbb{Q}\Big) \cup \Big([0,5)\cap\mathbb{Q}\Big).$$

*Како је* $m([0,5)) = 5$ *и* $m\Big([0,5)\cap\mathbb{Q}\Big) = 0$, *то је*

$$m\Big([0,5)\backslash\mathbb{Q}\Big) = m([0,5)) - m\Big([0,5)\cap\mathbb{Q}\Big) = 5.$$

5. *Скуп* $E = (7,15)\cup(8,16]$ *представља интервал* $(7,16]$ *па је* $m(E) = 16-7 = 9$.

6. *Скуп* $F = [1,7)\cup[8,16]$ *представља унију два дисјунктна интервала па је*

$$m(F) = m([1,7)) + m([8,16]) = (7-1) + (16-8) = 6+8 = 14.$$

7. *Скуп* $G = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\Big[2^n, 2^n + \frac{1}{10^n}\Big)$ *представља унију пребројиво много дисјунктних интервала, одакле користећи* $\sigma$-*адитивност мере* $m$ *добијамо*

$$m(G) = m\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\Big[2^n, 2^n+\frac{1}{10^n}\Big)\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} m\Big(\Big[2^n, 2^n + \frac{1}{10^n}\Big)\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{10^n} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9}.$$

8. *Одредимо Лебегову меру скупа* $H = \Big(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\Big[9^n, 9^n+\frac{1}{3^n}\Big)\backslash\mathbb{Q}\Big)\cap[81,82]$. *Како је*

$$H = \Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\Big[9^n, 9^n + \frac{1}{3^n}\Big)\backslash\mathbb{Q}\Big)\cap[81,82] = \Big[9^2, 9^2 + \frac{1}{3^2}\Big),$$

*то је*

$$m(H) = m\Big(\Big[9^2, 9^2+\frac{1}{3^2}\Big)\Big) = 9^2 + \frac{1}{3^2} - 9^2 = \frac{1}{9}.$$

9. *Да бисмо одредили Лебегову мера скупа* $S = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\Big[3, 3+\frac{1}{n}\Big]$, *приметимо да можемо искористити особину мере (непрекидност за опадајуће низове). Како је*

$$\Big[3, 3+\frac{1}{n+1}\Big] \subseteq \Big[3, 3+\frac{1}{n}\Big],\ n\in\mathbb{N}, \quad \textit{и} \quad m\Big(\Big[3,3+\frac{1}{1}\Big]\Big) = 1 < +\infty,$$

*то је*

$$m(S) = \lim_{n\to+\infty} m\Big(\Big[3, 3+\frac{1}{n}\Big]\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(3+\frac{1}{n}-3\Big) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

## Мерљиве функције

Дефиниција 7. *Функција* $f : E \to T$ $(T \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^p\},\ p \geq 1)$ *је мерљива у Лебеговом смислу на* $E$ *ако за сваки отворени скуп* $O$ *у* $T$ *важи* $f^{-1}(O)$ *мерљив у смислу Лебега.*

Напомена. Убудуће када год кажемо мерљива функција, подразумеваћемо да се ради о мерљивости у Лебеговом смислу.

Теорема 5. *Функција* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \subseteq \mathbb{R}^k$, *је мерљива на* $E$ *ако је скуп*

$$E(f > c) = \{x \in E \mid f(x) > c\}$$

*мерљив за свако* $c \in \mathbb{R}$.

Напомена. Уместо услова $f(x) > c$ у теореми 5. може да стоји један од следећих услова: $f(x) \geqslant c$, $f(x) < c$, $f(x) \leqslant c$.

Ако је $f$ непрекидна реална функција на $E$ тада је $f$ мерљива на $E$, јер је скуп $E(f > c) = f^{-1}(c, +\infty)$ отворен за свако $c \in \mathbb{R}$, па самим тим Борелов, а сваки Борелов скуп је и мерљив. У општем случају обрнуто тврђење не важи, тј. из мерљивости не следи непрекидност, што следи из дефиниције мерљивог скупа.

Теорема 6. *Нека су* $f$ *и* $g$ *коначне мерљиве функције на* $E \subseteq \mathbb{R}^k$ *и нека је* $F$ *непрекидна функција на* $\mathbb{R}^2$. *Тада је и функција* $h(x) = F(f(x), g(x))$, $x \in E$, *мерљива.*

Пример 15. *Скуп* $A \subseteq \mathbb{R}^k$ *је мерљив скупако и само ако је карактеристична функција*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

*мерљива функција. Заиста, како је*

$$\{x \in \mathbb{R}^k \mid \chi_A(x) > c\} = \begin{cases} \mathbb{R}^k, & c < 0, \\ A, & 0 \leqslant c < 1, \\ \emptyset, & c \geqslant 1, \end{cases}$$

*и скупови* $\emptyset$ *и* $\mathbb{R}^k$ *су мерљиви, закључујемо да је функција* $\chi_A$ *мерљива ако и само ако је скуп* $A$ *мерљив.*

Теорема 7. *Свака монотона функција је мерљива.*

Доказ. Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ растућа (аналогно се доказује ако је функција опадајућа). Посматрајмо скуп $A = \{x \mid f(x) > c\}$, где је $c$ произвољан реалан број. Ако је $A = \emptyset$, тада је $A$ мерљив.

Нека је $A \neq \emptyset$. Тада постоје $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, и за свако $x \in (x_1, x_2)$ важи $f(x_2) \geqslant f(x) \geqslant f(x_1) > c$, тј. $x \in A$, па закључујемо да је $A$ облика $(a, +\infty)$ или $[a, +\infty)$. Како су оба ова интервала мерљиви скупови, следи да је и у овом случају скуп $A$ мерљив.

Дакле, свака монотона функција јесте мерљива. □

Дефиниција 8. *За неко својство кажемо да важи скоро свуда (у ознаци с.с.) ако је мера скупа на коме оно не важи једнака нули.*

Пример 16. *За мерљиве функције* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *дате са*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 2, & x \in \mathbb{I}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 3, & x \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

*важи* $f = g$ *на* $\mathbb{Q}$, *скуп рационалних бројева је пребројив и* $m(\mathbb{Q}) = 0$, *док је* $f \neq g$ *на скупу ирационалних бројева и притом је* $m(\mathbb{I}) = m(\mathbb{R}) > 0$. *Дакле,* $f \neq g$ *с.с. на* $\mathbb{R}$.

## 1 Лебегов интеграл

Лебегов приступ проблему је само један у низу примера да не треба ићи утабаним стазама, већ направити нови пут како би дошли до врата за свет у коме важе нека нова правила, у коме до тада немогуће постаје могуће. Основна разлика у приступу Риманове и Лебегове интеграције јесте да је Лебег, за разлку од Римана који је вршио дељење домена функције, делио кодомен функције.

Увек постоји више приступа неком проблему. Следећи пример је управо аналогија различитих приступа интеграцији. На столу су разбацани новчићи различитих вредности. Постоје два начина пребројавања укупне суме новчића која се налази на столу. Први начин би био да редом одвајамо новчиће и сабирањем њихове вредности дођемо до коначне суме. Овај начин је аналоган Римановом приступу интеграције. Други начин би био тај да прво сложимо новчћице по групама истих вредности а затим множењем вредности одређене групе новчицћа са бројем новчића у тој групи и сабирањем вредности сваке групе дођемо до укупне суме, што би била аналогија са Лебеговом интеграцијом. Лебегов интеграл можемо посматрати уопштено као интеграл по некој мери на неком скупу који нема ни векторску структуру ни тополошку, већ само $\sigma-$алгебру.

Упоредимо конструкцију Римановог и Лебеговог интеграла на примеру ненегативне ограничене мерљиве функције на $[a, b]$. При израчунавању Римановог интеграла прави се подела $[a, b]$ на подинтервале и функција $f$ се апроксимира функцијама које су константне на датим подинтервалима.
При израчунавању Лебеговог интеграла бира се низ функција које расту према $f$. Специјално, ако се изабере низ функција датих у доказу теореме **??**, тада се подела врши на кодомену функције $f$. Добија се низ подинтервала $I_j$ и функција $f$ се апроксимира константом на сваком од скупова $f^{-1}(I_j)$. Конструкција Римановг и Лебеговог интеграла је дата на сликама.