Пример колоквијума из Линеарне алгебре 1

1. Нека су дати потпростори W_1, W_2 простора $\mathbb{R}_2[x]$ са:

$$W_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0\}, \quad W_2 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p'(0) = p''(0)\}.$$

   (а) Одредити базу и димензију простора $W_1 \cap W_2$ и $W_1 + W_2$.

   (б) Испитати да ли је $W_1 + W_2 = \mathbb{R}_2[x]$.

   (в) Одредити линеарно пресликавање $f : W_1 \to \mathbb{R}^3$ такво да је $Im(f) = \mathcal{L}\{(1,0,1)\}$.

2. Нека је дато пресликавање $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ са $f(x,y,z) = (x+y,\ y+z, x+z)$ и пресликавање $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ са $g(x,y) = a + x + y$, $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

   (а) Испитати да ли су пресликавања линеарна.

   (б) За пресликавања која су линеарна одредити димензију језгра и слике.

   (в) Да ли је неко пресликавање изоморфизам? Доказати уколико јесте.

3. Нека су дате матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

   (а) Одредити A^n за произвољно $n \in \mathbb{N}$.

   (б) Одредити $\det B$ без коришћења Сарусовог правила.

   (в) Решити матричну једначину $A^2X + I = 2A^TX + B$.

4. Дискутовати по $a, b \in \mathbb{R}$ и решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & (a+1)y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & + & ay & + & z & = & 1 \\ (a-1)x & + & (a-4)y & - & 3z & = & b \end{array}.$$