

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ТОПОЛОГИЈЕ 1

07.12.2020.

1. [5 поена] Нека је дата фамилија $\mathcal{B} = \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
- (а) Доказати да је $\mathcal{B}$ база неке топологије $\mathcal{T}$ на $\mathbb{R}$.
 - (б) Испитати да ли $(\mathbb{R}, \tau)$ задовољава другу аксиому пребројивости?
 - (в) Доказати да је $\mathcal{T}_L \subseteq \mathcal{T}$.
2. [4 поена] Испитати истинитост следећег исказа и ако је тачан доказати га, у супротном оповргнути. Тополошки простор $(X, \mathcal{T})$ задовољава прву аксиому пребројивости ако и само ако задовољава другу аксиому пребројивости.
3. [4 поена] Доказати да је тополошки производ простора који задовољавају прву аксиому пребројивости, такође задовољава прву аксиому пребројивости.
4. [5 поена] Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $A \subseteq X$. Доказати да је $\text{Int}A = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$. Ако је $X = \{a, b, c, d\}$ и $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c\}\}$, одредити $\text{Int}A$, $\overline{A}$ и ∂A , скупа $A = \{a, b, d\}$.
5. [5 поена] Нека је $(X, \mathcal{T})$ произвољан тополошки простор и $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ непрекидно пресликавање.
- (а) Доказати да је пресликавање $F : (X \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_{X \times \mathbb{R}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ дато са $F(x, y) = y - f(x)$ непрекидно.
 - (б) Доказати да је скуп $A = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$ затворен у $(X \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_{X \times \mathbb{R}})$
- ★ [3 поена (замена)] Ако је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор и $A \subseteq X$, тада је

$$\text{Int}A = \emptyset \Leftrightarrow X \setminus A \text{ је свуда густ у } X.$$