ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ТОПОЛОГИЈЕ 1

11.1.2021.

1. [**5 поена**] Нека су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$, респективно, T_0 и T_2 тополошки простори. Испитати да ли тополошки производ $(X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y})$ је T_0 тополошки простор и да ли је T_2 тополошки простор?

2. [**4 поена**] Нека је $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ хомеоморфизам. Ако је $(X, \mathcal{T}_X)$ путевима повезан тополошки простор, доказати да је $(Y, \mathcal{T}_Y)$ путевима повезан тополошки простор. Да ли важи обрат тврђења?

3. [**5 поена**] Нека је B повезан скуп у тополошком простору $(X, \mathcal{T})$. Нека је $\{A_i \mid i \in I\}$ фамилија повезаних подскупова скупа X таква да је $A_i \cap B \neq \emptyset$ за све $i \in I$. Доказати да је тада $\overline{B} \cup \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$ повезан скуп у тополошком простору $(X, \mathcal{T})$.

4. [**5 поена**] Нека је $f : X \to Y$ затворено пресликавање тополошког простора $(X, \mathcal{T}_X)$ на тополошки простор $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Нека је за свако $y \in Y$ скуп $f^{-1}(\{y\})$ компактан у X. Доказати да:

(а) ако је $(X, \mathcal{T}_X)$ Хаусдорфов простор, тада је и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ Хаусдорфов простор;

(б) ако је B компактан скуп у $(Y, \mathcal{T}_Y)$, тада је $f^{-1}(B)$ компактан у $(X, \mathcal{T}_X)$.

5. [**4 поена**] Испитати компактност и повезаност подскупа A тополошког простора $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{d_2})$, ако је

$$A = \{(x, \sqrt[n]{x}) \mid x \in [0, 3], n \in \mathbb{N}\} \cup ([2, 3] \times \{1\}).$$