Први колоквијум из Аналитичке геометрије

11. децембар 2015. године

1. (6 поена)

Дати су вектори $\vec{a} = (2\lambda, 1, 1-\lambda)$, $\vec{b} = (-1, 3, 0)$ и $\vec{c} = (5, -1, 8)$:

а) одредити λ тако да вектор $\vec{a}$ заклапа једнаке углове са векторима $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

б) за тако нађено λ одредити угао вектора $\vec{c}$ према равни одређеној векторима $\vec{b}$ и $\vec{a}$;

в) за исто λ одредити запремину и једну од висина паралелопипеда конструисаног над тим векторима.

2. (6 поена)

Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чије су ивице дужине 1. Правоугли Декартов координатни систем $Axyz$ има почетак у темену A, а његови јединични коорнинатни вектори су $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \overrightarrow{AA_1}$. Други Декартов координатни систем $O'x'y'z'$ има почетак у тачки O' у пресеку дијагонала коцке, а његови јединични координатни вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, и $\vec{k}$ су јединични вектори вектора $\overrightarrow{O'B}$, $\overrightarrow{O'D}$ и $\overrightarrow{O'A_1}$. Изразити координате (x, y, z) произвољне тачке M у односу на координатни систем $Axyz$ помоћу координата (x', y', z') исте тачке у односу на координатни систем $O'x'y'z'$. Одредити координате темена коцке у оба система.

3. (6 поена)

Раван α која пролази кроз тачку $M(1, 2, -1)$, паралелна је са правама $l_1 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-k}{3} = \dfrac{z-2}{1}$ и $l_2 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$. У једначинама праве l_1 одредити параметар k тако да растојање праве l_1 од равни α буде два пута мање од растојања праве l_2 од исте равни, а затим израчунати најкраће растојање правих l_1 и l_2.

4. (5 поена)

Дате су праве $p : \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-0}{-4}$, $q : \begin{cases} 2x + y - 14 = 0 \\ 2x - z - 16 = 0 \end{cases}$ и тачка $A(-5, 0, 4)$ у $\mathbb{E}^3$.

а) Одредити једначину равни α која је нормална на правој q и садржи тачку A.

б) Одредити једначину сфера полупречника 2 које додирују раван α.