# Analitičke forme prekidacke funkcije

- Ako se vratimo na definiciju prekidacke funkcije, setimo se da jedna promenljiva sa ili bez komplementa, sama predstavlja jednu prekidacku funkciju.
- Kog unarnih operacija, funkcija *f(x)* =*x*,je preslikana nezavisno promenljiva.
- Druga funkcija predstavlja komplement promenljive, $f(x) = \bar{x}$

# Analitičke forme prekidacke funkcije

- Prema tome jedna promenljiva, sa ili bez komplementa predstavlja prekidacku funkciju.
- Ovakvu promenljivu obelezavamo na sledeci nacin:

$$\tilde{x}$$

# Analitičke forme prekidacke funkcije

- Ovakav nacin oznacavanja naziva se ***literal***, a literal predstavlja prekidacku promenljivu sa ili bez komplementa.

$$\widetilde{x}$$

# Definicije i teoreme

<u>Definicija 1.</u> **Elementarni proizvod** ili konjunkcija je izraz oblika $\tilde{x}_{i_1}\tilde{x}_{i_2}\ldots\tilde{x}_{i_n}$, gde je $\tilde{x}_i \in \{x_i, \overline{x_i}\}$, a $i_1, i_2, \ldots, i_n$ su različite vrednosti iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$.

<u>Definicija 2.</u> **Elementarna suma** ili disjunkcija je izraz oblika $\tilde{x}_{i_1} + \tilde{x}_{i_2} + \ldots + \tilde{x}_{i_n}$, gde je $\tilde{x}_i \in \{x_i, \overline{x_i}\}$, a $i_1, i_2, \ldots, i_n$ su različite vrednosti iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Ovo znači da ne moraju nužno biti prisutni svi indeksi iz skupa indeksa.

# Definicije i teoreme

Definicija 3. **Potpun proizvod** ili minterm je elementarni proizvod u koji ulaze sve promenljive.

Definicija 4. **Potpuna suma** ili maksterm je elementarna suma u koju ulaze sve promenljive.

Definicija 5. Proizvod elementarnih suma $S_1 S_2 .. S_m$ naziva se **konjunktivna normalna forma (KNF).**

Definicija 6. Suma elementarnih proizvoda $P_1 + P_2 + ... + P_m$ naziva se **disjunktivna normalna forma (DNF).**

Definicija 7. KNF u kojoj su sve elementarne sume potpune naziva se **potpuna konjuktivna normalna forma (PKNF).**

$\tilde{x}_i = \{x_i$ ako je $f_i = 1$ ili $\overline{x_i}$ ako je $f_i = 0\}$

Definicija 8. DNF u kojoj su svi elementarni proizvodi potpuni naziva se **potpuna disjunktivna normalna forma (PDNF).**

$\tilde{x}_i = \{x_i$ ako je $f_i = 0$ ili $\overline{x_i}$ ako je $f_i = 1\}$

# Definicije i teoreme

**Teorema 1.** Svaka prekidačka funkcija osim konstante 1 može se na jedinstven način napisati u obliku:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = S_{i_1} S_{i_2} \ldots S_{i_m} \ ,$$

gde su $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots S_{i_m}$ potpune sume koje odgovaraju vektorima nezavisno promenljivih sa indeksima $i_1, i_2, \ldots i_m$ na kojima funkcija ima vrednost 0.

**Teorema 2.** Svaka prekidačka funkcija osim konstante 0 može se na jedinstven način napisati u obliku:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = P_{i_1} + P_{i_2} + \ldots + P_{i_m} \ ,$$

gde su $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots P_{i_m}$ potpuni proizvodi koji odgovaraju vektorima nezavisno promenljivih sa indeksima $i_1, i_2, \ldots i_m$ na kojima funkcija ima vrednost 1.

# Definicije i teoreme

<u>Definicija 9.</u> Suma po modulu 2 elementarnih proizvoda $P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_m$ naziva se **polinomna normalna forma (PNF).**

<u>Definicija 10.</u> PNF u kojoj su svi elementarni proizvodi potpuni naziva se **potpuma polinomna normalna forma (PPNF).**

**Teorema 3.** Svaka prekidačka funkcija osim konstante 0 može se na jedinstven način napisati u obliku:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_m ,$$

gde su $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_m}$ potpuni proizvodi koji odgovaraju onim vektorima nezavisno promenljivih sa indeksima $i_1, i_2, \ldots, i_m$ na kojima funkcija ima vrednost 1. Drugim rečima, svaka PF (osim konstante nula) ima svoju jedinstvenu PPNF.

# Definicije i teoreme

**Teorema 1.** Svaka prekidačka funkcija osim konstante 1 može se na jedinstven način napisati u obliku:

$$f(x_1,\dots,x_n) = S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_m} \;,$$

gde su $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots S_{i_m}$ potpune sume koje odgovaraju vektorima nezavisno promenljivih sa indeksima $i_1, i_2, \dots i_m$ na kojima funkcija ima vrednost 0.

**Teorema 2.** Svaka prekidačka funkcija osim konstante 0 može se na jedinstven način napisati u obliku:

$$f(x_1,\dots,x_n) = P_{i_1} + P_{i_2} + \dots + P_{i_m} \;,$$

gde su $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots P_{i_m}$ potpuni proizvodi koji odgovaraju vektorima nezavisno promenljivih sa indeksima $i_1, i_2, \dots i_m$ na kojima funkcija ima vrednost 1.

# Definicije i teoreme

<u>Definicija 11.</u> **Prost proizvod** je izraz oblika $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$, gde su $i_1, i_2, \ldots, i_n$ međusobno različiti brojevi iz skupa indeksa $\{1,2,\ldots,n\}$. Rezlikuje se u odnosu na elementarni proizvod u tome što *ne sadrži komplemente* promenljivih.

<u>Definicija 12.</u> Suma po modulu 2 međusobno različitih prostih proizvoda zove se **kanonički polinom ili polinom po modulu 2 (zove se još i polinom Reed-Müller-a).**

**Teorema 4.** Svaka prekidačka funkcija osim konstante 0 može se na jedinstven način napisati u obliku:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus \ldots \oplus c_nx_n \oplus c_{n+1}x_1x_2 \oplus c_{n+2}x_1x_3 \oplus \ldots \oplus c_{2^n-1}x_1x_2\ldots x_n,$$

gde su $c_i \in \{0,1\}$ i $i \in \{0,1,\ldots 2^n - 1\}$.

Napomena: Dve funkcije se mogu upoređivati samo na nivou *potpunih* normalnih formi.

# Čitanje potpunih normalnih formi iz tablične forme PF

- Iz tablice istinitosti se relativno jednostavno mogu dobiti potpune normalne forme prekidacke funkcije (PDNF i PKNF) i to direktnim citanjem, bez potrebe za bilo kakvim matematickim transformacijama.

# Čitanje PDNF funkcije na osnovu tablice istinitosti

•Prvo da se podsetimo: potpuna disjunktivna normalna forma (PDNF) prekidacke funkcije je: *suma potpunih proizvoda*.

•Dakle svaka PDNF se formira prema istom šablonu:

$$f(x_1,\dots,x_n)_{PDNF} = \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\dots\widetilde{x}_n + \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\dots\widetilde{x}_n + \dots + \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\dots\widetilde{x}_n$$

# Čitanje PDNF funkcije na osnovu tablice istinitosti

$$f(x_1,\ldots,x_n)_{PDNF} = \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\ldots\widetilde{x}_n + \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\ldots\widetilde{x}_n + \ldots + \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\ldots\widetilde{x}_n$$

- U odnosu na celu sumu, jedan sabirak je zapravo jedan proizvod.
- Sabirci (proizvodi) se medjusobno razlikuju po tome šta je komplementirano od promenljivih, a šta nije.

# Čitanje PDNF funkcije na osnovu tablice istinitosti

$$f(x_1,\dots,x_n)_{PDNF} = \tilde{x}_1\tilde{x}_2\dots\tilde{x}_n + \tilde{x}_1\tilde{x}_2\dots\tilde{x}_n + \dots + \tilde{x}_1\tilde{x}_2\dots\tilde{x}_n$$

- Svi sabirci predstavljaju *potpune proizvode* (dakle u svakom od sabiraka je prisutna svaka promenljiva, pri cemu je neka komplementirana, a neka nije)

# Čitanje PDNF funkcije na osnovu tablice istinitosti

- Na onim mestima gde funkcija ima vrednost 1, pogleda se koje vrednosti imaju promenljive, i na osnovu njih se formira jedan proizvod, i to tako što: promenljiva koja tu ima vrednost 0 će ucestvovati u proizvodu komplementirana, a ona koja ima vrednost 1 nekomplementirana.
- Koliko ima jedinica (u koloni za vrednost f-je), toliko će biti i proizvoda.
- Na kraju se ti proizvodi sumiraju, i dobije se PDNF funkcije.

# Čitanje PKNF funkcije na osnovu tablice istinitosti

- Na onim mestima gde funkcija ima vrednost 0 (za razliku od citanja PDNF-a, gde su nas zanimala mesta gde ima vrednost 1), formiraće se po jedna suma, a u njoj će one promenljive koje imaju vrednost 0 biti nekomplementirane, a one koje imaju vrednost 1 – komplementirane (opet sve suprotno nego kod PDNF-a).
- Zatim se te sume pomnoze i dobije se PKNF funkcije.

# Čitanje PPNF na osnovu tablice istinitosti

- Citanje je isto kao citanje PDNF, samo umesto operacije "+" izmedju potpunih suma stoji operacija "$\oplus$"

# Transformacije analitičkih formi prekidackih funkcija
# Prosirivanje formi do potpunih

DNF $\rightarrow$ PDNF $\qquad 1 = x_i + \bar{x}_i$

Svaku jedinicu koja se javi u DNF-u zamenjujemo sa

$$1 = x_i + \bar{x}_i$$

Cilj je da svaki proizvod u DNF bude dopunjen do Potpunog, a to znaci da mu se dodaju sve one promenljive koje nedostaju, pomoću gore navedene sume.

# Transformacije analitičkih formi prekidackih funkcija
# Prosirivanje formi do potpunih

KNF $\rightarrow$ PKNF $\qquad 0 = x_i \cdot \overline{x}_i$

Svaku nulu koja se javi u KNF-u zamenjujemo sa:

$$0 = x_i \cdot \overline{x}_i$$

Cilj je da svaka suma u KNF bude dopunjena do potpune, što znaci da joj se dodaju sve promenljive koje eventualno nedostaju.

# Transformacije analitičkih formi prekidackih funkcija
# Prosirivanje formi do potpunih

PNF $\rightarrow$ PPNF

$$1 = x_i \oplus \bar{x}_i$$

Svaku jedinicu koja se javi u PNF-u zamenjujemo sa:

$$1 = x_i \oplus \bar{x}_i$$

Cilj je da svaki proizvod u PNF bude dopunjen do potpunog (a to znaci da mu se dodaju sve one promenljive koje nedostaju, pomoću gore navedene sume po modulu dva.

# Transformacije analitičkih formi prekidackih funkcija

PDNF$\rightarrow$PPNF $\qquad + \rightarrow \oplus$

- Ovo je najjednostavnija transformacija.
- U PDNF-u svaki plus zamenimo znakom suma po modulu dva $\oplus$ i dobijemo PPNF.

# Transformacije analitičkih formi prekidackih funkcija

DNF $\rightarrow$ PNF

$$x_1 + x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$$

| x1 | x2 | + |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Iz tablice za OR(+) izvucemo PDNF, zatim ga pretvorimo u PPNF (tako što znak + zamenimo znakom $\oplus$. Nakon toga svaku nadvucenu promenljivu $\bar{x}_i$ zamenimo sa $1 \oplus x_i$

$$x_1 + x_2 = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2 = \text{(PDNF)}$$
$$= \bar{x}_1 x_2 \oplus x_1 \bar{x}_2 \oplus x_1 x_2 = \text{(što je PPNF)}$$
$$= (1 \oplus x_1) x_2 \oplus x_1 (1 \oplus x_2) \oplus x_1 x_2 =$$
$$= x_1 x_2 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 =$$
$$= x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$$

# Transformacije analitičkih formi prekidackih funkcija

PNF $\rightarrow$ DNF

$$x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$$

PPNF$\rightarrow$ P$\oplus_2$

$$\bar{x}_i = 1 \oplus x_i$$

$$x_i \oplus x_i = 0$$

# Shannonova teorema razvoja

- Šenonova (Shannon) teorema razvoja omogućava da se izvrši *dekompozicija* prekidacke funkcije na dve.
- Ovo bi prakticno znacilo da se jedno slozeno logicko kolo, deli na dva jednostavnija logicka kola.

# Shannonova teorema razvoja

- Shannonova teorema razvoja vazi za odredjenu promenljivu funkcije.
- Ako na primer imamo prekidacku funkciju od n promenljivih, Šenonova teorema razvoja po promenljivoj $x_i$ izgleda ovako:

$$f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n) = x_i \cdot f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n) + \bar{x}_i \cdot f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

ili

$$f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n) = x_i \cdot f(x_i = 1) + \bar{x}_i \cdot f(x_i = 0)$$

# Shannonova teorema razvoja

- ili

$$f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n) = (x_i + f(x_i=1)) \cdot (\overline{x}_i + f(x_i=0))$$

$$f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n) = x_i \cdot f(x_i=1) \oplus \overline{x}_i \cdot f(x_i=0)$$

- Primenom Šenonove teoreme razvoja po svim promenljivama prekidacke funkcije, dolazi se do potpunih normalnih formi.