Minimizacija prekidackih funkcija

•Minimizacija je postupak određivanja najprostijeg izraza kojim se može predstaviti prekidačka funkcija.
•Najveći značaj kod prekidačkih funkcija ima minimizacija izraza predstavljenog u obliku DisjunktivneNormalneForme i KonjuktivneNormalneForme.

Minimizacija prekidackih funkcija

- Funkcija g(x1, x2,... xn) je **implicenta** funkcije f(x_1, x_2,... x_n) ako ima vrednost 1 na svim vektorima na kojima i f ima vrednost 1.
- Funkcija g(x_1, x_2,... x_n) je **implikanta** funkcije f(x_1, x_2,... x_n) ako ima vrednost 0 na svim vektorima na kojima i f ima vrednost 0.

Minimizacija prekidackih funkcija

- **Prosta implikanta** funkcije f je elementarni proizvod čiji ni jedan deo nije implikanta funkcije f.
- **Prosta implicenta** funkcije f je elementarna suma čiji ni jedan deo nije implicenta funkcije f.
- **Bitna implikanta (implicenta) je** prosta implikanta (implicenta) kojoj pripada neki vektor na kojem funkcija ima vrednost 1(0), a koji ne pripada ni jednoj drugoj prostoj implikanti (implicenti).

Minimizacija prekidackih funkcija

•**Član** je elementarni proizvod ili suma.
•**Degenerisani član** je član koji se sastoji od samo jednog slova.

Kriterijumi minimizacije

- DNF (KNF) prekidačke funkcije je **minimalna**, ukoliko ne postoji druga DNF (KNF) u kojoj je zbir broja slova u nedegenerisanim članovima i broja (svih) članova manji.

Kriterijumi minimizacije

- Minimalna DNF (KNF) prema prethodno navedenim kriterijumima mora predstavljati sumu prostih implikanti (proizvod prostih implicenti). Obrnuto ne važi.

Kriterijumi minimizacije

- DNF (KNF) je **nepreopširna** ako se ni jedan član iz nje ne može udaljiti ili zameniti svojim delom a da dobijeni izraz predstavlja i dalje tu funkciju.
- Metode minimizacije se dele na **grafičke** i **algoritamske**.
- Grafički su jednostavniji, ali su pogodni samo za funkcije manjeg broja promenljivih.

Minimizacija prekidackih funkcija Karnoovim mapama

Minimizacija prekidackih funkcija Karnoovim mapama predstavlja graficku metodu.

Karnoova mapa

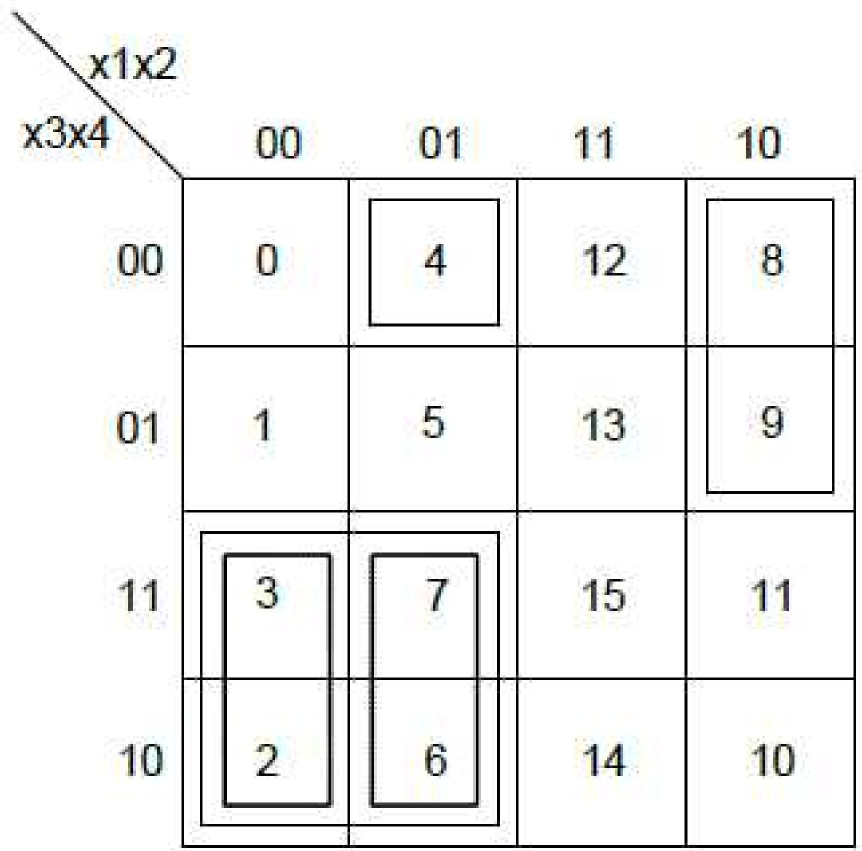
- Karnoova mapa je jedan od nacina zadavanja (jedna od formi) prekidacke funkcije.
- Minimizacija ovom metodom podrazumeva da je funkcija predstavljena Karnoovom mapom.
- Proces minimizacije se sastoji od nekoliko jednostavnih koraka.

Karnoova mapa

- Ovom metodom moguće je dobiti minimalnu **D**NF i minimalnu KNF funkcije.
- Postupak je prakticno gotovo isti uz male razlike u zavisnosti od prirode trazene forme!

Karnoova mapa

Karnoova mapa za funkciju od 4 promenljive $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$



Karnoova mapa

- **Pravilna figura (zona) ranga r je** skup 2^r ćelija sa (n-r) jednakih koordinata.
- r = 0 - pojedinačne ćelije (*potpuni član*)
- r = n - cela mapa (*konstanta,* odnosno tada funkcija ima vrednost 0 ili 1)

Karnoova mapa
Postupak nalazenja minimalne DNF

- Na Karnoovoj mapi uociti sva polja u kojima je upisana 1.
- Zaokruzivanjem obeleziti na mapi oblasti gde su jedinice grupisane jedna pored druge (susedne), pod uslovima:

Karnoova mapa
Postupak nalazenja minimalne DNF

- zona(figura) mora biti konveksna;
- zona(figura) mora imati ukupan broj jedinica(polja) jednak 2^{n}, moze se sastojati od jedne jedinice, dve, cetiri, ili osam, šesnaest itd... broj jedinica mora biti stepen dvojke
- polja koja su krajnje levo na mapi smatraju se susednim sa poljima koja su krajnje desno
- isto vazi i za krajnje gornja i krajnje donja polja – kao da je mapa istovremeno presavijena u krug i po vertikali.

Karnoova mapa
Postupak nalazenja minimalne DNF

- zone medjusobno mogu da se presecaju, jedno polje moze da obuhvati vise zona.
- postupak minimizacije svodi se na to da ima *što manje* zona i da svaka zona bude *što veća*.

Karnoova mapa
Postupak nalazenja minimalne DNF

- svaka zona odgovara jednom sabirku (tj. proizvodu) minimalne sume proizvoda.
- koliko ima zona, toliko ima proizvoda, pa se zato tezi da se ima što manje zona, a da sve jedinice budu pokrivene.

Formiranje jednog proizvoda na osnovu jedne zone

- svako polje u mapi odgovara jednoj kombinaciji ulaznih promenljivih
- posmatramo jednu zonu I polja koja cine tu zonu tako sto posmatramo kombinacije vrednosti promenljivih na svim poljima iz te zone
- uocimo koje promenljive *ne menjaju svoju vrednost na svim poljima te zone jer samo te promenljive ulaze u prozivod.*

Formiranje jednog proizvoda na osnovu jedne zone

•ako promenljiva na svim poljima te zone ima vrednost **1**, onda će ona u proizvodu ucestvovati **ne**komplementirana.

Formiranje jednog proizvoda na osnovu jedne zone

- ako promenljiva na svim poljima te zone ima vrednost **0**, onda će ona u proizvodu ucestvovati komplementirana.

Karnoova mapa
Postupak nalazenja minimalne KNF

- umesto sume proizvoda trazimo proizvod suma
- obelezavamo zone u kojima su upisane 0.
- Svaka zona sada ne cini sabirak(prozvod) vec cinilac(sumu).
- promenljive koje zadrzavaju nulu na zoni **nisu** komplementirane, a one koje zadrzavaju jedinicu se komplementiraju.

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

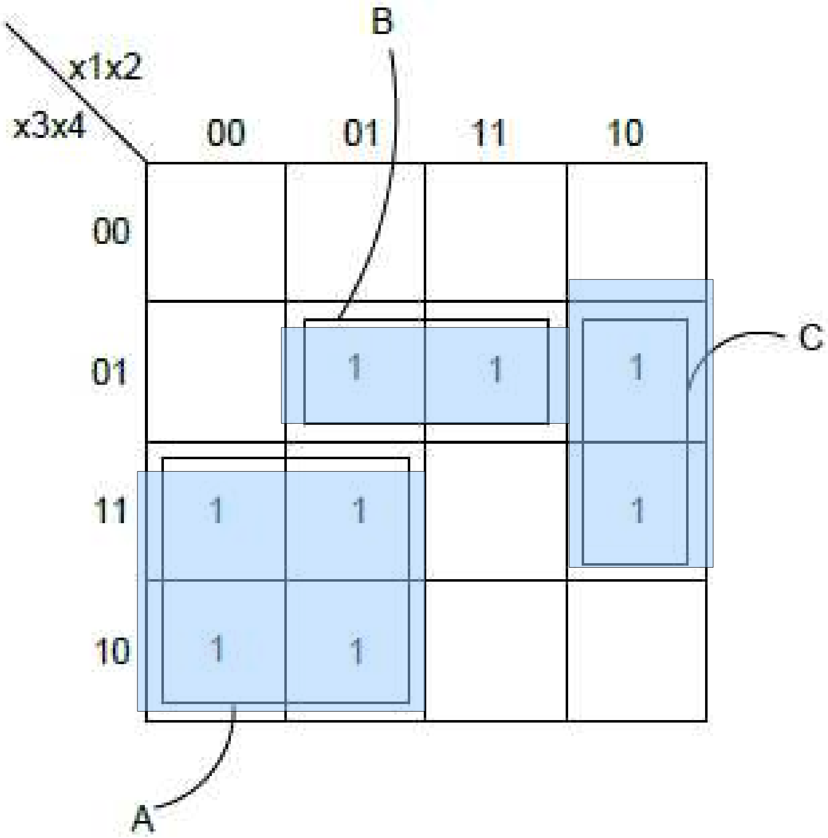
Odrediti pomoću Karnoove mape bar jednu minimalnu DNF prekidačke funkcije $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ zadate skupom indeksa:

$f^{(1)} = \{2,3,5,6,7,9,11,13\}$

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

- Popunjavamo Karnoovu mapu za konkretnu funkciju I trazimo pravilne zone sto je moguce veceg ranga tako da svi vektori na kojima funkcija ima vrednost 1 budu pokriveni.

Primeri minimizacije Karnoovom mapom



$$A = \bar{x}_1 x_3$$

$$B = x_2 \bar{x}_3 x_4$$

$$C = x_1 \bar{x}_2 x_4$$

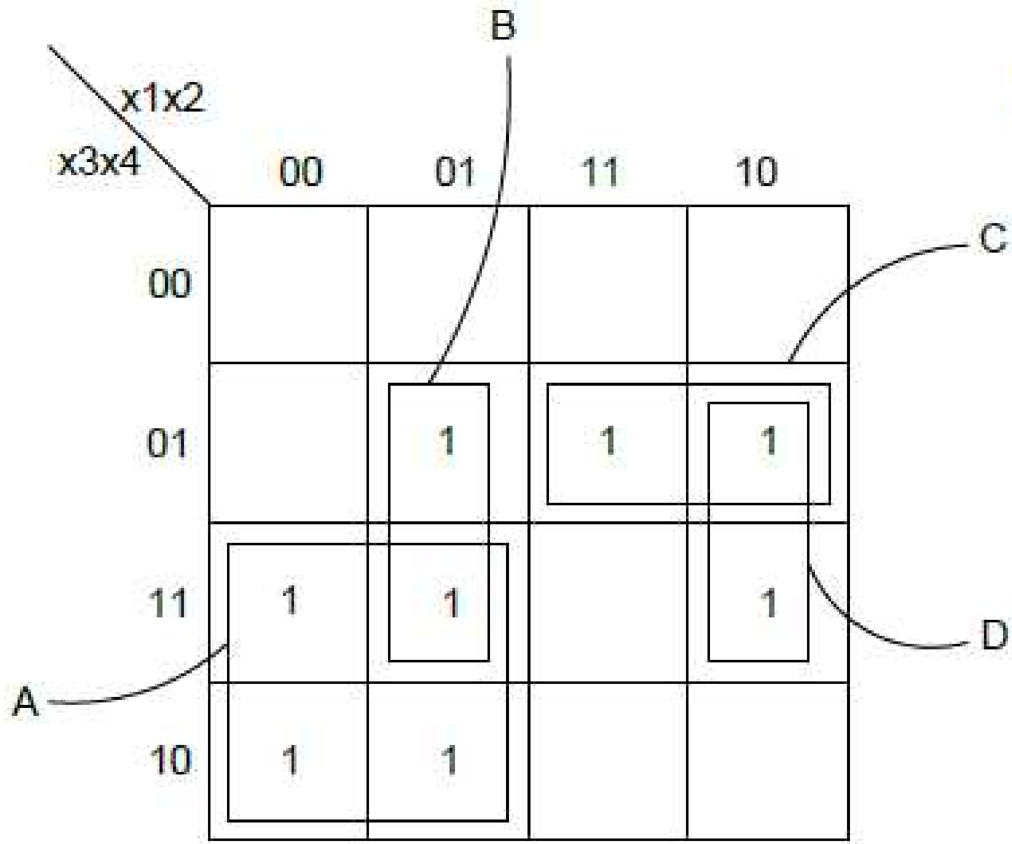
$$f = \bar{x}_1 x_3 + x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_4$$

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

- Treba obratiti pažnju da je moguće pogrešnim izborom pravilnih zona (figura) napraviti grešku i za istu Karnoovu mapu dobiti i drugačija rešenja, koja nisu minimalna, pa nisu ni tačna.

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

- Primer jednog pogrešnog odabira pravilnih zona



$$f=\bar{x}_1x_3+\bar{x}_1x_2x_4+x_1\bar{x}_3x_4+x_1\bar{x}_2x_4$$

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

- Poređenjem ovog rešenja sa prethodnim, prvo je minimalno, dok drugo nije.
- Treba voditi računa da se formiraju pravilne zone što većeg ranga, i da bude što manji broj pravilnih zona..

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

- Odrediti minimalnu DNF funkcije zadate izrazom:

$f^{(0)} = \{1,4,5,6,11,12,13,14,15\}$

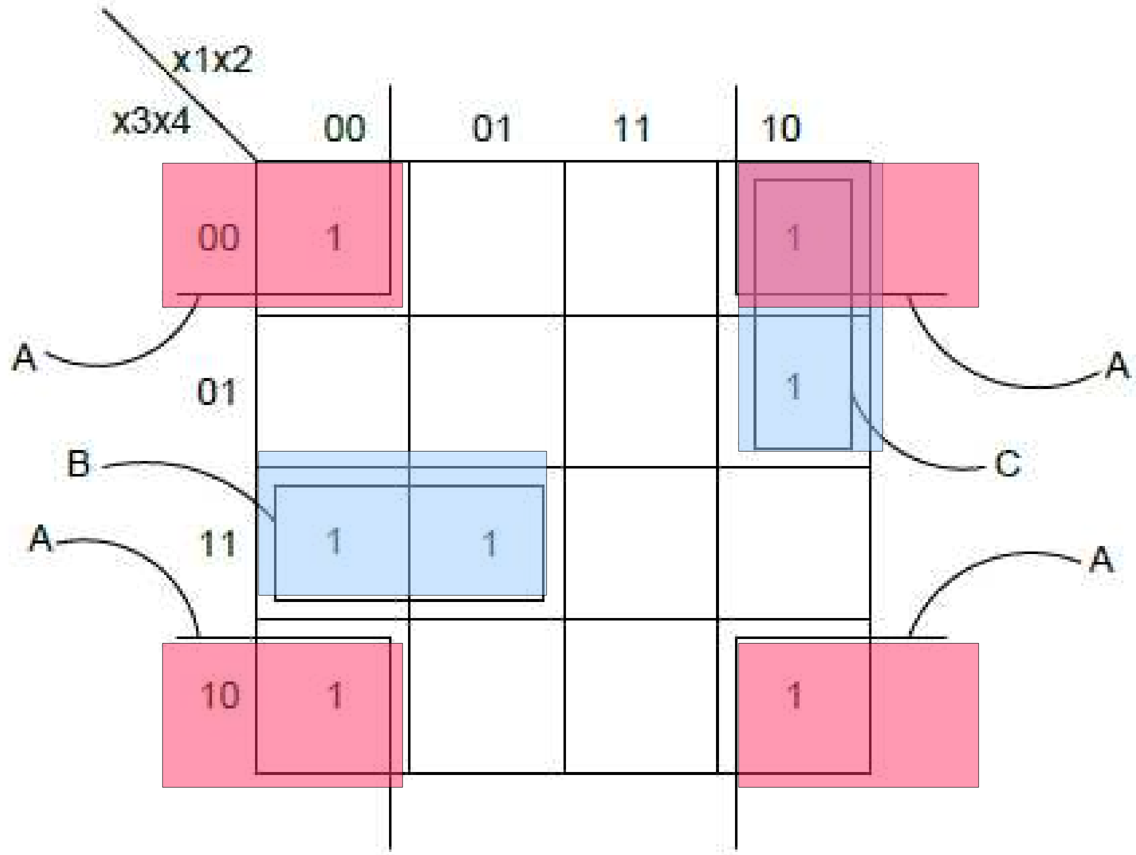
Trazimo DNF pa odredjujemo skup vektora na kome funkcija ima vrednost 1.

$f^{(1)}=\{0, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

$f^{(1)}=\{0, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$

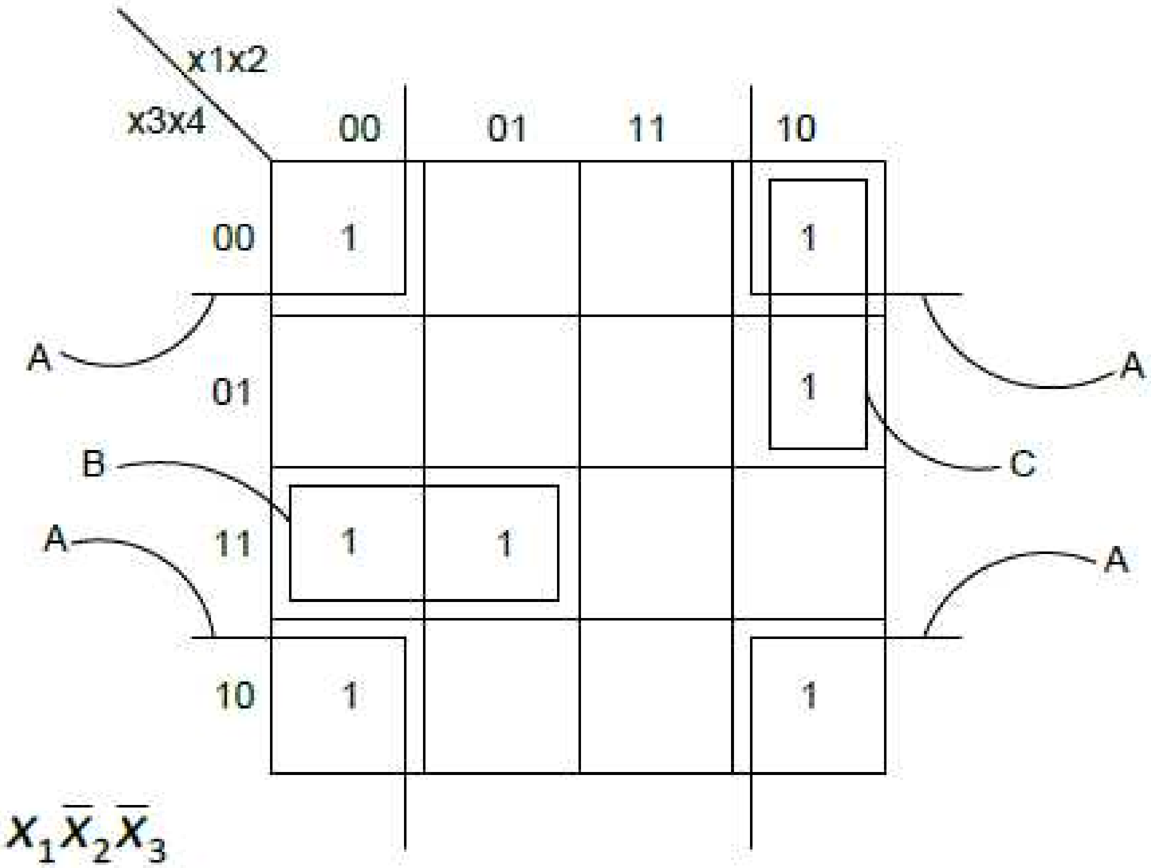
- Popunjavamo mapu I oznacavamo zone



Primeri minimizacije Karnoovom mapom

$f^{(1)}=\{0, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$

- Popunjavamo mapu I oznacavamo zone



$$f=\overline{x}_2\overline{x}_4+\overline{x}_1x_3x_4+x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$$

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

Predstaviti Karnoovom mapom funkciju $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ zadatu skupom decimalnih indeksa $f_{(1)}=\{1,3,4,5,8,14,15\}$. Naći minimalnu DNF ove funkcije.

$$f_{(1)}=\{1,3,4,5,8,14,15\} \Rightarrow f_{(0)}=\{0,2,6,7,9,10,11,12,13\}$$

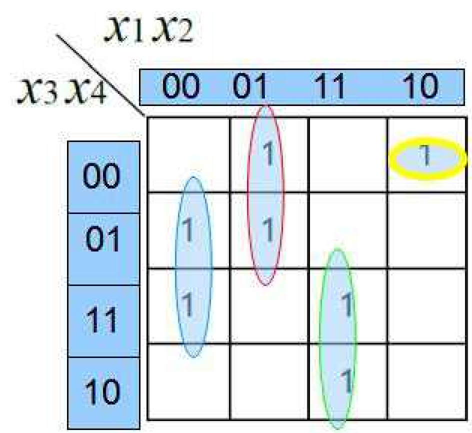
Primeri minimizacije Karnoovom mapom

$$f_{(1)} = \{1,3,4,5,8,14,15\} \Rightarrow f_{(0)} = \{0,2,6,7,9,10,11,12,13\}$$

i	X1	X2	X3	X4	f(X1,X2,X3,X4)
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

i	X1	X2	X3	X4	f(X1,X2,X3,X4)
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1



$$f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_4 + \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3} + x_1\,x_2\,x_3 + x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$$

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

Naći minimalnu DNF funkcije $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ zadate skupom decimalnih indeksa

$f_{(0)} = \{3,11,15\}$.

$f_{(0)} = \{3,11,15\} \Rightarrow f_{(1)} = \{0,1,2,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14\}$

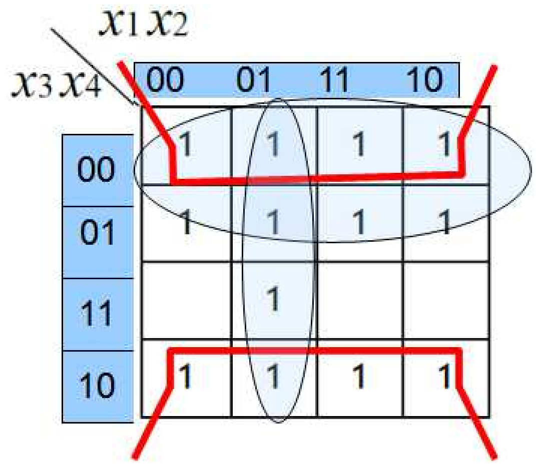
Primeri minimizacije Karnoovom mapom

$$f_{(0)} = \{3,11,15\} \Rightarrow f_{(1)} = \{0,1,2,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14\}$$

i	X1	X2	X3	X4	f(X1,X2,X3,X4)
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

i	X1	X2	X3	X4	f(X1,X2,X3,X4)
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0



$$f = \overline{x_3} + \overline{x_4} + \overline{x_1}\, x_2$$

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

Naci minimalnu DNF funkcije $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ zadate skupom decimalnih indeksa $f_{(1)} = \{0,1,5,7,8,9,13,14\}$.

$$f_{(1)} = \{0,1,5,7,8,9,13,14\} \Rightarrow f_{(0)} = \{2,3,4,6,10,11,12,15\}$$

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

$$f_{(1)} = \{0,1,5,7,8,9,13,14\} \Rightarrow f_{(0)} = \{2,3,4,6,10,11,12,15\}$$

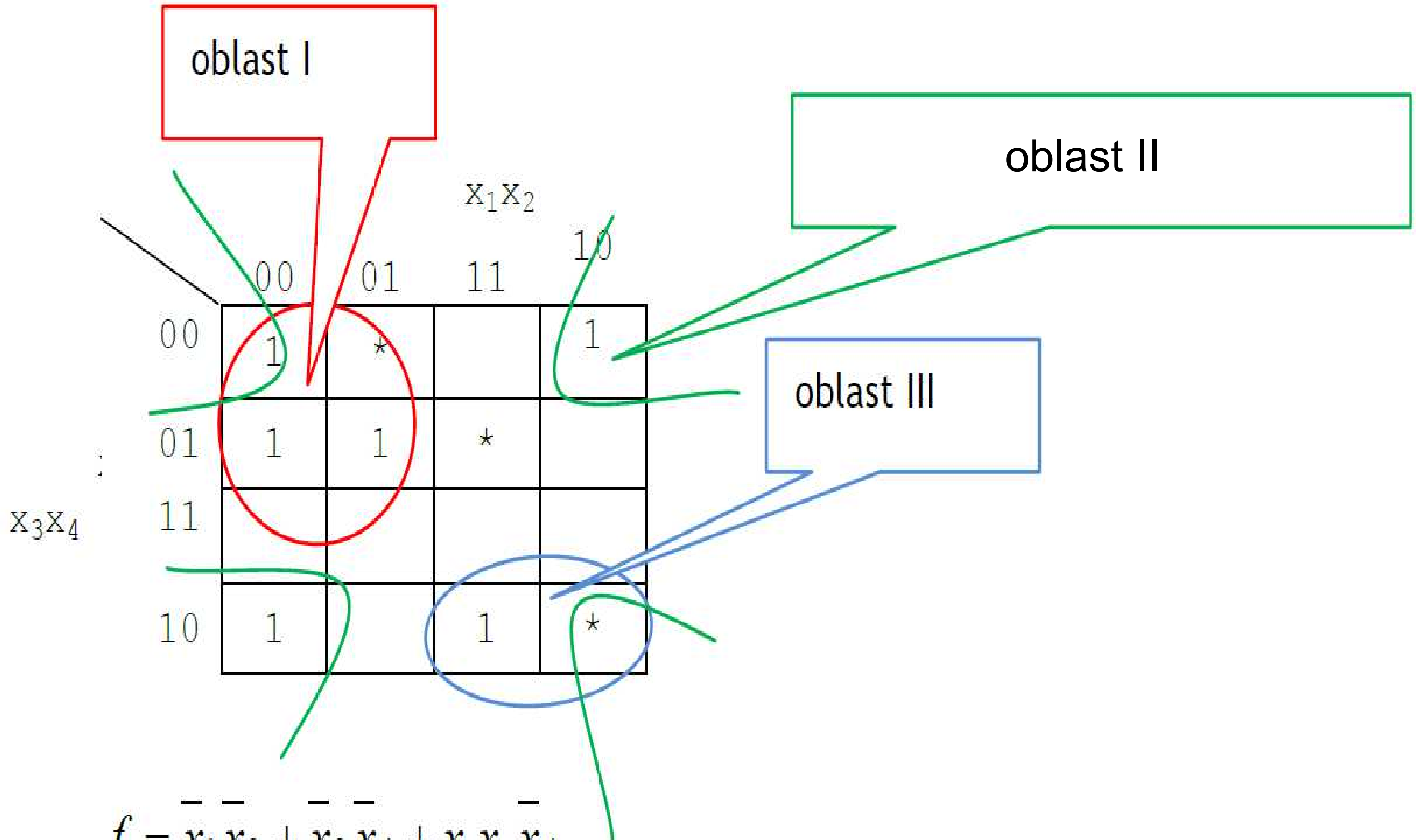
i	X1	X2	X3	X4	f(X1,X2,X3,X4)
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1	1	1
11		1		
10			1	

$$f = \overline{x_3}x_4 + \overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,x_2\,x_4 + x_1\,x_2\,x_3\overline{x_4}$$

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

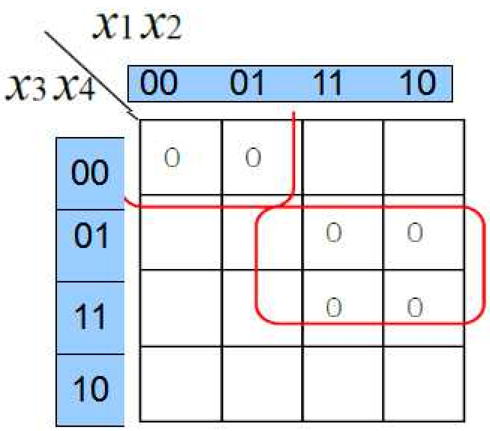
Funkcija $f\,(x_1,x_2,x_3,x_4)$ je nepotpuno definisana sa $f^{(1)} = \{0,1,2,5,8,14\}$ i $f^{(*)} = \{4,10,13\}$. Naći minimalnu DNF.



$$f = \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_3}_{\text{I}} + \underbrace{\bar{x}_2\bar{x}_4}_{\text{II}} + \underbrace{x_1x_3\bar{x}_4}_{\text{III}}$$

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

Odrediti minimalnu KNF funkcije zadate Karnoovom mapom.



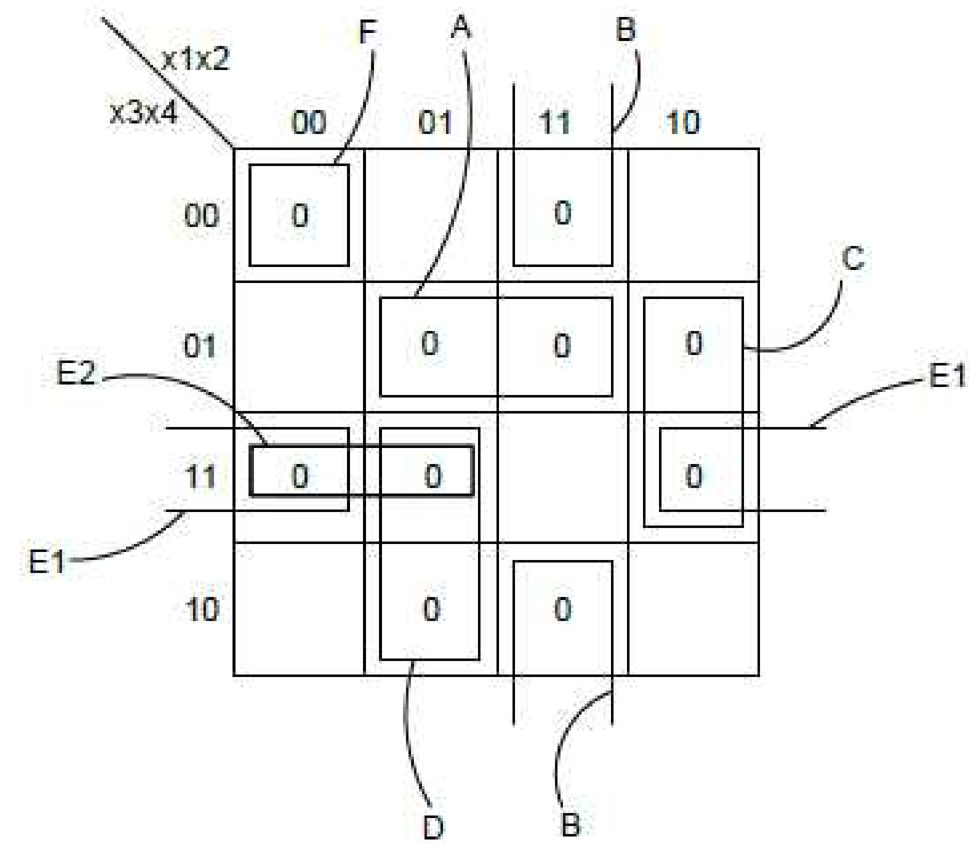
Pokrivamo 0 I trazimo proizvod sume.
Clanovi koji se ne menjaju ako su 0 ostaju nekomplementirani,
Ako su 1, komplementiraju se.

$$f = (\bar{x}_1 + \bar{x}_4) \cdot (x_1 + x_3 + x_4)$$

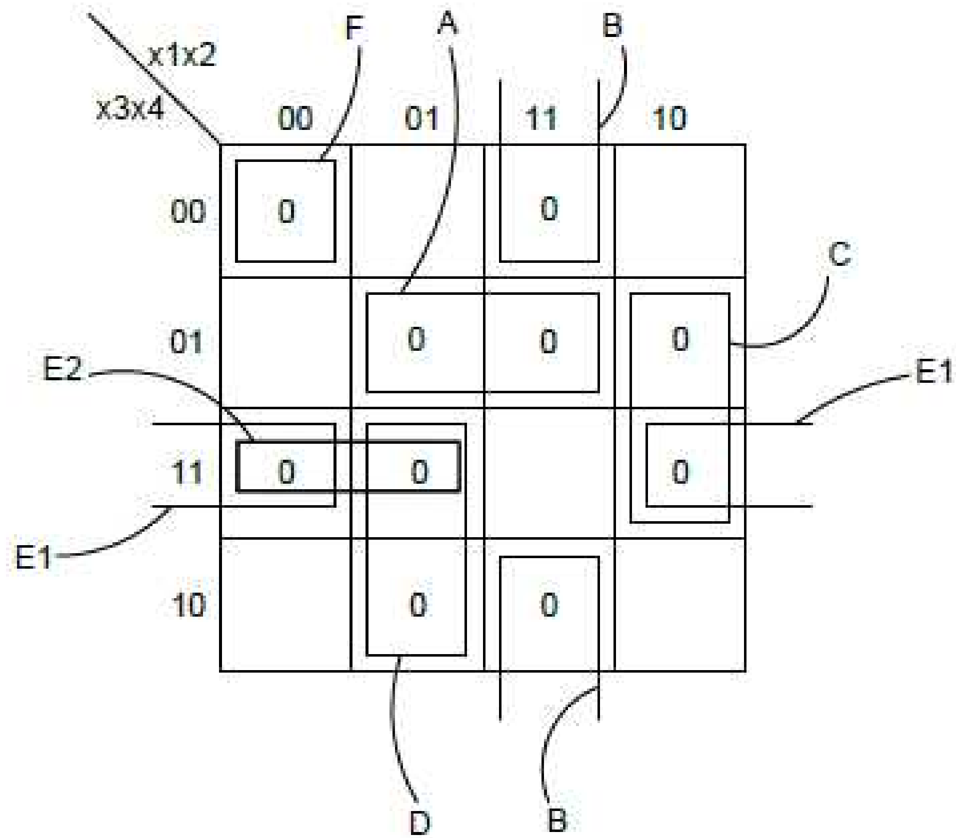
Primeri minimizacije Karnoovom mapom

Odrediti minimalnu KNF funkcije zadate indeksima: $f^{(0)} = \{0,3,5,6,7,9,11,12,13,14\}$

Pokrivamo 0 I trazimo proizvod sume.
Clanovi koji se ne menjaju ako su 0 ostaju nekomplementirani,
Ako su 1, komplementiraju se.



Primeri minimizacije Karnoovom mapom



$$A = \bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4$$

$$B = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_4$$

$$C = \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_4$$

$$D = x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$$

$$E_1 = x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4$$

ili

$$E_2 = x_1 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4$$

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

Imamo dva različita jednako minimalna rešenja, u zavisnosti od toga da li koristimo figuru E1:

$$f = (\bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_4)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_4)(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

ili E2

$$f = (\bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_4)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_4)(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_1 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

Naći pomoću Karnoove mapee minimalnu KNF i minimalnu DNF prekidačke funkcije f(x1,x2,x3) zadate skupom indeksa:

a) f(1) = {0,1,4,5,6}

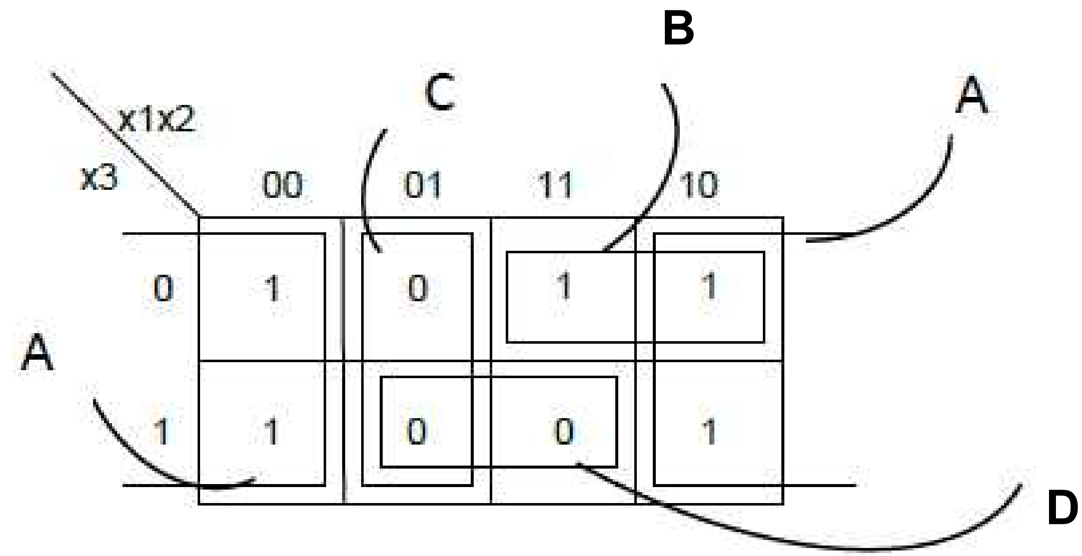
Karnoova mapa za funkciju koja zavisi od 3 promenljive.

x3 \ x1x2	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

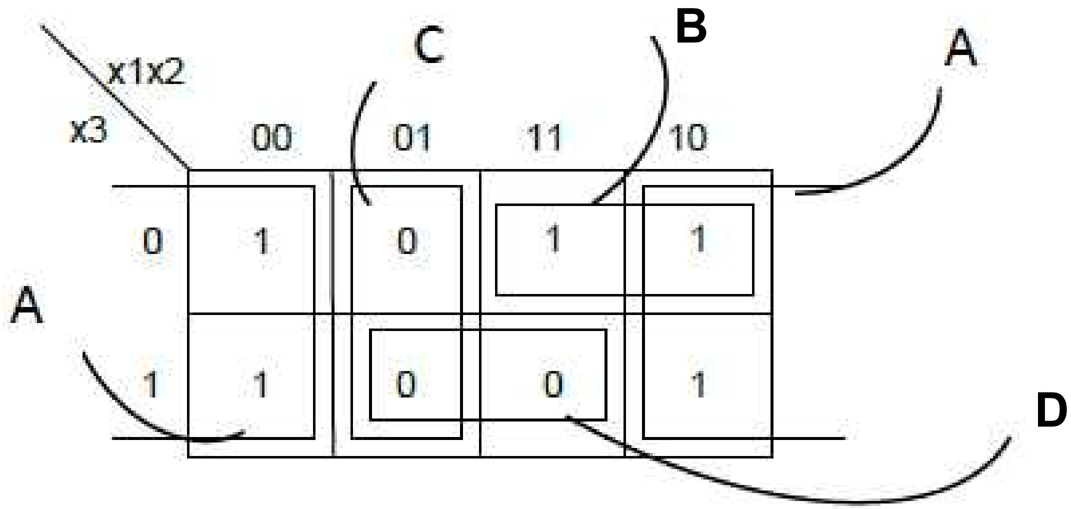
Primeri minimizacije Karnoovom mapom

Karnoova mapa za funkciju koja zavisi od 3 promenljive.

f(0)={2, 3, 7}



Primeri minimizacije Karnoovom mapom



$$A = \overline{x}_2$$

$$B = x_1\overline{x}_3$$

$$f = \overline{x}_2 + x_1\overline{x}_3$$

Da bismo dobili minimalnu DNF treba pronaći pravilne figure što je moguće većeg ranga, tako da svi vektori na kojima funkcija ima vrednost 1 budu pokriveni (sve jedinice u Karnoovoj mapi).

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

Primenom Karnoovih mapa naci minimalnu KNF i minimalnu DNF prekidačke funkcije $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ zadate skupom indeksa:

$f(0)=\{0,3,4,7,9,11,13,15,16,20,25,27,29,31\}$

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

Karnoova mapa za funkciju od 5 promenljivih

	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
11								
10								

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

Karnoova mapa za funkciju od 5 promenljivih

x1=0

x4x5 \ x2x3	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

X1=1

x4x5 \ x2x3	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

- Potrebno je nacrtati Karnoovu mapu za funkciju f(x1,x2,x3,x4,x5) i označiti koordinate na uobičajen način (tako da se susedna polja u karti razlikuju samo po jednoj koordinati).
- Nakon toga treba popuniti Karnoovu kartu za konkretnu funkciju.
- Zbog toga što je potrebno pronaći minimalnu KNF i minimalnu DNF, a dat je skup vektora na kojima funkcija ima vrednost nula f(0), potrebno je prvo odrediti skup vektora na kojima funkcija ima vrednost jedan f(1).

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

- Pošto se radi o potpuno definisanoj funkciji, koja zavisi od 5 promenljivih, imamo 32 različita vektora na kojima je funkcija definisana, pa f(1) određujemo kao skup svih vektora na kojima funkcija nema vrednost nula.
-

f(1) = {1, 2, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 30}

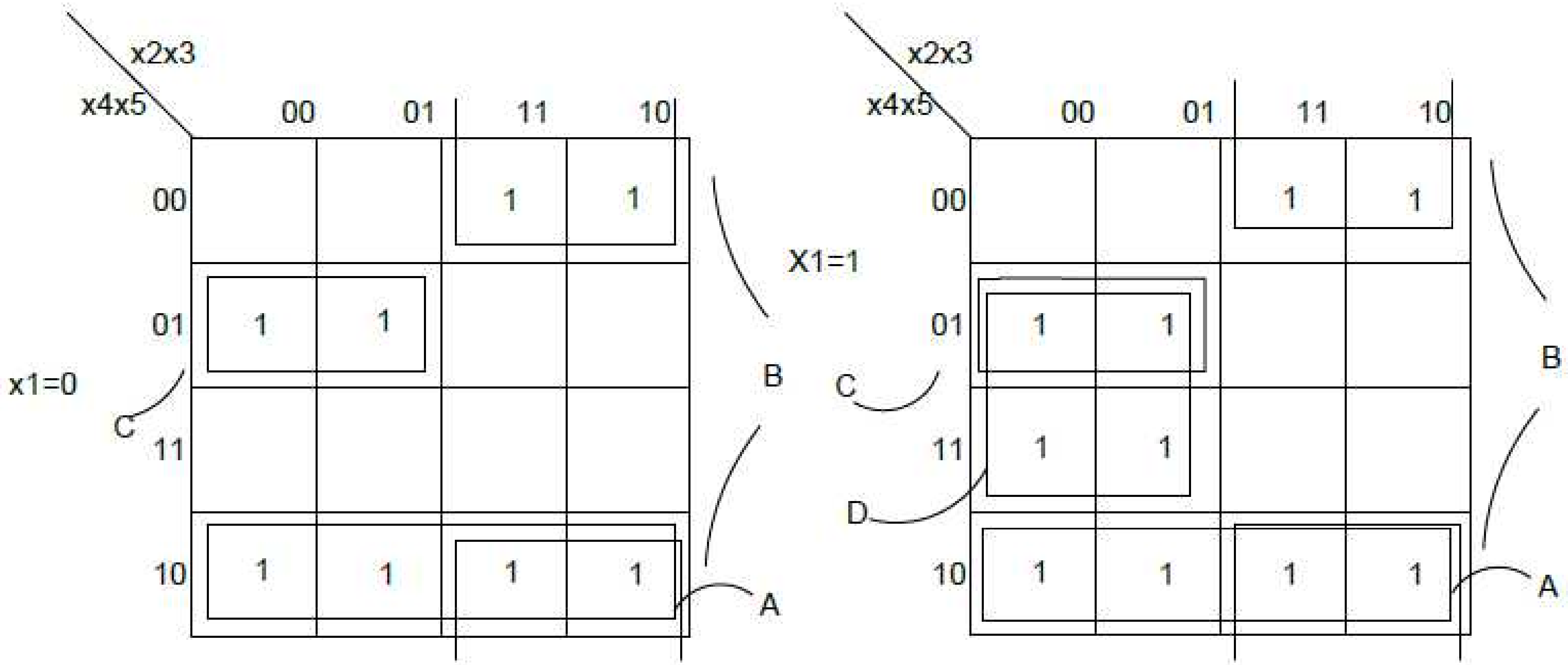
Nakon toga popunjavamo Karnoovu kartu za pronalaženje minimalne DNF.

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

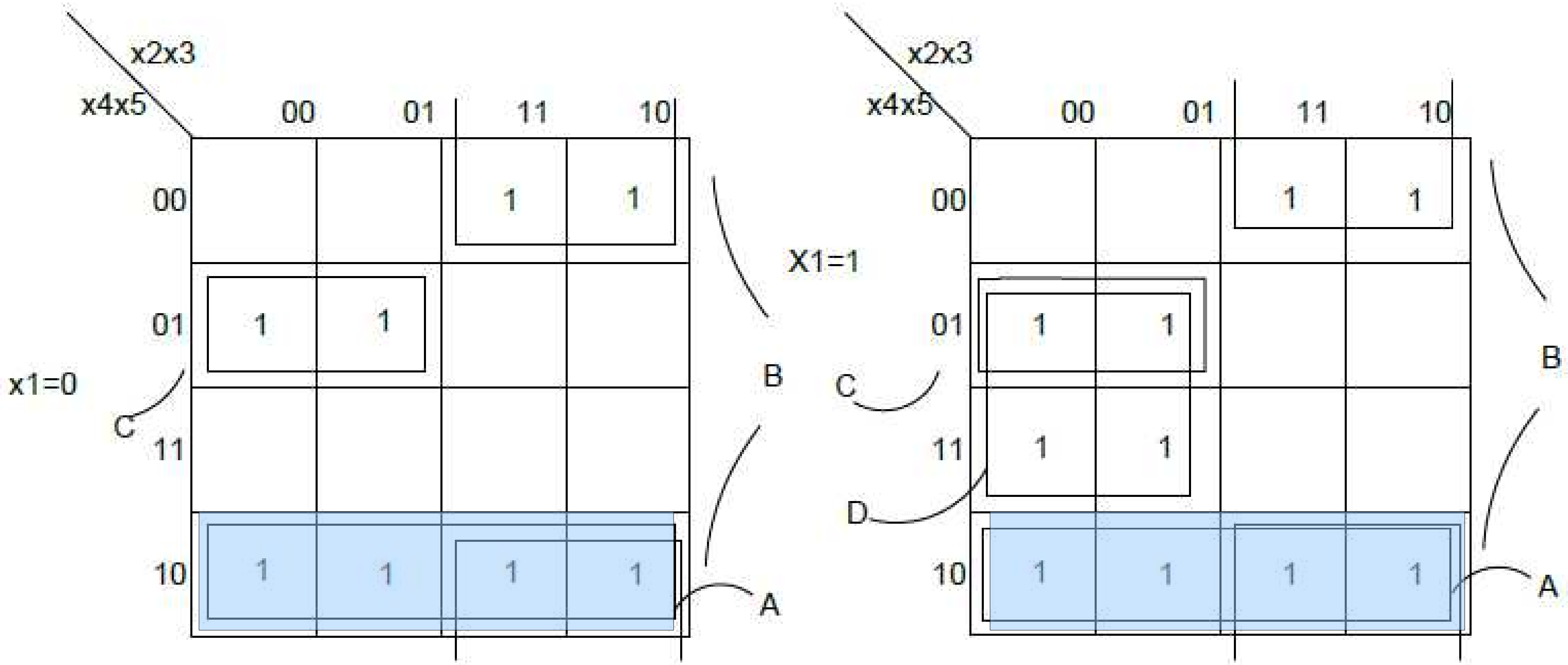
U tablici se po jednoj koordinati razlikuju ne samo

1. fizički susedne ćelije, već i
2. ćelije koje pripadaju i-toj vrsti (i = 0, 1, 2 i 3) kolona označenih sa 000 i 100, zatim kolona označenih sa 001 i 101, i na kraju kolona označenih sa 011 i 111, a takođe i
3. ćelije koje propadaju i-toj koloni (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7) vrsta označenih sa 00 i 10.

Primeri minimizacije Karnoovom mapom



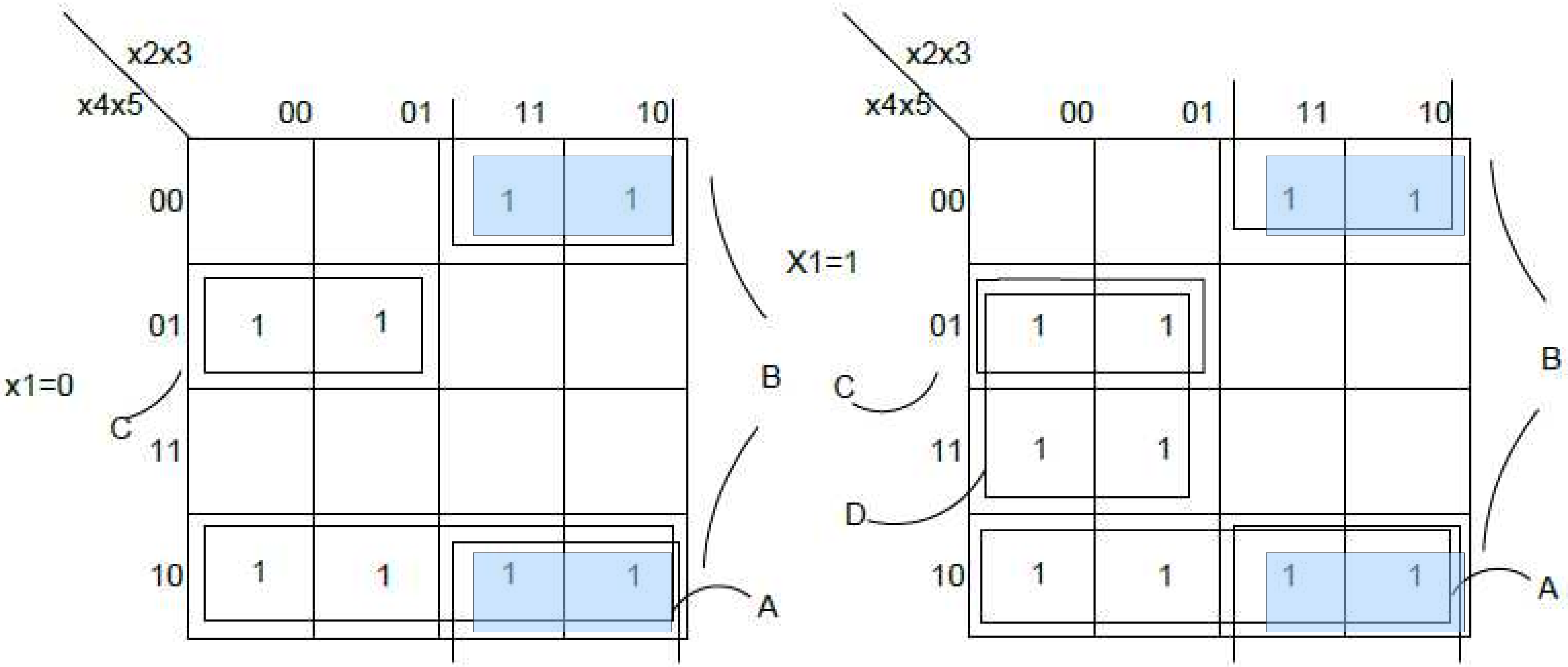
Primeri minimizacije Karnoovom mapom



Prva figura koj se formira je figura A, ranga 3, osam polja

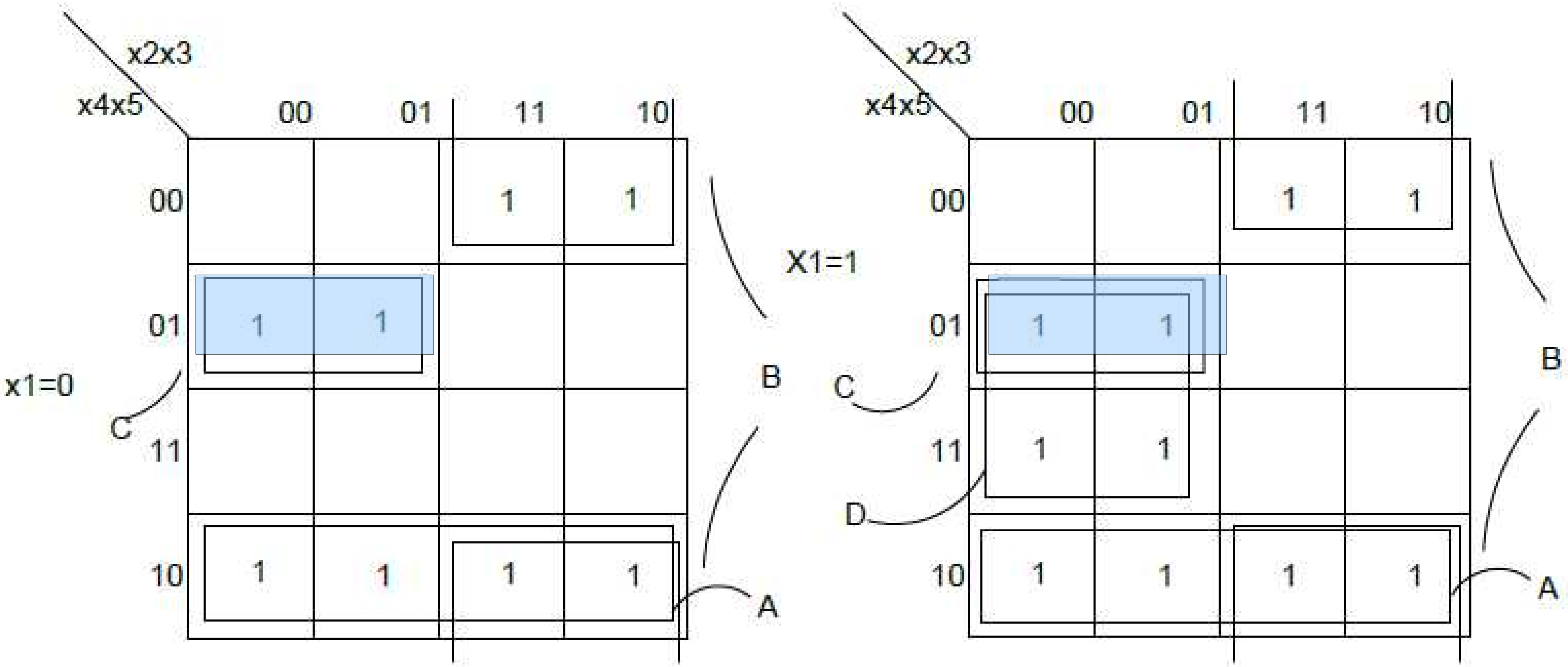
$$A = x_4 \bar{x}_5$$

Primeri minimizacije Karnoovom mapom



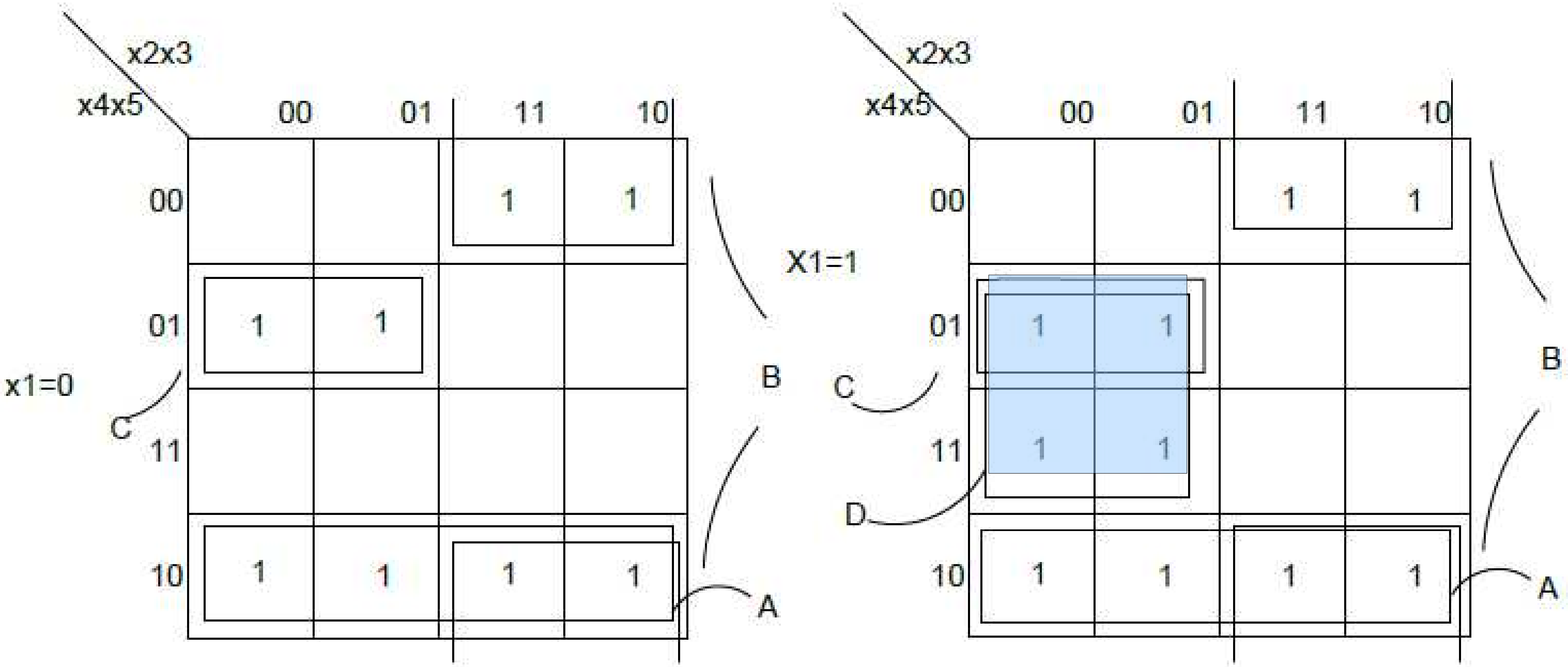
$$B = x_2\bar{x}_5$$

Primeri minimizacije Karnoovom mapom



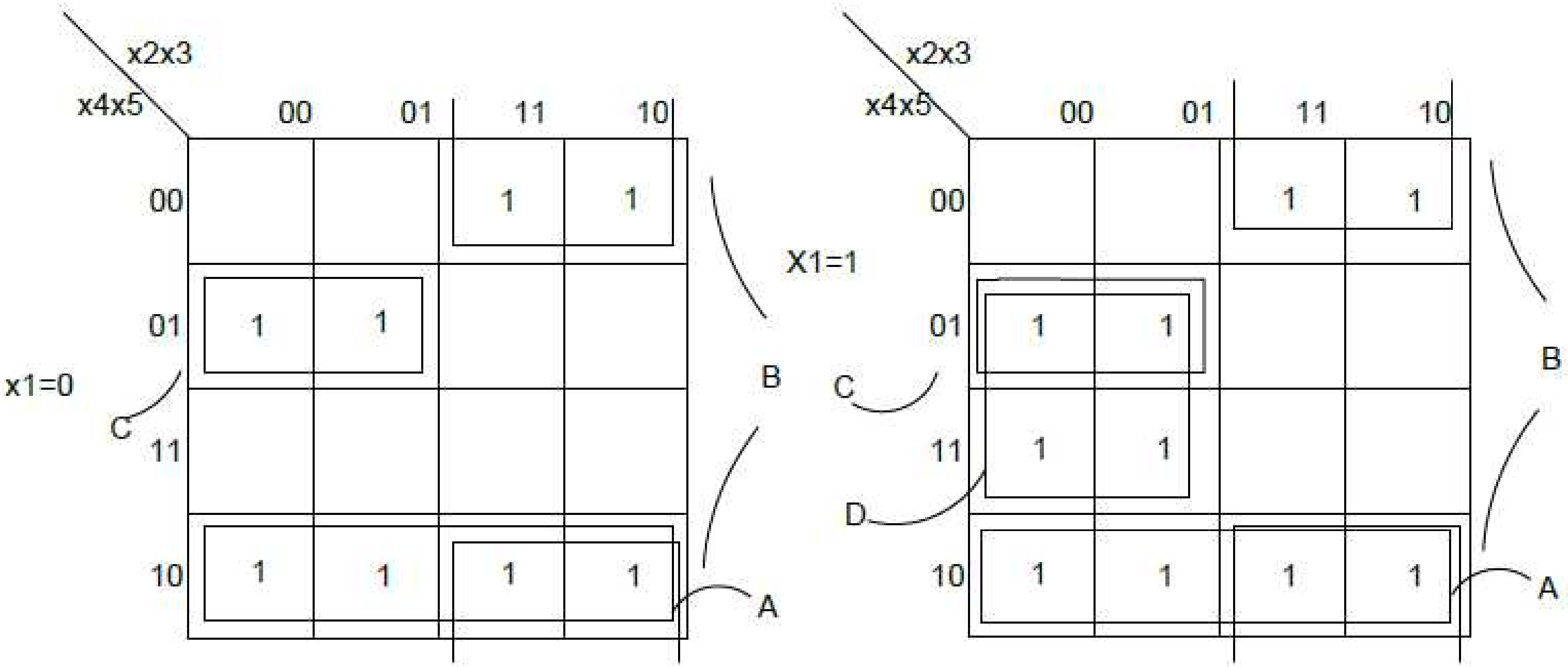
$$C = \overline{x}_2\overline{x}_4 x_5$$

Primeri minimizacije Karnoovom mapom



$$D = x_1 \bar{x}_2 x_5$$

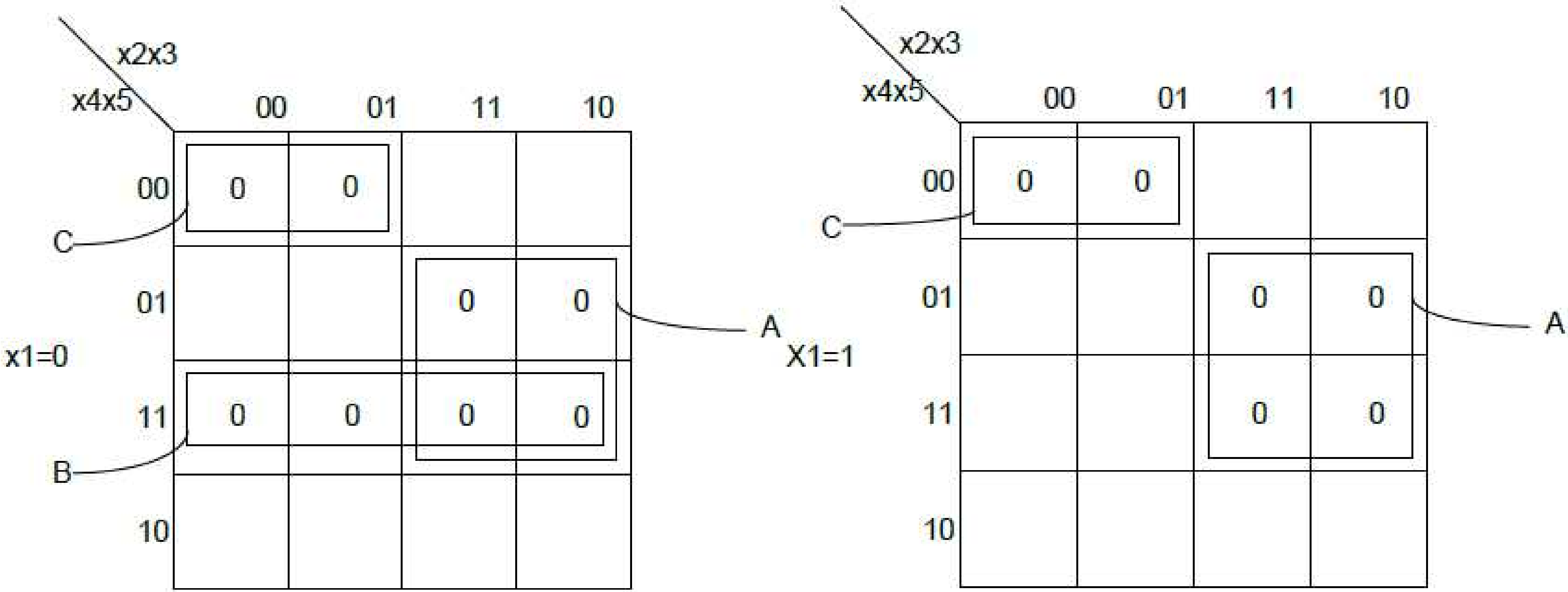
Primeri minimizacije Karnoovom mapom



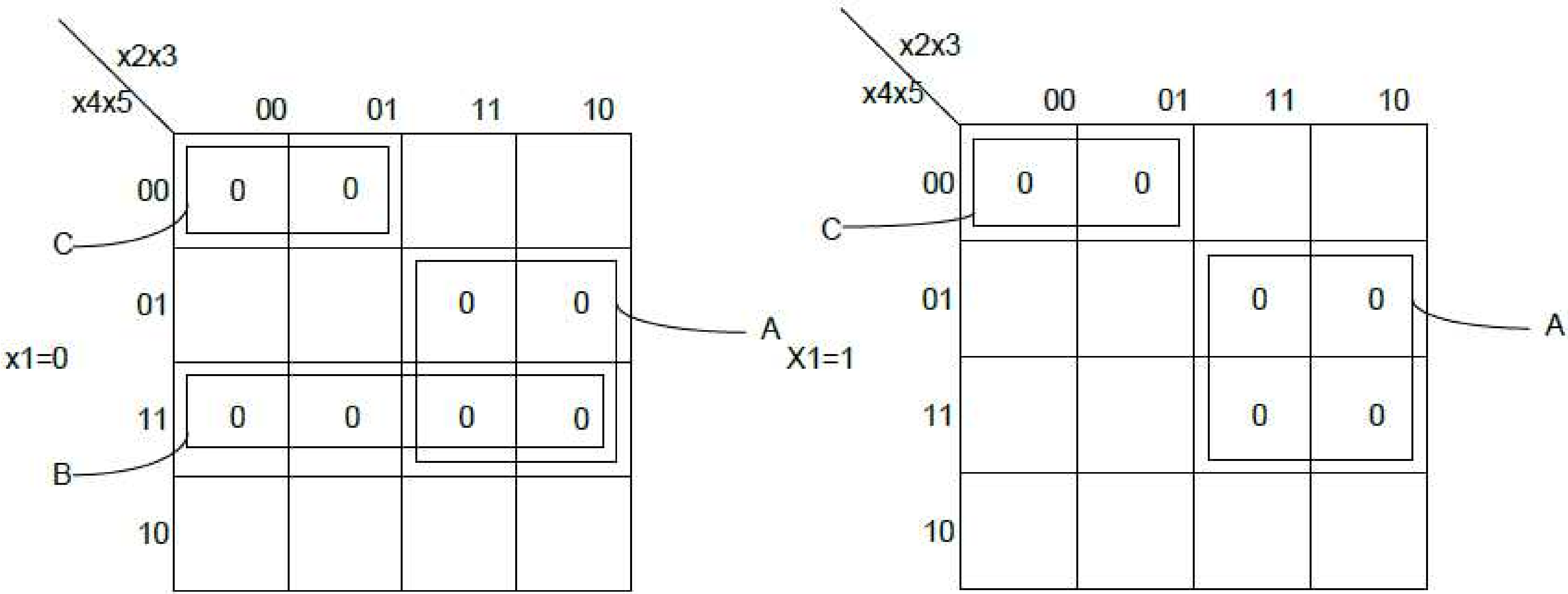
$$f = x_4\bar{x}_5 + x_2\bar{x}_5 + \bar{x}_2\bar{x}_4x_5 + x_1\bar{x}_2x_5$$

Primeri minimizacije Karnoovom mapom

Popunjavamo Karnoovu mapu za pronalaženje minimalne KNF



Primeri minimizacije Karnoovom mapom



$A = \overline{x}_2 + \overline{x}_5$

$B = x_1 + \overline{x}_4 + \overline{x}_5$

$C = x_2 + x_4 + x_5$

$f = (\overline{x}_2 + \overline{x}_5)(x_1 + \overline{x}_4 + \overline{x}_5)(x_2 + x_4 + x_5)$