Minimizacija funkcija MekKlaskijevom metodom

MekKlaskijeva metoda

MekKlaskijeva metoda minimizacije prekidačkih funkcija predstavlja tablični postupak zasnovan na višestrukoj primeni zakona distributivnosti i komplementarnosti u prekidačkoj algebri. Metoda se sastoji iz dva dela. U prvom delu se tabličnim postupkom sažimanja odredjuju svi prosti implikanti funkcije, dok se u drugom delu, putem tablice pokrivanja ili funkcije pokrivanja odredjuju bitni implikanti, kao i nepreopširan (dovoljan) skup prostih implikanata.

Na početku se svi decimalni indeksi svrstavaju u grupe u zavisnosti od broja jedinica u njihovom binarnom zapisu (0, 1, 2, ...). Sažimanje se vrši između decimalnih indeksa (vrsta) iz susednih grupa, i moguće ga je izvršiti samo ako se indeksi razlikuju na jednoj poziciji. Izvršavanjem svih mogućih sažimanja u okviru jedne tablice formira se sledeća tablica, tako što se sažimanjem vrsta iz susednih grupa formira nova grupa sledeće tablice. Sažimanje u sledećoj, i eventualnim narednim tablicama, moguće je vršiti između vrsta koji imaju znak(ove) X na istoj poziciji, a na preostalim se razlikuju samo na jednoj poziciji. Vrste koje su učestvovale u sažimanju označavaju se posebnim znakom u trećoj koloni tablice. Nakon izvođenja svih mogućih sažimanja, neoznačene vrtse predstavljaju skup prostih implikanata, koji se koristi u drugoj fazi ove metode.

Zadata je funkcija $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ skupom svojih decimalnih indeksa $f^{(1)}=\{0,2,4,5, 6,8,9,10,11,14,15\}$. Minimizirati funkciju MekKlaskijevom metodom.

i	x_1 x_2 x_3 x_4	
0	0 0 0 0	√
2	0 0 1 0	√
4	0 1 0 0	√
8	1 0 0 0	√
5	0 1 0 1	√
6	0 1 1 0	√
9	1 0 0 1	√
10	1 0 1 0	√
11	1 0 1 1	√
14	1 1 1 0	√
15	1 1 1 1	√

i	$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	
0	0 0 0 0	√
2	0 0 1 0	√
4	0 1 0 0	√
8	1 0 0 0	√
5	0 1 0 1	√
6	0 1 1 0	√
9	1 0 0 1	√
10	1 0 1 0	√
11	1 0 1 1	√
14	1 1 1 0	√
15	1 1 1 1	√

i_1 , i_2	$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	
0 , 2	0 0 x 0	√
0 , 4	0 x 0 0	√
0 , 8	x 0 0 0	√
2 , 6	0 x 1 0	√
2 , 10	x 0 1 0	√
4 , 5	0 1 0 x	a
4 , 6	0 1 x 0	√
8 , 9	1 0 0 x	√
8 , 10	1 0 x 0	√
6 , 14	x 1 1 0	√
9 , 11	1 0 x 1	√
10 , 11	1 0 1 x	√
10 , 14	1 x 1 0	√
11 , 15	1 x 1 1	√
14 , 15	1 1 1 x	√

i_1 , i_2	x_1 x_2 x_3 x_4	
0 , 2	0 0 x 0	√
0 , 4	0 x 0 0	√
0 , 8	x 0 0 0	√
2 , 6	0 x 1 0	√
2 , 10	x 0 1 0	√
4 , 5	0 1 0 x	a
4 , 6	0 1 x 0	√
8 , 9	1 0 0 x	√
8 , 10	1 0 x 0	√
6 , 14	x 1 1 0	√
9 , 11	1 0 x 1	√
10 , 11	1 0 1 x	√
10 , 14	1 x 1 0	√
11 , 15	1 x 1 1	√
14 , 15	1 1 1 x	√

i_1 , i_2 , i_3 , i_4	x_1 x_2 x_3 x_4	
0 , 2 , 4 , 6	0 x x 0	b
0 , 2 , 8 , 10	x 0 x 0	c
2 , 6 , 10 , 14	x x 1 0	d
8 , 9 , 10 , 11	1 0 x x	e
10,11,14,15	1 x 1 x	f

Prosti implikanti su **a,b,c,d,e,f,** pa se na osnovu njih formira tablica pokrivanja. Vrste tablice pokrivanja označene su implikantima iz skupa prostih implikanata, a kolone decimalnim indeksima iz skupa $f^{(1)}$.

	0	2	4	5	6	8	9	10	11	14	15
a			*	*							
b	*	*	*		*						
c	*	*				*		*			
d		*			*			*		*	
e						*	*	*	*		
f								*	*	*	*
			√	√		√	√	√	√	√	√

Na osnovu tablice pokrivanja određuju se bitni implikanti. Implikant je bitan, ako samo on pokriva neku jedinicu, tj. decimalni indeks iz skupa $f^{(1)}$). U ovom slučaju bitni implikanti su a, e i f, pa označimo sve decimalne indekse, koje ovi implikanti pokrivaju.

U skraćenoj tablici pokrivanja, formiranoj od preostalih prostih implikanata i nepokrivenih decimalnih indeksa uočava se da je dovoljan još implikant b za pokrivanje preostalih decimalnih indeksa.

	0	2	6
b	*	*	*
c	*	*	
d		*	*

Minimalni oblik funkcije dobija se kao suma izdvojenih implikanata, koji predstavljaju minimalno (nepreopširno) pokrivanje funkcije. Pri tom se proizvodi koji odgovaraju ovim implikantima dobijaju iz tablica sažimanja, tako što se promenljive na čijim je pozicijama znak X zanemaruju, a ostale promenljive uzimaju sa komplementom (vrednost 0) ili bez komplementa (vrednosti 1). Na taj način dobija se minimalni oblik zadate funkcije:

$$f_{MIN} = a + b + e + f = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_1 \overline{x}_4 + x_1 \overline{x}_2 + x_1 x_3$$

Zadata je funkcija $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ skupom decimalnih indeksa $f^{(1)}=\{0,2,3,4,5,7,9,10,11,12,13,15\}$. Minimizirati funkciju MekKlaskijevom metodom.

i	$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	
0	0 0 0 0	√
2	0 0 1 0	√
4	0 1 0 0	√
3	0 0 1 1	√
5	0 1 0 1	√
9	1 0 0 1	√
10	1 0 1 0	√
12	1 1 0 0	√
7	0 1 1 1	√
11	1 0 1 1	√
13	1 1 0 1	√
15	1 1 1 1	√

i_1, i_2	$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	
0 , 2	0 0 x 0	a
0 , 4	0 x 0 0	b
2 , 3	0 0 1 x	√
2 , 10	x 0 1 0	√
4 , 5	0 1 0 x	√
4 , 12	x 1 0 0	√
3 , 7	0 x 1 1	√
3 , 11	x 0 1 1	√
5 , 7	0 1 x 1	√
5 , 13	x 1 0 1	√
9 , 11	1 0 x 1	√
9 , 13	1 x 0 1	√
10, 11	1 0 1 x	√
12, 13	1 1 0 x	√
7 , 15	x 1 1 1	√
11, 15	1 x 1 1	√
13, 15	1 1 x 1	√

i_1,i_2,i_3,i_4	x_1,x_2,x_3,x_4	
2,3,10,11	x 0 1 x	c
4,5,12,13	x 1 0 x	d
3,7,11,15	x x 1 1	e
5,7,13,15	x 1 x 1	f
9,11,13,15	1 x x 1	g

Prosti implikanti su **a, b, c, d, e, f, g,** pa se sada formira tablica pokrivanja.

Na osnovu ove tablice mogu se odrediti bitni implikanti, a zatim i ostali implikanti koji čine nepreopširno pokrivanje.

	0	2	3	4	5	7	9	10	11	12	13	15
a	*	*										
b	*			*								
c		*	*				*		*			
d				*	*					*	*	
e			*			*			*			*
f					*	*					*	*
g							*		*		*	*

$$f_{MIN}=a+c+d+f+g=\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4+\overline{x}_2x_3+x_2\overline{x}_3+x_2x_4+x_1x_4$$

MekKlaskijevom metodom minimizirati funkciju $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ zadatu skupovima decimalnih indeksa $f^{(1)}=\{6,7,22,23,29\}$ i $f^{(*)}=\{2,3,13,18,19,28,31\}$.

U slučaju nepotpuno definisane funkcije, u prvom delu MekKlaskijeve metode, prilikom izdvajanja prostih implikanata funkcije, učestvuju potpuno ravnopravno i decimalni indeksi iz skupa $f^{(1)}$ i decimalni indeksi iz skupa $f^{(*)}$. Sažimanje se zatim vrši po standardnom postupku.

U drugom delu metode, u formiranju tablice pokrivanja, učestvuju samo decimalni indeksi iz skupa $f^{(1)}$.

i	x_1 x_2 x_3 x_4 x_5	
2	0 0 0 1 0	√
3	0 0 0 1 1	√
6	0 0 1 1 0	√
18	1 0 0 1 0	√
7	0 0 1 1 1	√
13	0 1 1 0 1	√
19	1 0 0 1 1	√
22	1 0 1 1 0	√
28	1 1 1 0 0	√
23	1 0 1 1 1	√
29	1 1 1 0 1	√
31	1 1 1 1 1	√

i_1,i_2	x_1 x_2 x_3 x_4 x_5	
2 , 3	0 0 0 1 x	√
2 , 6	0 0 x 1 0	√
2 ,18	x 0 0 1 0	√
3 , 7	0 0 x 1 1	√
3 ,19	x 0 0 1 1	√
6 , 7	0 0 1 1 x	√
6 , 22	x 0 1 1 0	√
18, 19	1 0 0 1 x	√
18, 22	1 0 x 1 0	√
7 , 23	x 0 1 1 1	√
13, 29	x 1 1 0 1	a
19, 23	1 0 x 1 1	√
22, 23	1 0 1 1 x	√
28, 29	1 1 1 0 x	b
23, 31	1 x 1 1 1	c
29, 31	1 1 1 x 1	d

i_1,i_2,i_3,i_4	$x_1x_2x_3x_4x_5$	
2,3,6,7	0 0 x 1 x	√
2,3,18,19	x 0 0 1 x	√
2,6,18,22	x 0 x 1 0	√
3,7,19,23	x 0 x 1 1	√
6,7,22,23	x 0 1 1 x	√
18,19,22,23	1 0 x 1 x	√

$i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6,i_7,i_8$	$x_1x_2x_3x_4x_5$	
2,3,6,7,18,19,22,23	x 0 x 1 x	e

U formiranju tablice pokrivanja učestvuju samo decimalni indeksi iz skupa $f^{(1)}$

	6	7	22	23	29
a					*
b					*
c				*	
d					*
e	*	*	*	*	
	√	√	√	√	√

Bitan implikant je **e**, a za potpuno pokrivanje funkcije dovoljno je uzeti još implikant **a** (može i **b** ili **d**), pa je minimalni oblik funkcije:

$$f_{MIN}=a+e=x_2x_3\overline{x}_4x_5+\overline{x}_2x_4$$

MekKlaskijevom metodom minimizirati funkciju $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ zadatu skupovima decimalnih indeksa $f^{(1)}=\{4,5,7,12,14,15\}$ i $f^{(0)}=\{0,1,2,6,9,11,13\}$.

Rešenje:

$f^{(1)}=\{4,5,7,12,14,15\}$, $f^{(0)}=\{0,1,2,6,9,11,13\}$ sledi $f^{(*)}=\{3,8,10\}$

i	$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	
4	0 1 0 0	√
8	1 0 0 0	√
3	0 0 1 1	√
5	0 1 0 1	√
10	1 0 1 0	√
12	1 1 0 0	√
7	0 1 1 1	√
14	1 1 1 0	√
15	1 1 1 1	√

i_1,i_2	$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	
4 , 5	0 1 0 x	a
4,12	x 1 0 0	b
8,10	1 0 x 0	√
8,12	1 x 0 0	√
3 , 7	0 x 1 1	c
5 , 7	0 1 x 1	d
10,14	1 x 1 0	√
12,14	1 1 x 0	√
7,15	x 1 1 1	e
14,15	1 1 1 x	f

i_1,i_2,i_3,i_4	$x_1x_2x_3x_4$	
8,10,12,14	1 x x 0	g

Na osnovu dobijenog skupa prostih implikanata i decimalnih indeksa iz skupa $f^{(1)}$ formira se tablica pokrivanja.

	4	5	7	12	14	15
a	*	*				
b	*			*		
c			*			
d		*	*			
e			*			*
f					*	*
g				*	*	

Iz tablice pokrivanja vidi se da ne postoji nijedan bitan implikant,

Drugi način je da se formira funkcija pokrivanja. Ova funkcija se dobija kao proizvod unija prostih implikanata koji pokrivaju date decimalne indekse iz tablice pokrivanja redom:

$$\Psi=(a+b)(a+d)(c+d+e)(b+g)(f+g)(e+f)=$$
$$=(a+ad+ab+bd)(bc+cg+bd+dg+be+eg)(ef+f+eg+fg)=$$
$$=(a+bd)(bc+cg+bd+dg+be+eg)(f+eg)=$$
$$=(abc+acg+abd+adg+abe+aeg+bcd+bcdg+bd+bdg+bde+bdeg)(f+eg)=$$
$$=(abc+acg+adg+abe+aeg+bd)(f+eg)=$$
$$=abcf+acgf+adgf+abef+aegf+bdf+abceg+aceg+adeg+abeg+aeg+bdeg=$$
$$=abcf+acgf+adgf+abef+age+bdf+bdeg$$

Sada se računa faktor ekonomičnosti za svako rešenje :

$$e=\frac{1}{c+s+1}$$

gde je: c ukupan broj članova u disjunktnoj formi funkcije, a s ukupan broj pojavljivanja promenljivih u disjunktnoj formi.
Bira se ono rešenje koje ima najveći faktor ekonomičnosti.