

# МАТЕМАТИКА 1

Први колоквијум, прва група

07.12.2019.

1. (2 поена) Показати математичком индукцијом да је следеће тврђење истинито за сваки природан број  $n$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$$

2. (1+2 поена)

а) Ако су  $a$  и  $b$  позитивни реални бројеви, показати да важи

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}.$$

б) Ако су  $a, b, c$  позитивни реални бројеви, доказати да важи неједнакост

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc.$$

3. Израчунати (урађено без примене Лопиталовог правила вреди више поена)

а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})$ ; (2 поена / 1 поен)

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$ . (3 поена / 1 поен)

4. (4 поена) Израчунати  $\operatorname{tg} \frac{1}{5}$  користећи Маклоренов полином трећег степена функције  $y = \operatorname{tg}(2x)$ .

5. Испитати апсолутну и условну конвергенцију редова

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{7^{n+1} n^2}$  (3 поена);      б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln \sqrt{n+1}}$  (2 поена).

6. (4 поена) Испитати непрекидност функције

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x < 0; \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & 0 \leq x < 2; \\ \sqrt{x^2 + 5} - 3, & x \geq 2. \end{cases}$$

У случају прекида одредити врсту прекида.

# МАТЕМАТИКА 1

Први колоквијум, друга група

07.12.2019.

1. (2 поена) Показати математичком индукцијом да је следеће тврђење истинито за сваки природан број  $n$

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{n}{5^n} = \frac{5}{16} - \frac{4n+5}{16 \cdot 5^n};$$

2. (1+2 поена)

а) Ако су  $a$  и  $b$  позитивни реални бројеви, показати да важи

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}.$$

б) Ако су  $a, b, c$  позитивни реални бројеви, доказати да важи неједнакост

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc.$$

3. Израчунати (урађено без примене Лопиталовог правила вреди више поена)

а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x+5} - \sqrt{x+4})$ ; (2 поена / 1 поен)

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$ . (3 поена / 1 поен)

4. (4 поена) Израчунати  $\operatorname{tg} \frac{1}{4}$  користећи Маклоренов полином трећег степена функције  $y = \operatorname{tg}(2x)$ .

5. Испитати апсолутну и условну конвергенцију редова

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{6^{n+1} \cdot n^{3/2}}$  (3 поена);      б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln \sqrt{n+1}}$  (2 поена).

6. (4 поена) Испитати непрекидност функције

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x < 0; \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & 0 \leq x < 1; \\ \sqrt{x^2 + 3} - 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

У случају прекида одредити врсту прекида.