



Организација часа моделирања

ПРЕВОД ИЗ КЊИГЕ RITE BORROMEO FERRI „LEARNING HOW TO TEACH
MATHEMATICAL MODELING IN SCHOOL AND TEACHER EDUCATION“

Садржај

Карактеристике добрих часова моделирања	3
Планирање и реализација часова моделирања	4
Принципи за планирање и реализацију часова моделирања	4
Припрема за час уз активност задатка моделирања „Селидба“	7
Интервенције током активности моделирања	11
Начини навикавања ученика на моделирање.....	17

Карактеристике добрих часова моделирања

Када се може рећи да је било који одржани час добар? На ову тему је спроведено доста емпиријских истраживања. На пример, Meyer је у свом истраживању из 2006. године дошао до 10 критеријума доброг подучавања независно од предмета, а то су: јасна структура подучавања, довољно времена за рад на задацима, погодна клима за учење, јасноћа садржаја, комуникација, разноликост наставних метода, индивидуална подршка, интелектуално адекватна вежбања, јасан опис жељених циљева и добро припремљено окружење за учење. Наравно, за укључивање свих ових аспеката у свакодневну наставу је потребно искуство и непрестане повратне информације како од стране ученика тако и од стране наставника према себи.

Подучавање математичког моделирања је веома захтевно, како због сложености тако и због тога што су задаци и проблеми моделирања углавном нови и наставницима и ученицима. На основу емпиријских истраживања дошло се до 5 аспеката битних за наставу математичког моделирања (Ferri, 2018).

1. **Ефективно и ка ученику оријентисано управљање учионицом** – Наставник треба да организује и структурира часове на такав начин да ученици добију најбољи когнитивни резултат кроз конструктивни групни рад и уз довољно времена за самостално размишљање и решавање проблема. Дакле, за час моделирања је потребно оставити довољно „времена за учење“, односно, оставити време за рад на проблему моделирања, време за дискусију и размишљање о добијеним резултатима на крају часа.
2. **Когнитивна активација ученика** – Подстицање когнитивне активације ученика треба да буде циљ сваког часа. Наравно, у математици, различити задаци могу подстаћи различите нивое когнитивне активације. Бити когнитивно укључен подразумева да су ученици активно ангажовани, пре свега налажењем сопствених идеја, а такође и у оквиру групног рада или наставе у целом разреду.
3. **Метакогнитивна активација ученика** – Метакогнитивне активности такође морају бити кључни део наставе и учења математичког моделирања. Треба промовисати пратећа и ретроспективна размишљања, почевши од првог часа моделирања. Знање о корацима моделирања и целом процесу даје ученицима бољу оријентацију у решавању проблема, јер тиме, између осталог, ученици постају свеснији потребе за валидацијом математичких резултата. Слично, питања попут „Које идеје вас воде до математичког модела?“ или „Да ли сте изградили адекватну менталну представу дате стварне ситуације?“ такође стимулишу ученике метакогнитивно.
4. **Подстицање већег броја решења** – За проблем моделирања постоји више могућих тачних резултата, а не само „један тачан резултат“. Свим почетницима у математичком моделирању је потребно неко време да се навикну на ову идеју. Већина наставника

има тенденцију да снажно фаворизује сопствено решење, посебно када почну да предају моделирање. Разноликост процеса решавања проблема моделирања чини га неконтролисаним, а често и тешким за наставнике, јер понекад нису сва могућа решења очигледна. Ипак, свакако би требало подстаћи ученике да дођу до више решења у складу са својим жељама. Јасно да су индивидуални путеви моделирања под утицајем математичких стилова размишљања ученика.

5. **Математичко моделирање као дугорочни процес учења** – Учење и подучавање математичког моделирања су дугорочни процеси учења. Са једноставнијим проблемима моделирања би требало да се почне у основној школи и да се усложњава до средње школе. За наставнике у средњој школи би свакако било лакше када би ученици раније учили о математичком моделирању, уместо да у овој области почињу ни из чега када дођу до средње школе. Математичко моделирање у основној школи често се чини немогућим, јер се математички појмови тек развијају, а дубина математичких садржаја који се обрађују је у многоме ограничена. Коришћење проблема из стварног живота, који су, наравно, мање сложени од оних који би се користили у средњој школи, мења поглед ученика на математику. Опет, дугорочни процеси учења такође подразумевају континуитет у настави математичког моделирања. Ово не значи да се ученицима дају један или два проблема моделирања током школске године. Проблеми моделирања су снажно повезани са математичким садржајем и стога се могу користити самостално или са фокусом на одређену тему. Такође, да би се промовисале моделирања, најмање два проблема моделирања месечно би сигурно променити променила негативна математичка уверења ученика.

Планирање и реализација часова моделирања

У овом поглављу је излистано осам принципа којих се треба придржавати при планирању и реализацији часова моделирања (Ferri, 2018). Након тога је приказан план рада за један двочас моделирања.

Принципи за планирање и реализацију часова моделирања

Припрема и планирање:

1. Одаберите адекватан проблем моделирања за своје ученике, који има интересантан контекст, проблемски је оријентисан, аутентичан, реалистичан и може се решити кроз све кораке циклуса моделирања.
2. Решите овај проблем сами, пролазећи кроз све кораке циклуса моделирања. Запишите сва решења којих се сетите и најмање три могућа модела/формулације проблема. Размислите о потенцијалним когнитивним баријерама које би ученици могли имати када раде на овом проблему и припремите адекватне интервенције за јаче и слабије ученике.

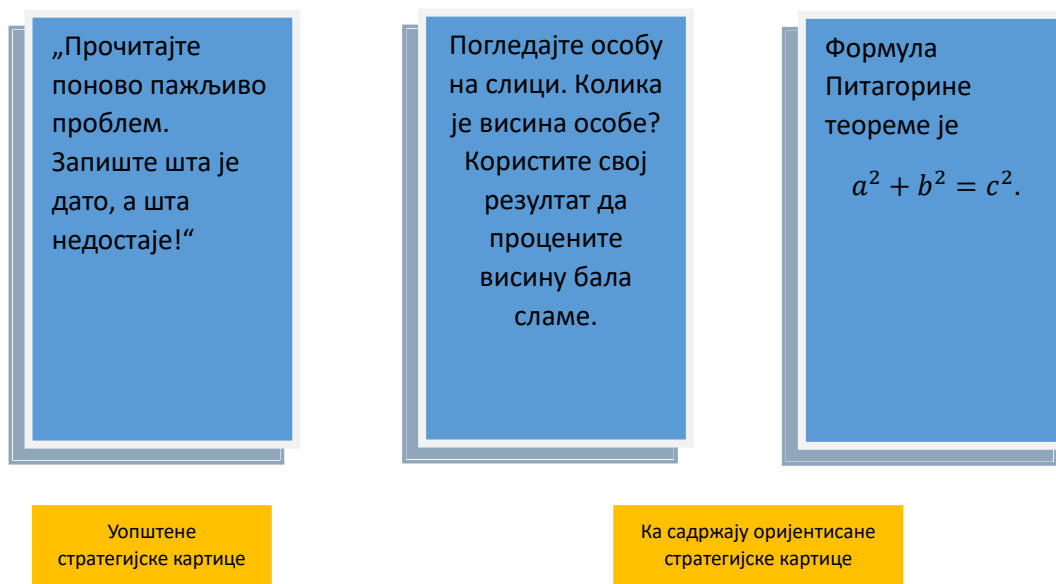
3. Размислите о централном циљу вашег часа. Да ли желите да кроз задатак продубите разумевање ученика о одређеним математичким садржајима? Да ли желите да се усредсредите на побољшање подкомпетенција моделирања ваших ученика као што су тумачење или валидација? Да ли имате додатне, „друштвене циљеве“, на пример да посматрате тимски рад ученика и дајете им повратне информације и помоћ како би били ефикаснији у доласку до резултата? Разјасните себи ове аспекте. Који су алати потребни за проблем моделирања који сте одабрали? Да ли ученици треба да користе технологију и ако да, како је можете комбиновати са процесом моделирања?
4. Што се тиче времена које вам је потребно за проблем моделирања, размислите о трајању различитих фаза за план часа. Има ли довољно времена за ученике да раде на проблему и да дискутују о резултатима? Који метод је погодан за ваш разред? Да ли су вам потребни додатни материјали као што су „картице за помоћ“ (описано касније у тексту)?

Реализација и рефлексација:

1. Звучи тривијално, али је занемарено у многим учионицама широм света: Уверите се да желите да почнете са часом и да ученици на почетку гледају у вас и ћуте. Пре свега, ученицима је потребно време да схвате шта је проблем. Друго, требало би да знају како ће радити на овом проблему (са партнерима или у групама). Пре него што почне групни рад, реците ученицима како решење треба да буде представљено након тога. Ако желите да све групе ефикасно раде, реците им да ћете изабрати једну или две групе за презентацију.
2. Током групног рада обиђите и водите белешке о процесу моделирања ученика. Погледајте групе које су користиле различите моделе за своје решење. Можете започети своју презентацију са овим групама како бисте имали добру основу за дискусију након тога.
3. Шта је са вашим главним циљем часа – да ли постижете свој циљ? Да ли сте задовољни планом часа – има ли довољно времена за све?
4. Размишљање: На почетку је, посебно за наставнике почетнике, од помоћи израда детаљне припреме, односно плана извођења часа. Увек се мора размислити о томе шта је било успешно на часу, а шта није, и који аспекти се могу оптимизовати у даљим часовима.

Наставници почетници се као и ученици често муче када раде на задацима моделирања у почетку, јер није дат ниједан од података који су им потребни за решавање. Зато се увек мора размишљати о различитим могућностима како би ученици могли да дођу до потребних података, или саветима за континуиран рад на проблему – једна могућност су горе поменуте „картице помоћи“. Њихов циљ је да промовише самосталност ученика и да им пружи помоћ у складу са нивоом њихових потреба. Картице за помоћ нису неопходне за сваки проблем моделирања који ћете користити. У ствари, то је метод помоћу којег се може видети којим ученицима је потребна помоћ и како користе овај

инструмент. Након што им објасните шта су помоћне картице, ученици могу отићи до стола где су оне постављене тако да су поређане по нивоима. Да бисмо вам показали како ове картице за помоћ функционишу у пракси, позивамо се на пример „Бале сламе“, у коме је требало што прецизније одредити колико је висока планина бала сламе. Даје се слика са особом која седи на неколико бала сламе. Не препознају сви ученици да могу користити особу са слике за мерење висине бала сламе. Неки од њих ће доћи код вас и питати шта да раде, па би вам прва помоћ могла бити: „Прочитајте поново пажљиво проблем. Запишете шта је дато, а шта недостаје!“ Додатна помоћна картица, посебно када млађи ученици раде на овом проблему, је висина особе која недостаје. Ако ученици у овом тренутку не напредују или им не падне на памет да користе особу за процену висине бала сламе, неопходна је помоћна картица: „Погледајте особу на слици. Колика је висина особе? Користите свој резултат да процените висину бала сламе.“ Највећи наговештај би био да запишете: „Независно од тога да ли је мушкарац или жена, висина особе је у просеку између 1,65 m – 1,85 m.“ Видели сте два могућа модела за решавање овог задатка. Вишеструко сабирање процењене висине жене до висине бала сламе је један од начина, али ако се фокусирасте на Питагорину теорему, требало би да припремите више помоћних картица почевши од једноставне: „Покушајте да пронађете други начин решавања од вишеструког сабирања! Да ли „видите“ троугао унутар планине од бала сламе?“ Можете наставити са помоћним картицама попут: „Које су карактеристике правоуглог троугла?“ Слично томе, снажан наговештај је: „Формула Питагорине теореме је $a^2 + b^2 = c^2$ “. Ове могуће картице помоћи имају различите нивое. Уопштено говорећи, картице за помоћ су такође добар дијагностички инструмент да сазнате које подкомпетенције моделирања су стекли ваши ученици. У наставку је приказана илустрација картица за помоћ:



Припрема за час уз активност задатка моделирања „Селидба“

Овај проблем моделирања се односи на рачунање запремине и може се користити у 8. разреду основне школе или 3. разреду средње школе.

Пример 2. Селидба

Ваша старија сестра се са својим мужем сели у нову кућу. Они желе да сачувају што више новца. Изнајмили су аутомобил са слика како би пренели своје ствари, али само на један дан.

Помозите им да нађу најоптималнији начин да пренесу највећи могући број кутија са стварима.



Контекст проблема се бави селидбом и поставља се питање: колико кутија за селидбу може да се стави у аутомобил приказан на сликама. Селидба је контекст који је познат многим студентима.

Приликом формулисања циљева часа, на сличан начин треба промовисати математичке садржаје и математичке задатке. Стога ученици треба да...

- самостално и унутар група раде на задацима моделирања, да се упознају са проблемима моделирања и њиховом природом,
- развију и оцене различите стратегије/моделе за решавање проблема,
- направе одговарајуће претпоставке уз помоћ процене или мерења како би добили податке који недостају,
- користе, понављају и продубљују различите основне математичке операције, компетенције мерења, нпр. израчунавање запремине,
- побољшавају своју комуникативну и социјалну компетенцију у оквиру групног рада.

У наставку су укратко представљена два могућа решења. Као што сте приметили, „Селидба“ може изазвати дискусију са ученицима о томе шта значи „оптимално“ – било након читања задатка и појашњавања питања или током групног рада, када су се питања појавила. Ученици треба да схвате да „оптимално“ у овом контексту има везе са распоредом максималног броја кутија за селидбу у складу са њиховим величинама у аутомобилу. Пре него што се то уради, мора се одредити величина кутије и утоварног простора аутомобила. Ово би могла бити прва когнитивна баријера за ученике. Утоварни простор аутомобила може се проценити коришћењем особе на слици и ако дозволите, ученици могу да истраже величине кутија на интернету. Бројне компаније нуде кутије у различитим величинама и тако студенти могу да одлуче који производ би могли да користе за стварање претпоставки и на крају математику и изградњу математичког модела. Овде су приказане две могуће верзије решења:

Верзија 1.

У овој верзији се одређују запремина утоварног простора аутомобила и запремина кутија. На тај начин може се извести груба процена броја кутија које се могу ставити у аутомобил. Међутим, ово решење није заиста оптимално. Висина особе, отприлике 1,85 m, помаже у процени висине аутомобила. Одузимајући тачкове аутомобила, висина утоварног простора је око 1,15 m. Уз претпоставку да је товарни простор аутомобила коцка, добијамо да је његова запремина $V = a^3 = (1,15)^3 \approx 1,52 \text{ m}^3$. За добијање запремине једне кутије, једна се може унети у учионицу и ученици могу да измере димензије или се димензије могу потражити на интернету. Могу добити, на пример, за висину $h = 38 \text{ cm}$, за ширину $v = 36 \text{ cm}$ и за дужину $l = 65 \text{ cm}$. Ово би значило да је кутија облика квадра и да је њена запремина

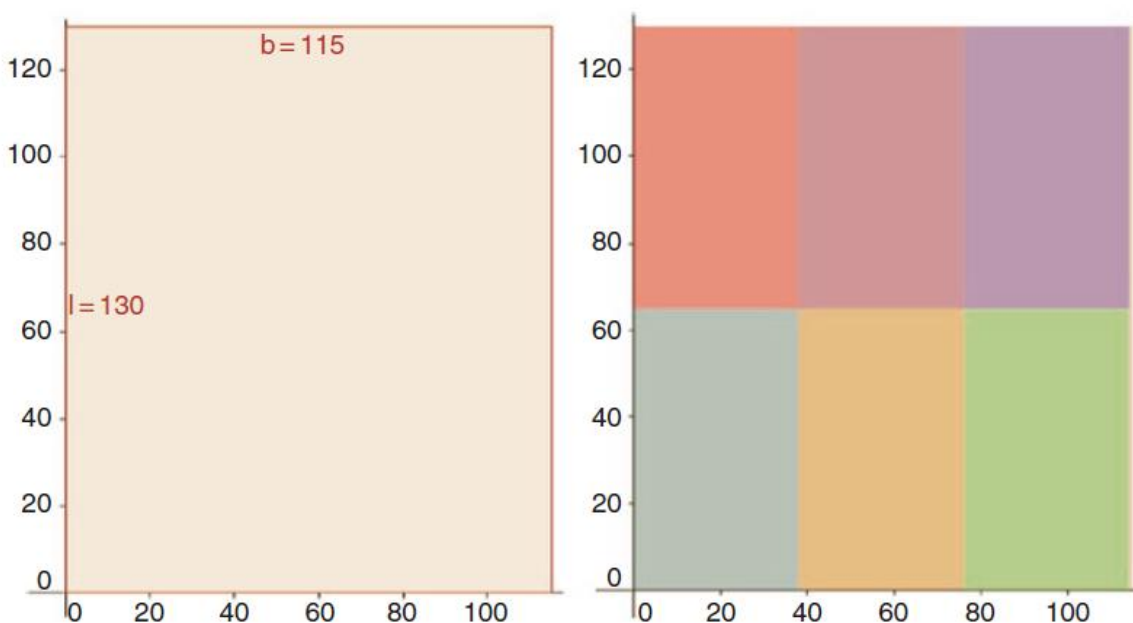
$$V_k = l \cdot v \cdot h = 0,65 \cdot 0,36 \cdot 0,38 = 0.089 \text{ m}^3.$$

За процену потребног броја кутија, треба поделити запремину товарног простора са запремином кутије, односно добија се да је $\frac{V}{V_k} = 17,1$. Резултат показује да би отприлике 17 кутија ове запремине стало у аутомобил. – Да ли ово може бити тачно и има ли смисла? Наравно, резултати се разликују према претпоставкама на почетку. Користећи ову методу решавања може се претпоставити да се кутије могу сећи и тако се цела запремина утоварног простора може користити без ограничења. То у ствари не одговара стварности и треба размишљати о другом могућем и смисленом методу решења. Многи студенти су преферирали овај начин, што је исправно, ако се њени аспекти рефлектују и резултат се валидира.

Верзија 2.

Према овом начину решавања, прво се мора одредити површина зоне оптерећења. Ово се може урадити проценом помоћу особе која стоји испред аутомобила. На тај начин добија се ширина од 1,15 m и дужина од 1,30 m. Сада ученици могу да

направе тлоцрт зоне утовара. Након тога се морају идентификовати величине кутија, а затим се може попунити тлоцрт. Када се преброји број кутија, добија се њих 6 по нивоу (види [Слика 1 Тлоцрт зоне утовара и попуњавање кутијама](#)). У следећем кораку ученици треба да одреде колико нивоа кутија може бити наслагано. Када се користе прве процене и претпостави се да је утоварни простор висок колико је широк (1,15 m) и да је висина кутије око 36 cm, онда постаје јасно колико кутија може да се сложи. Дељењем 1,15 m са 0,36 m добија се 3,2 као број нивоа. Заокружљивањем на 3, а затим множењем са 6, добија се резултат од 18 кутија. Опет, овај резултат у великој мери зависи од претпоставки направљених на почетку о величинама кутија, које се могу разликовати више од процењене зоне оптерећења. Могући су и други резултати као што су 12 или 8 кутија. Важно је разговарати, размишљати и потврдити како ученици одређују број кутија које се узимају.



Слика 1 Тлоцрт зоне утовара и попуњавање кутијама

У наставку је представљен план часа у трајању од 90 минута. Време је могуће скратити тако што ће се ученицима дати мање времена за решавање или ће се смањити време за фазу презентације. Планови лекција могу бити различито структурирани. Ипак, треба да се придржавају критеријума квалитета добре наставе. План у наставку је подељен на делове време, фаза, активност и материјале (нпр. радни лист, рачунар)/друштвене форме (нпр. групни или партнерски рад, пленумска дискусија, упутства за наставнике).

Време	Фаза	Активност	Материјали/ друштвена форма
5 мин	Увод	Наставник представља распоред часа	Наставникова презентација
10 мин	Радни лист	Наставник представља проблем и појашњава питања; ученици организују радне групе	Радни лист са проблемом, наставникова презентација
40 мин	Фаза рада	Решавање задатка у групама; прављење постера са решењем; планирање презентације	Радни лист, постер, групни рад
20 мин	Презентација	Бира се група за презентацију и друге групе могу додати још идеја/резултата/математички модела	Презентација студената
10 мин	Валидација/Рефлексција	Различити резултати се дискутују и разматрају, посебно се наглашава валидација	Пленарна дискусија (сви)
5 мин	Повратна информација	Наставник даје повратну информацију о одржаном часу	Преко листа за повратне информације или других метода повратних информација

Табела 1 План часа

Приликом извођења овог часа у различитим школама и старосним групама (12–16 година), временски оквир је био адекватан. Често претпоставке направљене на почетку нису биле одговарајуће и групе су морале поново да почну са процесом моделирања. Према критеријумима квалитета добре наставе, неопходно је да ученици имају довољно времена за дискусију и на крају записивање резултата. Током активности моделирања ученика треба пажљиво посматрати различите групе како бисте их мотивисали и дали им наговештаје за решавање проблема моделирања. Једно од најчешће постављаних питања је: „Како могу да пружим подршку својим ученицима док моделирају и која је моја улога током часа?“ Ово питање се разматра у следећем одељку.

Интервенције током активности моделирања

Подршка ученицима док раде на моделирању је кључни део наставе математичког моделирања и стога је неопходно имати извесну теоријску позадину. Ово знање чини далеко лакшим одговоре на горе постављена питања, а такође гради основу за дијагнозу, процену и оцењивање. Пре него што уђемо у детаље у вези са интервенцијом наставника, мора се поменути вештина 'учавања' у образовању. Према Мејсону, учавање је фундаментална компонента образовања наставника. Стар и Стрикланд истичу да способност учења из подучавања зависи од способности да се „учава“, у смислу идентификације шта је вредно пажње и важно. Галбрајт је проширио концепт 'учавања' на перспективу подучавања и учења математичког моделирања као решавања проблема у стварном свету. Резултати његовог емпиријског истраживања показују да су три врсте 'учавања' важне за подучавање и учење математичког моделирања и решавање проблема моделирања:

1. учавање као математичар,
2. учавање као математичар/едукатор и
3. учавање као ментор.

Према Галбрајту, ови типови обухватају питања идентификације проблема и аутентичног развоја задатака. Како сада долазимо до интервенција наставника, може се видети веза између два концепта. Наставник мора да препозна и уочи да ли ученик напредује у решавању неког стварног животног проблема и да одлучи да ли је интервенција неопходна или не. У дидактичком истраживању интервенција, разматра се неколико теоријских приступа за подршку ученицима. Постоји добро позната таксономија помоћи коју је развио Зех, а која се односи на принцип „минималне помоћи“. Циљ ове таксономије – првобитно развијен за контекст решавања проблема – је да ученике треба подржати у томе да сами развију решење колико год је то могуће. Таксономија обухвата следећу хијерархију врста помоћи. Свака врста помоћи је илустрована примером интервенције, који показује идеју повећања нивоа помоћи.

Помоћ	Пример интервенције
Мотивациона	„Наставите и покушајте, решићете овај проблем, сигуран сам!“
Повратна информација	„Да, на правом сте путу!“
Уопштена стратегшка	„Направите скицу“ или „Прочитајте текст поново“.
Стратешка оријентисана на садржај	„Можда вам правило три помогне да пронађете решење.“
Оријентисана на садржај	„Шта је дефиниција брзине?“

Табела 2 Таксономија помоћи (Према Zech-у)

На основу Зеха и других теорија интервенција, Лајс (2007) је креирао даљу класификацију интервенција и истражио различите врсте подршке коју наставници пружају у процесу моделирања у лабораторијској студији. Централни резултат ове студије

је, између осталог, да наставници ретко користе стратешке интервенције и уместо тога често бирају индиректне савете. Тако ученици морају сами да размисле како би решили потешкоћу.

Класификација интервенција наставника коју су развили Лајс и Тропер представљена је у наставку. Лајс дефинише интервенције наставника као све вербалне, пара-вербалне и невербалне интервенције наставника у процесу решавања задатака код ученика. Адаптивне интервенције наставника се дефинишу као подршка појединачним ученицима на минималан начин, тако да ученици могу што више самостално да раде. Лајс разликује нивое, циљеве и активаторе интервенција, што је објашњено у табелама испод.

Ниво интервенција
У погледу садржаја Интервенције наставника које се односе на садржај: Процес моделирања и одговарајућа математика
Стратешке Интервенције на метанивоу – односно општи аспекти процеса моделирања и решавања проблема
Афективне Интервенције којима се покушава утицати на психичко стање ученика
Организационе Интервенције у вези са основним условима рада ученика, укључујући групне интеракције или презентације

Табела 3 Нивои интервенција

Циљеви интервенција
Дијагноза Наставник пита ученике о тренутном стању њиховог процеса решавања
Евалуација/повратна информација Наставник даје повратну информацију о процесу решавања ученика без даљих информација или корекција
Индиректни савет Суптилни савети наставника како би помогли ученицима да пронађу „најбољи начин решавање” по мишљењу наставника
Директан савет Наставник експлицитно даје релевантна објашњења и информације ученицима
Свесна неинтервенција Нема интервенције наставника, иако ученици могу имати проблеме

Табела 4 Циљеви интервенција по нивоима

Покретачи интервенције	
Инвазивна	Сопствена иницијатива наставника да интервенише у процесу решавања ученика
Узвраћена	Ученици експлицитно питају наставника за савет

Табела 5 Покретачи интервенција

У наставку су приказани сценарији са часа са проблемом моделирања „Селидба”.

Погледајте поново табелу интервенција и таксономију помоћи како бисте анализирали сценарије из лекције. Наставница у овом одељењу била је госпођа Клајн, која је већ 10 година радила као наставник математике и природних наука, али није похађала радионицу о настави математичког моделирања. Дакле, њено понашање током часа није резултат интервенције-тренинга и на тај начин вам даје осећај како бисте се понашали и интуитивно. Госпођа Клајн је била заинтересована да имплементира проблеме моделирања у своју свакодневну наставу и радо је користила проблем „Селидба”, који се савршено уклапао у наставни план и програм за њен разред, који се у то време бавио запремином. Дозволила је студентима да користе интернет за тражење података који недостају, али није експлицитно навела које врсте података. На пример, величина кутије за селидбу може се наћи на интернету да би се решио проблем.

Scenario 1

Students work in their groups. Mrs. K. is sitting at the desk and notices possible difficulties within one group and finally goes to the students.

Mrs. K.: “I heard your active and noisy discussion. What kind of problem do you have?”

Jannik: “We need the actual sizes for a moving box!”

Mrs. K.: “Have you estimated the size, yet?”

Giulia: “We tried, but we think it’s not right.”

Tina shows the teacher the sizes on the paper sheet: length 100 cm, width 130 cm, height 80 cm.

Mrs. K.: “Alright, have you thought to validate the sizes?”

Giulia: “No, how?”

Mrs. K.: “When starting with the problem I allowed you to use the internet to look up data.”

Jannik: “Okay, thanks.”

Слика 2

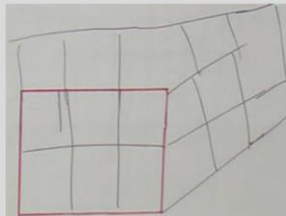
Scenario 2

Anika asks for Mrs. K. during group work.

Anika: “Mrs. K. it’s not easy to tell the volume of the loading space of the car. We started to get the height of the loading zone by using the person standing in front of the car.”

Lara: “We estimated the height of the car which is 127 cm and multiplied this by four which is 508 cm.”

Frank: “Yeah and we think that the person on the picture fits into 508 cm four times”.



Слика 3

Scenario 3

Mrs. K.: goes around and stops, as she listens to the following group conversation:

Kiril: "How can we calculate the size of the moving box and the loading zone of the car?"

Laura: "We use the formula for volume. I think it is $a \times b \times c$, is that right Mrs. K.?"

Mrs. K.: "Correct."

Kiril: "Okay, but when there's a , b and c from the formula and we have the sizes for the length, width and height. Which variable belongs to which size?"

Mrs. K.: "I think a sketch will help you and the others to think about this interesting question."

Laura: "It doesn't matter, we also could use x , y or z as variables, right?"

The group discusses for about 5 minutes and asks Mrs. K. to come back to the group.

Jonas: "We did not come to a conclusion and we didn't get any further. Laura's opinion is that the variables do not play a role and Kiril wants to have a connection."

Mrs. K.: "I have seen you made a sketch, that's fine. Both Kiril and Laura are right. Of course you have to define if a represents the width, b the height or c the length. Then you relate the variable to the sizes you calculated and estimated. In your case a is 90 cm."

Слика 4

Питање је какву бисте помоћ дали групи. Покушајте да формулишете конкретне интервенције/помоћ и образложите своју одлуку за сваки од наведених сценарија.

Сценарио 1 - Било је очигледно да је госпођа Клајн посматрала групе док су седела за својим столом. Након што је приметила да се једна група мучи, одлучила је да им помогне. Стога је то била њена иницијатива да оде код студената и инвазивна интервенција (гђа К.: „[...] Какав проблем имате?“). Циљ њене интервенције је био постављање дијагнозе, јер овим питањем извлачи одговор о тренутном статусу процеса решавања. Жеља ученика је била да добију „праве“ димензије покретне кутије, иако су већ проценом добили димензије. Према циклусу моделирања, ученици су још увек били у фази изношења претпоставки за изградњу реалног модела. Након што је Тина учитељици показала димензије, умешала се госпођа Клајн, мудро не рекавши да ли су у праву или не. Циљ интервенције госпође Клајн је тада био да процени и да повратну информацију о процесу решавања тако што ће рећи: „У реду, да ли сте мислили да потврдите величине?“ Ово је такође добар пример како је госпођа Клајн интуитивно практиковала принцип минималне помоћи. Након што је Ђулија питала како ће потврдити своје претпоставке, госпођа Клајн их је подсетила да користе интернет. Према таксономији Зеха, она је користила опште-стратешку помоћ да покаже како ученик треба да настави са процесом решавања.

Сценарио 2 Овај сценарио показује једну од многих потешкоћа које су ученици имали приликом процене величина како би добили запремину зоне утовара аутомобила. Студенти су експлицитно тражили савет и тако се ово зове узвраћена интервенција. Ова група је имала добру идеју користећи особу која је стајала испред аутомобила. Одредили су висину аутомобила 127 cm. Затим је група помножила 127 cm са четири и закључила да се особа на слици уклапа у 508 cm четири пута. У овом тренутку интервенција је била

неопходна. Осим што је приметила неколико погрешних схватања, наставница мора да разуме Франкову изјаву и тумачење група о „особа на слици стане четири пута у 508 cm. Прва интервенција би требало да буде фокусирана на мета-ниво како би се разјаснила заблуда како из перспективе наставника тако и из перспективе ученика. Отуда је погодна стратешка интервенција: „Како се 508 cm уклапа у проблем и шта у овом контексту представља 127 cm? Објасните ми идеју иза тога.” Очигледно је да ученици, такође у фази изградње реалног модела, имају проблема са чулом мерења и нису усвојили појам запремине. Ако протумачимо Франкову изјаву, видимо да је изједначио висину аутомобила са висином особе, што показује да би у овом тренутку валидација са стварним животом имала смисла. Особа на слици је виша од 127 cm. Тумачење „четири пута у 508 cm“ може бити да ученици имају на уму формулу запремине, да је то нешто попут множења броја три или четири пута, али не могу да га искористе на прави начин. На скици је приказан црвени обруб и може се претпоставити да су ученици четири пута помножили 127 cm да би добили запремину. Они су такође погрешно користили формулу за површину. Разумевање погрешних схватања и идеја које ученици имају у глави представља изазов за наставника. Стога стратешка интервенција има смисла, како би се разјаснила ситуација и што је више могуће укључили у процесе размишљања ученика.

Сценарио 3 Сличне потешкоће са формулом за израчунавање запремине постале су видљиве у сценарију 3. Иако је госпођа Клајн застала за столом једне групе док је обилазила учионицу, јер су је ученици тражили за помоћ, то је била узвраћена интервенција. Заустављање госпође К. за групним столом без икаквих речи је невербална интервенција, која је убрзо постала вербална. Кирил није могао да се сети формуле за запремину. Лаура је именовала формулу, иако није била сигурна и питала је наставницу. Гђа Клајн је то кратко потврдила рекавши „тачно”. Кирил је још увек био у недоумици како варијабле a , b и c припадају трима димензијама које су они проценили. Госпођа Клајн је одговорила уз уопштену стратешку помоћ и подстакла Кирила да направи скицу. Штавише, госпођа Клајн је дала афективну интервенцију рекавши да је Кирилово питање интересно јер то показује да је она озбиљно схватила његов проблем. Лаура је схватила да није важно да ли користите a или k . Госпођа Клајн није интервенисала након ове изјаве и пустила је студенте да дискутују, али ипак нису дошли до закључка. На крају је госпођа Клајн дала директне савете и релевантна објашњења и информације ученику. Ово је такође интервенција оријентисана на садржаје, јер је ученицима било потребно појашњење пре него што су могли да напредују у процесу моделирања.

Сумирајући сценарије, многи аспекти постају јасни: Иако се на овом часу обрађивала запремина, већина ученика није била у стању да примени своје математичко знање у овом контексту или да направи везу између стварности и математике током моделирања. Често се ученици нису позивали на стварност приликом процене у процесу изградње реалног модела. У сценарију 2, на пример, висина аутомобила од 127 cm је изједначена са висином особе која стоји испред аутомобила, што је потпуна бесмислица. Валидација је у овом тренутку изостала и стога је била неопходна интервенција гђе Клајн. Сценарији су

направљени за тренутке у којима су ученици градили реални модел или су почели да се баве математиком. Погрешне представе ученика постају очигледне и као наставник треба да имате потребно знање о садржају да бисте јасно могли да објасните математичку позадину, што може помоћи ученицима у њиховом процесу решавања. Госпођа Клајн је интуитивно интервенисала на начин подршке својим ученицима и избегавала превише индиректних савета. Приметите да током часова моделирања улога наставника захтева брзо разумевање у којој фази моделирања ученици тренутно раде, као и које заблуде ометају напредак у процесу моделирања. Кретање по учионици, а да ученицима не дате осећај да су посматрани и да им истовремено покажете да могу да вас питају када им је потребна помоћ, подржава ефикасно моделирање. Проблеми моделирања нуде широк потенцијал слабијим и јачим ученицима да комуницирају о математици и тако продубе своје знање. Као што је поменуто, ученици су на овом часу били мотивисани током рада на овом проблему и све групе су добиле резултат који су презентовали и дискутовали.

Начини навикавања ученика на моделирање

Као и ви, ученици такође морају да науче да су проблеми моделирања отворени, сложени и да се стварни контекст описан у задатку мора схватити озбиљно. Подаци који недостају за решавање проблема из стварног живота морају се тражити и не дају се, као што је то уобичајено у текстуалним задацима у самој поставци. Због тога су представљени „превише одређени“ и „недовољно одређени“ задаци како би се показао један могући начин навикавања ученика на моделирање проблема. У почетку ученици треба да виде разлику између проблема моделирања и „стандардног“ математичког задатка, и треба да стекну идеје о томе које стратегије имају смисла када раде на проблему моделирања. На вежбама смо поредили задатке „Ведар дан на мору“ и „Лука Хамбург“ и разлике су биле очигледне. Тада сте могли да видите када и зашто задатак можемо назвати проблемом моделирања. Можете користити оба проблема за своје ученике у средњој школи и пустити их да открију разлике. Пошто настава математичког моделирања треба да почне у основној школи, неопходно је да се раније навикну на то.

Стога је у наставку дат конкретан пример како ученици 5. разреда могу стећи увид у формат задатка „проблема моделирања“. Такође је занимљиво питати ученике о њиховом виђењу математике као школског предмета или о томе шта ученици „очекују“ од наставника математике. Радећи ово, добијате идеју о математичким уверењима ученика. Проблеми моделирања нуде динамичку перспективу како се математика може видети, посебно зато што се прилично разликују од рутинских математичких задатака. Пример испод је из секвенце од седам лекција (једна лекција траје 45 минута) о математичком моделовању, а прве две лекције (90 мин) су садржале поменуте аспекте. Овај разред никада раније није радио на проблемима моделирања, а није ни учитељ. Тако је један од обучених и искусних наставника држао лекције тако да наставник који предаје разреду треба да посматра и учи да би следећи пут то урадио самостално.

Mike is in Grade 5 and Grace in Grade 4. During dinner the following conversation came up:

Grace: "Crazy! Today Julia told us that her dad won \$500,000 in the lottery."

Mike: "Wow, that's a lot of money. I would like to have that much too!"

Grace: "Yeah, it's really so much money and I wonder how many things you could buy. Perhaps we could have a big house like the celebrities or have horses in the garden. Do you think that mom and dad would still have to work, if we got so much money?"

Mike: "We should calculate this. This is an interesting question!"

Grace: "What do you mean by calculating? I do calculations in math lessons and this question has nothing to do with math, right?"

Mike: "Why? We do these kinds of problems very often in math class. First of all you have to think a little bit, for example how much money a family needs for one month and then you can go on with calculating."

Grace: "How do you know about the amount of money you need? That's always different from person to person and then the result is not exact. When you do math, you only get one result, either I calculate the answer right or wrong. Sometimes I do a mistake and then it is also wrong!"

Mike: "Nonsense! That's not always the case and you can also have different results or more than one result and it can be right anyway."

Grace: "You're crazy! In math there can't be multiple correct results. Four times five is twenty and you can't argue that twenty-four is the correct result, right?"

Mike: "Oh man, you don't understand! You can't compare it. Math is not always stupid computing. If you think about how much money you spend in a month, then there's a lot of mathematical thoughts behind it. Actually mathematics is everywhere around us."

Grace: "Hm. I will ask my math teacher about it."

Слика 5

За први час припремљен је писани дијалог између брата и сестре који је ученицима дат на читање. Изаберите дечака и девојчицу из свог разреда да прочитају разговор пред свима.

Овај разговор показује да Грејс негативно гледа на математику и да не види везу између математике и стварности. С друге стране, њен брат Мајк описује математичке проблеме који захтевају више од аритметичких операција и његов поглед на математику је позитиван. Овај разговор је два пута прочитан на часу, а затим је од ученика затражено да својим речима испричају садржај. Затим су имена Мајка и Грејс исписана на табли да би се истакле различите позиције. Са питањима „Како Грејс мисли?“ и „Како Мајк мисли?“ сумиране су идеје ученика. Након овога, ученици су упитани о њиховом мишљењу и расправљали се да ли се слажу са Микеовим или Грејсиним гледиштем. Неким ученицима се допао Мајков став и рекли су на пример да вам је математика потребна у свакодневном животу и за многе професије. Други су склони да се слажу са Грејсиним начином размишљања, да је математика или тачна или погрешна и да је уопште досадна. Циљ ове прве активности био је да подстакне ученике на размишљање о математици као школском предмету и као научној дисциплини. Да би ученицима дали бољу прилику да изразе своју личну перспективу, дат је упитник са следећим питањима:

1. Ванземаљац је слетео у твоју собу и жели да зна шта је математика. Молим те, објасни му шта је математика.
2. Шта очекујете од свог професора математике?
3. Да ли волиш математику? Молимо објасните зашто или зашто не.
4. Које математичке задатке волиш да решаваш (геометријске, множење, сабирање, разломке...)

На основу дијалога и упитника, следећи корак је био да се ученицима покажу математички задаци који су им били познати из часова математике и уџбеника, на пример рачунски задаци. Ученици су решавали задатке и разговарали су о томе да је заиста могућ један тачан резултат, али често више метода решавања доводи до резултата. Ово је изградило добар мост да се каже:

Већ дуго познајете овакве математичке задатке. Сада ћете научити нешто ново о математичким проблемима који се разликују од „нормалних“ математичких задатака. Хајде да погледамо!

Припремили смо сто испред табле и поставили питање: „Колико ученика стане на сто?“ Сада су ученици били подстакнути да праве претпоставке и постојао је низ одговора попут „троје људи, када седе“ или „шеснаест људи, када устану на столу“. „Који је резултат тачан?“ упитао је наставник. Ученици су одговорили да желе активно да пробају, што су на крају и урадили у неколико група. Ово је био креативан процес за ученике и тако су размишљали и испробавали различите могућности. Опет су рекли различите резултате, на пример 10, 11 или 14. Затим се разговарало о томе како су ови резултати добијени. Ученици су тврдили да резултати зависе од постављених претпоставки, што је био добар увид и њиме је показано колико отворен математички задатак може бити.

Припремљена су још два радна задатка. Први треба да се уради као тимски рад:

Размислите о математичким проблемима који се могу решити на различите начине и који могу имати различите резултате.

Опет, ученици су имали много идеја. Ево неких од њих: Колико би кромпира било потребно да се прехрани 10 људи? Колико длака има човек? Колико пута се „М“ може одштампати на нормалном листу папира? Колико ученика стане у новине?

Приметно је да су ученици формулисали такозване “Фермијеве проблеме” или “Фермијева питања”. Они су названи по нуклеарном физичару Енрику Фермију који је био познат по томе што је могао спонтано да прави добре процене, иако је имао мало информација. Изазови за решавање оваквих проблема су у томе што нема директне емпиријске вредности сличног проблема и нема података за прорачун. Често знате контекстуалну позадину питања и можете је искористити да индиректно дођете до решења. Дакле, могло би се рећи да су услови за решавање Фермијевих проблема опште

знање и добро расуђивање. Класични и добро познати Фермијев проблем је: Колико штимера клавира живи у Чикагу.

Шта је ваше решење? Поред проналажења и формулисања отворених проблема, ученици су радили и на следећим проблемима, што им је дало више примера отворених проблема:

Марвин жели да понуди својим пријатељима манчемелоу за свој 10. рођендан, јер их обожава. Колико кутија он и његов отац морају да купе?

Можда сте видели зебре у зоолошком врту. Шта мислите, колико пруга има зебра?

Око трећине ученика у одељењу радило је на овим проблемима. Мери је имала потешкоћа са првим проблемом, јер је рекла да нема података колико је деце позвано на рођендан. Сабрина јој је одговорила да треба да размисли о броју ученика и на основу тога да процени колико манчемелоуа поједе свака особа и онда ће добити број кутија. Неки ученици су врло прагматично радили на овом проблему и претпоставили да је Марвин позвао 10 деце на своју журку и да сваки гост у просеку поједе 6 чоколадних манчемелоуа за време журке. Без провере на интернету или добијања додатних података, број чоколадних манчемелоуа по кутији је утврђен као 20. Цена за једну кутију је била фиксирана као 1\$ и тако 3\$ за три кутије, што би требало да буде довољно за журку. Наравно да смо ова решења накратко потврдили на часу, али за први покушај није било лоше. У вези са „проблемом зебре“ могу се уочити две централне стратегије за решавање, при чему је прва била кроз бројање, а друга кроз процену. Распон процена је био од 30 до 210.000 пруга. Поново смо разговарали и наравно потврдили резултате ученика. Тако је првих 90 минута показало један начин навикавања ученика на моделирање проблема у основној школи.

У даљим разредима могућ је и други, али сличан начин увођења моделирања. Поред горе поменутог предлога да се ученицима дозволи да упореде проблем моделирања и нормалан задатак, можете почети са такозваним превише одређеним задатком.

Превише одређени задаци се карактеришу као задаци у којима је дати контекст једноставан. То наравно има последице по аутентичност. Међутим, разлика у односу на друге задатке је у томе што ови задаци нису традиционални текстуални задаци, јер је дато више или мање индикација величина. У почетку је централни циљ да ученици науче да озбиљно схватају контекст. Испод видите пример за овај формат задатка:

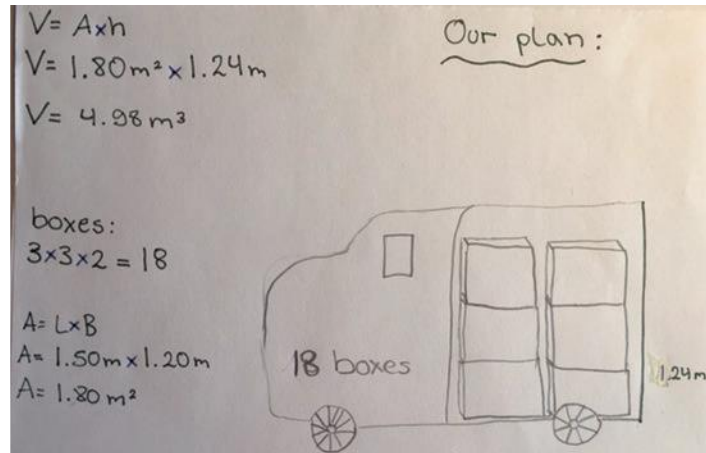
Роберто из Валпараиса у Чилеу би желео да посети свог пријатеља у Валдививи на југу Чилеа на недељу дана. Свиђа му се тамошња немачка пивара. Лет од Сантјаго де Чилеа до Темука кошта 152\$ укључујући трошкове резервације. За аутобус од Валпараиса до Сантјаго де Чилеа треба да плати 5\$, повратно 10\$. Накнада за паркирање на аеродрому у Сантјаго де Чилеу је око 48 долара за 8 дана. Аутобус од Темука до Валдивие кошта 7 долара. Колико су Робертови путни трошкови?

Ученици морају пажљиво да прочитају задатак како би анализирали који су подаци потребни за решавање задатка. Робертов ентузијазам за пиво је добро знати, али не помаже у решавању задатка. Информације о накнади за паркирање на аеродрому Сантјаго де Чиле и трошковима аутобуса од Валпараиса до аеродрома су важне, иако студенти морају да се расправљају која опција има више смисла. Дате су даље информације и коначно се поставља питање о висини Робертових путних трошкова.

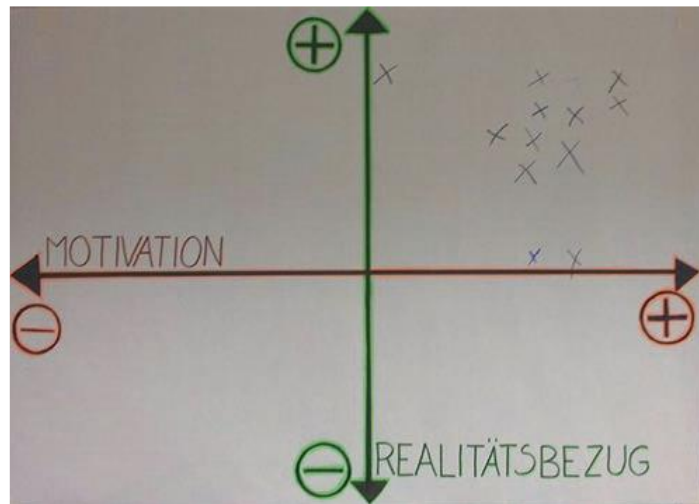
Након неког од оваквих задатака, следећи корак би био да се ученицима да недовољно одређен задатак, који се одликује чињеницом да недостаје много информација. Дакле, потребна је смислена процена или тражење потребних информација. Недовољно одређени задаци су веома тешки за ученике, као што је показано у неколико примера раније. У наставку је приказан пример недовољно одређеног задатка, који можете користити за сваку оцену.

Породица Галлегос има двоје деце, Франка, 12 година и Емилију, 8 година. Обојица воле да једу пицу и зато је једу два пута недељно. Воле разне врсте: са парадајзом, моцарелом, са поврћем или месом. Колико је новца потрошила породица да плати пице за целу годину?

За добијање адекватног решења потребно је направити много претпоставки. Прво се може размишљати о цени пице, а затим о томе колико ће пица у просеку ученици појести за недељу дана. Ученици би могли помислити да је пица купљена у супермаркету јефтинија од једења пице у ресторану. Дакле, различите могућности где можете купити пицу чине основу за прави модел. Штавише, ученици морају да запамте број недеља у целој години. Математички модел није сложен; то је само сабирање или множење, али ученици тако добијају идеју о томе како да траже податке и праве претпоставке. Слично примеру приказаном за основну школу, важан аспект је експлицитно помоћи ученицима да схвате разлику између формата задатка моделирања и 'нормалних' математичких проблема, и тако разговарати са њима на мета-нивоу. Након првих лекција са проблемом моделирања можете питати своје ученике за повратну информацију. На пример, веома једноставан метод, испод осталих, користи метод повратне информације „укрштене линије“. На вама је који аспекти треба да буду на осаму. Шта је са сазнањем о мотивацији ученика док решавају проблем моделирања с једне стране и њиховом оцењивању како је проблем повезан са стварношћу с друге стране? Испод на слици 4.2 видите пример који је наставник користио након што су ученици по други пут радили на проблему моделирања. Изабрани су аспекти „мотивација“ и „веза са стварношћу“. Очигледно је да су ученици волели да раде на проблему (Слика 7 [Метода повратне информације „укрштене линије“](#)).



Слика 6 Решење задатка Селидба



Слика 7 Метода повратне информације „укрштене линије“