

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА, ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ

1. Решити једначине

(а) $7^{x^2-x-3} = 343$; (б) $2^{\frac{x+1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 1$;

(в) $4^{x+1} + 4^x = 320$; (г) $16 \cdot 3^x = 81 \cdot 2^x$.

2. Решити једначине

(а) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$; (б) $4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} = 7^{x+1} - 7^{x-1}$;

(в) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$; (г) $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.

3. Решити једначину $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$.

4. Решити једначине

(а) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$; (б) $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x^2-2x+1} + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{x^2-2x+1} = 6$.

5. Решити једначине

(а) $2^{3x-2} - 2^{3x-3} - 2^{3x-4} = 4$; (б) $(2^x)^3 - \frac{7}{2} \cdot (2^x)^2 + \frac{7}{2} \cdot 2^x - 1 = 0$.

6. Решити неједначине

(а) $5^{7x+3} \geq 5^{-3}$; (б) $3^{x^2-4x-5} \leq 1$; (в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$.

7. Решити неједначине

(а) $5^{2x} - 5^{x+1} + 5 \geq 5^{x+1} - 20$; (б) $\frac{1}{2^{2x}+3} \geq \frac{1}{2^{x+2}-1}$.

8. Решити неједначине

(а) $2^{4x+2} \cdot 4^{-x^2} - 3 \cdot 2^{2+2x-x^2} + 8 \leq 0$; (б) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

9. Решити неједначине

(а) $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x \leq 62$; (б) $\sqrt{\left(5+2\sqrt{6}\right)^{2x}} + \sqrt{\left(5-2\sqrt{6}\right)^{2x}} \leq 98$.

10. Решити системе једначина

(а) $\begin{cases} 5 \cdot 3^x - 2^y = 11, \\ 7 \cdot 3^x + 5 \cdot 2^y = 41; \end{cases}$ (б) $\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7. \end{cases}$

11. Нека су $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, сва, међусобно различита, реална решења система

$\begin{cases} y^2 = 4^{x+1} + 8, \\ 4 \cdot 2^x + y = -1. \end{cases}$ Одредити збир $\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)$.