

РЕАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ. КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

10.06.2017. године

1. Ако је функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x) = x^3 - \frac{2}{x^2}$, одредити $f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Ако је функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, одредити $f(f(1)) - f(f(-1))$.
3. Ако су функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дате са $f(x) = x^2 + 1$ и $g(x) = 3x - 1$, одредити $f(g(x)) - g(f(x))$.
4. Ако је функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x) = \frac{1}{1-x}$, одредити функцију $h(x) = (f \circ f \circ f)(x)$.
5. Ако су функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дате са $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = x^4 + 3$, одредити $f(g(f(f(x))))$.
6. Ако је функција $f : [0, 1] \rightarrow \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ дата са $f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$, одредити њену функцију.
7. Ако је функција $f : [0, 1] \rightarrow [1, \sqrt{2}]$ дата са $f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x})$, одредити њену функцију.
8. Ако је $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x - 1$ и $f\left(\frac{x-1}{2}\right) = x + 1$ одредити $(f^{-1} \circ g)\left(\frac{1}{2}\right)$.
9. Ако је функција $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ таква да за свако $x > 0$ важи

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x.$$

Одредити $f(6)$.

10. Одредити које од следећих функција су међусобно једнаке $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$, $f_2(x) = \ln e^{\frac{1}{|x|}}$,
 $f_3(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x^3}}$, $f_4(x) = \frac{1}{|x|}$.
11. Дате су функције $f_1(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $f_2(x) = e^{\ln \frac{x-1}{x}}$, $f_3(x) = \frac{(x-1)x}{x^2}$, $f_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)}$,
 $f_5(x) = \ln e^{\frac{x-1}{x}}$. Одредити које од наведених функција су једнаке функцији $f(x) = \frac{x-1}{x}$.

12. Одредити домене следећих функција

(а) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} + \sqrt{x}$; (б) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} + \sqrt{2 - x}$;

(в) $f(x) = (3 - |x|)^{-\frac{1}{2}}$; (г) $f(x) = \log(6 + x - x^2)$.

13. Одредити област дефинисаности функције $f(x) = \sqrt{\ln \frac{x-4}{x+2}} + \sqrt{4 - 3x - x^2}$.

14. Одредити број реалних нула функције $f(x) = \frac{(x^2 - 5x + 6) \ln(x - 4)}{x - 2 + |x - 2|}$.

1. Одредити реалан параметар k такав да је израз $5i^{33} - 2ki^{32} + (k - 3)i^{31} + 10$ реалан број.

2. Ако је $z = \frac{1 + i^{15}}{i^3 - i^{12}}$, где је $i^2 = -1$, одредити вредност израза $\operatorname{Re}(z) + (\operatorname{Im}(z))^2$.

3. Одредити реални део комплексног броја $\frac{1 - 3i}{1 + 3i} - \frac{3 + i}{3 - i} + \frac{1 - i}{2i^3}$.

4. Одредити имагинарни део комплексног броја $\frac{1 - 3i}{1 + 3i} - \frac{3 + i}{3 - i} + \frac{1 - i}{2i^3}$.

5. Ако су a и b реални параметри такви да је $(2 + 3i)a + (3 + 2i)b = 1$, одредити збир $a + b$.

6. Одредити модуо комплексног броја $\frac{(1 - i)^5}{(1 + i)^4}$.

7. Одредити вредност израза $\frac{(1 + i)^{1000}}{(1 - i)^{996} - i(1 + i)^{998}}$.

8. Одредити реалан број λ , такав да је број $\frac{1 - i\sqrt{3}}{\lambda + (\lambda + 1)i}$, такође реалан.

9. Одредити вредност израза $\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^n$, при чему n није дељиво са 3.

10. Ако је $i^2 = -1$, одредити вредност израза $\sqrt{1 - i\sqrt{8}} + \sqrt{1 + i\sqrt{8}}$.

11. У скупу комплексних бројева решити једначину $(1 + i)z + (1 - i)^4 = 2$.

12. Ако је z комплексан број такав да важи $\left|\frac{z}{z + 1}\right| = 1$ и $\frac{z}{\bar{z}} = i$, одредити $z \cdot \bar{z}$.

13. Ако за комплексан број $z = x + iy$, важи $|z - 2| = |z + 2i|$, $|z + 2| = |z - 2i|$, одредити $x + y$.

14. Одредити вредност израза

$$\frac{\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^3 + \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)^5}{\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)^2}$$

15. Одредит тригонометријски облик комплексног броја $z = \frac{i - 1}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}$.