Реалне функције

1. Ако је функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дата са $f(x)=x^3-\dfrac{2}{x^2}$, одредити $f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Ако је функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дата са $f(x)=3x^2-2x+1$, одредити $f(f(1))-f(f(-1))$.

3. Ако су функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дате са $f(x)=x^2+1$ и $g(x)=3x-1$, одредити $f(g(x))-g(f(x))$.

4. Ако је функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дата са $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, одредити функцију $h(x)=(f\circ f\circ f)(x)$.

5. Ако су функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дате са $f(x)=\sqrt{x}$ и $g(x)=x^4+3$, одредити $f(g(f(f(x))))$.

6. Ако је функција $f:[0,1]\to\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ дата са $f(x)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$, одредити њену инверзну функцију.

7. Ако је функција $f:[0,1]\to\left[1,\sqrt{2}\right]$ дата са $f(x)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})$, одредити њену инверзну функцију.

8. Ако је $f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=x-1$ и $g\left(\dfrac{x-1}{2}\right)=x+1$, одредити $(f^{-1}\circ g)\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

9. Ако је $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ функција таква да за свако $x>0$ важи

$$2f(x)+3f\left(\frac{2010}{x}\right)=5x,$$

одредити $f(6)$.

10. Одредити које од следећих функција f_1,f_2,f_3,f_4, дефинисаних са $f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$, $f_2(x)=\ln \mathrm{e}^{\frac{1}{|x|}}$, $f_3(x)=\sqrt{\dfrac{|x|}{x^3}}$, $f_4(x)=\dfrac{1}{|x|}$, су међусобно једнаке.

11. Дате су функције $f_1(x)=1-\dfrac{1}{x}$, $f_2(x)=\mathrm{e}^{\ln\frac{x-1}{x}}$, $f_3(x)=\dfrac{(x-1)x}{x^2}$, $f_4(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)}$, $f_5(x)=\ln \mathrm{e}^{\frac{x-1}{x}}$. Одредити које од наведених функција су једнаке функцији $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$.

12. Одредити домене следећих функција:

(а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}+\sqrt{x}$; (б) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}+\sqrt{2-x}$;

(в) $f(x)=(3-|x|)^{-\frac{1}{2}}$; (г) $f(x)=\log(6+x-x^2)$.

13. Одредити област дефинисаности функције $f(x)=\sqrt{\ln\dfrac{x-4}{x+2}}+\sqrt{4-3x-x^2}$.

14. Одредити број реалних нула функције $f(x)=\dfrac{(x^2-5x+6)\ln(x-4)}{x-2+|x-2|}$.

Комплексни бројеви

1. Одредити реалан параметар k, такав да је вредност израза $5\mathrm{i}^{33} - 2k\mathrm{i}^{32} + (k-3)\mathrm{i}^{31} + 10$ реалан број.

2. Ако је $z = \dfrac{1+\mathrm{i}^{15}}{\mathrm{i}^3 - \mathrm{i}^{12}}$, одредити вредност израза $\mathrm{Re}(z) + (\mathrm{Im}(z))^2$.

3. Одредити реални део комплексног броја $\dfrac{1-3\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}} - \dfrac{3+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} + \dfrac{1-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}^3}$.

4. Одредити имагинарни део комплексног броја $\dfrac{1-3\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}} - \dfrac{3+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} + \dfrac{1-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}^3}$.

5. Ако су a и b реални параметри такви да је $(2+3\mathrm{i})a + (3+2\mathrm{i})b = 1$, одредити збир $a+b$.

6. Одредити модуо комплексног броја $\dfrac{(1-\mathrm{i})^5}{(1+\mathrm{i})^4}$.

7. Одредити вредност израза $\dfrac{(1+\mathrm{i})^{1000}}{(1-\mathrm{i})^{996} - \mathrm{i}(1+\mathrm{i})^{998}}$.

8. Одредити реалан број λ, такав да је број $\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{\lambda + (\lambda+1)\mathrm{i}}$ такође реалан.

9. Одредити вредност израза $\left(\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^n$, при чему n није дељиво са 3.

10. У скупу комплексних бројева решити једначину $(1+\mathrm{i})z + (1-\mathrm{i})^4 = 2$.

11. Ако је z комплексан број такав да је $\left|\dfrac{z}{z+1}\right| = 1$ и $\dfrac{z}{\overline{z}} = \mathrm{i}$, одредити $z \cdot \overline{z}$.

12. Ако за комплексан број $z = x + \mathrm{i}y$ важи $|z-2| = |z+2\mathrm{i}|$ и $|z+2| = |z-2\mathrm{i}|$, одредити $x+y$.

13. Одредити вредност израза

$$\frac{\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^3 + \left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)^5}{\left(\cos\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^2}.$$

14. Одредити тригонометријски облик комплексног броја $z = \dfrac{\mathrm{i}-1}{\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}}$.

Решења задатака

1. Како је $f(2) = 2^3 - \dfrac{2}{2^2} = \dfrac{15}{2}$ и $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 - \dfrac{2}{(\frac{1}{2})^2} = -\dfrac{63}{8}$, следи да је
$$f(2) + f\Big(\frac{1}{2}\Big) = -\frac{3}{8}.$$

2. Решење: -88.

3. Важи да је $f(g(x)) = f(3x-1) = (3x-1)^2+1 = 9x^2-6x+2$, као и $g(f(x)) = g(x^2+1) = 3(x^2+1) - 1 = 3x^2+2$, па је $f(g(x)) - g(f(x)) = 6x(x-1)$.

4. Важи да је $h(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x)))$, одакле следи
$$\begin{aligned} h(x) &= f\left(f\Big(\frac{1}{1-x}\Big)\right) = f\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{\dfrac{-x}{1-x}}\right) = f\left(\frac{x-1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}} = x. \end{aligned}$$

5. Решење: $\sqrt{x+3}$.

6. За функцију $f : [0,1] \to \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, дату са $f(x) = \dfrac{1}{2}\Big(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\Big)$, и њену инверзну функцију $f^{-1} : \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \to [0,1]$, важи $f^{-1}(f(x)) = x$, за свако $x \in [0,1]$. Одавде следи да је $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\right) = x$.

   Уведимо смену $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right) = t$, $t \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, и изразимо x преко t. Сада је
$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} = 2t,$$
   односно, квадрирањем леве и десне стране добијамо
$$\sqrt{1-x^2} = 2t^2 - 1.$$
   Ако поново квадрирамо леву и десну страну долазимо до $x^2 = 4t^2 - 4t^4$, односно, имајући у виду да $x \in [0,1]$ и $t \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, добијамо да је $x = 2t\sqrt{1-t^2}$. Закључујемо да је $f^{-1}(t) = 2t\sqrt{1-t^2}$, тј. инверзна функција f^{-1} функције f дефинисана је са $f^{-1}(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

7. Аналогно претходном задатку добија се $f^{-1}(x) = 2x\sqrt{2-x^2}$.

8. Како је $f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = x-1$, ако уведемо смену $\dfrac{x+1}{2} = t$ добијамо $x = 2t-1$, одакле следи да је функција f дефинисана са $f(t) = 2t-1-1$, односно важи да је $f(x) = 2x-2$. Одредимо сада инверзну функцију функције f. Како је $f^{-1}(f(x)) = x$, закључујемо да је $f^{-1}(2x-2) = x$. Ако уведемо смену $s = 2x-2$, следи да је $x = \dfrac{s+2}{2}$, па је $f^{-1}(s) = \dfrac{s+2}{2}$, тј. $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{2}$.

   Како је $g\left(\dfrac{x-1}{2}\right) = x+1$, ако уведемо смену $\dfrac{x-1}{2} = t$, добијамо $x = 2t+1$, одакле следи да је функција g дефинисана са $g(t) = 2t+1+1$, односно $g(x) = 2x+2$. Сада је
$$f^{-1}\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f^{-1}\left(2\cdot\frac{1}{2}+2\right) = f^{-1}(3) = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}.$$

9. Функција $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ задовољава услов
$$2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x, \quad x > 0. \tag{1}$$
   За $x = 6$ релација (1) постаје
$$2f(6) + 3f(335) = 30, \tag{2}$$
   док за $x = 335$ из (1) добијамо
$$2f(335) + 3f(6) = 1675. \tag{3}$$
   Ако једначину (2) помножимо са -2 и додамо је једначини (3) помноженој са 3 добијамо $5f(6) = 4965$, односно $f(6) = 993$.

10. Важи да је $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{1}{|x|}$, $x \neq 0$, $f_2(x) = \dfrac{1}{|x|}$, $x \neq 0$, као и $f_4(x) = \dfrac{1}{|x|}$, $x \neq 0$. Функција f_3 је дефинисана за $x > 0$ и при томе је $f_3(x) = \sqrt{\dfrac{|x|}{x^3}} = \sqrt{\dfrac{x}{x^3}} = \sqrt{\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{|x|} = \dfrac{1}{x}$. Закључујемо да је $f_1 = f_2 = f_4 \neq f_3$.

11. Функција f је дефинисана за $x \neq 0$. Функција f_1 дефинисана је такође за $x \neq 0$ и важи да је $f_1(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$, па закључујемо да је $f_1 = f$. Функција f_2 је дефинисана за $\dfrac{x-1}{x} > 0$ и $x \neq 0$, тј. за $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ и при томе је $f_2(x) = \dfrac{x-1}{x}$. Закључујемо да је $f_2 \neq f$, јер су им домени различити.

    Слично, функција f_3 је дефинисана за $x \neq 0$, при чему је $f_3(x) = \dfrac{(x-1)x}{x^2} = \dfrac{x-1}{x}$, па следи да је $f_3 = f$. Функција f_4 је дефинисана за $x \neq 0$ и $x \neq 2$, при чему је $f_4(x) = \dfrac{x-1}{x}$. Међутим, како су домени функција f и f_4 различити, следи да је $f \neq f_4$. Коначно, функција f_5 је дефинисана за $x \neq 0$ и при томе је $f_5(x) = \dfrac{x-1}{x}$, па је $f_5 = f$.

12. (а) Функција f је дефинисана за $x^2 - 1 \neq 0$ и $x \geqslant 0$, тј. за $x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$.

    (б) Функција f је дефинисана за $x^2 - 1 \neq 0$ и $2 - x \geqslant 0$, тј. за $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,2]$.

    (в) Како је $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-|x|}}$, следи да је функција f дефинисана за $3-|x| > 0$, односно за $x \in (-3,3)$.

    (г) Функција f је дефинисана за $6 + x - x^2 > 0$, односно за $x \in (-2,3)$.

13. Функција f је дефинисана ако су испуњени следећи услови:

    (i) $x + 2 \neq 0$, тј. $x \neq -2$;

    (ii) $\dfrac{x-4}{x+2} > 0$;

    (iii) $\ln \dfrac{x-4}{x+2} \geqslant 0$, односно $\dfrac{x-4}{x+2} \geqslant 1$;

    (iv) $4 - 3x - x^2 \geqslant 0$, тј. $x \in [-4,1]$.

    Уочавамо да је услов (ii) испуњен ако је испуњен услов (iii), па је довољно разматрати услов (iii). Важи да је

    $$\frac{x-4}{x+2} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x+2} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-6}{x+2} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2).$$

    Имајући у виду све наведене услове закључујемо да је домен функције f скуп $[-4,-2)$.

14. Функција f је дефинисана ако су испуњени услови:

    (i) $x-2+|x-2| \neq 0$, тј. $|x-2| \neq -(x-2)$, што је еквивалентно са $x-2 > 0$, тј. $x > 2$.

    (ii) $x - 4 > 0$, тј. $x > 4$.

    Из наведених услова следи да је област дефинисаности функције f скуп $D_f = (4,+\infty)$. Нуле функције f су тачке $x \in D_f$ за које је $f(x) = 0$. Важи да је $f(x) = 0$ ако је $x^2 - 5x + 6 = 0$ или $\ln(x-4) = 0$, односно ако је $x = 2$ или $x = 3$ или $x = 5$. Међутим, само тачка $x = 5$ припада домену функције f, па је то једина реална нула ове функције.

Комплексни бројеви

Алгебарски облик комплексног броја z је

$$z = x + \mathrm{i}y, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

при чему је $x = \operatorname{Re} z$ реални део, а $y = \operatorname{Im} z$ имагинарни део броја z, а i је имагинарна јединица, при чему је $\mathrm{i}^2 = -1$.
Тригонометријски облик комплексног броја $z = x + \mathrm{i}y$, $z \neq 0$, је

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

где је $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ модул (модуо), а $\varphi = \arg z \in (-\pi, \pi]$ аргумент комплексног броја z, при чему је

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Конјугован број комплексног броја $z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ је

$$\overline{z} = x - \mathrm{i}y = r(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Операције са комплексним бројевима

Нека су

$$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \quad \text{и} \quad z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$$

два комплексна броја.

Збир бројева z_1 и z_2 је комплексан број

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2).$$

Разлика бројева z_1 и z_2 је комплексан број

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2).$$

Производ бројева z_1 и z_2 је комплексан број

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1),$$

односно у тригонометријском облику

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right).$$

Количник бројева z_1 и z_2, $z_2 \neq 0$, је комплексан број

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i} y_1}{x_2 + \mathrm{i} y_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i} y_1}{x_2 + \mathrm{i} y_2} \cdot \frac{x_2 - \mathrm{i} y_2}{x_2 - \mathrm{i} y_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2},$$

односно у тригонометријском облику

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

Моаврова (Муаврова) формула

Ако је $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, онда за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi).$$

Корен комплексног броја

Под n-тим кореном комплексног броја $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ подразумевамо сваки комплексан број чији је n-ти степен једнак z, $n \in \mathbb{N}$.

$$\sqrt[n]{z} \in \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\},$$

при чему је

$$u_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

1. Подсетимо се да је са i означена имагинарна јединица за коју важи да је $\mathrm{i}^2 = -1$, одакле следи да је $\mathrm{i}^{2k} = (-1)^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Како је $\mathrm{i}^{32} = (-1)^{16} = 1$, $\mathrm{i}^{33} = \mathrm{i}$ и $\mathrm{i}^{31} = \mathrm{i}^{30} \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i}$, следи да је

   $$5\,\mathrm{i}^{33} - 2k\,\mathrm{i}^{32} + (k-3)\,\mathrm{i}^{31} + 10 = 5\,\mathrm{i} - 2k - (k-3)\,\mathrm{i} + 10 = 10 - 2k + \mathrm{i}(8-k),$$

   па је добијени израз реалан број за $8 - k = 0$, тј. за $k = 8$.

2. Како је

   $$z = \frac{1 + \mathrm{i}^{15}}{\mathrm{i}^3 - \mathrm{i}^{12}} = \frac{1 - \mathrm{i}}{-\mathrm{i} - 1} = \frac{\mathrm{i} - 1}{1 + \mathrm{i}} \cdot \frac{1 - \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i} - \mathrm{i}^2 - 1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}^2} = \frac{2\,\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i},$$

   следи да је $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 1$, па је $\operatorname{Re} z + (\operatorname{Im} z)^2 = 1$.

3. Важи да је

   $$z = \frac{1 - 3\,\mathrm{i}}{1 + 3\,\mathrm{i}} - \frac{3 + \mathrm{i}}{3 - \mathrm{i}} + \frac{1 - \mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}^3} = \frac{(1 - 3\,\mathrm{i})^2}{1 - (3\,\mathrm{i})^2} - \frac{(3 + \mathrm{i})^2}{3^2 - \mathrm{i}^2} + \frac{1 - \mathrm{i}}{-2\,\mathrm{i}} \cdot \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = \frac{-11 - 7\,\mathrm{i}}{10},$$

   па је $\operatorname{Re} z = -\dfrac{11}{10}$.

4. Према претходном задатку непосредно следи да је $\operatorname{Im} z = -\dfrac{7}{10}$.

5. Из услова $(2+3\,\mathrm{i})a + (3+2\,\mathrm{i})b = 1$ добијамо да је $(2a+3b) + (3a+2b)\,\mathrm{i} = 1$, одакле, имајући у виду да су a и b реални параметри, следи да је $2a+3b = 1$ и $3a+2b = 0$, односно $a+b = \dfrac{1}{5}$.

6. Како је $(1-\mathrm{i})^2 = 1 - 2\,\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = -2\,\mathrm{i}$ и $(1-\mathrm{i})^4 = (-2\,\mathrm{i})^2 = -4$, као и $(1+\mathrm{i})^2 = 2\,\mathrm{i}$ и $(1+\mathrm{i})^4 = (2\,\mathrm{i})^2 = -4$, следи да је

$$\left|\frac{(1-\mathrm{i})^5}{(1+\mathrm{i})^4}\right| = \left|\frac{-4\cdot(1-\mathrm{i})}{-4}\right| = |1-\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}.$$

7. Важи да је $(1+\mathrm{i})^{1000} = \big((1+\mathrm{i})^4\big)^{250} = (-4)^{250} = 2^{500}$. Слично, $(1-\mathrm{i})^{996} = \big((1-\mathrm{i})^4\big)^{249} = (-4)^{249} = -2^{498}$, као и $(1+\mathrm{i})^{998} = (1+\mathrm{i})^{996}(1+\mathrm{i})^2 = \big((1+\mathrm{i})^4\big)^{249}\cdot 2\,\mathrm{i} = (-4)^{249}\cdot 2\,\mathrm{i} = -2^{498}\cdot 2\,\mathrm{i} = -2^{499}\,\mathrm{i}$. Одавде следи да тражени израз има вредност

$$\frac{(1+\mathrm{i})^{1000}}{(1-\mathrm{i})^{996} - \mathrm{i}(1+\mathrm{i})^{998}} = \frac{2^{500}}{-2^{498} + \mathrm{i}^2\cdot 2^{499}} = \frac{2^{500}}{2^{498}(-1-2)} = -\frac{4}{3}.$$

8. Важи да је

$$\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{\lambda+(\lambda+1)\,\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{\lambda+(\lambda+1)\,\mathrm{i}}\cdot\frac{\lambda-(\lambda+1)\,\mathrm{i}}{\lambda-(\lambda+1)\,\mathrm{i}} = \frac{\lambda-\sqrt{3}(\lambda+1) - \mathrm{i}(\lambda+1+\lambda\sqrt{3})}{\lambda^2+(\lambda+1)^2},$$

па је дати број реалан ако је његов имагинарни део једнак нули, тј. $\lambda+1+\lambda\sqrt{3} = 0$, одакле добијамо да је $\lambda = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

9. Нека је $z_1 = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. Запишимо број z_1 у тригонометријском облику. Како је $\operatorname{Re} z_1 = -\dfrac{1}{2}$, а $\operatorname{Im} z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, следи да је $|z_1| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}} = 1$. Одредимо аргумент φ_1 броја z_1 из услова

$$\cos\varphi_1 = -\frac{1}{2}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Закључујемо да је $\varphi_1 = \arg z_1 = \dfrac{2\pi}{3}$, па је $z_1 = \cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

Нека је $z_2 = \dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. Запишимо број z_2 у тригонометријском облику. Како је $\operatorname{Re} z_2 = -\dfrac{1}{2}$, а $\operatorname{Im} z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, следи да је $|z_2| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}} = 1$. Одредимо аргумент φ_2 броја z_2 из услова

$$\cos\varphi_2 = -\frac{1}{2}, \quad \sin\varphi_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Закључујемо да је $\varphi_2 = \arg z_2 = -\dfrac{2\pi}{3}$, па је $z_2 = \cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Сада је

$$z_1^n + z_2^n = \cos\frac{2n\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2n\pi}{3} + \cos\left(-\frac{2n\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2n\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{2n\pi}{3},$$

јер је $\cos\left(-\frac{2n\pi}{3}\right) = \cos\frac{2n\pi}{3}$ и $\sin\left(-\frac{2n\pi}{3}\right) = -\sin\frac{2n\pi}{3}$.

Како по претпоставци број n није дељив са 3, за такво n важи да је $\cos\frac{2n\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, па је тражена вредност једнака $z_1^n + z_2^n = 2\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big) = -1$.

10. Полазну једначину можемо написати у облику

$$z = \frac{2-(1-\mathrm{i})^4}{1+\mathrm{i}},$$

одакле, имајући у виду да је $(1-\mathrm{i})^4 = \big((1-\mathrm{i})^2\big)^2 = (-2\,\mathrm{i})^2 = -4$, долазимо до

$$z = \frac{6}{1+\mathrm{i}} = \frac{6}{1+\mathrm{i}}\cdot\frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{6(1-\mathrm{i})}{2} = 3(1-\mathrm{i}).$$

11. Запишимо комплексан број z у алгебарском облику $z = x + \mathrm{i}y$. Из услова $\left|\frac{z}{z+1}\right| = 1$ добијамо

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2},$$

одакле следи да је $x = -\frac{1}{2}$.

Из услова $\frac{z}{\overline{z}} = \mathrm{i}$ добијамо

$$x + \mathrm{i}y = x\,\mathrm{i} + y,$$

тј.

$$x - y + \mathrm{i}(y-x) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

одакле произилази да је $x - y = 0$, тј. $x = y = -\frac{1}{2}$, па је тражени број $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

Одавде следи да је $z\cdot\overline{z} = \Big(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\Big)\Big(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\Big) = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^2 - \mathrm{i}^2\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{2}$.

12. Ако је комплексан број z записан у алгебарском облику $z = x + \mathrm{i}y$, тада из услова $|z-2| = |z+2\,\mathrm{i}|$ добијамо

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y+2)^2},$$

одакле следи да је $x = -y$. Аналогно, из услова $|z+2| = |z-2\,\mathrm{i}|$ произилази да је

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2},$$

одакле поново следи да је $x = -y$, па је $x + y = 0$.

13. Како је

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^3=\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)^5=\cos\frac{15\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{15\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^2=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\mathrm{i},$$

следи да је вредност траженог израза једнака

$$\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\mathrm{i}}=0.$$

14. Важи да је

$$\begin{aligned} z&=\frac{\mathrm{i}-1}{\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}}\\ &=\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

па је $|z|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2}=\sqrt{2}.$

Одредимо још аргумент φ броја z. Како је

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\quad \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

следи да је

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=2+\sqrt{3}.$$

Како је

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}=\operatorname{tg}\frac{\frac{5\pi}{6}}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{5\pi}{6}}{1+\cos\frac{5\pi}{6}}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}=2+\sqrt{3},$$

следи да је $\varphi=\arg z=\frac{5\pi}{12}$, а тригонометријски облик броја z је

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$