

**Пријемни испит из МАТЕМАТИКЕ за упис на
Докторске академске студије МАТЕМАТИКЕ**

19. октобар 2023. године

Време за рад је 180 минута.

Тест има 10 задатака. **Комплетно решени** задаци 1 – 4. вреде по 3 поена, задаци 5 – 8. вреде по 4 поена и задаци 9. и 10. вреде по 6 поена.

ИМЕ И ПРЕЗИМЕ: _____

БРОЈ ОСВОЈЕНИХ ПОЕНА: _____

1. Шпил од 52 карте се дели на пола. Колико различитих начина деобе постоји тако да у свакој половини остану по два кеца и по две даме?
2. Дат је једнакокраки троугао ABC са основицом AB . Произвољна права p нормална на основицу сече крак BC у тачки M и продужење крака AC у тачки N . Доказати да је CMN једнакокраки троугао.
3. Решити неједначину $x\sqrt{x^2 + x - 6} \leq 2x^2 - 4x$.
4. Одредити λ тако да за корене полинома $p(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + \lambda$ важи $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$.
5. Угао између основе и бочне стране правилне тростране пирамиде је 60° . Ако је најкраће растојање тежишта основе до бочне стране једнако 3, израчунати запремину пирамиде.
6. Написати једначину праве q која је симетрична правој $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-5}$ у односу на раван $\alpha : x + 2y + z - 3 = 0$.
7. Нека је $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ пресликавање дефинисано са $f(A) = AM - MA$, за $A \in M_2(\mathbb{R})$ и $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Одредити матрицу репрезентације пресликавања f у бази $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ простора $M_2(\mathbb{R})$.
8. (а) Нека је (x_n) , $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)})$, низ тачака у метричком простору \mathbb{R}_p^k , $1 \leq p \leq \infty$. Доказати да је конвергенција низа (x_n) граничној вредности $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ у \mathbb{R}_p^k , еквивалентна конвергенцији низова ν -тих координата тачака x_n , тј. низова $(\xi_\nu^{(n)})$, ν -тој координати тачке x у \mathbb{R} за све $\nu = 1, \dots, k$.
(б) Показати да у простору ℓ_p , $1 \leq p < \infty$, из конвергенције по координатама не следи конвергенција по метрици.
9. Доказати да је група $(G, *)$ комутативна ако и само ако је пресликавање $f : G \rightarrow G$ дато са $f(x) = x * x$, $x \in G$ хомоморфизам.
10. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.