ИЗБОРНИ СЕМИНАР - први домаћи

Сваком студенту додељена су три задатка (који носе по 1 поен), на основу броја индекса. Рок за слање решених задатака је 18.04.2023. до 22:00. Задатке послати путем Teams-а.

1. Нека су $\rho, \rho_1, \rho_2, \sigma, \tau$ релације. Доказати:

   (а) $(\sigma \circ \rho) \circ \tau = \sigma \circ (\rho \circ \tau)$ **(4/2019)**

   (б) $(\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$ **(13/2019)**

   (в) $\rho_1 \subseteq \rho_2 \Rightarrow \sigma \circ \rho_1 \subseteq \sigma \circ \rho_2$ **(20/2019)**

   (г) $(\rho_1 \cap \rho_2)^{-1} = \rho_1^{-1} \cap \rho_2^{-1}$ **(6/2018)**

   (д) $(\rho_1 \cup \rho_2)^{-1} = \rho_1^{-1} \cup \rho_2^{-1}$ **(5/2019)**

   (ђ) $\sigma \circ (\rho_1 \cup \rho_2) = \sigma \circ \rho_1 \cup \sigma \circ \rho_2$ **(23/2018)**

   (е) $\sigma \circ (\rho_1 \cap \rho_2) \subseteq \sigma \circ \rho_1 \cap \sigma \circ \rho_2\,.$ **(21/2018)**

2. Нека $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ и нека су A, A', A_i, за $i \in I$, подскупови од X; B, B', B_i, за $i \in I$, подскупови од Y (I је неки скуп индекса), а C подскуп од Z. Доказати:

   (а) $(g \circ f)[A] = g[f[A]]$ **(24/2018)**

   (б) $(g \circ f)^{-1}[C] = f^{-1}[g^{-1}[C]]$ **(5/2018)**

   (в) $f^{-1}[\bigcup\limits_{i\in I} B_i] = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}[B_i]$ **(1/2018)**

   (г) $f^{-1}[\bigcap\limits_{i\in I} B_i] = \bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}[B_i]$ **(17/2019)**

   (д) $f^{-1}[B \setminus B'] = f^{-1}[B] \setminus f^{-1}[B']$ **(4/2019)**

   (ђ) $f[\bigcup\limits_{i\in I} A_i] = \bigcup\limits_{i\in I} f[A_i]$ **(13/2019)**

   (е) $f[\bigcap\limits_{i\in I} A_i] \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} f[A_i]$ **(20/2019)**

   (ж) $f[A \setminus A'] \supseteq f[A] \setminus f[A']$ **(6/2018)**

   (з) $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$ **(5/2019)**

   (и) $f^{-1}[f[A]] \supseteq A\,.$ **(23/2018)**

3. Нека су A, B и C произвољни скупови. Доказати или оповргнути (коришћењем карактеристичних функција):

   (а) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ акко $A \cap C = \emptyset$ **(13/2019)** (б) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ акко $A \cap C = \emptyset$ $(\mathbf{20/2019})$

(в) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$ $(\mathbf{6/2018})$

(г) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ акко $A \subseteq C$ $(\mathbf{5/2019})$

(д) $A \cap (B \bigtriangleup C) = (A \cap B) \bigtriangleup C$ акко $C \subseteq A$ $(\mathbf{23/2018})$

(ђ) $A \cup (B \bigtriangleup C) = (A \cup B) \bigtriangleup C$ акко $A \cap C = \emptyset$ $(\mathbf{21/2018})$

(е) $A \setminus (B \bigtriangleup C) = (A \setminus B) \bigtriangleup C$ акко $A \cap C = B$ $(\mathbf{24/2018})$

(ж) $A \bigtriangleup (B \setminus C) = (A \bigtriangleup B) \setminus C$ акко $A \cap C = \emptyset$ $(\mathbf{5/2018})$

(з) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $(\mathbf{1/2018})$

(и) $A \cup (A \cap B) = A$. $(\mathbf{17/2019})$

4. Нека $f : X \to Y$. Доказати или оповргнути:

   (а) $f^{-1}[f[f^{-1}[B]]] = f^{-1}[B]$ за сваки $B \subseteq Y$ $(\mathbf{21/2018})$

   (б) f је „1-1” акко $f[A \bigtriangleup B] = f[A] \bigtriangleup f[B]$ за све $A, B \subseteq X$ $(\mathbf{24/2018})$

   (в) $f[f^{-1}[B] \setminus A] = B \setminus f[A]$ за све $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$. $(\mathbf{5/2018})$

5. Доказати да је $f : X \to Y$ „1-1” акко постоји $g : Y \to X$ тако да је $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. $(\mathbf{1/2018})$

6. Нека су X и Y скупови за које постоји функција $f : X \to Y$ која је „на”. Доказати да тада постоји и функција $g : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ која је „1-1”. $(\mathbf{17/2019})$

7. Нека су $f, g : X \to X$ функције за које је

$$(f \circ g) \circ (f \circ g) = (f \circ f) \circ (g \circ g).$$

   Испитати да ли из тих претпоставки следи да је $f \circ g = g \circ f$. $(\mathbf{4/2019})$