

**Пријемни испит из МАТЕМАТИКЕ за упис на  
Докторске академске студије МАТЕМАТИКЕ**

**22. октобар 2020. године**

Време за рад је 180 минута.

Тест има 10 задатака. **Комплетно решени** задаци 1 – 4. вреде по 3 поена,  
задаци 5 – 8. вреде по 4 поена и задаци 9. и 10. вреде по 6 поена.

ИМЕ И ПРЕЗИМЕ: \_\_\_\_\_

БРОЈ ОСВОЈЕНИХ ПОЕНА: \_\_\_\_\_

1. Колико има четвороцифрених бројева чије су цифре различите и код којих је збир последње две цифре једнак 5?
2. Дат је правоугаоник  $ABCD$ . Ако су  $A$  и  $F$  тачке симетричне у односу на дијагоналу  $BD$  правоугаоника, доказати да је  $BF \perp DF$ .
3. Одредити  $f(f(f(x)))$ , ако је реална функција  $f$  дата са  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ .
4. Решити једначину  $\log_{x+1}(x^2 + 1) = 2$ .
5. Основа тростране пирамиде  $ABCD$  је троугао  $ABC$  чије су странице  $a = \sqrt{5}$  cm,  $b = \sqrt{10}$  cm и  $c = \sqrt{13}$  cm. Ако је висина пирамиде  $H = 12$  cm, израчунати њену запремину.
6. Дата је равна  $\alpha : x + z - 5 = 0$  и тачке  $P(4, -1, 3)$  и  $Q(5, -2, -1)$ . Написати једначину ортогоналне пројекције праве  $PQ$  на равна  $\alpha$ .
7. Ако за регуларну матрицу  $A$  и неки природан број  $n$  важи  $A^n + A^{n-1} + \dots + A + I = 0$ , доказати да је  $A^{-1} = A^n$ .
8. Доказати да се на скупу  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  метрика може увести са

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|,$$

при чему је  $x/(1 + |x|) = \pm 1$  за  $x = \pm\infty$ . Доказати такође да је метрички простор  $(\mathbb{R}^*, d)$  изометричан са  $([-1, 1], d_1)$ , где је  $d_1(x, y) = |x - y|$ .

9. Доказати да је група  $(G, \cdot)$  Абелова ако и само ако је пресликавање  $f : G \rightarrow G$  дефинисано са  $f(x) = x^{-1}$  аутоморфизам групе  $(G, \cdot)$ .
10. Испитати ток и нацртати график функције  $f(x) = x \cdot e^{\frac{2x+1}{x^2}}$ .