Биномна формула. Низови

1. Одредити коефицијент уз x^{12} у биномном развоју $(x+x^3)^6$.

2. Одредити члан у биномном развоју $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$ који не садржи x.

3. Да ли постоји члан који не садржи x у биномном развоју $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{12}$?

4. Ако је збир коефицијената трећег од почетка и трећег од краја члана у биномном развоју $(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{4})^n$, $n \in \mathbb{N}$, једнак 2862, одреди број рационалних чланова у том развоју.

5. Ако је збир биномних коефицијената у развоју $(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})^n$, $n \in \mathbb{N}$, једнак 2^{2004}, одреди број рационалних чланова у том развоју.

6. Одреди n ако су коефицијенти петог и деветог члана развоја $(1+x)^n$ једнаки.

7. Колико је ирационалних чланова у биномном развоју $(\sqrt[4]{2}+\sqrt{3})^{100}$?

8. Одредити члан у развоју бинома $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$, $a>0$, $b>0$, који садржи a и b са истим степеном.

9. У скупу природних бројева решити једначину $12\binom{x}{1}+\binom{x+4}{2}=96$.

10. У скупу природних бројева решити неједначину $\binom{13}{x}<\binom{13}{x+2}$.

11. Одредити све природне бројеве x и y, такве да је $\binom{x+1}{y}:\binom{x}{y+1}:\binom{x}{y-1}=6:5:2$.

12. Збир другог и десетог члана опадајуће аритметичке прогресије је 8, а производ тих чланова је 12. Одредити збир првих 15 чланова те прогресије.

13. Збир прва три члана аритметичке прогресије је 42, а збир првих шест чланова је 48. Одредити S_{10}.

14. Збир првог и седмог члана аритметичке прогресије је 7. Одредити збир трећег и петог члана те прогресије.

15. Између -2 и 46 уметнути 15 бројева, тако да је разлика свака два узастопна броја иста, па одредити збир тих седамнаест бројева.

16. У аритметичком низу је $a_n=m$ и $a_m=n$, $n\neq m$. Одредити a_p.

17. Одредити збир првих сто природних бројева који при дељењу са 5 дају остатак 1.

18. За које вредности x бројеви $\log 2$, $\log(2^x-1)$ и $\log(2^x+3)$ у датом редоследу чине аритметички низ?

19. У геометријској прогресији количник је 2, а збир првих седам чланова једнак је 635. Одредити a_7.

20. У геометријском низу збир првог и петог члана је 51, а збир другог и шестог члана је 102. Ако је збир првих n чланова 3069, одредити n.

21. Збир свих чланова бесконачног геометријског низа $2a+a\sqrt{2}+a+\cdots$ једнак је 8. Одредити број a.

22. За $x=\frac{\pi}{3}$ одредити збир $1+\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cdots$.

23. Геометријска прогресија има паран број чланова. Збир чланова на непарним позицијама је 85, а збир чланова на парним позицијама је 170. Одредити количник те прогресије.

24. Нека су a_1, a_2, a_3, a_4 узастопни чланови растућег аритметичког низа, а b_1, b_2, b_3, b_4 узастопни чланови геометријског низа. Ако је $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2$, $b_3 - a_3 = 1$, одредити $b_4 - a_4$.

25. Бројеви a, b и c су узастопни чланови растућег аритметичког низа, а бројеви a, b, $c+1$ су узастопни чланови геометријског низа. Одредити вредност израза $a^2 + b^2 + c^2$, ако је $a + b + c = 18$.

26. Збир три броја је 14. Ако се средњи повећа за 1, добија се аритметички низ, а ако се средњи смањи за 1, добија се геометријски низ. Одредити те бројеве.

27. Странице правоуглог троугла образују растући геометријски низ, а једна катета једнака је 2. Одредити обим троугла.

Биномна формула

Биномни коефицијент $\binom{n}{k}$ дефинише се са

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n \geqslant k \geqslant 0.$$

Важи да је $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Специјално, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Биномна формула

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k .$$

Низови

Аритметички низ (прогресија) (a_n) задовољава релацију $a_{n+1} = a_n + d$, $n = 1, 2, \ldots$, при чему се број d назива разлика аритметичког низа. У аритметичком низу (a_n) са првим чланом a_1 и разликом d важи $a_n = a_1 + (n-1)d$, за свако $n \in \mathbb{N}$. У аритметичком низу (a_n) сваки члан, почев од другог, представља аритметичку средину њему суседних чланова, тј. важи

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \ n = 2, 3, \ldots.$$

Збир првих n чланова аритметичког низа са првим чланом a_1 и разликом d је

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}d.$$

Геометријски низ (прогресија) (b_n) задовољава релацију $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $n = 1, 2, \ldots$, при чему се број $q, q \neq 0$, назива количник овог низа. У геометријском низу (b_n) са првим чланом b_1 и количником q важи $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, за свако $n \in \mathbb{N}$. У геометријском низу (b_n) сваки члан, почев од другог, представља геометријску средину њему суседних чланова, тј. важи

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}, \ n = 2, 3, \ldots$$

Збир првих n чланова геометријског низа са првим чланом b_1 и количником $q \neq 1$ је

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Збир бесконачне геометријске прогресије са првим чланом b_1 и количником q, $|q| < 1$, је $S = b_1 \cdot \frac{1}{1-q}$.

Решења задатака

1. Одговарајући биномни развој је

$$(x + x^3)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^{6-k} (x^3)^k = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^{2k+6}.$$

Из услова $2k+6=12$ добијамо $k=3$, па је коефицијент уз x^{12} једнак $\binom{6}{3}=20$.

2. Из биномног развоја

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}x^{8-k}(x^{-1})^k=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}x^{8-2k}$$

следи да за члан који не садржи x важи $8-2k=0$, односно $k=4$, па је одговарајући члан једнак $\binom{8}{4}$.

3. Из биномног развоја

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{12-k}\left(-x^{-\frac{1}{3}}\right)^k=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}(-1)^k x^{\frac{36-5k}{6}},$$

закључујемо да не постоји члан који не садржи x, јер из услова $36-5k=0$ добијамо $k=\frac{36}{5}$, што је немогуће, јер је k цео број.

4. Из услова

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{n-2}=2862,$$

односно

$$2\binom{n}{2}=2862,$$

добијамо да је $2\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}=2862$, односно $n^2-n-2862=0$. Решења ове квадратне једначине су $n=54$ и $n=-53$. Како је $n\in\mathbb{N}$, следи да је $n=54$. Одредимо број рационалних чланова у биномном развоју

$$(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{4})^{54}=\sum_{k=0}^{54}\binom{54}{k}\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{54-k}\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^k=\sum_{k=0}^{54}\binom{54}{k}3^{\frac{54-k}{4}}4^{\frac{k}{3}}.$$

Да би одговарајући чланови биномног развоја били рационални бројеви, морају да буду задовољени услови $4\mid 54-k$, $3\mid k$, $0\leqslant k\leqslant 54$. Ови услови су задовољени за $k\in\{6,18,30,42,54\}$, па у овом биномном развоју постоји пет рационалних чланова.

5. Важи да је збир свих биномних коефицијената у развоју $(x+y)^n$ једнак $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

Из услова да је овај збир једнак 2^{2004}, следи да је $n=2004$. Поступајући аналогно као у претходном задатку, закључујемо да постоји 335 рационалних чланова у овом биномном развоју.

6. Ако су коефицијенти петог и деветог члана развоја

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

једнаки, закључујемо, имајући у виду једнакост симетричних биномних коефицијената, да је $\binom{n}{4}=\binom{n}{8}=\binom{n}{n-4}$, одакле следи да је $n=12$.

7. Из биномног развоја

$$\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt{3}\right)^{100}=\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}(2^{\frac{1}{4}})^{100-k}(3^{\frac{1}{2}})^k=\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}2^{\frac{100-k}{4}}3^{\frac{k}{2}}$$

закључујемо да је одговарајући члан биномног развоја рационалан број ако су испуњени услови $4 \mid 100-k$, $2 \mid k$, $0 \leqslant k \leqslant 100$. Ови услови су задовољени за $k \in \{0,4,8,\ldots,100\}$. Оваквих бројева има 26, па у посматраном биномном развоју постоји $101-26=75$ ирационалних чланова.

8. Из биномног развоја

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}=\sum_{k=0}^{21}\binom{21}{k}\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\right)^{21-k}\left(b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\right)^k=\sum_{k=0}^{21}\binom{21}{k}a^{\frac{42-3k}{6}}b^{\frac{-21+4k}{6}}$$

закључујемо да је за члан који садржи a и b са истим степеном испуњено $42-3k=-21+4k$, одакле добијамо $k=9$, па је одговарајући члан једнак $\binom{21}{9}a^2b^2\sqrt{ab}$.

9. Из услова

$$12\binom{x}{1}+\binom{x+4}{2}=96$$

добијамо

$$12x+\frac{(x+4)(x+3)}{2}=96,$$

одакле долазимо до квадратне једначине $x^2+31x-180=0$ чија су решења $x_1=5$ и $x_2=-36$. Како $x_2 \notin \mathbb{N}$, једино решење је $x=5$.

10. Најпре закључујемо да мора бити $x+2 \leqslant 13$, тј. $x \leqslant 11$. Из услова

$$\binom{13}{x}<\binom{13}{x+2}$$

добијамо

$$\frac{13!}{x!(13-x)!}-\frac{13!}{(x+2)!(13-x-2)!}<0,$$

односно

$$\frac{13!}{(x+2)!(13-x)!}\Big((x+2)(x+1)-(13-x)(13-x-1)\Big)<0,$$

тј.

$$\frac{13!}{(x+2)!(13-x)!}(28x-154)<0.$$

Како је $(x+2)!>0$ и $(13-x)!>0$, последња неједнакост је задовољена ако је $28x-154<0$, одакле, имајући у виду да је x природан број, следи $x \in \{1,2,3,4,5\}$.

11. Из услова
$$\binom{x+1}{y} : \binom{x}{y-1} = 6 : 2,$$
добијамо
$$2 \cdot \frac{(x+1)!}{y!(x-y+1)!} = 6 \cdot \frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!},$$
одакле је
$$2(x+1) = 6y,$$
тј.
$$x = 3y - 1.$$
Из услова
$$\binom{x}{y+1} : \binom{x}{y-1} = 5 : 2,$$
добијамо
$$2 \cdot \frac{x!}{(y+1)!(x-y-1)!} = 5 \cdot \frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!},$$
одакле је
$$2(x-y+1)(x-y) = 5y(y+1).$$
Заменом вредности $x = 3y - 1$ у последњој једначини, добијамо да је $y = 3$ и $x = 8$.

12. Ако чланове ове аритметичке прогресије означимо са a_i, $i = 1, 2, \ldots$, а разлику два узастопна члана са d, тада према условима задатка важи $a_2 + a_{10} = 8$ и $a_2 \cdot a_{10} = 12$, одакле добијамо
$$a_1 + d + a_1 + 9d = 8,$$
$$(a_1 + d)(a_1 + 9d) = 12.$$
Из прве једначине следи да је $a_1 = 4 - 5d$, па заменом ове вредности у другој једначини долазимо до
$$(4 - 4d)(4 + 4d) = 12,$$
тј.
$$1 - d^2 = \frac{3}{4}.$$
Решења последње једначине су $d = \frac{1}{2}$ и $d = -\frac{1}{2}$. Како је у питању опадајућа аритметичка прогресија, следи да је $d = -\frac{1}{2}$, па је $a_1 = \frac{13}{2}$. Сума првих 15 чланова ове прогресије је $S_{15} = 15 \cdot \frac{13}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{14 \cdot 15}{2} = 45$.

13. Из услова $S_3 = 42$ и $S_6 = 48$ добијамо
$$3a_1 + \frac{2 \cdot 3}{2} d = 42,$$
$$6a_1 + \frac{5 \cdot 6}{2} d = 48,$$

тј.

$$a_1 + d = 14,$$
$$2a_1 + 5d = 16.$$

Решавањем овог система добијамо $a_1 = 18$ и $d = -4$, па је $S_{10} = 10 \cdot 18 - 4 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 0.$

14. Из услова $a_1 + a_7 = 7$ добијамо $a_1 + a_1 + 6d = 7$, тј. $2a_1 + 6d = 7$. Одавде следи да је $a_3 + a_5 = a_1 + 2d + a_1 + 4d = 2a_1 + 6d = 7$.

15. Према услову задатка важи да је $a_1 = -2$ и $a_{17} = 46$, па је $a_1 + 16d = 46$, одакле следи да је $d = 3$ и $S_{17} = 374$.

16. Из услова $a_n = m$ добијамо $a_1 + (n-1)d = m$, док из услова $a_m = n$ следи да је $a_1 + (m-1)d = n$, $n \neq m$. Из прве једначине је $a_1 = m - (n-1)d$, па заменом ове вредности у другу једначину добијамо

$$m + (m-n)d = n,$$

одакле је, имајући у виду да је $m \neq n$, $d = -1$, па је $a_1 = m+n-1$. Коначно, добијамо да је $a_p = a_1 + (p-1)d = m + n - p$.

17. Тражени бројеви су чланови аритметичке прогресије чији је први члан $a_1 = 1$, а разлика два узастопна члана је $d = 5$, па је збир првих 100 чланова

$$S_{100} = 100 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} = 24850.$$

18. Да би бројеви $\log 2, \log(2^x - 1)$ и $\log(2^x + 3)$ чинили аритметичку прогресију мора да важи

$$\log(2^x - 1) - \log 2 = \log(2^x + 3) - \log(2^x - 1),$$

одакле је

$$\log \frac{2^x - 1}{2} = \log \frac{2^x + 3}{2^x - 1},$$

тј.

$$\frac{2^x - 1}{2} = \frac{2^x + 3}{2^x - 1}.$$

Одавде, ако уведемо смену $t = 2^x$, $t > 0$, долазимо до једначине

$$(t-1)^2 = 2(t+3),$$

тј.

$$t^2 - 4t - 5 = 0,$$

чија су решења $t = 5$ и $t = -1$. Због услова $t > 0$ могуће је само решење $t = 5$, одакле следи да је $2^x = 5$, тј. $x = \log_2 5$.

19. Из услова задатка је $q = 2$ и $S_7 = 635$, одакле следи

$$a_1 \cdot \frac{2^7 - 1}{2 - 1} = 635.$$

Непосредно се добија да је $a_1 = 5$, па је $a_7 = a_1 \cdot q^6 = 5 \cdot 2^6 = 320$.

20. Према услову задатка је $a_1 + a_5 = 51$, $a_2 + a_6 = 102$, одакле добијамо

$$a_1 + a_1 \cdot q^4 = 51,$$

$$a_1 q + a_1 q^5 = 102,$$

односно

$$a_1(1 + q^4) = 51,$$

$$a_1 q(1 + q^4) = 102.$$

Ако другу једначину поделимо првом (важи да је $a_1 \neq 0$) добијамо $q = 2$, одакле, заменом у првој једначини, произилази да је $a_1 = 3$. Према услову задатка важи да је $S_n = 3069$, тј.

$$3 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 3069,$$

одакле добијамо да је $2^n = 1024$, тј. $n = 10$.

21. Количник овог бесконачног геометријског низа је $q = \dfrac{a\sqrt{2}}{2a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$, па је његов збир

$$S = 2a \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 8,$$

одакле следи да је $a = 2(2 - \sqrt{2})$.

22. Потребно је израчунати збир бесконачног геометријског низа чији је први члан $a_1 = 1$, а количник је $\cos x$, за $x = \dfrac{\pi}{3}$, тј. $q = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$. Овај збир је једнак

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

23. Нека је број чланова ове геометријске прогресије једнак $2n$. Према услову задатка важи да је

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = 85,$$

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = 170.$$

Одавде добијамо

$$a_1(1 + q^2 + \cdots + q^{2n-2}) = 85,$$

$$a_1 q(1 + q^2 + \cdots + q^{2n-2}) = 170.$$

Ако другу једначину поделимо првом добијамо да је $q = 2$.

24. Према условима задатка a_1, a_2, a_3 и a_4 су узастопни чланови растућег аритметичког низа, одакле следи да је $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$, $d > 0$. Осим тога, бројеви b_1, b_2, b_3, b_4 су узастопни чланови геометријског низа, па је $b_2 = b_1 q, b_3 = b_1 q^2, b_4 = b_1 q^3$. Такође, важи да је $a_1 = b_1 = 1$ и $a_2 = b_2$, одакле следи $1 + d = q$, тј. $d = q - 1$. Из услова $b_3 - a_3 = 1$ добијамо

$$b_1 q^2 - (a_1 + 2d) = 1,$$

односно
$$q^2 - 1 - 2(q-1) = 1,$$
тј.
$$q^2 - 2q = 0.$$
Решења ове једначине су $q = 0$ и $q = 2$. Међутим, решење $q = 0$ није могуће, јер је тада $d = -1$, супротно претпоставци $d > 0$. Из услова $q = 2$ добијамо $d = 1$, па је $b_4 - a_4 = b_1 q^3 - (a_1 + 3d) = 4$.

25. Бројеви a, b, c су узастопни чланови растућег аритметичког низа и важи $a+b+c = 18$, одакле следи да је $c = 18 - a - b$. Сада је $b - a = c - b$, тј. $b - a = 18 - b - a - b$, одакле добијамо $b = 6$. Из услова да су бројеви $a, b, c+1$ узастопни чланови геометријског низа добијамо
$$\frac{b}{a} = \frac{c+1}{b},$$
тј.
$$\frac{6}{a} = \frac{13-a}{6}.$$
Последњи услов можемо записати у облику једначине
$$a^2 - 13a + 36 = 0,$$
чија су решења $a = 9$ и $a = 4$. За $a = 9$ добијамо $c = 3$, па је $a^2 + b^2 + c^2 = 126$. За $a = 4$ добијамо $c = 8$, па је $a^2 + b^2 + c^2 = 116$.

26. Означимо ове бројеве са a, b, c. Према услову задатка важи да је $a + b + c = 14$, при чему бројеви $a, b+1, c$ чине аритметички низ, а бројеви $a, b-1, c$ чине геометријски низ. Из услова $a + b + c = 14$ добијамо $c = 14 - a - b$, а из услова да бројеви $a, b+1, c$ чине аритметички низ следи $b + 1 - a = c - b - 1$, тј. $b + 1 - a = 13 - 2b - a$, одакле је $b = 4$. Из услова да бројеви $a, b-1, c$ чине геометријски низ следи
$$\frac{b-1}{a} = \frac{14-a-b}{b-1},$$
тј.
$$\frac{3}{a} = \frac{10-a}{3},$$
одакле добијамо једначину $a^2 - 10a + 9 = 0$ чија су решења $a = 9$ и $a = 1$. За $a = 9$ добијамо да је $c = 1$, док за $a = 1$ следи да је $c = 9$. Дакле, тражени бројеви су $1, 4, 9$ или $9, 4, 1$.

27. Према услову задатка дужине страница правоуглог троугла образују растући геометријски низ, па их можемо означити са a, aq, aq^2. Како су дужине страница троугла позитивни бројеви, следи да је $a > 0$. Осим тога, како је у питању растући низ, следи да је $q > 1$, па је хипотенуза дужине aq^2, а дужине катета су a и aq. Из Питагорине теореме добијамо
$$a^2 + a^2q^2 = a^2q^4,$$
односно,

$$q^4 - q^2 - 1 = 0.$$

Ако уведемо смену $q^2 = t$, $t > 0$, добијамо квадратну једначину $t^2 - t - 1 = 0$ чије је позитивно решење $t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, па из услова $q^2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, имајући у виду и да је $q > 0$, добијамо $q = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

По претпоставци задатка важи да је једна катета дужине 2, па постоје следеће могућности:

(i) Ако је $a = 2$, следи да су дужине преосталих страница $2\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ и $2 \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, па је обим троугла $O = 3 + \sqrt{5} + 2\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

(ii) Уколико је $aq = 2$, дужине страница троугла су $(\sqrt{5}-1)\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}, 2, 2\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$, па је обим троугла $O = (\sqrt{5}+1)\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} + 2$.