Реалне функције. Комплексни бројеви

1. Ако је функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дата са $f(x)=x^3-\dfrac{2}{x^2}$, одредити $f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Ако је функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дата са $f(x)=3x^2-2x+1$, одредити $f(f(1))-f(f(-1))$.

3. Ако су функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дате са $f(x)=x^2+1$ и $g(x)=3x-1$, одредити $f(g(x))-g(f(x))$.

4. Ако је функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дата са $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, одредити функцију $h(x)=(f\circ f\circ f)(x)$.

5. Ако су функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дате са $f(x)=\sqrt{x}$ и $g(x)=x^4+3$, одредити $f(g(f(f(x))))$.

6. Ако је функција $f:[0,1]\to\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ дата са $f(x)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$, одредити њену функцију.

7. Ако је функција $f:[0,1]\to\left[1,\sqrt{2}\right]$ дата са $f(x)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})$, одредити њену функцију.

8. Ако је $f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=x-1$ и $f\left(\dfrac{x-1}{2}\right)=x+1$ одредити $(f^{-1}\circ g)\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

9. Ако је функција $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ таква да за свако $x>0$ важи

$$2f(x)+3f\left(\frac{2010}{x}\right)=5x.$$

Одредити $f(6)$.

10. Одредити које од следећих функција су међусобно једнаке $f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$, $f_2(x)=\ln \mathrm{e}^{\frac{1}{|x|}}$, $f_3(x)=\sqrt{\dfrac{|x|}{x^3}}$, $f_4(x)=\dfrac{1}{|x|}$.

11. Дате су функције $f_1(x)=1-\dfrac{1}{x}$, $f_2(x)=\mathrm{e}^{\ln\frac{x-1}{x}}$, $f_3(x)=\dfrac{(x-1)x}{x^2}$, $f_4(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)}$, $f_5(x)=\ln \mathrm{e}^{\frac{x-1}{x}}$. Одредити које од наведених функција су једнаке функцији $f(x)=\frac{x-1}{x}$.

12. Одредити домене следећих функција

(а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}+\sqrt{x}$; (б) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}+\sqrt{2-x}$;

(в) $f(x)=(3-|x|)^{-\frac{1}{2}}$; (г) $f(x)=\log(6+x-x^2)$.

13. Одредити област дефинисаности функције $f(x)=\sqrt{\ln\dfrac{x-4}{x+2}}+\sqrt{4-3x-x^2}$.

14. Одредити број реалних нула функције $f(x)=\dfrac{(x^2-5x+6)\ln(x-4)}{x-2+|x-2|}$.

1. Одредити реалан параметар k такав да је израз $5\mathrm{i}^{33}-2k\mathrm{i}^{32}+(k-3)\mathrm{i}^{31}+10$ реалан број.

2. Ако је $z=\dfrac{1+\mathrm{i}^{15}}{\mathrm{i}^3-\mathrm{i}^{12}}$, где је $\mathrm{i}^2=-1$, одредити вредност израза $\operatorname{Re}(x)+(\operatorname{Im}(z))^2$.

3. Одредити реални део комплексног броја $\dfrac{1-3\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}-\dfrac{3+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}^3}$.

4. Одредити имагинарни део комплексног броја $\dfrac{1-3\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}-\dfrac{3+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}^3}$.

5. Ако су a и b реални параметри такви да је $(2+3\mathrm{i})a+(3+2\mathrm{i})b=1$, одредити збир $a+b$.

6. Одредити модуо комплексног броја $\dfrac{(1-\mathrm{i})^5}{(1+\mathrm{i})^4}$.

7. Одредити вредност израза $\dfrac{(1+\mathrm{i})^{1000}}{(1-\mathrm{i})^{996}-\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^{998}}$.

8. Одредити реалан број λ, такав да је број $\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{\lambda+(\lambda+1)\mathrm{i}}$, такође реалан.

9. Одредити вредност израза $\left(\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^n$, при чему n није дељиво са 3.

10. Ако је $\mathrm{i}^2=-1$, одредити вредност израза $\sqrt{1-\mathrm{i}\sqrt{8}}+\sqrt{1+\mathrm{i}\sqrt{8}}$.

11. У скупу комплексних бројева решити једначину $(1+\mathrm{i})z+(1-\mathrm{i})^4=2$.

12. Ако је z комплексан број такав да важи $\left|\dfrac{z}{z+1}\right|=1$ и $\dfrac{z}{\overline{z}}=\mathrm{i}$, одредити $z\cdot\overline{z}$.

13. Ако за комплексан број $z=x+\mathrm{i}y$, важи $|z-2|=|z+2\mathrm{i}|$, $|z+2|=|z-2=|$, одредити $x+y$.

14. Одредити вредност израза

$$\frac{\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^3+\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)^5}{\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^2}$$

.

15. Одредит тригонометријски облик комплексног броја $z=\dfrac{\mathrm{i}-1}{\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}}$.