Елементарна математика

Први домаћи задатак 2017/18

1. На колико начина три студента студијског програма математика, три студента студијског програма рачунарске науке и три студијског програма физика можемо поређати у врсту, али тако да не постоје два студента истог студијског програма који стоје један поред другог?

2. На колико начина се шест чоколада и осам бомбона може поделити на четворо деце, тако да свако дете добије бар неки слаткиш? При томе, неке бомбоне и неке чоколаде могу остати нераспоређене.

3. На колико начина се може поређати десет различитих књига на полицу, али тако да за пет одређених важи да никоје две нису једна до друге?

4. Дати су скупови $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4 b_5, b_6, b_7\}$. Одредити укупан број бијекција које сликају скуп A у неки од подскупова скупа B.

5. Колико има пермутација скупа $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ у којима се између нуле и јединице налази мање од 3 елемента?

6. Из скупа од 10 студената, међу којима су само један студент информатике и само један студент математике, бирамо комисију од 6 чланова, али тако да ако је у комисији студент информатике мора у тој комисији бити и студент математике. Колико се таквих комисија може образовати?

7. На колико начина се могу изабрати три броја из скупа природних бројева $\{1, 2, 3, \ldots, 40\}$ тако да им збир буде непаран број?

8. На састанку се налази $12k$ људи. Свака особа се руковала са тачно $3k + 6$ осталих. За било која два човека на том састанку, број људи који се руковао са обојицом је увек исти. Колико је људи било присутно на том састанку?

9. На полици се налази 5 књига на енглеском,7 на шпанском и 8 на француском језику. Све књиге су међусобно различите. На колико начина можемо распоредити књиге ако све написане на француском језику морају бити једна до друге?

10. Колико има пермутација $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ таквих да ни један од елемената $a_1, a_2, \ldots, a_n$ није "на свом месту", тј таквих да за свако $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ важи $a_i \neq i$?

11. У кошаркашкој лиги се играло по систему сваки са сваким и одиграно је укупно 45 утакмица. Колико екипа је учествовало?

12. Колико има различитих четвороцифрених бројева облика $\overline{abcd}$ који су већи од 9000, са различитим цифрама дељивих са 5, код којих су цифре b и c парне?

13. Колико има различитих шестоцифрених бројева код којих парне и непарне цифре долазе наизменично?

14. На свакој страници квадрата дато је 10 тачака. Ниједна од ових тачака није теме квадрата. Колико има троуглова са теменима у овим тачкама?

15. На колико начина се у ред могу поређати 5 мушкараца и 2 жене, тако да две жене не стоје једна до друге?

16. На колико начина се 7 парова могу распоредити у ред са 14 места, тако да чланови сваког од парова седе један поред другог?

17. Квадрат димензија 3×3 подељен је на 9 мањих квадрата 1×1. Бојење квадрата се врши тако што се одређеним бојама боје мањи квадрати.На колико начина се може обојити велики квадрат ако на располагању имамо 8 различитих боја и све их треба употребити?

18. У једној школи испитивали су укус 600 ученика. Јабуке воли 240 ученика, банане 180, а мандарине 360 ученика. Јабуке и мандарине воли 120 ученика, јабуке и банане 70, а мандарине и банане воли 50 ученика. Четрдесет ученика не воли воће. Одредити колико ученика воли све три врсте воћа.

19. Од 50 студената, на испит из анализе је изашло њих 24, на испит из алгебре њих 20 и на дискретну математику њих 13. Анализу и алгебру је полагало 6 студената, алгебру и дискретну математику 5 студената, а анализу и дискретну математику 4 студената. Једино је Петар полагао сва три испита. Колико студената неће изаћи на ни на један испит? Колико ће изаћи на тачно један испит? Колико на бар два испита?

20. Одредити колико има бројева не већих од 1000 који су дељиви бар једним од бројева 2, 3, 5 или 7.

21. Посматрајмо низ четвороцифрених бројева који представљају последње четири цифре бројева $3, 3^2, 3^3, 3^4 \ldots$. Доказати да је почев од неког члана дати низ периодичан.

22. У стакленој коцки ивице 1 налази се 2018 мува. Доказати да постоји сфера полупречника $\dfrac{1}{11}$ унутар које се у сваком тренутку, без обзира на распоред мува, налазе бар 3 муве.

23. Доказати да је од четири произвољна броја из интервала $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ увек могуће изабрати два (x и y) тако да важи неједнакост
$$8 \cos x \cdot \cos y \cdot \cos(x-y) + 1 > 4(\cos^2 x + \cos^2 y).$$

24. Доказати да је раван могуће обојити у две боје тако да свака права у тој равни садржи две тачке различите боје.

25. Колико речи постоји са n слова, које су састављене само од слова a, b и c, тако да се слово a у речи јавља паран број пута?

26. За округлим столом седи 2018 особа, 1009 мушкараца и 1009 жена. Доказати да се могу наћи две особе различитог пола између којих седе тачно две особе различитог пола.

27. На тениском турниру је учествовало 2^n играча и свако је играо са сваким. Доказати да је могуће наћи $n+1$ играча и поређати их у низ тако да је сваки играч у том низу победио све играче после њега.

28. Одредити број подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, 30\}$ таквих да је збир елемената датог подскупа једнак или већи од 233.

29. Доказати да се између 100 произвољних бројева увек може изабрати један који је дељив са 100 или више њих чији је збир дељив бројем 100.

30. Доказати да постоји природан број који почиње са 13579 који је дељив са 2018.

31. Дато је седам дужи од којих је свака већа од 10cm, а мања од 1m. Доказати да међу датима постоје три дужи од којих се може саставити троугао.

32. Доказати да је
$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

33. Ако је $n \geq 0$, одредити вредност израза

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

34. У развоју $\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt{a^{-1}}\right)^{15}$, $a > 0$, одредити члан који не зависи од a.

35. У развоју бинома $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^m$, $x \neq 0$ и $m \in \mathbb{N}$, коефицијенти четвртог и тринаестог члана су међусобно једнаки. Одредити члан који не садржи x.

36. Израчунај суме:

   а) $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{2i} \binom{n}{2k+1-2i}$;

   б) $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1}$.

37. Одредити средњи члан у развоју бинома $\left(a^{-2}\sqrt{2} - \sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{2}}}\right)^m$, $a > 0$, $m \in \mathbb{N}$, ако се зна да је однос коефицијената петог и трећег члана 14:3.

38. Збир коефицијената првог, другог и трећег члана у развоју $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^m$, $m \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$, је 46. Одредити члан који не садржи x.

39. За коју вредност x у развијеном облику бинома $\left(\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^m$ збир трећег и петог члана је 135, ако је збир биномних коефицијената последња три члана 22?

40. Одредити x у изразу $\left((\sqrt{x})^{\frac{1}{\log x + 1}} + \sqrt[12]{x}\right)^6$, ако је четврти члан развијеног бинома 200.

41. Одредити за које је x шести члан у развоју бинома $\left(\sqrt{2^{\log(10-3^x)}} + \sqrt{2^{(x-2)\log 3}}\right)^m$, једнак 21, ако су биномни коефицијенти другог, трећег и четвртог члана развоја редом први, трећи и пети члан геометријске прогресије.

42. Доказати да за сваки природан број н важи $17 | 6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$.

43. Доказати да за сваки природан број n важи

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

44. Доказати да за сваки природан број важи

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \ldots + \frac{n}{3^n} = \frac{3(3^n - 1) - 2n}{4 \cdot 3^n}.$$

45. Ако је $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и за $n \geqslant 3$ важи $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$, тада је $a_n = n!$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Доказати.

46. Низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је задат рекурзивном формулом $a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} + 4a_n$, уз почетне услове $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Одредити све чланове тог низа који су дељиви са три.

47. Математичком индукцијом доказати да за све $n \in \mathbb{N}$ важи

$$1 + 4 + \ldots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

48. Математичком индукцијом доказати да за све $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

49. Математичком индукцијом доказати да за све $n \in \mathbb{N}$ збир првих $2n$ природних бројева износи $S_{2n} = \dfrac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$.

50. Низ a_n дат је на следећи начин $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{4n-2}{2} \cdot a_{n-1}$, за $n \geqslant 2$. Доказати да су сви чланови тог низа природни бројеви.

51. Нека је низ реалних бројева дефинисан са $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Математичком индукцијом доказати да је $x_n < 4$ за све $n \in \mathbb{N}$.

52. Низ је дефинисан са $a_0 = 1$, $a_1 = \cos\alpha$ (за неки фиксиран угао α) и $a_{n+1} = 2a_1a_n - a_{n-1}$, за $n \geqslant 1$. Доказати да је $a_n = \cos n\alpha$, за $n \geqslant 0$.

53. Доказати да за Фибоначијев низ, дефинисан са $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ и $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ за $n \geqslant 2$ важи

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big).$$

54. Одредити број решења једначине $|a - b| = |b - c|$ из скупа $\{1, 2, \ldots, 36\}$.

55. Збир хиљаду узастопних целих бројева је 31500. Одредити највећи и најмањи сабирак тог збира.

56. Доказати да збир квадрата пет узастопних природних бројева не може бити потпун квадрат.

57. Одредити цифре a, b и c тако да важи једнакост $\overline{aa} + \overline{bb} = (\overline{cc})^2$.

58. Одредити све просте бројеве a, b, c за које је испуњена једнакост $a + ab + abc = 38$.

59. Да ли једначина $x^2 + \dfrac{6}{y} = 10$ има коначно или бесконачно много решења у скупу целих бројева?

60. Да ли једначина $4x^2 + y^2 = 2018$ има решења у скупу целих бројева?

61. Купац је пазарио 12 јабука и крушака заједно. То га је коштало 132 динара. Ако једна јабука кошта 3 динара више него једна крушка и ако се зна да је купио више јабука него крушака, одредити колико је комада од сваког воћа купио.

62. У скупу природних бројева решити једначину

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{5} - \frac{1}{xy}.$$

63. Збир и производ 1969 природних бројева једнак је броју 2015. Одредити те природне бројеве.

64. Одреди све целобројне вредности броја a за које је вредност разломка $\dfrac{8}{3a+1}$ цео број.

65. Дати су скупови $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2,3\}$, $S_3 = \{4,5,6\}\ldots$. Одредити збир елемената скупа S_{10}.

66. Колико целобројних решења има једначина $|x| + |y| = 2017$?

67. Природни бројеви a, b и c задовољавају једнакост $a = b + c^2$. Бројеви b и c имају по 1998 цифара, а број a дупло више. У запису тих бројева појављује се само по једна цифра, и то у броју b цифра x, у броју c цифра y и у броју a цифра z. Нађи x, y, z.

68. Марко је одлучио да игра пикадо. Пикадо у који Марко баца стрелице има три области, тако да он може да освоји 20, 60 или 70 поена. Он је бацао стрелице 35 пута и сваки пут је погодио мету. Колико је од којих области он погодио, ако је на крају имао 920 поена?

69. Одредити све реалне бројеве a, b, c, d такве да је

$$a + b + c + d = 20 \text{ и } ab + ac + ad + bc + bd + cd = 150.$$

70. Одреди све просте бројеве p и q такве да је $3^p + p^3 = q$.

71. Нека су a и b природни бројеви. Доказати да је a^2+ab+b^2 делитељ броја $(a+b)^6-a^6$.

72. Нађи троцифрене бројеве $\overline{abc}$ тако да су $\overline{abc} = 3(a+b+c)^2$.

73. Одреди све просте бројеве p, q и r такве да важи једнакост $p + pq + pqr = 38$.

74. Доказати да се број $\underbrace{11\ldots11}_{10}\underbrace{22\ldots22}_{10}$ може приказати као производ два узастопна природна броја.

75. Ако су a, b и m цели бројеви такви да је $a^2 + 2mb^2$ квадрат целог броја, онда је број $a^2 + mb^2$ једнак збиру квадрата два цела броја. Доказати.

76. Ако се производ четири узастопна цела броја увећа за 1, добиће се квадрат неког целог броја. Доказати.

77. Одредити збир: $2009^2 - 2008^2 + 2007^2 - 2006^2 + \ldots + 3^2 - 2^2 + 1^2$.

78. Нађи троцифрени број $\overline{abc}$ такав да је $49a + 7b + c = 286$.

79. Одредити број решења у скупу природних бројева $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{1995}$.

80. Ако је $x + y + z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y} = 1$, доказати да је $x^3 + y^3 + z^3 = 1$.

81. Ако за реалне бројеве x, y и z важи

$$\sqrt{x} - \frac{1}{y} = \sqrt{y} - \frac{1}{z} = \sqrt{z} - \frac{1}{x},$$

доказати да су они међусобно једнаки.

82. Доказати да не постоје цели бројеви x и y такви да је $x^2 + z^2 = 2016$.

83. Решити у скупу природних бројева једначину $1! + 2! + 3! + \cdots + x! = y^2$.

84. Ако за бројеве a, b, и c важи $a+b+c=0$, доказати да важи

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=3.$$

85. Одредити све просте бројеве p, q и r такве да је $\dfrac{p}{q}-\dfrac{4}{r+1}=1$.

86. Докажи да не постоје цели бројеви x, y и z такви да је $x^4+y^4=z^4+3$.

87. Нека су a, b, c различите цифре и све различите од нуле. Да ли збир $\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}$ може бити једнак квадрату неког природног броја?

88. Ако је $a^2+b^2-2a+6b+10=0$, колико је $a^{2018}+2018b$?

89. Збир цифара броја 9^{2017} једнак је броју a. Збир цифара броја a једнак је броју b,а збир цифара броја b једнак је броју c. Одредити број c.

90. Да ли је број $2015\sqrt[3]{3}+2016\sqrt{2}$ рационалан или ирационалан?

Сваки студент ради по три задатака и то по следећем распореду:

1. 14/14 – 1. 31. 61.
2. 44/15 – 2. 33. 81.
3. 42/14 – 5. 47. 54.
4. 10/15 – 7. 28. 63.
5. 35/14 – 3. 35. 70.
6. 30/15 – 12. 41. 85.
7. 40/15 – 17. 39. 64.
8. 13/15 – 20. 42. 79.
9. 30/12 – 19. 46. 72.
10. 36/15 – 4. 29. 84.
11. 34/15 – 32. 49. 62.
12. 8/14 – 11. 51. 69.
13. 28/14 – 18. 50. 89.
14. 10/11 – 21. 48. 71.
15. 30/13 – 6. 37. 73.
16. 2/15 – 23. 40. 59.
17. 22/13 – 16. 36. 57.
18. 31/14 – 13. 43. 88.
19. 23/15 – 9. 34. 65.
20. 35/14 – 16. 47. 78.
21. 31/13 – 24. 44. 86.
22. 13/11 – 21. 53. 77.
23. 25/14 – 28. 48. 66.
24. 38/15 – 10. 38. 56.
25. 25/15 – 25. 42. 82.
26. 38/13 – 29. 49. 58.
27. 9/15 – 15. 37. 60.
28. 6/14 – 11. 41. 75.
29. 37/15 – 17. 45. 80.
30. 7/13 – 30. 51. 76.
31. 15/12 – 14. 46. 68.
32. 40/12 – 27. 50. 83.

33. 53/14 – 26. 48. 67.
34. 55/13 – 12. 52. 90.
35. 27/12 – 19. 42. 55.
36. 25/13 – 18. 46. 89.
37. 41/14 – 22. 39. 87.
38. 45/12 – 3. 45. 74.
39. 19/15 – 12. 23. 55.
40. 271/16 – 11. 22. 55.

Радове можете предати до **среде 09.05.2018.**