Квадратна једначина, неједначина, функција

1. Одредити $b+c$, ако су $x_1=-2$, $x_2=3$ решења квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$, где је $a=1$.

2. Одредити вредности реалног параметра a тако да једначина $3x^2-6x-a=0$ нема решења у скупу реалних бројева.

3. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2-2x+5=0$, одредити вредност израза $\dfrac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}{x_1^3+x_2^3}$.

4. Ако су α и β решења једначине $x^2-2x+4=0$, одредити вредност израза $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}$.

5. Нека су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $x^2+x+1=0$. Одредити коефицијенте b и c у једначини $y^2+by+c=0$ тако да решења буду $y_1=5x_1+x_2$ и $y_2=x_1+5x_2$.

6. За које вредности реалног параметра k једначина $(k^2+k-6)x^2+2kx+1=0$ има различита реална решења која су негативна?

7. Одредити збир свих вредности реалног параметра m за које решења x_1 и x_2 квадратне једначине $2x^2-2(m-3)x+2m^2-17=0$ задовољавају услов $x_1^2+x_2^2=19$.

8. Одредити производ решења једначине $x^2-2|x|-3=0$.

9. Одредити број решења једначине $\dfrac{(2|x|-3)^2-|x|-6}{4x+1}=0$.

10. Одредити вредност реалног параметра a тако да једначина $|x^2-3|x|+2|=a$ има максималан број решења.

11. Решити неједначину $\dfrac{x^2-2}{x^2-x-2}<\dfrac{1}{2}$.

12. Одредити разлику највеће и најмање вредности функције $y=x^2-4x+7$ на сегменту $[1,4]$.

13. Ако график функције $y=\dfrac{1}{-x^2+ax-2}$ садржи тачку $M\left(-3,-\dfrac{1}{19}\right)$, одредити најмању вредност ове функције.

14. За које вредности реалног параметра a се графици функција $y=2ax+1$ и $y=(a+6)x^2+4$ не секу?

15. Решити систем једначина $2x^2y+xy=1$, $xy+x=1$.

Решења задатака

1. Користећи Вијетове формуле

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

и претпоставку да је $a = 1$, добијамо да је $-b = 1$ и $c = -6$, тј. $b = -1$ и $c = -6$. Даље је $b + c = -7$.

2. Квадратна једначина нема решења у скупу реалних бројева ако и само ако је $D < 0$. Како је $D = 36 + 12a = 12(3 + a)$, то је $D < 0$ ако и само ако је $3 + a < 0$, тј. $a < -3$. Дакле, $a \in (-\infty, -3)$.

3. Применом Вијетових формула добијамо $x_1 + x_2 = 2$ и $x_1 x_2 = 5$. Како је

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4 - 10 = -6$$

и

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = 2(-6 - 5) = -22,$$

то вредност датог израза износи

$$\frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{x_1^3 + x_2^3} = \frac{-6 + 5}{-22} = \frac{1}{22}.$$

4. Упростимо, најпре, дати израз.

$$\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2\beta + \alpha\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)}{\alpha\beta(\alpha + \beta)} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta}{\alpha\beta}, \quad \alpha \neq -\beta, \alpha\beta \neq 0.$$

Како је $\alpha + \beta = 2$ и $\alpha\beta = 4$, добијамо да је

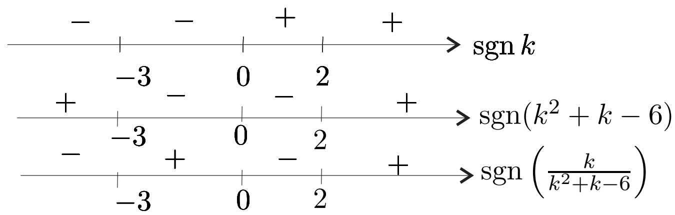
$$\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2\beta + \alpha\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{4 - 12}{4} = -2.$$

5. За решења квадратне једначине $x^2 + x + 1 = 0$ важи $x_1 + x_2 = -1$ и $x_1 x_2 = 1$. Из једначине $y^2 + by + c = 0$ је

$$-b = y_1 + y_2 = 5x_1 + x_2 + x_1 + 5x_2 = 6(x_1 + x_2) = -6,$$

$$\begin{aligned} c = y_1 y_2 &= (5x_1 + x_2)(x_1 + 5x_2) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 26x_1 x_2 \\ &= 5((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2) + 26x_1 x_2 = 5(x_1 + x_2)^2 + 16x_1 x_2 = 5 + 16 = 21. \end{aligned}$$

Дакле, $b = 6$ и $c = 21$.



6. Да би квадратна једначина имала реална и различита решења потребно је да $D > 0$, а ако су решења негативна тада је $x_1 + x_2 < 0$ и $x_1 x_2 > 0$.

   Неједнакост $D > 0$ постаје $-k + 6 > 0$, одакле је $k < 6$.

   Из $x_1 + x_2 < 0$ добијамо да је $-\frac{2k}{k^2+k-6} < 0$. Одређући знак датог израза, закључујемо да $k \in (-3, 0) \cup (2, +\infty)$.

   Користећи последњу неједнакост $x_1 x_2 > 0$, добијамо неједначину $\frac{1}{k^2+k-6} > 0$, која је еквивалентна са $k^2 + k - 6 > 0$, одакле је $k \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$.

   Да би важиле све три неједнакости, мора да буде испуњено $k \in (2, 6)$.

7. Користећи Вијетове формуле, добијамо

$$x_1 + x_2 = m - 3 \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = \frac{2m^2 - 17}{2}.$$

   Како је

$$19 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (m-3)^2 - (2m^2 - 17) = -m^2 - 6m + 26,$$

   добијамо квадратну једначину $m^2 + 6m - 7 = 0$, чије су решења $m_1 = -7$, $m_2 = 1$. Збир ових решења износи $m_1 + m_2 = -6$.

8. За $x \geqslant 0$, дата једначина постаје $x^2 - 2x - 3 = 0$, чија су решења 3 и -1. Међутим, решење -1 не припада скупу $[0, +\infty)$, па је једино решење у овом скупу 3.

   Када је $x < 0$, дата једначина постаје $x^2 + 2x - 3 = 0$. Њена решења су 1 и -3, али само -3 припада скупу $(-\infty, 0)$.

   Закључујемо да су решења дате једначине 3 и -3, а тражени производ износи -9.

9. За $x \in [0, \infty)$, добијамо

$$\frac{(2|x| - 3)^2 - |x| - 6}{4x + 1} = \frac{(2x - 3)^2 - x - 6}{4x + 1} = \frac{4x^2 - 13x + 3}{4x + 1},$$

   па је

$$\frac{4x^2 - 13x + 3}{4x + 1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 13x + 3 = 0,\ x \neq -\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 3,\ x_2 = \frac{1}{4}.$$

   Ако $x \in (-\infty, 0)$, то је

$$\frac{(2|x| - 3)^2 - |x| - 6}{4x + 1} = \frac{(-2x - 3)^2 + x - 6}{4x + 1} = \frac{4x^2 + 13x + 3}{4x + 1}.$$

Решења једначине $4x^2+13x+3=0$ су -3 и $-\frac{1}{4}$. Израз $\dfrac{4x^2+13x+3}{4x+1}$ није дефинисан за $x=-\frac{1}{4}$, па је -3 једино решење у скупу $(-\infty,0)$.

Закључујемо да дата једначина има три решења ($x_1=3$, $x_2=\frac{1}{4}$ и $x_3=-3$).

10. Скицирати график функције $y=|x^2-3x+2|$ на $[0,+\infty)$ и функције $y=|x^2+3x+2|$ на $(-\infty,0)$. Повлачимо праве $y=a$ за разне вредности параметра $a\in\mathbb{R}$. Уочимо број пресека ове праве и графика нацртане функције. Приметимо да ако је $a<0$, једначина нема решења, за $a=0$ једначина има четири решења, ако је $a\in(0,\frac{1}{4})$ има осам решења, за $a=\frac{1}{4}$ има шест решења, ако $a\in(\frac{1}{4},2)$ има четири решења, за $a=2$ има три решења и за $a>2$ има два решења. Дакле, максималан број решења се постиже за $a\in(0,\frac{1}{4})$.

11.
$$\frac{x^2-2}{x^2-x-2}<\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}<0$$

Одређујући знак израза $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$, закључујемо да $x\in(-2,-1)\cup(1,2)$.

	-2		-1		1		2		
$+$		$-$		$-$		$+$		$+$	$\operatorname{sgn}(x^2+x-2)$
$+$		$+$		$-$		$-$		$+$	$\operatorname{sgn}(x^2-x-2)$
$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	$\operatorname{sgn}\left(\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}\right)$

12. Најмања вредност на интервалу $[1,4]$ се достиже за $x=2$ и износи $f(2)=3$, док је највећа вредност 7 достигнута за $x=4$.

13. $f_{\min}(\frac{4}{3})=-\frac{9}{2}$.

14. Графици датих функција се не секу ако систем једначина $y=2ax+1$ и $y=(a+6)x^2+4$ нема решења. Заменом $y=2ax+1$ у другој једначини, добијамо $(a+6)x^2+4=2ax+1$, тј. $(a+6)x^2-2ax+3=0$. Ова квадратна једначина нема решења ако је $D<0$, тј. $4(a^2-3a-18)<0$. Из знака квадратног тринома $a^2-3a-18$, добијамо да је $4(a^2-3a-18)<0$ ако $a\in(-3,6)$.

	-3		6		
$+$		$-$		$+$	$\operatorname{sgn}(a^2-3a-18)$

15. Из друге једначине је $xy=1-x$, па заменом у првој добијамо

$$xy(2x+1)=1\Leftrightarrow(1-x)(2x+1)=1\Leftrightarrow-2x^2+x=0\Leftrightarrow x(1-2x)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{1}{2}.$$

Приметимо да за $x=0$, друга једначина постаје $0=1$, што је немогуће. Дакле, $x=\frac{1}{2}$, а онда је $\frac{y}{2}=\frac{1}{2}$, односно $y=1$. Решење датог система је $(\frac{1}{2},1)$.

Све коментаре (питања, консултације) можете послати на мејл suzanasimic@kg.ac.rs.