Вежбе 1

19. октобар 2020.

1. Проверити да ли следеће функције дефинишу метрику на $\mathbb{R}$:

   (а) $f_1(x,y) = \sqrt{|x-y|}$; (б) $f_2(x,y) = \cos^2(x-y)$.

   Решење. (а) Како је $\sqrt{|x-y|} \geqslant 0$, функција f_1 је ненегативна. Даље, $\sqrt{|x-y|} = 0$ ако и само ако је $|x-y| = 0$, тј. ако и само ако је $x = y$. Дакле, функција f_1 задовољава особину 1- строгост метрике. Важи и особина 2-симетричност метрике, јер је $f_1(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|y-x|} = f_1(y,x)$.

   За ненегативне реалне бројеве важи неједнакост $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.[1] Полазећи од неједнакости $|x-y| \leqslant |x-z| + |z-y|$, користећи особине квадратног корена и наведену неједнакост добијамо

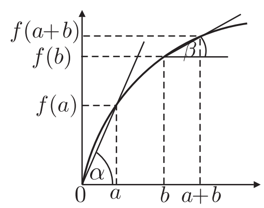
$$\begin{aligned} f_1(x,y) = \sqrt{|x-y|} &\leqslant \sqrt{|x-z| + |z-y|} \leqslant \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} \\ &= f_1(x,z) + f_1(z,y), \end{aligned}$$

   чиме смо доказали и особину 3-неједнакост троугла за метрику. Дакле, f_1 јесте метрика на $\mathbb{R}$.

   (б) Како је, на пример, $f_2(\pi/2, 0) = \cos^2(\pi/2 - 0) = 0$, f_2 није метрика на $\mathbb{R}$.

2. Нека пресликавање $x \mapsto f(x)$ дефинише на $[0, +\infty)$ непрекидну функцију, која је ненегативна, строго конкавна и која има вредност 0 само за $x = 0$. Доказати да је са $d(x,y) = f(|x-y|)$, $x, y \in \mathbb{R}$, дефинисана метрика на $\mathbb{R}$.

   Решење. Према условима задатка је $f(x) \geqslant 0$ за $x \geqslant 0$. Како за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи $|x-y| \geqslant 0$, то је $d(x,y) = f(|x-y|) \geqslant 0$. Даље, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(|x-y|) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$, тј. важи строгост метрике. Како је $d(x,y) = f(|x-y|) = f(|y-x|) = d(y,x)$, важи симетричност метрике.



Слика 1.

   Функција f која задовољава услове задатка нема максимум, тј. мора бити строго растућа на $[0, +\infty)$ (видети слику 1). Ако то не би важило, тј. ако би функција била опадајућа на неком интервалу, тада би морала да има локални минимум у некој тачки $x_1 > 0$. Тада у некој околини тачке x_1 постоје тачке y_1, y_2, $y_1 < x_1 < y_2$, такве да је $f(y_1) = f(y_2)$. Тада је $x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2$, где су $\alpha = \dfrac{x_1 - y_1}{y_2 - y_1}$

[1] Ова неједнакост се једноставно добија из неједнакости $a + b \leqslant a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

и $\beta = \dfrac{\qquad}{y_2 - y_1}$. Очигледно је $0 < \alpha < 1$ и $\beta = 1 - \alpha$, па је због конкавности $f(x_1) > \alpha f(y_1) + \beta f(y_2) = f(y_1)$. Контрадикција!

Нека су a и b произвољни позитивни реални бројеви. Поставимо сечице кроз тачке $(0,0)$ и $(a, f(a))$ и кроз тачке $(b, f(b))$ и $(a+b, f(a+b))$ и означимо углове α и β као на слици 1. Тада је $0 < \beta \leqslant \alpha < \pi/2$, па је $\operatorname{tg}\beta \leqslant \operatorname{tg}\alpha$. Како је

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f(a+b) - f(b)}{a+b-b} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0},$$

то је $\dfrac{f(a+b) - f(b)}{a} \leqslant \dfrac{f(a)}{a}$, тј. $f(a+b) \leqslant f(a) + f(b)$.[2]

Сада је

$$\begin{aligned} d(x,y) &= f(|x-y|) = f(|x-z+z-y|) \\ &\leqslant f(|x-z| + |z-y|) && (f - \text{растућа функција}) \\ &\leqslant f(|x-z|) + f(|z-y|) && (f - \text{субадитивна функција}) \\ &= d(x,z) + d(z,y), \end{aligned}$$

чиме смо показали и неједнакост троугла за метрику.

Напомена. На основу задатка 2, можемо добити велики број метрика на $\mathbb{R}$. На пример, $d(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y|$ је једна метрика на $\mathbb{R}$, јер функција $f(x) = \operatorname{arctg} x$ задовољава услове дате у задатку 2. Такође, функција f_1 из задатка 1 (а) је један такав пример.

3. (а) Нека је (x_n), $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)})$, низ тачака у метричком простору $\mathbb{R}_p^k$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Доказати да је конвергенција низа (x_n) граничној вредности $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ у $\mathbb{R}_p^k$, еквивалентна конвергенцији низова $\nu-$тих координата тачака x_n, тј. низова $(\xi_\nu^{(n)})$, $\nu-$тој координати тачке x у $\mathbb{R}$ за све $\nu = 1, \ldots, k$.

(б) Показати да у простору ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, из конвергенције по координатама не следи конвергенција по метрици.

Решење. (а) Ако низ (x_n) конвергира ка $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, у смислу метрике у $\mathbb{R}_p^k$, тада низ $d_p(x_n, x) \to 0$, $n \to +\infty$. Међутим, како за свако $\nu = 1, \ldots, n$ важи $|\xi_\nu^{(n)} - \xi_\nu| \leqslant d_p(x_n, x)$, то низови $\nu-$тих координата тачака x_n конвергирају ка $\nu-$тој координати тачке x.

Обратно, ако за свако $\nu = 1, \ldots, n$ важи $\xi_\nu^{(n)} \to \xi$, $n \to +\infty$, тада непосредно следи да $d(x_n, x) \to 0$, $n \to +\infty$, односно $x_n \to x$, $n \to +\infty$.

(б) Уочимо у простору ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, следећи низ тачака:

$$e_1 = (1,0,0,0,\ldots), \quad e_2 = (0,1,0,0,\ldots), \quad e_3 = (0,0,1,0,0,\ldots), \ldots .$$

Сви координатни низови конвергирају ка 0. Означимо са $\mathbf{0} \in \ell_p$ тачку $(0,0,0,\ldots)$. Очигледно је $d(e_n, \mathbf{0}) = 1$, па низ e_n не конвергира ка $\mathbf{0}$.

[2] За функцију која задовољава овакву неједнакост кажемо да је *субадитивна*.

$[0,1]$ са нормом $\|P\| = \max\limits_{t\in[0,1]}|P(t)|$ није Банахов.

Решење. Уочимо низ полинома (P_n), дефинисан са

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1].$$

Низ (P_n) је Кошијев, јер за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $m \geqslant n \geqslant n_0$ важи

$$\|P_m - P_n\| = \max_{x\in[0,1]} |P_m(x) - P_n(x)| = \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{x^m}{m!}\right| < \varepsilon.$$

Како за свако $x \in [a,b]$ важи $P_n(x) \to e^x$, $n \to +\infty$, а функција e^x није полином, уочени Кошијев низ не конвергира у $\mathcal{P}[0,1]$, па простор $\mathcal{P}[0,1]$ није комплетан.

5. Доказати да је векторски простор $\mathcal{P}$ свих могућих полинома $P(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_n$ $(a_0,\dots,a_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_0)$ један нормиран простор над пољем $\mathbb{K}$ са нормом $\|P\| = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$, али да није Банахов.

   Решење. Оставља се читаоцу да покажу да пресликавање $P \mapsto \|P\|$ представља норму на простору $\mathcal{P}$.

   Уочимо низ полинома (P_n), дефинисан са

$$P_n(t) = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2^2} + \cdots + \frac{t^n}{2^n}\,.$$

   Тада за произвољне индексе $m \geqslant n$ важи

$$\|P_m - P_n\| = \sum_{\nu=n+1}^{m} \frac{1}{2^\nu} < \frac{1}{2^n},$$

   па је низ (P_n) Кошијев. Претпоставимо да низ (P_n) конвергира у $\mathcal{P}$ ка полиному $P = b_0t^r + b_1t^{r-1} + \cdots + b_r$. Тада за $n > r$ важи

$$\|P_n - P\| = |b_0 - 1| + \left|b_1 - \frac{1}{2}\right| + \cdots \left|b_r - \frac{1}{2^r}\right| + \frac{1}{2^{r+1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{r+1}},$$

   што је у контрадикцији са претпоставком да $P_n \to P$, $n \to +\infty$. Дакле, нормирани простор $\mathcal{P}$ није комплетан.

6. Доказати да је нормиран простор X комплетан ако и само ако сваки апсолутно конвергентан ред у њему конвергира.

   Решење. Напоменимо да је у нормираном простору X ред $\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty} x_\nu$ конвергентан ако је низ $n-$тих парцијалних сума (s_n), $s_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} x_n$, конвергентан. Ред $\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty} x_\nu$ је апсолутно конвергентан ако је бројни ред $\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty} \|x_\nu\|$ конвергентан.

$\overline{s}_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је

$$\|s_m - s_n\| \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{m} \|x_\nu\| = |\overline{s}_m - \overline{s}_n| < \varepsilon, \quad m \geqslant n \geqslant n_0,$$

па је низ (s_n) Кошијев. Како је X комплетан простор, то низ (s_n) конвергира, па и ред $\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty} x_\nu$ конвергира.

Претпоставимо сада да сваки апсолутно конвергентан ред у X и обично конвергира. Нека је (x_n) произвољан Кошијев низ у X. Дефинишимо низ природних бројева (k_n), $n \in \mathbb{N}_0$, на следећи начин

$$\begin{aligned} k_0 &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid (\forall \nu \geqslant k)\, \|x_\nu - x_k\| < 1/2^0\}, \\ k_{n+1} &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > k_n \wedge (\forall \nu \geqslant k)\, \|x_\nu - x_k\| < 1/2^{n+1}\}. \end{aligned}$$

Такав низ (k_n), $n \in \mathbb{N}_0$, постоји јер је низ (x_n) Кошијев. Очигледно је $k_0 < k_1 < \cdots$. Уочимо подниз (x_{k_n}) низа (x_n) и обележимо $y_n = x_{k_n}$. Посматрајмо ред

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} (y_\nu - y_{\nu-1}) = (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots .$$

Ред $\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty} \|y_\nu - y_{\nu-1}\|$ конвергира (доказати – видети помоћни задатак 2). На основу претпоставке да сваки апсолутно конвергентан ред и обично конвергира следи да ред $\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty} (y_\nu - y_{\nu-1})$ конвергира, а одатле и да низ (y_n) конвергира. Дакле, Кошијев низ (x_n) има конвергентан подниз, па је и сам конвергентан (видети помоћни задатак 1). Према томе, простор X је комплетан.

Помоћни задатак 1. Доказати да у метричком простору (X, d) важе следећа тврђења.

(а) Ако је (x_n) Кошијев низ у X, тада је низ $(d(x_n, x))$ конвергентан у $\mathbb{R}$ за свако $x \in X$.

Проверити да ли важи обратно.

(б) Ако су (x_n) и (y_n) Кошијеви низови у X, тада низ $(d(x_n, y_n))$ конвергира у $\mathbb{R}$.

(в) Ако је низ (x_n) Кошијев у X и ако има конвергентан подниз (x_{n_k}), тада је и низ (x_n) конвергентан.

Решење (а) За свако $x \in X$ важи неједнакост $|d(x_n, x) - d(x_m, x)| \leqslant d(x_n, x_m)$, одакле следи да је $(d(x_n, x))$ Кошијев низ у $\mathbb{R}$. Како је простор $\mathbb{R}$ комплетан, то у њему сваки Кошијев низ конвергира, па је низ $(d(x_n, x))$ конвергентан.

Обратно не важи, тј. из конвергенције низа $(d(x_n, x))$ у $\mathbb{R}$ за свако $x \in X$, не следи да је низ (x_n) Кошијев. Показаћемо то једним примером. Нека је $X = \mathbb{N}$ са дискретном метриком

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

све $n > k$, па је $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 1$. Дакле, низ $d((x_n, x))$ је конвергентан за све $x \in \mathbb{N}$. С друге стране је $d(x_n, x_{n+1}) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, па низ (x_n) није Кошијев.

(б) За произвољно изабрано $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за све $m \geqslant n \geqslant n_0$ важи $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$ и $d(y_m, y_n) < \varepsilon/2$, па због неједнакости четвороугла $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leqslant d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$, следи да за $m \geqslant n \geqslant n_0$ важи $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, тј. да је $(d(x_n, y_n))$ Кошијев низ у $\mathbb{R}$, па је он конвергентан.

(в) Ако низ (x_{n_k}) конвергира ка тачки x^*, тада због неједнакости троугла $d(x_n, x^*) \leqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x^*)$, следи да низ (x_n) такође конвергира ка x^*.

Помоћни задатак 2. Нека је (X, d) метрички простор. Низ (x_n) из X је ограничене варијације ако важи неједнакост $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d(x_n, x_{n+1}) < +\infty$. Доказати следећа тврђења.

(а) Сваки низ ограничене варијације је Кошијев.

(б) Сваки Кошијев низ има бар један подниз ограничене варијације.

Решење. (а) Нека је (x_n) низ ограничене варијације и $m > n$. Тада на основу неједнакости многоугла и ненегативности метрике добијамо

$$d(x_m, x_n) \leqslant \sum_{\nu=n}^{m-1} d(x_\nu, x_{\nu+1}) \leqslant \sum_{\nu=n}^{+\infty} d(x_\nu, x_{\nu+1}) \to 0,\ m \to +\infty,$$

тј. (x_n) је Кошијев низ.

(б) Нека је (x_n) произвољан Кошијев низ у X. Дефинишимо низ природних бројева (k_n) са

$$\begin{aligned} k_1 &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid (\forall m \geqslant k)\, d(x_m, x_k) < 1/2\}, \\ k_n &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > k_{n-1} \wedge (\forall m \geqslant k)\, d(x_m, x_k) < 1/2^n\}. \end{aligned}$$

Такав низ (k_n) постоји јер је низ (x_n) Кошијев. Тада за све природне бројеве n важи $d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < 1/2^n$, па ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}})$ конвергира, на основу поредбеног критеријума, што значи да је низ (x_{k_n}) ограничене варијације. Како је очигледно $k_1 < k_2 < \cdots$, то је (x_{k_n}) подниз низа (x_n). Дакле, сваки Кошијев низ има бар један подниз ограничене варијације.