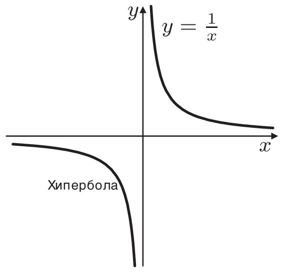
ЕЛЕМЕНТАРНЕ ФУНКЦИЈЕ

Функција f је:

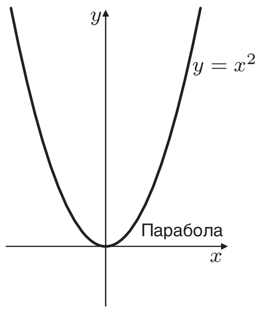
1-1–функција	$f : D \overset{1-1}{\to} \mathbb{R}$	$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	$(\forall x_1 \in D)(\forall x_2 \in D)\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$ $(\forall x_1 \in D)(\forall x_2 \in D)\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.
пресликавање скупа D **на** E	$f : D \overset{\text{на}}{\to} E$	$\Leftrightarrow$	$(\forall y \in E)(\exists x \in D)\ f(x) = y$.
Напомена. Ако $f : D \overset{1-1}{\underset{\text{на}}{\to}} E, E \subseteq \mathbb{R}$, тада постоји инверзна функција $f^{-1} : E \overset{1-1}{\underset{\text{на}}{\to}} D$. Графици функција f и f^{-1} су симетрични у односу на симетралу првог и трећег квадранта, тј. у односу на праву $y = x$.			
Парност и непарност			
парна		$\Leftrightarrow$	1° домен D је симетричан у односу на тачку 0 (тј. ако $x \in D$, онда и $-x \in D$), 2° $(\forall x \in D)\ f(-x) = f(x)$
Напомена. График парне функције је симетричан у односу на $y-$осу. Функција **није парна** ако и само ако њен домен није симетричан у односу на 0 или, ако јесте, постоји број x из D такав да је $f(-x) \neq f(x)$.			
непарна		$\Leftrightarrow$	1° домен D је симетричан у односу на тачку 0 (тј. ако $x \in D$, онда и $-x \in D$), 2° $(\forall x \in D)\ f(-x) = -f(x)$
Напомена. График непарне функције је симетричан у односу на координатни почетак. Функција **није непарна** акко њен домен није симетричан у односу на 0 или, ако јесте, постоји број x из D такав да је $f(-x) \neq -f(x)$.			
Ограниченост			
ограничена одоздо		$\Leftrightarrow$	$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in D)\ m \leqslant f(x)$
ограничена одозго		$\Leftrightarrow$	$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in D)\ f(x) \leqslant M$
ограничена		$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	$(\exists m \in \mathbb{R})(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in D)\ m \leqslant f(x) \leqslant M$ $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in D)\ \lvert f(x)\rvert \leqslant M$
Периодичност			
периодична		$\Leftrightarrow$	постоји позитиван број ω такав да за свако x из D важи: $x + \omega \in D, x - \omega \in D$ и $f(x+\omega) = f(x-\omega) = f(x)$.
Напомена. Број ω назива се **период** функције f. Свака периодична функција има бесконачно много периода. Ако међу тим периодима постоји најмањи, он се назива **основним периодом** функције.			
Знак			
позитивна на $I, I \subseteq D$		$\Leftrightarrow$	$(\forall x \in I)\ f(x) > 0$
негативна на $I, I \subseteq D$		$\Leftrightarrow$	$(\forall x \in I)\ f(x) < 0$
Напомена. Број x из D је **нула** функције f ако и само ако је $f(x) = 0$. Нулама функције одређене су тачке пресека графика функције f са $x-$осом.			
Монотоност			
растућа на $I, I \subseteq D$	$f \nearrow$ на I	$\Leftrightarrow$	$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2))$.
строго растућа на $I, I \subseteq D$	$f \uparrow$ на I	$\Leftrightarrow$	$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.
опадајућа на $I, I \subseteq D$	$f \searrow$ на I	$\Leftrightarrow$	$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2))$.
строго опадајућа на $I, I \subseteq D$	$f \downarrow$ на I	$\Leftrightarrow$	$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.
Конвексност			
конвексна на интервалу I, $I \subseteq D$	$f\cup$ на I	$\Leftrightarrow$	за произвољне x_1 и x_2 из I и произвољне бројеве $\alpha_1 \geqslant 0, \alpha_2 \geqslant 0$ такве да је $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, важи $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$.
конкавна на интервалу I, $I \subseteq D$	$f\cap$ на I	$\Leftrightarrow$	за произвољне x_1 и x_2 из I и произвољне бројеве $\alpha_1 \geqslant 0, \alpha_2 \geqslant 0$ такве да је $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, важи $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$.
Напомена. Ако уместо знака $\leqslant$ $(\geqslant)$ стоји знак $<$ $(>)$ за све $x_1 \neq x_2, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$, функција f је **строго конвексна** (**конкавна**) на I.			

1. $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x}$



– Функција f је 1-1-функција, и пресликава $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **на** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
– Функција f је непарна: $f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x), x\neq 0$.
– Функција f није ограничена одоздо, нити је ограничена одозго (па није ни ограничена).
– Функција f није периодична.
– Функција f нема нуле; позитивна је на $(0,+\infty)$, а негативна на $(-\infty,0)$.
– $f\downarrow$ на $(-\infty,0)$ и на $(0,+\infty)$. **Функција није опадајућа на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, тј. на $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$!**
– $f\cup$ на $(0,+\infty)$; $f\cap$ на $(-\infty,0)$.

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$



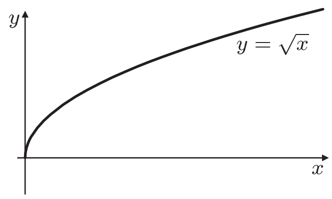
– Функција f није 1-1-функција и пресликава $\mathbb{R}$ **на** скуп свих ненегативних бројева $\mathbb{R}_0^+$.
– Функција f је парна: $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.
– Функција f је ограничена одоздо са 0 (или било којим негативним бројем): $0\leqslant x^2=f(x)$. Није ограничена одоздо (па није ни ограничена).
– Функција f није периодична.
– Нула функције f је 0. Функција f је позитивна на $R\setminus\{0\}$, тј. на $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.
– Функција f је строго растућа на $[0,+\infty)$: $0\leqslant x_1<x_2\Rightarrow x_1^2<x_2^2$. Функција f је строго опадајућа на $(-\infty,0]$: $x_1<x_2\leqslant 0\Rightarrow x_2^2<x_1^2$.
– Функција f је строго конвексна на $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)&=\alpha_1^2x_1^2+2\alpha_1\alpha_2x_1x_2+\alpha_2^2x_2^2\\&=\alpha_1(1-\alpha_2)x_1^2+2\alpha_1\alpha_2x_1x_2+\alpha_2(1-\alpha_1)x_2^2\\&=\alpha_1x_1^2+\alpha_2x_2^2-\alpha_1\alpha_2(x_1-x_2)^2<\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)\end{aligned}$$

за $\alpha_1+\alpha_2=1, \alpha_1,\alpha_2>0, x_1\neq x_2$.

НАПОМЕНА. Исте особине и сличан график имају све функције $x\mapsto x^{2n}, x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$.

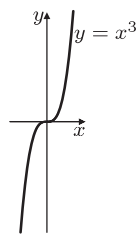
3. $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$; $\mathbb{R}_0^+=[0,+\infty)$



– Функција f је 1-1-функција, и пресликава $\mathbb{R}_0^+$ **на** $\mathbb{R}_0^+$.
– Функција f није парна, нити је непарна (домен јој није симетричан).
– Функција f је ограничена одоздо: $0\leqslant\sqrt{x}, x\in\mathbb{R}_0^+$, али није ограничена одозго (па није ни ограничена).
– Функција f није периодична.
– Нула функције f је 0; позитивна је на $(0,+\infty)$: $0<\sqrt{x}$, ако је $x>0$.
– $f\uparrow$ на $\mathbb{R}_0^+=[0,+\infty)$.
– $f\cap$ на $[0,+\infty)$.

НАПОМЕНА. Исте особине и сличан график имају све функције $x\mapsto \sqrt[2n]{x}, x\geqslant 0, n\in\mathbb{N}$.

4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3$



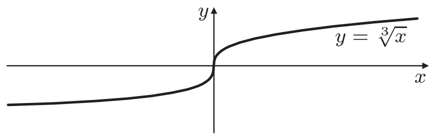
– Функција f је бијекција; $f:\mathbb{R}\overset{1-1}{\underset{\text{на}}{\rightarrow}}\mathbb{R}$.
– Функција f је непарна: $(-x)^3=-x^3$.
– Функција f није ограничена одоздо, нити је ограничена одозго (па није ни ограничена).
– Функција f није периодична.
– Нула функције f је 0; позитивна је на $(0,+\infty)$: ако је $0<x$, онда је $0<x^3$; негативна је на $(-\infty,0)$: ако је $x<0$, онда је $x^3<0$.
– $f\uparrow$ на $\mathbb{R}$.
– $f\cap$ на $(-\infty,0]$; $f\cup$ на $[0,+\infty)$.

НАПОМЕНА. Исте особине и сличан график имају све функције $x \mapsto x^{2n+1}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

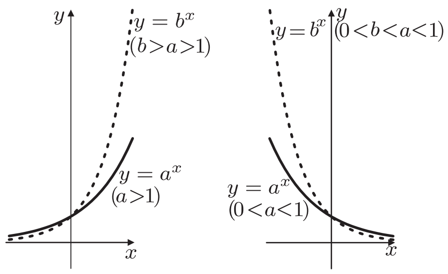
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$ (Упоредити особине ове функције са особинама функције $x \mapsto x^3$.)

– Функција f је бијекција; $f : \mathbb{R} \overset{1-1}{\underset{\text{на}}{\to}} \mathbb{R}$.
– Функција f је непарна: $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$.
– Функција f није ограничена одоздо, нити је ограничена одозго (па није ни ограничена).
– Функција f није периодична.
– Нула функције f је 0; позитивна је на $(0, +\infty)$: ако је $0 < x$, онда је $0 < \sqrt[3]{x}$; негативна је на $(-\infty, 0)$: ако је $x < 0$, онда је $\sqrt[3]{x} < 0$.
– $f \uparrow$ на $\mathbb{R}$.
– $f\cup$ на $(-\infty, 0]$; $f\cap$ на $[0, +\infty)$.

НАПОМЕНА. Исте особине и сличан график имају све функције $x \mapsto \sqrt[2n+1]{x}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.



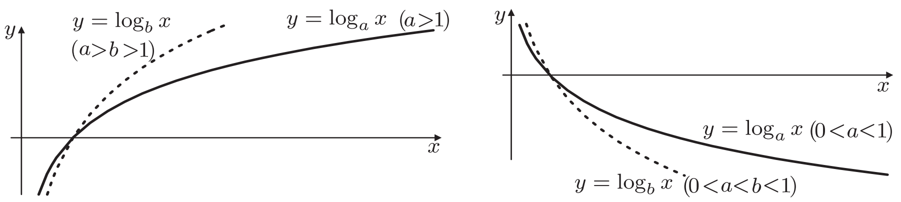
6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$



– Функција f је 1-1-функција, и пресликава $\mathbb{R}$ **на** $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.
– Функција f није парна, нити је непарна (домен јој је симетричан, али за свако $x \neq 0$ је $a^{-x} \neq \pm a^x$).
– Функција f је ограничена одоздо: $0 < a^x$, али није ограничена одозго (па није ни ограничена).
– Функција f није периодична.
– Функција f нема нула и позитивна је на R: $0 < a^x$, $x \in \mathbb{R}$.
– Ако је $a > 1$, $f \uparrow$ на $\mathbb{R}$. Ако је $0 < a < 1$, $f \downarrow$ на $\mathbb{R}$.
– $f\cup$ на $\mathbb{R}$.

7. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1, \mathbb{R}^+ = (0, +\infty))$

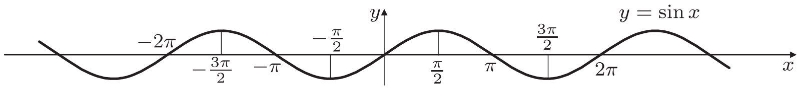
– Функција f је 1-1-функција, и пресликава $\mathbb{R}^+$ **на** $\mathbb{R}$.
– Функција f није парна, нити је непарна.
– Функција f није ограничена одоздо, нити је ограничена одозго.
– Функција f није периодична.
– Нула функције f је 1. Ако је $a > 1$, функција f је позитивна на $(1, +\infty)$, а негативна на $(0, 1)$. Ако је $0 < a < 1$, функција f је позитивна на $(0, 1)$, а негативна на $(1, +\infty)$.
– Ако је $a > 1$, $f \uparrow$ на R^+. Ако је $0 < a < 1$, $f \downarrow$ на $\mathbb{R}^+$.
– Ако је $a > 1$, $f\cap$ на $\mathbb{R}^+$. Ако је $0 < a < 1$, $f\cup$ на $\mathbb{R}^+$.



8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$

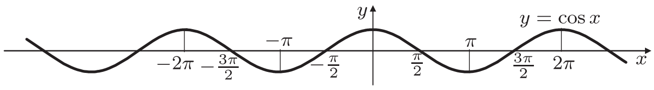
– Функција f није 1-1-функција, и пресликава $\mathbb{R}$ **на** $[-1, 1]$.
– Функција f је непарна: $\sin(-x) = -\sin x, x \in \mathbb{R}$.
– Функција f је ограничена: $|\sin x| \leqslant 1, x \in \mathbb{R}$.
– Функција f је периодична, са основним периодом 2π.
– Нула функције f има бесконачно много: $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Функција f је позитивна на сваком од интервала облика $(2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$. Функција f је негативна на сваком од интервала $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$,

$k \in \mathbb{Z}$.
- $f \uparrow$ на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$. $f \downarrow$ на $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$.
- $f \cap$ на $[2k\pi, (2k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}$. $f \cup$ на $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi], k \in \mathbb{Z}$.



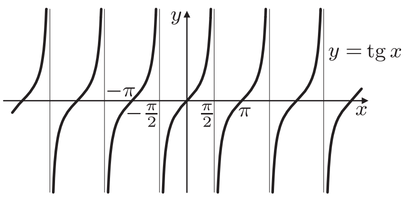
9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$

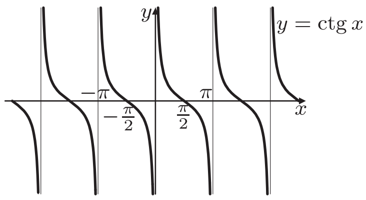
- Функција f није 1-1-функција, и пресликава $\mathbb{R}$ **на** $[-1, 1]$.
- Функција f је парна: $\cos(-x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$.
- Функција f је ограничена: $|\cos x| \leqslant 1, x \in \mathbb{R}$.
- Функција f је периодична, са основним периодом 2π.
- Нула функције f има бесконачно много: $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Функција f је позитивна на сваком од интервала $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$. Функција f је негативна на сваком од интервала $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $f \uparrow$ на $[((2k+1)\pi, (2k+2)\pi], k \in \mathbb{Z}$. $f \downarrow$ на $[2k\pi, (2k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}$.
- $f \cap$ на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$. $f \cup$ на $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$.



10. $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$

- Функција f није 1-1-функција; f пресликава $R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ **на** $\mathbb{R}$.
- Функција f је непарна: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, x \in R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- Функција f није ограничена одозго, нити је ограничена одозго.
- Функција f је периодична, са основним периодом π.
- Нула функције f има бесконачно много: $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Функција f је позитивна на сваком од интервала $\left(k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$. Функција f је негативна на сваком од интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.
- $f \uparrow$ на $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$, (али f **није растућа на свом домену**, који је унија ових интервала).
- $f \cup$ на $\left(k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$. $f \cap$ на $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

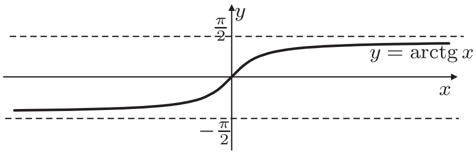


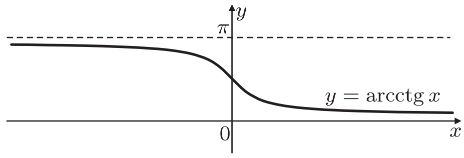


11. $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x$

12. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x$

- Функција f је 1-1-функција; f пресликава $\mathbb{R}$ **на** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Функција f је непарна: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}$.
- Функција f је ограничена: $|\operatorname{arctg} x| \leqslant \frac{\pi}{2}$.
- Функција f није периодична.
- Нула функције f је 0. Функција f је позитивна на $(0, +\infty)$, а негативна на $(-\infty, 0)$.
- $f \uparrow$ на $\mathbb{R}$.
- $f \cap$ на $(0, +\infty)$. $f \cup$ на $(-\infty, 0)$.





13. $f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], f(x) = \arcsin x$

14. $f : [-1, 1] \to [0, \pi], f(x) = \arccos x$