

Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет

Маринко Ж. Тимотијевић

# Математика 1

СКРИПТА

Крагујевац  
2025

# Садржај

<b>1</b>	<b>Реални бројеви</b>	<b>4</b>
1.1	Неки потскупови скупа реалних бројева . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Низови реалних бројева</b>	<b>10</b>
2.1	Особине граничне вредности . . . . .	11
2.2	Конвергенција монотоних низова . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Бројни редови</b>	<b>18</b>
3.1	Особине бројних редова . . . . .	19
3.2	Редови са позитивним члановима . . . . .	20
3.3	Алтернативни редови . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Функције реалне променљиве</b>	<b>24</b>
4.1	Инверзна функција . . . . .	25
4.2	Основне особине реалних функција . . . . .	26
4.2.1	Монотоне функције . . . . .	26
4.2.2	Парне и непарне функције . . . . .	27
4.2.3	Периодичне функције . . . . .	28
4.2.4	Ограничене функције . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Основне елементарне функције</b>	<b>29</b>
5.0.5	Степене функције . . . . .	29
5.0.6	Експоненцијална и логаритамска функција . . . . .	30
5.0.7	Тригонометријске и инверзне тригонометријске функције	31
5.1	Гранична вредност функције . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Особине граничне вредности</b>	<b>36</b>
6.1	Непрекидност функција . . . . .	39
6.2	Особине непрекидних функција . . . . .	41
6.3	Неке значајне граничне вредности. . . . .	44
<b>7</b>	<b>Диференцијални рачун реалних функција</b>	<b>48</b>
7.1	Леви и десни извод . . . . .	50
7.2	Диференцијал функције . . . . .	51
7.3	Извод сложене функције, извод инверзне функције . . . . .	53
7.4	Изводи вишег реда . . . . .	55
7.5	Основне теореме диференцијалног рачуна . . . . .	56
7.6	Лопиталова правила . . . . .	59
7.7	Тејлорова формула . . . . .	61
7.8	Представљање функција помоћу диференцијалног рачуна . . . . .	66
7.9	Асимптоте графика функције . . . . .	70
<b>8</b>	<b>Примитивна функција и неодређени интеграл</b>	<b>72</b>
8.1	Основне методе интеграције, метода смене . . . . .	75
8.2	Метода парцијалне интеграције . . . . .	76
8.2.1	Интеграција рационалних функција . . . . .	79
8.2.2	Интеграција неких ирационалних функција . . . . .	81

8.2.3	Интеграција неких тригонометријских функција . . . . .	82
<b>9</b>	<b>Одређени интеграл</b>	<b>85</b>
9.1	Интеграбилност функција . . . . .	87
9.2	Особине одређеног интеграла . . . . .	90
9.3	Њутн-Лајбницова формула . . . . .	95
9.4	Рачунање одређеног интеграла . . . . .	96
9.5	Примена одређеног интеграла . . . . .	100
9.5.1	Површина фигура у равни . . . . .	100
9.5.2	Дужина лука графика функције . . . . .	101
9.5.3	Запремина обртних тела . . . . .	102
9.5.4	Површина обртних тела . . . . .	104
9.6	Несвојствени интеграл . . . . .	105

# 1 Реални бројеви

Градиво модерне математичке теорије се формира тако што се прво дефинишу најосновнија тврђења која се не доказују, тзв. аксиоме, а истинитост свих осталих тврђења се проверава свођењем на аксиоме помоћу правила закључивања.

Овај курс започињемо навођењем најоптималнијег скупа аксиома које одређују концепт реалних бројева.

**Дефиниција 1.1.** *Уређено поље реалних бројева је скуп  $\mathbb{R}$  који садржи елементе 0 и 1 са бинарним операцијама  $+$  и  $\cdot$  и бинарном релацијом  $\leq$  које задовољавају следећа својства*

1.  $(\forall x, y, z)x + (y + z) = x + (y + z)$ ;
2.  $(\forall x, y)x + y = y + x$ ;
3.  $(\forall x)x + 0 = x$ ;
4.  $(\forall x)(\exists(-x))x + (-x) = 0$ ;
5.  $(\forall x, y, z)x \cdot (y \cdot z) = x \cdot (y \cdot z)$ ;
6.  $(\forall x, y)x \cdot y = y \cdot x$ ;
7.  $(\forall x)x \cdot 1 = x$ ;
8.  $(\forall x \neq 0)(\exists x^{-1})x \cdot x^{-1} = 1$ ;
9.  $(\forall x, y, z)x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ;
10.  $(\forall x)x \leq x$ ;
11.  $(\forall x, y)x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ ;
12.  $(\forall x, y, z)x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ;
13.  $(\forall x, y)x \leq y \vee y \leq x$ ;
14.  $(\forall x, y, z)x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ ;
15.  $(\forall x, y)0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$ ;
16. *Ако су  $A$  и  $B$  потскупови скупа  $\mathbb{R}$  такви да*

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)x \leq y$$

*тада постоји  $z \in \mathbb{R}$  такав да*

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)x \leq z \leq y.$$

Првих 9 аксиома потврђују да је скуп реалних бројева поље, а аксиоме 10-15 одређују уређеност тог поља. Последња аксиома 16 се назива аксиома непрекидности.

За вежбу, проверити које од аксиома задовољава скуп природних бројева  $\mathbb{N}$ , које скуп целих бројева  $\mathbb{Z}$ , а које скуп рационалних бројева  $\mathbb{Q}$ .

Ради елегантнијег записа уводимо ознаке

- $x + (-y) = x - y$ ;
- $x^{-1} = \frac{1}{x}$ ;
- $x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y}$ .

Током овог курса, сматраћемо да смо доказали неко тврђење ако га правилима закључивања сведемо до наведених аксиома. У наставку следи неколико најосновнијих примера.

**Теорема 1.1.** (Синтаксне последице аксиома реалних бројева). За произвољне  $x, y \in \mathbb{R}$  важи

1.  $(\forall x)x \cdot 0 = 0$ ;
2.  $(\forall x, y)x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$ ;
3.  $(\forall x)0 \leq x^2$ .

**Доказ**

1.  $x \cdot 0 = x \cdot (y - y) = xy - xy = 0$ .

2.  $(\Leftarrow)$  Важи због 1.

$(\Rightarrow)$  Нека је  $xy = 0$  и нека су  $x, y \neq 0$ . Како је  $y \neq 0$  постоји  $y^{-1}$  тако да  $y \cdot y^{-1} = 1$ . Слично, постоји одговарајуће  $x^{-1}$ . Тада, множењем релације  $xy = 0$  са леве стране са  $x^{-1}$  а са десне стране са  $y^{-1}$  добијамо

$$x^{-1}xyy^{-1} = x^{-1}0y^{-1},$$

тј.  $1 = 0$  што није могуће. Отуда или је  $x = 0$  или је  $y = 0$ .

Доказ тврђења 3. је једноставан. □

Користећи релацију  $\leq$  можемо да дефинишемо три нове релације.

**Дефиниција 1.2.** У скупу  $\mathbb{R}$  дефинишемо релације

- $(\forall x, y)x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$ ;
- $(\forall x, y)x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$ ;
- $(\forall x, y)x > y \Leftrightarrow x \geq y \wedge x \neq y$ .

**Теорема 1.2.** У простору  $\mathbb{R}$  за произвољне  $x, y$  важи тачно једна од релација:  $x = y$ ,  $x < y$  или  $x > y$ .

**Доказ** За произвољне  $x, y \in \mathbb{R}$  знамо да је по аксиоми 13.  $x \leq y$  или  $y \leq x$ . Тада, ако је  $x = y$  важи само ова једнакост. Ако је  $x \neq y$ , ако би важиле обе неједнакости  $x < y$  и  $y < x$ , тада би важило и  $x \leq y$  и  $y \leq x$  што по аксиоми 11. имплицира да је  $x = y$  а то није могуће. □

Претходна теорема нам омогућава да, упоређивањем са нулом, дефинишемо врло значајну функцију на скупу  $\mathbb{R}$ .

**Дефиниција 1.3.** Сигнум(знак) реалног броја  $x \in \mathbb{R}$  је реалан број

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

**Дефиниција 1.4.** *Апсолутна вредност броја  $x \in \mathbb{R}$  је реалан број*

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Следеће особине апсолутне вредности су познате из основне школе и нећемо их овде доказивати.

**Теорема 1.3.** *За свако  $x, y \in \mathbb{R}$  важи:*

- $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0; \end{cases}$
- $|x| = x \operatorname{sgn} x;$
- $|x| = |-x|;$
- $|xy| = |x| \cdot |y|;$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|};$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$  (неједнакост троугла).

**Теорема 1.4.** (Реална права) *Постоји бијекција геометријске праве и скупа реалних бројева која чува уређење тачака.*

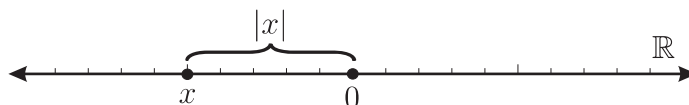


График 1: Реална права.

## 1.1 Неки потскупови скупа реалних бројева

**Дефиниција 1.5.** (Потскупови скупа  $\mathbb{R}$ )

1. Скуп Природних бројева је скуп  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  који задовољава аксиоме

- $1 \in \mathbb{N};$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}.$

Дакле,  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, n + 1, \dots\}.$

2. Скуп целих бројева  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}.$

3. Скуп рационалних бројева  $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}.$

4. Скуп ирационалних бројева  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$

**Дефиниција 1.6.** Потскуп  $A \subseteq \mathbb{R}$  је интервал ако

$$(\forall x, y \in A)(\forall z \in \mathbb{R})x \leq z \leq y \Rightarrow z \in A.$$

Примери интервала  $(a, b), (-\infty, b], (-a, a).$  Интервали се често јављају као решења неједначина на скупу  $\mathbb{R}.$

**Пример 1.1.** Решити неједначине  $|x| < a, |x| \geq a$  где је  $a > 0.$

**Решење:**  $|x| < a \Leftrightarrow \max\{x, -x\} < a \Leftrightarrow x < a \wedge -x < a \Leftrightarrow x < a \wedge x > -a \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$ .

Слично, друга једначна има решење  $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ .  $\triangle$

**Дефиниција 1.7.** Нека је  $A \subseteq \mathbb{R}$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Тада,

- $\alpha$  је мајоранта скупа  $A$  ако  $(\forall x \in A)x \leq \alpha$ ;
- $\alpha$  је миноранта скупа  $A$  ако  $(\forall x \in A)x \geq \alpha$ ;
- најмања мајоранта скупа  $A$  се назива супремум скупа  $A$  у ознаци  $\sup A$ ;
- највећа миноранта скупа  $A$  се назива инфимум скупа  $A$  у ознаци  $\inf A$ ;
- ако  $\sup A \in A$  тада  $\sup A = \max A$ ;
- ако  $\inf A \in A$  тада  $\inf A = \min A$ .

**Пример 1.2.** Одредити све мајоранте и све миноранте скупа  $A = (-1, 2]$ .

**Решење:** Све мајоранте скупа  $A$  су  $[2, \infty)$  а миноранте  $(-\infty, -1]$ . Отуда,  $\sup A = 2$ ,  $\inf A = -1$ .  $\triangle$

**Теорема 1.5.** (О минимуму) Сваки непразан потскуп скупа природних бројева има минимум.

**Доказ:** Нека  $1 \in B$ . Тада,  $\min B = 1 = \min \mathbb{N}$ . Нека  $1 \notin B$ . Претпоставимо да за  $B$  важи

$$1, 2, 3, \dots, n \notin B \Rightarrow n + 1 \notin B.$$

Тада, по принципу математичке индукције,  $\mathbb{N} \cap B = \emptyset$  што није могуће. Отуда постоји  $n \in \mathbb{N}$  тако да

$$1, 2, \dots, n \notin B \wedge n + 1 \in B.$$

Тако доказујемо да је  $n + 1$  минимум скупа  $B$ .  $\square$

**Теорема 1.6.** (О супремуму) Сваки непразан, ограничен одозго потскуп скупа реалних бројева има супремум.

**Доказ:** Нека је  $\alpha$  мајоранта скупа  $A \neq \emptyset$ . Тада, скуп свих мајоранти

$$B = \{y \in \mathbb{R} \mid (\forall x \in A)x \leq y\}$$

скупа  $A$  је непразан јер  $\alpha \in B$ . Тада, за скупове  $A$  и  $B$  важи:

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)x \leq y.$$

Отуда, по аксиоми непрекидности, постоји  $z \in \mathbb{R}$  такав да

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)x \leq z \leq y.$$

Дакле, по дефиницији,  $z$  је најмања мајоранта односно  $z = \sup A$ .  $\square$

**Последица 1.1.** Сваки непразан ограничен одоздо потскуп скупа реалних бројева има инфимум.

**Последица 1.2.** Ако је  $A \subset \mathbb{R}$  непразан и ограничен тада

$$A \subseteq [\inf A, \sup A].$$

У класичној геометрији, када су дате дужи  $a$  и  $b$ , дуж  $a$  може да се умножи довољан број пута тако да добијени умножак пређе дужину дужи  $b$  као што је приказано на графику испод.

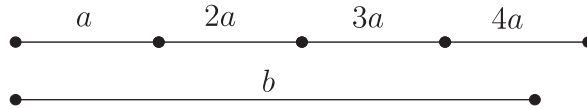


График 2: Архимедово својство.

Слично својство имају и позитивни реални бројеви.

**Теорема 1.7.** (Архимедово својство реалних бројева) За произвољне позитивне реалне бројеве  $a, b \in \mathbb{R}$  постоји јединствен природан број  $n \in \mathbb{N}$  тако да је

$$(n - 1)a \leq b < na.$$

**Доказ:** Претпоставимо супротно, тј. да је  $na \leq b$  за свако  $n \in \mathbb{N}$ . Уочимо скуп  $A = \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Тада,  $b$  је мајоранта скупа  $A$  што значи да је  $A$  непразан и ограничен одозго. По теореме о супремуму, постоји  $c = \sup A$ . Како је  $a > 0$  следи да је  $c - a < a$  па  $c - a$  није мајоранта скупа  $A$  што значи да постоји  $n_0 a \in A$  и  $c - a < n_0 a$  па је  $c < (n_0 + 1)a$  што није могуће јер  $(n_0 + 1)a \in A$  а  $c = \sup A$ .

Дакле постоји  $n \in \mathbb{N}$  тако да  $na > b$ . Уочимо скуп  $N = \{n \in \mathbb{N} \mid na > b\}$ . Тада,  $N$  је непразан поткуп скупа  $\mathbb{N}$  па, по теореме о минимуму постоји  $n_0 = \min N$ . Тада  $n_0 a > b$  јер  $n_0 \in N$  а  $n_0 - 1 \notin N$  па није  $(n_0 - 1)a > b$  што имплицира да је  $(n_0 - 1)a \leq b$ .  $\square$

Архимедово својство има врло значајне теоријске последице.

**Последица 1.3.** У скупу реалних бројева важе следећа својства.

- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \frac{1}{n} < \varepsilon$ .
- Ако је  $x \in \mathbb{R}$  тако да  $(\forall \varepsilon > 0) 0 \leq x < \varepsilon$  тада је  $x = 0$ .

**Доказ:** Прво, за  $b = 1$  и  $a = \varepsilon$  по Архимедовом својству постоји  $n \in \mathbb{N}$  тако да је  $1 < n\varepsilon$  тј.  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ .

Друго, ако за  $x$  важи наведена претпоставка и ако претпоставимо супротно да је  $x \neq 0$ , тада би следило да је  $x > 0$  па на основу претходно доказаног постоји  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  тако да  $\varepsilon < x$  што противуречи претпоставци за  $x$ . Како је по претпоставци  $x \geq 0$  закључујемо да је  $x = 0$ .  $\square$

**Теорема 1.8.** ( $\mathbb{R}$  је сепарабилан) За произвољне  $a, b \in \mathbb{R}$  такве да је  $a < b$  постоји  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$  тако да је

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

**Доказ:** Како је  $a < b$  следи да је  $b - a > 0$  па, на основу претходне последице, постоји  $n \in \mathbb{N}$  тако да је  $\frac{1}{n} < b - a$ . По Архимедовом својству реалних бројева, за  $1, na \in \mathbb{R}$  постоји  $m \in \mathbb{N}$  тако да  $m - 1 \leq na < m$  тј.  $a < \frac{m}{n}$ . За другу неједнакост

$$\begin{aligned} m - n &\leq na \Rightarrow \frac{m}{n} \leq a, \\ \frac{1}{n} < b - a &\Rightarrow a < b - \frac{1}{n}, \\ \frac{m}{n} - \frac{1}{n} &< b - \frac{1}{n}, \\ \frac{m}{n} &< b, \end{aligned}$$

чиме је теорема доказана. □

Користећи претходну теорему лако може да се докаже да између два прозволна реална броја постоји бесконачно рационалних бројева.

**Пример 1.3.** *Скуп  $\mathbb{Q}$  не задовољава аксиому непрекидности.*

**Решење:** На пример, за скупове

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq \pi\}, B = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq \pi\}$$

важи

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)x \leq y.$$

Међутим, за произвољно  $q \in \mathbb{Q}$  или је  $q < \pi$  или је  $q > \pi$ . Ако је  $q < \pi$  по претходној теорему постоји  $q' \in \mathbb{Q}$  тако да  $q < q' < \pi$  што значи да  $q' \in A$  па у овом случају  $q$  не може да раздваја скупове  $A$  и  $B$ . Слично ако је  $q > \pi$ .

Дакле ни један рационалан број не може да се нађе између скупова  $A$  и  $B$  што доказује да  $\mathbb{Q}$  не задовољава аксиому непрекидности. △

## 2 Низови реалних бројева

У математици је познат концепт уређених  $n$ -торки реалних бројева. То су елементи скупа

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}.$$

Поставља се питање како дефинисати математички објекат који је генерализација уређене  $n$ -торке али са бесконачно координата. Отуда следећа дефиниција.

**Дефиниција 2.1.** *Низ елемената скупа  $A$  је свака функција  $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ . Ако је  $a(n) = a_n \in A$ , тада низ  $a : \mathbb{N} \rightarrow A$  означавамо са:*

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots).$$

$A^{\mathbb{N}} = \{a \mid a : \mathbb{N} \rightarrow A\}$ -фамилија свих низова скупа  $A$ .

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  фамилија свих низова реалних бројева.

Потребно је испитати шта се дешава са координатама низа када се њихов индекс произвољно повећава тј. да ли се координате приближавају или не неком реалном броју. У ту сврху, дефинишемо концепт конвергенције.

**Дефиниција 2.2.** *(Лимес низа) Гранична вредност (лимес) низа  $(a_n)$  је  $a \in \mathbb{R}$  ако*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)|a_n - a| < \varepsilon$$

тада пишемо  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и кажемо да низ  $(a_n)$  конвергира ка  $a$ .

Услов  $|a_n - a| < \varepsilon$  можемо да представимо и са

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

одакле закључујемо да код конвергентних низова околине  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  садрже скоро све чланове низа тј. не садрже коначно много чланова низа.

**Дефиниција 2.3.** *(Бесконачан лимес)*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)a_n > M;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall N < 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)a_n < N.$$

**Пример 2.1.** *Доказати да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ .*

**Решење:** Нека је  $M > 0$  произвољно. Тада, по Архимедовом својству реалних бројева за  $M$  и 1 постоји  $n_0 \in \mathbb{N}$  тако да је  $M < n_0 < n$  за све  $n > n_0$ .  $\triangle$

**Пример 2.2.** *Испитати да ли  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$  постоји.*

**Решење:** Нека је  $x \in \mathbb{R}$  произвољно. Тада, за довољно мало  $\varepsilon$  околина  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  не садржи бесконачно чланова низа. Отуда, дати низ не конвергира ни ка једој тачки  $x \in \mathbb{R}$ .  $\triangle$

**Пример 2.3.** *Доказати да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .*

**Решење:** Нека је  $\varepsilon > 0$  по последици Архимедовог својства, постоји  $n_0 \in \mathbb{N}$  тако да је  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ . Тада, за све  $n > n_0$  важи

$$\frac{1}{n} - 0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Овим је дати лимес доказан по дефиницији. △

**Пример 2.4.** Доказати да је за  $q > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ .

**Решење:** За  $q > 1$ ,  $q = 1 + h$  где је  $h > 0$ . Докажимо дати лимес по дефиницији бесконачног лимеса. Нека је  $M > 0$ . По Архимедовом својству, постоји  $n_0 \in \mathbb{N}$  тако да је  $M < n_0 h$ . Тада, ако искористимо Бернулијеву неједнакост

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh$$

која важи за све  $h > -1$ , за све  $n > n_0$  добијамо:

$$q^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh > nh > n_0 h > M.$$

Овим је гранична вредност доказана. △

**Пример 2.5.** Доказати да је за  $|q| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

**Решење:** Ако је  $|q| < 1$  тада је  $\frac{1}{|q|} > 1$  па је по претходном примеру

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|q|^n} = \infty.$$

Докажимо лимес из примера по дефиницији. Нека је  $\varepsilon > 0$ . По претходном бесконачном лимесу, за  $\frac{1}{\varepsilon} > 0$  постоји  $n_0 \in \mathbb{N}$  тако да за све  $n > n_0$

$$\frac{1}{|q|^n} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |q|^n < \varepsilon \Leftrightarrow |q^n - 0| < \varepsilon.$$

За вежбу, доказати да за  $q < -1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$  не постоји. △

## 2.1 Особине граничне вредности

**Теорема 2.1.** Гранична вредност конвергентног низа је јединствена.

**Доказ** Претпоставимо да постоји низ  $(x_n)$  такав да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$  где је  $a < b$ . Тада, по дефиницији лимеса за  $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$  важи

$$(\exists n_1)(\forall n > n_1)|x_n - a| < \varepsilon,$$

$$(\exists n_2)(\forall n > n_2)|x_n - b| < \varepsilon.$$

Тада за  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  и све  $n > n_0$  важи

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \wedge x_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$$

а како је  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon, b + \varepsilon) = \emptyset$  долазимо до контрадикције. □

**Теорема 2.2.** Ако је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  и ако је  $a < b$ , тада постоји  $n_0 \in \mathbb{N}$  тако да за све  $n > n_0$  је  $a_n < b_n$ .

**Доказ** За  $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$  важи

$$(\exists n_1)(\forall n > n_1)|a_n - a| < \varepsilon;$$

$$(\exists n_2)(\forall n > n_2)|b_n - b| < \varepsilon.$$

Тада за  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  и све  $n > n_0$  важи

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \wedge b_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$

Како је  $a + \varepsilon = b - \varepsilon$ , свако  $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  је мање од сваког  $y \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ . Тако закључујемо да је за све  $n > n_0$ ,  $a_n < b_n$ .  $\square$

**Последица 2.1.** Ако је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и  $a < b$  тада постоји  $n_0 \in \mathbb{N}$  тако да за све  $n > n_0$  је  $a_n < b$ .

**Доказ:** У претходној теорему за низ  $(b_n)$  узети константан низ  $b_n = b$ .  $\square$

У општем случају из  $a_n < b_n$  за све  $n \in \mathbb{N}$  не мора да следи да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

На пример  $a_n = 0$ ,  $b_n = \frac{1}{n}$  али  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**Теорема 2.3.** (О укљештењу) Ако за све  $n \in \mathbb{N}$  (или почев од неког  $n_0 \in \mathbb{N}$ ) важи

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

и ако је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  тада је  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

**Доказ:** Нека је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  и  $a_n \leq b_n \leq c_n$  за све  $n \in \mathbb{N}$ . Нека је  $\varepsilon > 0$  произвољно. Тада

$$(\exists n_1)(\forall n > n_1)|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon;$$

$$(\exists n_2)(\forall n > n_2)|c_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon.$$

Тада, ако искористимо дате неједнакости и неједнакости из претпоставке добијамо да за  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  и све  $n > n_0$  важи

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$$

одакле следи да је  $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$  тј.  $|b_n - a| < \varepsilon$ .  $\square$

Овде доказујемо врло значајно својство низова рационалних бројева које ћемо користити у наставку.

**Теорема 2.4.** За произвољан реалан број  $\alpha$  постоји низ  $(q_n)$  рационалних бројева такав да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \alpha.$$

**Доказ:** За свако  $n \in \mathbb{N}$ , по теореме о сепарабилности скупа  $\mathbb{R}$ , постоји  $q_n \in \mathbb{Q}$  тако да је

$$\alpha < q_n < \alpha + \frac{1}{n}.$$

Како је  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha + \frac{1}{n}\right) = \alpha$ , по теореме о укљештењу је  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \alpha$ .  $\square$

**Дефиниција 2.4.** Нека је  $(a_n)$  низ реалних бројева. Тада

- дати низ је ограничен одозго ако  $(\exists M)(\forall n)a_n \leq M$ ;
- дати низ је ограничен одоздо ако  $(\exists N)(\forall n)a_n \geq N$ ;
- дати низ је ограничен ако је ограничен одоздо и одозго.

**Теорема 2.5.** Сваки конвергентан низ је ограничен.

**Доказ:** Нека је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Тада, за  $\varepsilon = 1$  постоји  $n_0 \in \mathbb{N}$  тако да за свако  $n > n_0$  је  $a - 1 < a_n < a + 1$ . Уочимо  $M = \max\{a_1, \dots, a_{n_0}, a - 1, a + 1\}$ . Тада, за свако  $n \in \mathbb{N}$  је  $a_n < M$ . Слично се конструише и доње ограничење. Дакле, низ је ограничен.  $\square$

Обрнуто не важи, на пример, низ  $(-1)^n$  је ограничен али не конвергира.

**Теорема 2.6.** Нека је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  и нека је низ  $(b_n)$  ограничен. Тада је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$$

**Доказ:** Нека је  $|b_n| < M$  за све  $n \in \mathbb{N}$ . Нека је  $\varepsilon > 0$  тада, како је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , постоји  $n_0 \in \mathbb{N}$  тако да за све  $n > n_0$ ,  $|a_n - 0| = |a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ . Тада

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$$

чиме је тражена гранична вредност доказана.  $\square$

**Теорема 2.7.** Нека је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Тада је

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$ ;
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ ,  $b \neq 0$ .

**Доказ:** 1. Нека је  $\varepsilon > 0$  тада

$$(\exists n_1)(\forall n > n_1)|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < a_n - a < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$(\exists n_2)(\forall n > n_2)|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < b_n - b < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сабирањем претходних неједнакости закључујемо да за  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  и све  $n > n_0$  важи

$$-\varepsilon < (a_n + b_n) - (a + b) < \varepsilon$$

тј.  $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$ .

2. Користимо својство да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  акко је  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$ . Тада

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a)(b_n - b) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n - a \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - b \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + ab.$$

Леви лимес је једнак нули на основу претходне теореме а када заменимо лимесе са десне стране добијамо

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n - ab - ab + ab$$

што доказује да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$ .

3. Претпоставимо да је  $b > 0$ . Како је  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$  низ  $(b_n)$  је конвергентан па је ограничен одоздо тј.  $|b_n| > M$ , како је  $b > 0$  можемо да претпоставимо да је  $M > 0$  за све  $n \in \mathbb{N}$ . Докажимо да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ . Нека је  $\varepsilon > 0$ . Због граничне вредности  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  постоји  $n_0 \in \mathbb{N}$  тако да за све  $n > n_0$  важи  $|b_n - b| < bM\varepsilon$ . Тада

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{b|b_n|} < \frac{|b - b_n|}{bM} < \frac{bM\varepsilon}{bM} = \varepsilon.$$

Слично се доказује ако је  $b < 0$ . □

**Теорема 2.8.** Ако је  $a_n$  конвергентан низ и  $k \in \mathbb{N}$  тада је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k$$

**Доказ:** Индукцијом по  $k$ . □

**Пример 2.6.** Доказати да је за  $a > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .

**Решење:** Ако је  $a > 1$  тада  $\sqrt[n]{a} > 1$  па  $a_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$ . Ако искористимо Бернулијеву неједнакост добијамо

$$a = (\sqrt[n]{a})^n = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n > na_n$$

па је због тога

$$\frac{a}{n} > a_n > 0$$

применом теореме о укљештењу, добијамо да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  што је требало доказати.

Ако је  $0 < a < 1$  тада је  $\frac{1}{a} > 1$  па је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ако је  $a = 1$  добија се константан низ који тежи јединици. △

**Пример 2.7.** Доказати да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

**Решење:** За  $n > 1$  важи да је  $\sqrt[n]{n} > 1$  па је  $a_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ . Тада је по биномној формули

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1 + a_n)^n = 1 + \binom{n}{1}a_n + \binom{n}{2}a_n^2 + \cdots + \binom{n}{n}a_n^n \geq \frac{n(n-1)}{2}a_n^2$$

Дакле  $n \geq \frac{n(n-1)}{2}a_n^2$  одакле је

$$0 \leq a_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$$

па применом теореме о укљештењу добијамо  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^2 = 0$  па је и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  што је требало доказати.

## 2.2 Конвергенција монотоних низова

**Дефиниција 2.5.** Низ  $(a_n)$  је растући ако за свако  $n \in \mathbb{N}$  (или почев од неког  $n_0$ ) важи  $a_n \leq a_{n+1}$  (строго растући ако је  $a_n < a_{n+1}$ ). Аналогно се дефинишу опадајући и строго опадајући низови.

Ако је низ растући или опадајући кажемо да је монотон.

**Теорема 2.9.** (Гранична вредност монотоних низова) Ако је низ  $(a_n)$  растући и ограничен одозго, тада је он и конвергентан. Ако растући низ није ограничен одозго, он тежи бесконачности.

**Доказ:** Нека је  $a_n$  растући низ и нека постоји  $M$  тако да је  $a_n < M$  за све  $n \in \mathbb{N}$ . Тада је скуп  $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  непразан ограничен одозго па по теореме о супремуму постоји његов супремум  $\alpha = \sup A$ . Докажимо да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ . Нека је  $\varepsilon > 0$  тада,  $\alpha - \varepsilon$  није мајоранта скупа  $A$  па постоји  $n_0 \in \mathbb{N}$  тако да је  $a_{n_0} > \alpha - \varepsilon$ . Тада, за све  $n \geq n_0$ , како је низ растући важи  $a_{n_0} \leq a_n$ . Тако добијамо

$$\alpha - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$$

што имплицира да је  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ .

Нека  $(a_n)$  није ограничен одозго. Тада за произвољно  $M > 0$  постоји  $n_0$  тако да  $a_{n_0} > M$  а како је низ растући, за све  $n > n_0$ ,  $a_n \geq a_{n_0} > M$  што доказује да низ  $(a_n)$  тежи бесконачности.  $\square$

**Последица 2.2.** Сваки монотонно опадајући низ ограничен одоздо конвергира. Ако опадајући низ није ограничен одоздо, он тежи ка минус бесконачно.

**Пример 2.8.** Доказати да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!} = 0$  за  $q > 0$ .

**Решење:** Нека је  $a_n = \frac{q^n}{n!}$ . Тада

$$a_{n+1} = \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{q}{n+1} \cdot \frac{q^n}{n!} = \frac{q}{n+1} a_n.$$

По Архимедовом својству реалних бројева знамо да постоји  $n_0 \in \mathbb{N}$  тако да је  $q < n_0 + 1$  па за све  $n > n_0$  важи  $\frac{q}{n+1} < 1$ . Отуда, за све  $n > n_0$  је  $a_{n+1} < a_n$  тј. низ  $(a_n)$  је монотонно опадајући.

Друго, како је  $a_n \geq 0$  за све  $n \in \mathbb{N}$  низ  $(a_n)$  је ограничен одоздо. Дакле, постоји  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Користећи једнакост

$$a_{n+1} = \frac{q}{n+1} a_n$$

добивамо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q}{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ a &= 0 \cdot a \end{aligned}$$

одакле је  $a = 0$ . △

**Пример 2.9.** Доказати да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0$  за  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $q > 1$ .

**Решење:** Размотримо прво случај  $\alpha = 1$ . Нека је  $a_n = \frac{n}{q^n}$ . Тада

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{q^{n+1}}}{\frac{n}{q^n}} = \frac{1}{q} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{q}.$$

Како је  $\frac{1}{q} < 1$ , постоји  $n_0 \in \mathbb{N}$  тако да за све  $n > n_0$  важи  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  односно  $a_{n+1} < a_n$  што доказује да је низ  $(a_n)$  опадајући. Очигледно је  $a_n > 0$  за све  $n \in \mathbb{N}$  па низ је ограничен одоздо што по претходној последици имплицира да он конвергира. Из  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{q}$  добијамо

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{1}{q}$$

одакле следи

$$q \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

па је  $qa = a$  тј.  $(q-1)a = 0$  што доказује да је  $a = 0$  јер је  $q > 1$ .

За  $\alpha > 0$  нека је  $m$  цео број већи од  $\alpha$ . Тада

$$0 \leq \frac{n^\alpha}{q^n} \leq \frac{n^m}{q^n} = \left(\frac{n}{(\sqrt[m]{q})^n}\right)^m$$

па, применом теореме о укљештењу, како је последња гранична вредност једнака нули јер се своди на претходни случај, сви лимеси су једнаки нули па и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0$ . △

**Пример 2.10.** (Ојлерова константа) Испитати конвергенцију низа  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

**Решење:** Полазимо од производа

$$\begin{aligned} a_{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\ &> 1 - (n+1) \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

У претпоследњој неједнакости смо користили Бернулијеву неједнакост. Ако сада леву и десну страну добијене неједнакости помножимо са  $(1 - \frac{1}{n+1})^{-n-1}$  добијамо

$$a_{n+1} > \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = a_n.$$

Дакле,  $a_{n+1} > a_n$  па, низ је монотono растући. Даље,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Докажимо да је за  $k \geq 2$ ,  $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} < \frac{1}{2^{k-1}}$ . Заиста

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)}{n} \dots \frac{(n-(k-1))}{n} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!};$$

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (k-1) \cdot k} < \frac{1}{2 \dots 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Сада, заменом у дефиницији низа

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

У претпоследњем кораку смо користили суму геометријског реда. Дакле  $a_n < 3$  што доказује да је  $a_n$  ограничен одозго па конвергира.  $\triangle$

**Дефиниција 2.6.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  називамо Ојлерова константа.

### 3 Бројни редови

Антички филозофи су својевремено постављали питање да ли је сума бесконачно много позитивних величина коначна или бесконачна. У овом поглављу, анализираћемо суме бесконачно много реалних бројева у једном посебном контексту.

**Дефиниција 3.1.** Нека је  $(a_n)$  низ реалних бројева. Суму свих чланова низа  $(a_n)$  називамо ред реалних бројева са општим чланом  $a_n$  и обележавамо са

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

**Пример 3.1.** Да ли је сума  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  коначна?

**Решење:** Ако сваки сабирак  $\frac{1}{2^n}$  посматрамо као одговарајући део круга, видимо да сви сабирци формирају цео круг као што је приказано на графику испод.

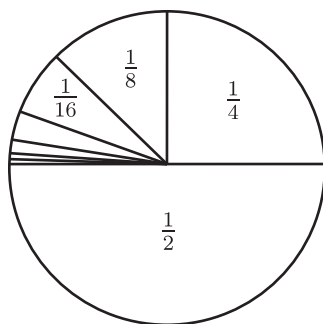


График 3: Подела круга.

Отуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

△

**Дефиниција 3.2.** Нека је дат ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

- Низ  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  називамо низ парцијалних сума датог реда;
- низ  $R_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$  називамо низ остатака.

**Дефиниција 3.3.** Ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  конвергира (има коначну суму) ако његов низ парцијалних сума конвергира. Тада, сума реда је гранична вредност низа парцијалних сума. Ако ред не конвергира кажемо да дивергира.

**Теорема 3.1.** Ред конвергира акко његов низ остатака тежи нули.

**Пример 3.2.** Испитати конвергенцију геометријског реда  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ ,  $q \in \mathbb{R}$ .

**Решење:** Низ парцијалних сума овог реда је сума геометријског низа

$$S_n = q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q}{1 - q}(1 - q^n).$$

Тада,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{q}{1 - q}(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^n) = \begin{cases} \frac{q}{1 - q}, & |q| < 1, \\ \infty, & q \geq 1, \\ \text{не постоји,} & q < -1. \end{cases}$$

△

**Пример 3.3.** Испитати конвергенцију хармонијског реда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

**Решење:** Низ  $(1 + \frac{1}{n})^n$  је ограничен одозго ојлеровом Константом  $e$  па када на ту неједнакост применимо логаритамску функцију добијамо

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e \Rightarrow \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} \Rightarrow \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

Када добијену неједнакост применимо на низ парцијалних сума хармонијског реда добијамо

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1).$$

Дакле  $S_n > \ln(n+1)$  па је  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n > \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$  па,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$  што доказује да хармонијски ред  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$  дивергира. △

### 3.1 Особине бројних редова

**Теорема 3.2.** Ако ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  конвергира тада је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Доказ:** Важи да је  $a_n = S_{n+1} - S_n$  па, ако  $S_n$  конвергира важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0,$$

где је  $S$  сума реда. □

Обрнуто не важи, на пример  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$  али  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Међутим, ако је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  тада дати ред дивергира као на пример ред  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ . Такође, ред  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  не конвергира јер лимес  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$  не постоји.

**Теорема 3.3.** Ако су  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  конвергентни редови тада за произвољне реалне  $\alpha, \beta$ , ред  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  конвергира и важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

**Доказ:** Нека је  $S'_n$  низ парцијалних сума реда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и нека је  $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S'$ . Такође, нека је  $S''_n$  низ парцијалних сума реда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  и нека је  $\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = S''$ . Тада низ парцијалних сума реда  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  је  $\alpha S'_n + \beta S''_n$  и важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha S'_n + \beta S''_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} S''_n$$

што доказује да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Напомињемо да обрнуто не мора да важи. □

**Теорема 3.4.** Ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  конвергира акко за свако  $n_0 \in \mathbb{N}$  ред  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  конвергира.

**Доказ:** Како је

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$$

сума  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  је коначна акко је сума  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  коначна тј. ред  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  конвергира акко ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  конвергира. □

## 3.2 Редови са позитивним члановима

**Дефиниција 3.4.** Ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  је са позитивним члановима ако је  $a_n \geq 0$  за све  $n \in \mathbb{N}$  (или почев од неког  $n_0 \in \mathbb{N}$ ).

**Теорема 3.5.** Низ парцијалних сума реда са позитивним члановима је растући.

**Доказ:** Заиста

$$S_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

а како је  $a_{n+1} \geq 0$  следи да је  $S_{n+1} \geq S_n$ . □

На основу претходне теореме и теореме о конвергенцији монотоних низова, ред са позитивним члановима или конвергира или му је сума бесконачна. Ово нам омогућава да формирамо тзв. критеријуме конвергенције.

**Теорема 3.6.** (Први критеријум упоређивања) Нека је  $0 \leq a_n \leq b_n$  за све  $n \in \mathbb{N}$ . Тада

- ако  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  конвергира тада и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  конвергира;
- ако  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  дивергира тада и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  дивергира;

**Доказ:** За растуће низове  $S'_n$  и  $S''_n$  парцијалних сума редова  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  редом важи

$$S'_n = a_1 + \dots + a_n \leq b_1 + \dots + b_n = S''_n.$$

Тада, ако је  $\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n$  коначан, низ  $S'_n$  је ограничен одозго па је конвергентан што значи да  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  конвергира.

Ако је  $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n$  бесконачан тада је и  $\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = \infty$  због горње неједнакости па ред  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  дивергира.  $\square$

**Теорема 3.7.** (Други критеријум упоређивања) Нека је  $a_n, b_n \geq 0$  за све  $n \in \mathbb{N}$  и нека је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

где је  $c \neq 0$  и  $c < \infty$ . Тада ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  конвергира ако и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  конвергира.

**Теорема 3.8.** (Даламберов критеријум) Нека је  $a_n \geq 0$  за све  $n \in \mathbb{N}$ . Нека је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < \infty.$$

Тада ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- конвергира ако је  $L < 1$ ;
- дивергира ако је  $L > 1$ .

Ако је  $L = 1$  не зна се конвергенција датог реда.

**Теорема 3.9.** (Кошијев критеријум) Нека је  $a_n \geq 0$  за све  $n \in \mathbb{N}$ . Нека је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L < \infty.$$

Тада ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- конвергира ако је  $L < 1$ ;
- дивергира ако је  $L > 1$ .

Ако је  $L = 1$  не зна се конвергенција датог реда.

**Дефиниција 3.5.** Произвољан ред  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (не мора да буде са позитивним члановима)

апсолутно конвергира ако ред са позитивним члановима  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  конвергира.

**Дефиниција 3.6.** Ред конвергира условно ако конвергира а не конвергира апсолутно.

**Теорема 3.10.** Сваки апсолутно конвергентан ред је и конвергентан.

**Доказ:** Нека је  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  такав да  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  конвергира. Поделимо чланове реда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  на следећи начин: нека је  $a_n^+ = a_n$  а  $a_n^- = 0$  ако је  $a_n \geq 0$  у супротном нека је  $a_n^+ = 0$  а  $a_n^- = a_n$ . Тада,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

па је, када узмемо апсолутне вредности чланова

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n^-).$$

Отуда, редови са позитивним члановима  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n^-)$  конвергирају јер за њихове парцијалне суме  $S_n^+$  и  $S_n^-$  и парцијалну суму  $S_n$  реда  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  важи  $S_n^+ \leq S_n$  и  $S_n^- \leq S_n$  а  $S_n$  конвергира.

Како  $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n^-)$  конвергира следи да  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  конвергира па  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  конвергира као сума два конвергентна реда.  $\square$

### 3.3 Алтернативни редови

**Дефиниција 3.7.** Нека је  $a_n \geq 0$  за све  $n \in \mathbb{N}$ . Ред  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  називамо алтернативни ред.

Дакле редови облика  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots - a_{2n+1} + a_{2n} - \dots$  се називају алтернативни редови. За њихову конвергенцију постоји један једноставан критеријум.

**Теорема 3.11.** (Лајбницов критеријум) Нека је  $(a_n)$  монотono опадајући низ такав да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Тада алтернативни ред  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  конвергира.

**Доказ:** Монотono опадајући низ који тежи нули има скоро све чланове веће од нуле. Овде ћемо да претпоставимо да је  $a_n \geq 0$  за све  $n \in \mathbb{N}$ . Нека је дакле,  $a_{n+1} \geq a_n$  за све  $n \in \mathbb{N}$  и нека је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Докажимо да низ  $S_n$  парцијалних сума реда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  конвергира. Доказаћемо да подниз парних чланова  $S_{2n}$  и подниз непарних чланова  $S_{2n+1}$  конвергирају. Посматрајмо низ  $S_{2n} = (S_2, S_4, S_6, \dots)$ :

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0$$

јер  $a_{2i-1} - a_{2i} \geq 0$  за све  $i = 1, \dots, n$  зато што је низ  $(a_n)$  опадајући. Друго

$$S_{2(n+1)} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$$

што доказује да је  $S_{2n}$  растући. Треће

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + \cdots + -a_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1. \end{aligned}$$

Дакле,  $S_{2n}$  је ограничен одозго са  $a_1$ . Отуда, по теореме о конвергенцији монотоних низова, постоји  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$ .

За  $S_{2n+1}$  приметимо да је

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}.$$

Отуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Дакле,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S$ . Докажимо да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ . Нека је  $\varepsilon > 0$  произвољно. Тада,

$$(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n > n_1) |S_{2n} - S| < \varepsilon;$$

$$(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n > n_2) |S_{2n+1} - S| < \varepsilon.$$

Тада за  $n_0 = 2 \max\{n_1, n_2\} + 1$  и све  $n > n_0$  важи ако је  $n = 2k$  тада је  $k > n_1$  па је  $|S_n - S| = |S_{2k} - S| < \varepsilon$  а ако је  $n = 2k + 1$  тада је  $k > n_2$  одакле следи да је  $|S_n - S| = |S_{2k+1} - S| < \varepsilon$ .  $\square$

**Пример 3.4.** За које  $p \in \mathbb{R}$  ред  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$  конвергира

- апсолутно;
- условно?

**Решење:** Прво, да би ред конвергирао низ општих чланова  $\frac{(-1)^n}{n^p}$  мора да тежи нули а то важи ако је  $p > 0$ .

Друго, за све  $p > 0$  низ  $\frac{1}{n^p}$  монотонно опадајуће тежи нули што по Лајбницовом критеријуму доказује да дати ред конвергира за све  $p > 0$ .

Треће, биће доказано на крају овог курса да ред  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  конвергира за  $p > 1$  а дивергира за  $p \leq 1$ .

Дакле, дати ред конвергира апсолутно за  $p \in (1, \infty)$  а условно за  $p \in (0, 1)$  а дивергира за  $p \in (-\infty, 0]$ .  $\triangle$

## 4 Функције реалне променљиве

У математичкој анализи и у њеним реалним применама између две променљиве може да постоји специфична веза тј. једна променљива може да зависи од друге. На пример, ваздушни притисак на некој површини зависи од температуре ваздуха, снага магнетног поља зависи од снаге електричног поља, телесна маса човека зависи од његове висине итд. У оваквим ситуацијама имамо једну слободну, тзв. независно променљиву и другу тзв. зависно променљиву за коју кажемо да је функција независно променљиве.

Тако долазимо до појма реалне функције једне променљиве и њихова анализа ће да буде главна тема остатка курса Математике 1.

**Дефиниција 4.1.** *Правило којим се сваком елементу  $x$  скупа  $A \subseteq \mathbb{R}$  додељује тачно један елемент  $f(x)$  скупа  $\mathbb{R}$  називамо функција коју означавамо са*

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}.$$

- $A$ –домен функције;
- $\mathcal{R}_f = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq \mathbb{R}$  скуп вредности функције;
- $\mathbb{R}$ – кодомен функције;
- $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$  график функције.

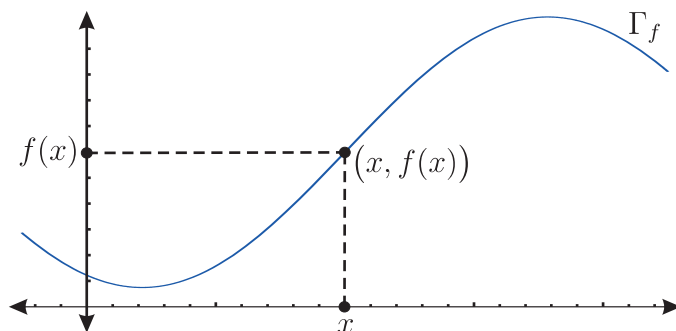


График 4: График функције.

**Дефиниција 4.2.** *Функције  $f_1, f_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$  су једнаке ако  $f_1(x) = f_2(x)$  за све  $x \in A$ .*

**Дефиниција 4.3.** *Функција  $f : A \rightarrow B$  је*

- 1-1 (инјекција) ако из  $x_1 \neq x_2$  следи  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ;
- „на” (сурјекција) ако за свако  $y \in B$  постоји  $x \in A$  тако да  $y = f(x)$ ;
- бијекција ако је 1-1 и „на”.

**Теорема 4.1.** *Нека је  $f : A \rightarrow B$  дата функција, тада*

- $f$  је 1-1 акко  $(\forall x_1, x_2) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ;
- $f$  је „на” акко  $\mathcal{R}_f = B$ .

**Дефиниција 4.4.** Нека су  $f : A \rightarrow B$  и  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  дате функције. Тада функцију  $h : A \rightarrow \mathbb{R}$  дату да

$$h(x) = g(f(x))$$

називамо сложена функција и означавамо са  $h = g \circ f$ .

На пример, нека је  $f(x) = x^2$  а  $g(x) = 2x + 1$ . Тада  $g \circ f(x) = 2x^2 + 1$  а  $f \circ g(x) = (2x + 1)^2$ . Овим смо доказали да композиција функција није комутативна операција. По дефиницији, композиција функција јесте асоцијативна тј.

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

## 4.1 Инверзна функција

Нека је  $f : A \rightarrow B$  бијекција. Тада, по претходној теорему, за свако  $y \in B$  постоји тачно једно  $x \in A$  тако да је  $y = f(x)$  (да постоји више, функција не би била 1-1). То нам омогућава да дефинишемо функцију  $f^{-1} : B \rightarrow A$  са

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

**Теорема 4.2.** Ако је  $f : A \rightarrow B$  бијекција тада  $f \circ f^{-1}(y) = y$  за све  $y \in B$  и  $f^{-1} \circ f(x) = x$  за све  $x \in A$ .

**Пример 4.1.** Функција  $g(x) = \sqrt{x}$  је инверзна функција функције  $f(x) = x^2$  на интервалу  $[0, \infty)$ .

**Заиста:** Интервал  $[0, \infty)$  је такав да је  $f(x) = x^2$  бијекција а сам корен се дефинише као инверзна функција квадратне функције.  $\triangle$

**Теорема 4.3.** График инверзне функције  $f^{-1} : B \rightarrow A$  је симетричан графику функције  $f : A \rightarrow B$  у односу на праву  $y = x$ .

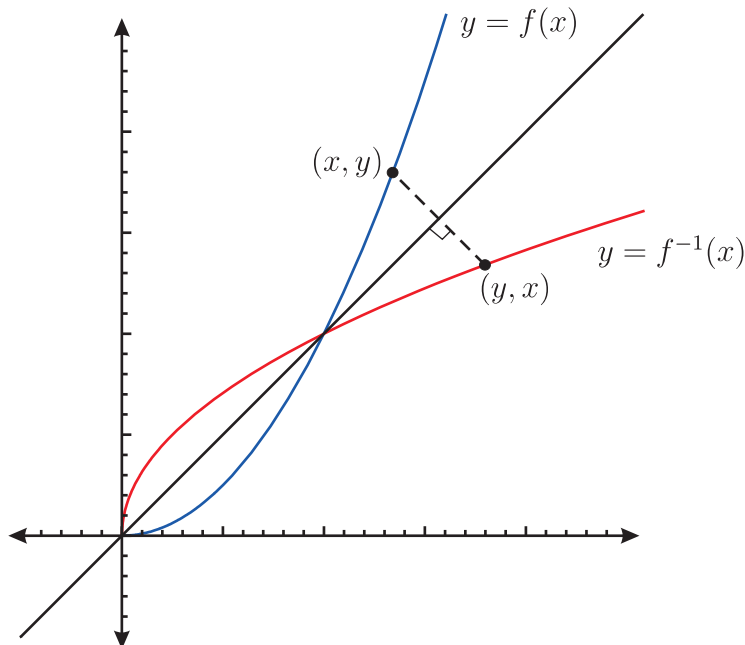


График 5: Графици  $\Gamma_f$  и  $\Gamma_{f^{-1}}$ .

**Доказ:** Докажимо да је тачка  $A(x_0, y_0)$  симетрична тачки  $B(y_0, x_0)$  у односу на праву  $y = x$ . Права кроз  $A, B$  има једначину

$$\frac{y - y_0}{x_0 - y_0} = \frac{x - x_0}{y_0 - x_0},$$

$$y = -x + x_0 + y_0$$

и нормална је на праву  $y = x$  (коефицијенти уз  $x$ ).

Друго, средиште дужи  $AB$  је  $\frac{A+B}{2} = (\frac{x_0+y_0}{2}, \frac{y_0+x_0}{2})$  и припада правој  $y = x$ .

По дефиницији инверзне функције  $(x, y) \in \Gamma_f$  ако  $(y, x) \in \Gamma_{f^{-1}}$  што доказује да су графици  $\Gamma_f$  и  $\Gamma_{f^{-1}}$  симетрични у односу на праву  $y = x$ .  $\square$

## 4.2 Основне особине реалних функција

У овом одељку анализирамо особине функција које ћемо да користимо у наставку курса и које се користе за дефинисање сложенијих својстава функција.

### 4.2.1 Монотоне функције

**Дефиниција 4.5.** Функција  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  је

- растућа на скупу  $A$  ако  $(\forall x_1, x_2 \in A)x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ;
- строго растућа на скупу  $A$  ако  $(\forall x_1, x_2 \in A)x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ;
- опадајућа на скупу  $A$  ако  $(\forall x_1, x_2 \in A)x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ ;
- строго опадајућа на скупу  $A$  ако  $(\forall x_1, x_2 \in A)x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

За растуће и опадајуће функције кажемо да су монотоне.

**Пример 4.2.** Функција  $y = kx + n$  је

- строго растућа ако је  $k > 0$ ;
- строго опадајућа ако је  $k < 0$ ;
- константна ако је  $k = 0$ .

**Решење:** Нека је  $x_1 < x_2$ , тада

$$f(x_1) - f(x_2) = kx_1 + n - kx_2 - n = k(x_1 - x_2).$$

Отуда за  $k > 0$  је  $f(x_1) < f(x_2)$  па је функција строго растућа, за  $k < 0$  је  $f(x_1) > f(x_2)$  па је функција строго опадајућа а за  $k = 0$  је  $f(x_1) = f(x_2)$  па је функција константна.  $\triangle$

Лако се показује да је функција истовремено растућа и опадајућа ако је константна.

**Пример 4.3.** Функција  $f(x) = x^2$  је строго растућа на  $[0, \infty)$  а строго опадајућа на  $(-\infty, 0]$ .

**Решење:** Нека је  $x_1 < x_2$ . Тада

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2).$$

Како је  $x_1 - x_2 < 0$ , важи

$$x_1, x_2 \in [0, \infty) \Rightarrow x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

$$x_1, x_2 \in (\infty, 0] \Rightarrow x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

△

**Теорема 4.4.** Свака строго монотона функција  $f : A \rightarrow \mathcal{R}_f$  је бијекција и има инверзну функцију.

**Доказ:** Прво, свака функција  $f : A \rightarrow \mathcal{R}_f$  је „на”.

Нека је  $f$  строго растућа. Тада, за свако  $x_1, x_2 \in A$  ако је  $x_1 \neq x_2$  тада је  $x_1 < x_2$  или је  $x_2 < x_1$ . У првом случају је  $f(x_1) < f(x_2)$  а у другом  $f(x_2) < f(x_1)$ . У оба случаја је  $f(x_1) \neq f(x_2)$  што доказује да је  $f$  инјекција. □

**Теорема 4.5.** Ако је  $f : A \rightarrow B$  растућа бијекција тада је  $f^{-1} : A \rightarrow B$  такође растућа.

**Доказ:** Нека је  $y_1 < y_2$ . Тада, за  $x_1 = f^{-1}(y_1)$ ,  $x_2 = f^{-1}(y_2)$  ако је  $x_2 < x_1$ , како је  $f$  растућа функција добијамо  $f(x_2) < f(x_1)$  тј.  $y_2 < y_1$  што није могуће. Отуда  $x_1 < x_2$ . □

#### 4.2.2 Парне и непарне функције

**Дефиниција 4.6.** Кажемо да је скуп  $A \subseteq \mathbb{R}$  симетричан у односу на ако  $x \in A$  ако  $-x \in A$ .

На пример, скупови  $(-a, a)$ ,  $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ ,  $\mathbb{R}$  су симетрични у односу на нулу.

**Дефиниција 4.7.** Функција  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  дефинисана на симетричном скупу  $A$  је

- парна ако  $f(-x) = f(x)$  за све  $x \in A$ ;
- непарна ако  $f(-x) = -f(x)$  за све  $x \in A$ .

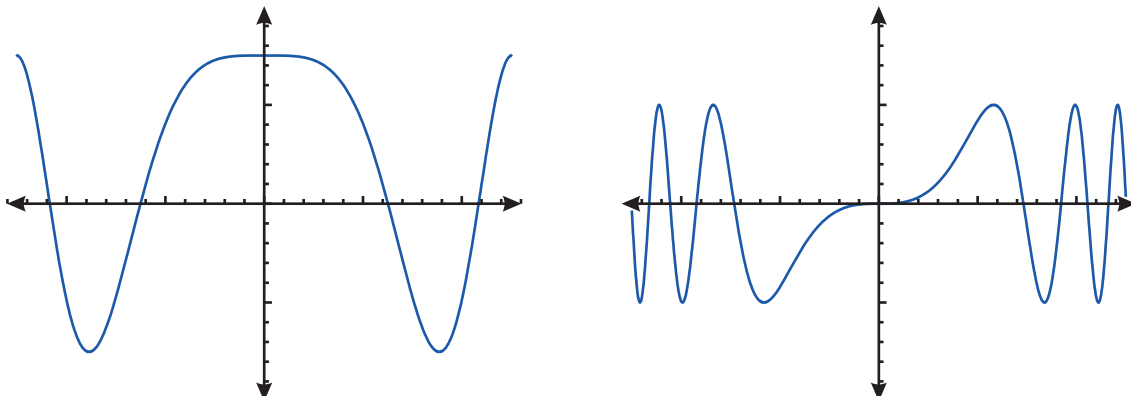


График 6: График парне и график непарне функције.

**Теорема 4.6.** График парне функције је симетричан у односу на  $y$ -осу. График непарне функције је симетричан у односу на координатни почетак. Ако је  $A$  симетричан скуп а  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  непарна функција тада је  $\mathcal{R}_f$  симетричан скуп.

Функција  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  је парна за  $n$ -парно а непарна за  $n$ -непарно.

### 4.2.3 Периодичне функције

**Дефиниција 4.8.** Функција  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  је периодична ако постоји  $p \neq 0$  тако да  $x + p \in A$  и  $f(x + p) = f(x)$  за све  $x \in A$ . Тада  $p$  називамо период функције  $f$ . Ако функција има најмањи позитиван период њега називамо основни период.

**Пример 4.4.** Функција  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  дата са  $f(x) = x - [x]$  је периодична.

**Решење:** Нека је  $p \in \mathbb{R}$  тако да је  $f(x + p) = f(x)$ . Тада,

$$x + p - [x + p] = x - [x],$$

$$p = [x + p] - [x].$$

Дакле,  $p$  је цео број. Приметимо да било који цео број може да буде период функције  $f$ . Тада, скуп  $\mathbb{Z}$  је скуп свих периода ове функције а њен основни период је 1.  $\triangle$

**Пример 4.5.** Константна функција  $f(x) = c$  је периодична али нема основни период.

**Решење:** Заиста, за свако  $p \in \mathbb{R}$  важи  $f(x + p) = c = f(x)$  што значи да је скуп свих периода ове функције  $\mathbb{R}$  а у  $\mathbb{R}$  не постоји најмањи позитиван број различит од нуле.  $\triangle$

**Пример 4.6.** Дирихлеова функција  $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  дата са

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

је периодична али нема основни период.

**Решење:** Како је збир ирационалног броја и рационалног ирационалан, а збир два рационална броја рационалан, закључујемо да је сваки рационалан број период функције  $\chi_{\mathbb{Q}}$  а ни један ирационалан број не може да буде њен период. Скуп рационалних бројева нема најмањи позитиван број различит од нуле па Дирихлеова функција нема основни период.  $\triangle$

Све основне тригонометријске функције су периодичне.

**Теорема 4.7.** У скупу реалних функција важе следећа својства.

- Ако су  $p$  и  $q$  периоди функције  $f$  тада је  $p + q$  период функције  $f$ .
- Ако је  $p$  период функције  $f$  тада је и  $kp$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  период функције  $f$ .
- Ако је  $f$  периодична а  $g$  произвољна тада је  $g \circ f$  периодична.

**Доказ:** Доказаћемо друго тврђење. Прво, ако је  $p$  период тада је на основу првог тврђења теореме  $p + p = 2p$  такође период. Ако претпоставимо да је  $np$  период, опет то првом тврђењу теореме  $(n + 1)p = p + np$  је такође период па, по принципу математичке индукције,  $np$  је период за све  $n \in \mathbb{N}$ .

Друго, ако је  $p$  период функције  $f$  тада

$$f(x) = f(x - p + p) = f(x - p)$$

што доказује да је  $-p$  такође период а на основу већ доказаног,  $-np$  је такође период за све  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

#### 4.2.4 Ограничене функције

**Дефиниција 4.9.** Функција  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  је ограничена одозго ако постоји  $M$  тако да за све  $x \in A$ ,  $f(x) < M$ . Слично, функција  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  је ограничена одоздо ако постоји  $N$  тако да је  $f(x) \geq N$  за све  $x \in A$ . Функција  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  је ограничена ако је ограничена одозго и одоздо.

**Теорема 4.8.** Нека је  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  дата функција.

- Функција  $f$  је ограничена ако је  $\mathcal{R}_f$  ограничен скуп.
- Функција  $f$  је ограничена ако је за све  $x \in A$ ,  $|f(x)| \leq M$  за неко  $M \in \mathbb{R}$ .

**Пример 4.7.** За следеће функције важи

- $f(x) = x - [x]$  ограничена;
- $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = |x|$  ограничене одоздо;
- $f(x) = [x]$ ,  $f(x) = x$  нису ограничене ни одозго ни одоздо.

## 5 Основне елементарне функције

У овом одељку наводимо основне елементарне функције чијим се збиром, разликом, производом, количником и композицијом добијају тзв. елементарне функције са којима ћемо радити на овом курсу. Напомињемо да постоје функције које нису елементарне а њихова анализа ће да буде предмет Математике 3.

#### 5.0.5 Степене функције

Функција  $f(x) = x^\alpha$ ,  $x \geq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  се назива степена функција. У зависности од  $\alpha$ , дефинише се на следећи начин:

- $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ,  $x^n = x \cdot x \cdots x$ ;
- $\alpha = -n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ;
- $\alpha = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$  инверзна функција функције  $x^n$ ;
- $\alpha = \frac{n}{m}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$ ;
- за  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  постоји низ  $(q_n)$  рационалних бројева такав да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \alpha$ .  
Тада,  $x^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{q_n}$ .

Што се тиче особина степене функције оне зависе од вредности  $\alpha$ . У најопштијем случају, за произвољно  $\alpha \in \mathbb{R}$  функција  $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^\alpha$

- има домен  $[0, \infty)$ ;
- за  $\alpha > 0$  је строго растућа а за  $\alpha < 0$  строго опадајућа;
- није ни парна ни непарна осим за случајеве  $\alpha \in \mathbb{Z}$ ;

- није периодична;
- ограничена одоздо осим у случају  $\alpha \in \mathbb{Z}$  када није ограничена ни одоздо ни одозго.

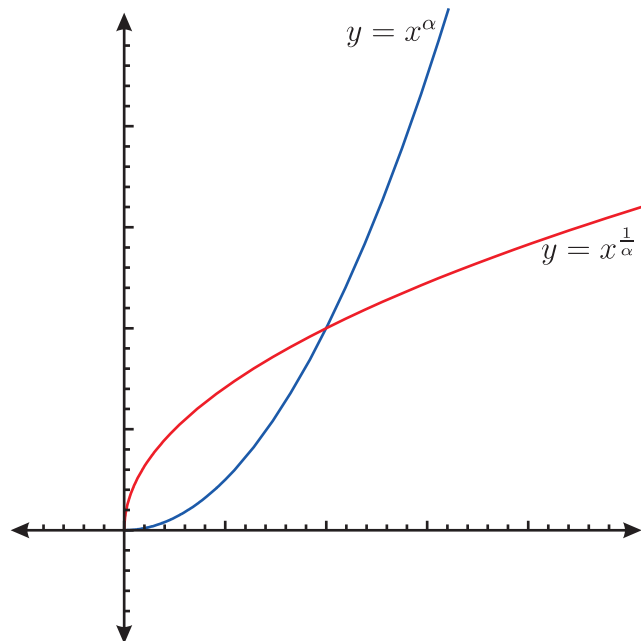


График 7: Степена функција.

Инверзна функција степене функције  $f(x) = x^\alpha$  је такође степена функција  $f(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$ .

### 5.0.6 Експоненцијална и логаритамска функција

Функција  $f(x) = a^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  се назива експоненцијална функција. Ова функција

- има домен  $\mathbb{R}$ ;
- за  $a > 1$  је строго растућа а за  $0 < a < 1$  строго опадајућа;
- није ни парна ни непарна;
- није периодична;
- ограничена одоздо са 0.

Основа  $a$  мора да буде позитивна јер на пример за  $x = \frac{1}{2}$  вредност  $a^x$  не постоји за  $a < 0$ .

Специјална експоненцијална функција је  $y = e^x$ .

Логаритамска функција се дефинише као инверзна функција експоненцијалне функције односно

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

Отуда,  $\log_a a^x = x$ . Логаритамска функција има следеће особине

- има домен  $(0, \infty)$ ;

- за  $a > 1$  је строго растућа а за  $0 < a < 1$  строго опадајућа;
- није ни парна ни непарна;
- није периодична;
- није ограничена ни одоздо ни одозго, кодомен је  $\mathbb{R}$  као домен експоненцијалне функције.

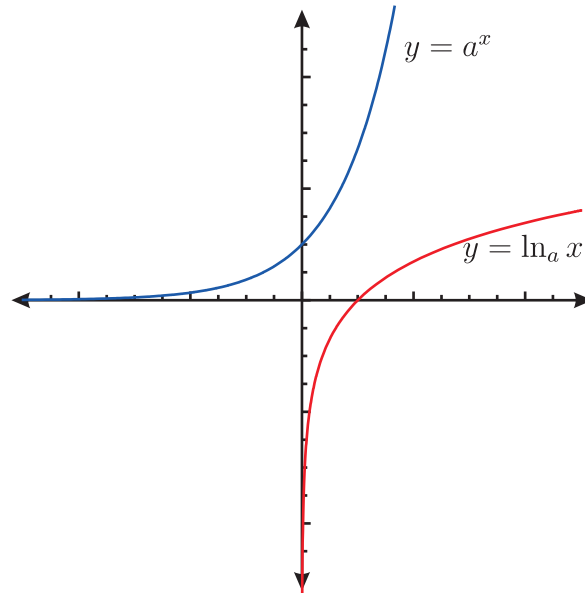


График 8: Експоненцијална и логаритамска функција за  $a > 1$ .

**Теорема 5.1.** За логаритамску функцију  $y = \log_a x$ , све  $a, b, c > 0$ ,  $a, b, c \neq 1$  и све  $x, y \in \mathbb{R}$  важи

1.  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ;

2.  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ;

3.  $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ ;

4.  $\log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x$ ,  $\alpha \neq 0$ ;

5.  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ ;

6.  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ .

Специјална логаритамска функција је са основом  $e$ ,  $\log_e x = \ln x$ . У нумеричке сврхе, често се користи логаритамска функција са основом 10 и означава са  $\log x$ .

### 5.0.7 Тригонометријске и инверзне тригонометријске функције

Основне тригонометријске функције су  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ . Дефинишу се помоћу тригонометријског круга као што је приказано на графику.

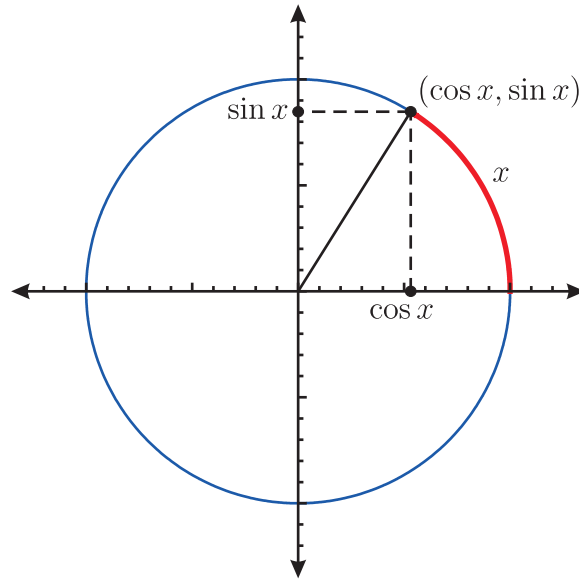


График 9: Тригонометријски круг.

Да би одредили  $\sin x$  и  $\cos x$  произвољног реалног броја  $x$  на тригонометријском кругу уочимо кружни лук дужине  $x$  у позитивном смеру ако је  $x$  позитивно а у супротном у негативном смеру од тачке  $(1, 0)$ , тачка на крају лука има координате  $(\cos x, \sin x)$ .

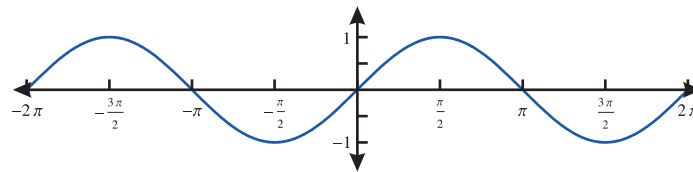


График 10: Функција  $y = \sin x$ .

Функција  $y = \sin x$  има следеће особине

- има домен  $\mathbb{R}$ ;
- строго је растућа на сваком интервалу  $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  а строго опадајућа на сваком интервалу  $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- непарна је;
- периодична са периодом  $2\pi$ ;
- ограничена је, одоздо са  $-1$ , одозго са  $1$ .

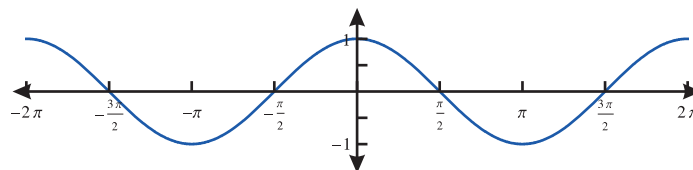


График 11: Функција  $y = \cos x$ .

Функција  $y = \cos x$  има особине

- има домен  $\mathbb{R}$ ;
- строго растућа је на сваком интервалу  $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  а строго опадајућа на сваком интервалу  $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- парна је;
- периодична са периодом  $2\pi$ ;
- ограничена је, одоздо са  $-1$ , одозго са  $1$ .

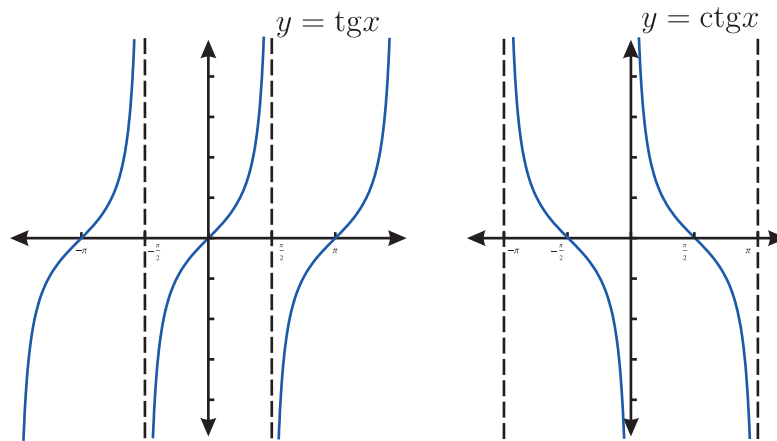


График 12: Тангенс и котангенс.

У основне елементарне функције се убрајају и функције  $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  и  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ .

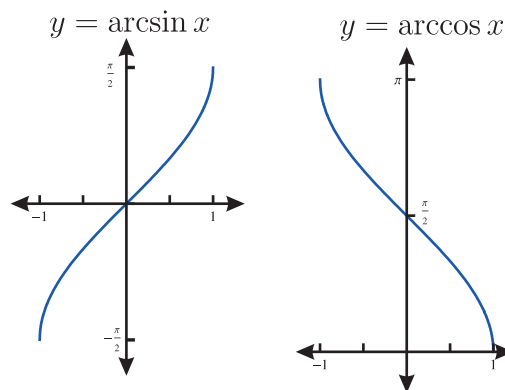


График 13: Функције  $y = \arcsin x$  и  $y = \arccos x$ .

Инверзне тригонометријске функције  $y = \arcsin x$  и  $y = \arccos x$  имају особине које су добијене из особина синуса и косинуса. Функција  $y = \arcsin x$

- има домен  $[-1, 1]$ ;
- строго растућа је;
- непарна је;
- није периодична;
- ограничена је, одоздо са  $-\frac{\pi}{2}$ , одозго са  $\frac{\pi}{2}$ .

Слично је за функцију  $y = \arccos x$ .

## 5.1 Гранична вредност функције

Да би дефинисали граничну вредност функције прво дефинишемо тачке у којима она може да се одређује.

**Дефиниција 5.1.** Тачка  $x \in \mathbb{R}$  је тачка нагомиланавања скупа  $A$  ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)|x - a| < \varepsilon.$$

**Дефиниција 5.2.** Нека је  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  дата функција и  $x_0$  тачка нагомиланавања скупа  $A$ . Тада гранична вредност функције  $f$  када  $x$  тежи  $x_0$  се дефинише са

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

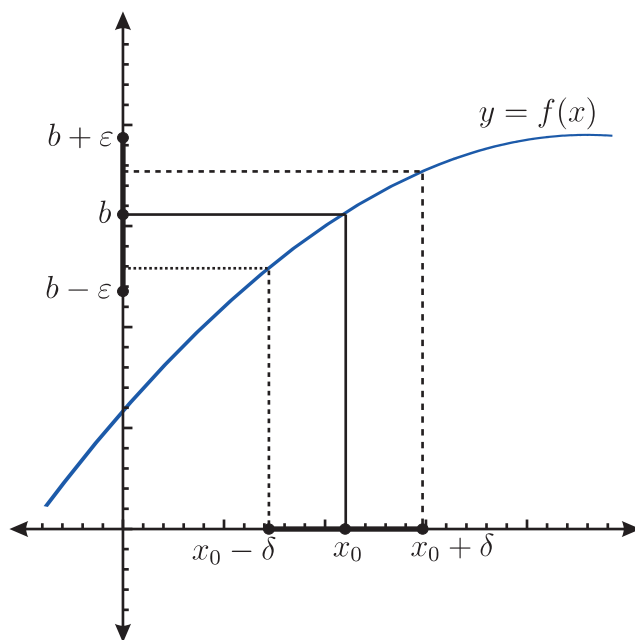


График 14: Гранична вредност функције.

Тачка  $x_0$  мора да буде тачка нагомиланавања да би постојале тачке скупа  $A$  на растојању мањем од сваког  $\delta$  до тачке  $x_0$ , у супротном сваки број  $b \in \mathbb{R}$  би могао да буде гранична вредност функције  $f$  када  $x$  тежи  $x_0$ .

**Пример 5.1.** Доказати да је  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ .

**Решење:** За  $x \neq 1$ ,  $f(x) = x + 1$ . Нека је  $\varepsilon > 0$  произвољно. Тада, за  $\delta = \varepsilon$  и све  $x \in \mathbb{R}$  такве да је  $x \neq 1$  и  $|x - 1| < \varepsilon$  важи  $|f(x) - 2| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \varepsilon$ .  $\Delta$

**Дефиниција 5.3.** Нека је  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  дата функција и  $x_0$  тачка нагомиланавања скупа  $A$ . Тада

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

**Пример 5.2.** Доказати да је  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ .

**Решење:** Нека је  $M > 0$  произвољно тада за  $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$  и све  $x \in \mathbb{R}$  такве да је  $|x - 0| = |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$  важи

$$f(x) = \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2} = M.$$

△

**Дефиниција 5.4.** Нека скуп  $A$  није ограничен одозго и нека је  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  дата функција. Тада

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)(\forall x \in A)x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall N > 0)(\exists M > 0)(\forall x \in A)x > M \Rightarrow f(x) > N.$$

**Пример 5.3.** Доказати да је  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ .

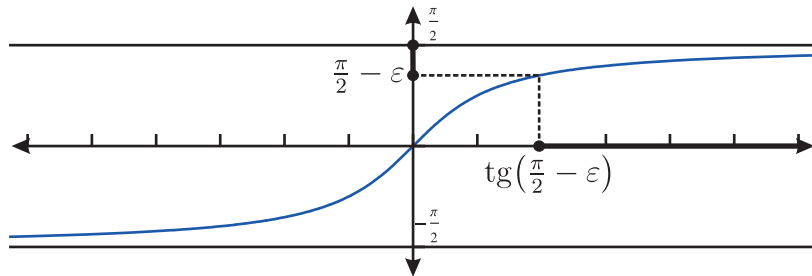


График 15: Гранична вредност када  $x \rightarrow \infty$ .

**Решење:** Нека је  $\varepsilon > 0$ . Тада за  $M = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$  и све  $x > M$  важи

$$\operatorname{arctg} x > \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

што доказује да је

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x < \varepsilon.$$

△

Када не постоје граничне вредности функције могу да постоје тзв. леви односно десни лимес. За њихово дефинисање потребно је да скуп  $A$  садржи тачку довољно блиску тачки  $x_0$  са леве односно десне стране као што се види из следеће дефиниције.

**Дефиниција 5.5.** Нека је  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  дата функција. Тада

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)x \in (x_0 - \delta, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)x \in (x_0, x_0 + \delta) < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

**Дефиниција 5.6.** Нека је  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  дата функција. Тада

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)x \in (x_0 - \delta, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Аналогно се дефинишу остале граничне вредности.

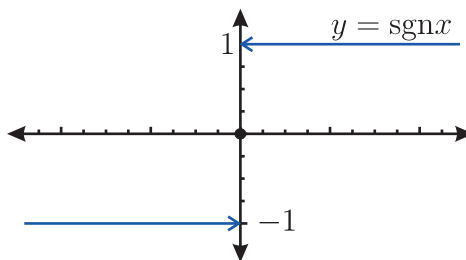


График 16: График функције  $y = \operatorname{sgn} x$ .

**Пример 5.4.** Доказати да је  $\lim_{x \rightarrow 0_+} \operatorname{sgn} x = 1$  и  $\lim_{x \rightarrow 0_-} \operatorname{sgn} x = -1$ .

**Решење:** Нека је  $\varepsilon > 0$ , тада постоји  $\delta = 1$  тако да за све  $x \in (0 - 1, 1)$  важи

$$|\operatorname{sgn} x - (-1)| = |-1 + 1| = 0 < \varepsilon.$$

△

**Пример 5.5.** Доказати да је  $\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{x} = \infty$  и  $\lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$ .

**Решење:** Нека је  $M > 0$ . Тада за  $\delta = \frac{1}{M}$  и све  $x$  такве да је  $0 < x < \frac{1}{M}$  важи

$$f(x) = \frac{1}{x} \geq \frac{1}{\frac{1}{M}} = M.$$

△

## 6 Особине граничне вредности

Гранична вредност функције и гранична вредност низа имају исте ознаке. Сада наводимо теорему којом ћемо да повежемо ова два појма која ће да нам омогући да све особине граничне вредности низова генерализујемо на аналогне особине граничне вредности функција.

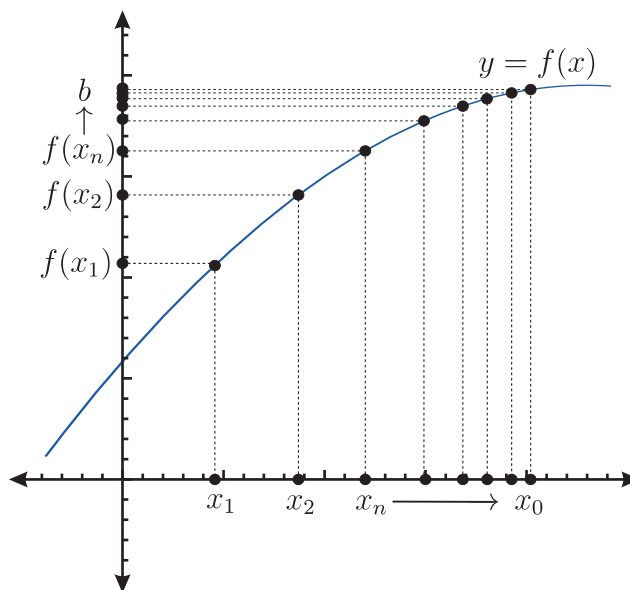


График 17: Гранична вредност функције преко лimesa низова.

**Теорема 6.1.** (Лимес функције преко лимеса низова) Нека је  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  и  $x_0$  тачка нагомиланавања скупа  $A$ . Тада  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$  ако за сваки низ  $(x_n)$  тачака скупа  $A$  такав да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  важи да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ .

**Доказ:** ( $\Rightarrow$ ) Нека је  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$  и нека је  $(x_n)$  такав да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Докажимо да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ . Нека је  $\varepsilon > 0$  произвољно. Тада, по дефиницији граничне вредности функције, постоји  $\delta > 0$  тако да из  $|x - x_0| < \delta$  следи  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .

За ово  $\delta$ , по дефиницији граничне вредности низа, постоји  $n_0 \in \mathbb{N}$  тако да за све  $n > n_0$  је  $|x_n - x_0| < \delta$ . Тада је и  $|f(x_n) - b| < \varepsilon$  за све  $n > n_0$ .

( $\Leftarrow$ ) Претпоставимо да је слика сваког низа који тежи ка  $x_0$  функцијом  $f$  низ који тежи ка  $b$ . Претпоставимо да није  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ . Негацијом дефиниције граничне вредности функције добијамо

$$(\exists \varepsilon)(\forall \delta > 0)(\exists x \in A)|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - b| \geq \varepsilon.$$

Тада за  $\delta = \frac{1}{n}$  постоји  $x_n \in A$  тако да  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$  и  $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$  за све  $n \in \mathbb{N}$ . Како  $\frac{1}{n}$  тежи нули, низ  $(x_n)$  тежи ка  $x_0$  а  $f(x_n)$  је на растојању већем од  $\varepsilon$  до  $b$  па не може да тежи ка  $b$  што нас доводи до контрадикције.

**Последица 6.1.** Ако постоји, гранична вредност функције је јединствена.

**Доказ:** Ако је  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$  где је  $a \neq b$ , тада за произвољан низ  $(x_n)$  који тежи ка  $x_0$ , по претходној теорему низ његових слика  $f(x_n)$  тежи ка  $a$  и ка  $b$  што није могуће јер смо доказали да је гранична вредност реалних низова јединствена.  $\square$

Докази следећих тврђења су аналогни и нећемо их све наводити.

**Последица 6.2.** (Теорема о укљештењу) Нека су  $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$  дате функције и  $x_0$  тачка нагомиланавања скупа  $A$ . Нека постоји  $\delta > 0$  тако да за све  $x \in A$  такве да је  $|x - x_0| < \delta$  важи  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  и нека је  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = b$ . Тада је и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ .

**Последица 6.3.** Нека су  $f, g$  функције дефинисане на скупу  $A$  са тачком нагомиланавања  $x_0$ . Нека је  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ . Тада је

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$ ;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = ab$ ;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ ,  $b \neq 0$ .

**Доказ:** Ради илустрације, доказаћемо друго тврђење. Нека  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ . Тада, за сваки низ  $(x_n)$  који тежи ка  $x_0$  за низ његових слика важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = ab.$$

На основу прве теореме одељка,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = ab$ .  $\square$

Ако нека релација важи за граничне вредности функција када  $x \rightarrow x_0$ , иста релација међу вредностима функција важи на некој околини тачке  $x_0$  као што илуструје следеће тврђење.

**Теорема 6.2.** Нека  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  и  $x_0$  тачка нагомиланавања скупа  $A$ . Нека је  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$  и нека је  $a < b$ . Тада постоји  $\delta > 0$  тако да за све  $x \in A$  такве да је  $|x - x_0| < \delta$  важи  $f(x) < g(x)$ .

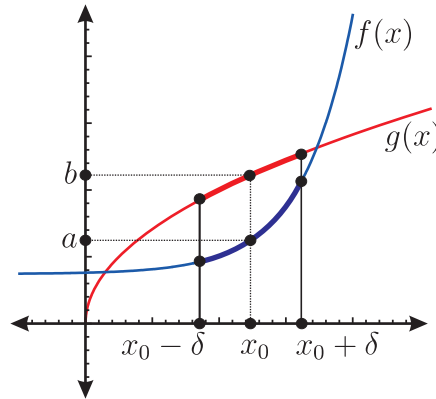


График 18: Локално упоређивање функција.

**Доказ:** Нека је  $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ . Тада, по дефиницији граничне вредности функције

$$(\exists \delta_1)(\forall x \in A)|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon,$$

$$(\exists \delta_2)(\forall x \in A)|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon,$$

тада за  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  и све  $x \in A$  такве да је  $|x - x_0| < \delta$

$$f(x) < a + \varepsilon = b - \varepsilon < g(x).$$

□

На следећу последицу ћемо више пута да се позивамо у наставку те стога и адекватно име.

**Последица 6.4.** (Битна) Нека је  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  тачка нагомиланавања скупа  $A$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ . Тада ако је и  $a < b$  постоји  $\delta > 0$  тако да за све  $x \in A$  такве да је  $|x - x_0| < \delta$  важи  $f(x) < b$ .

Ради доказа, довољно је у претходној теореме за функцију  $g$  узети константну функцију  $g(x) = b$  за све  $x \in A$ .

**Теорема 6.3.** Ако је  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  тачка нагомиланавања скупа  $A$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$  где је  $|b| < \infty$ , тада постоји  $\delta > 0$  тако да је  $f$  ограничена на  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ .

**Пример 6.1.** Доказати да  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  не постоји.

**Решење:** Нека је  $b \in [-1, 1]$  произвољно. Уочимо низ

$$x_n = \frac{1}{\arcsin b + 2n\pi}.$$

Тада  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{\frac{1}{\arcsin b + 2n\pi}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\arcsin b + 2n\pi) = \sin \arcsin b = b.$$

Дакле, гранична вредност функције  $f$  када  $x$  тежи нули може да буде  $b$ . Како је  $b$  било произвољно а гранична вредност функције је јединствена, закључујемо да дата гранична вредност не постоји.  $\triangle$

**Теорема 6.4.** (Смена променљиве) Нека су  $f : A \rightarrow B$  и  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  реалне функције,  $x_0$  тачка нагомиланавања скупа  $A$ ,  $y_0$  тачка нагомиланавања скупа  $B$ . Нека је  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$  и  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = b$ . Тада постоји  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x))$  и важи

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = b.$$

**Доказ:** Нека је  $\varepsilon > 0$ . Тада постоји  $\delta$  тако да из  $|y - y_0| < \delta$  следи  $|g(y) - b| < \varepsilon$ . За добијено  $\delta$ , постоји  $\delta_0 > 0$  тако да из  $|x - x_0| < \delta_0$  следи  $|f(x) - y_0| < \delta$ . Тада је  $|g(f(x)) - b| < \varepsilon$  што комплетира доказ.  $\square$

## 6.1 Непрекидност функција

Сада анализирамо вероватно најбитнији концепт целокупне теорије, концепт непрекидности.

**Дефиниција 6.1.** Нека је  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  и  $x_0 \in A$  тачка нагомиланавања. Кажемо да је  $f$  непрекидна у тачки  $x_0$  ако је

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ако је  $f$  непрекидна у свакој тачки скупа  $A$  тада кажемо да је функција  $f$  непрекидна на  $A$  и пишемо  $f \in \mathcal{C}(A)$ .

Ако уведемо смену  $x - x_0 = \Delta x$  важи да  $\Delta x \rightarrow 0$  ако  $x \rightarrow x_0$ . Тада  $f$  је непрекидна у тачки  $x_0$  ако је

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0.$$

Ако уведемо ознаку  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  тада непрекидност функције  $f$  у тачки  $x_0$  је еквивалентна граничној вредности

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

У претходном лимесу се види суштина непрекидности функције, мале промене слика одговарају довољно малим променама оригинала или, код непрекидних функција, ако промена оригинала тежи нули и промена слика тежи нули.

**Пример 6.2.** Свака функција  $y = kx + n$  је непрекидна на  $\mathbb{R}$ .

**Заиста:** За произвољно  $x_0 \in \mathbb{R}$   $\lim_{x \rightarrow x_0} (kx + n) = k \lim_{x \rightarrow x_0} x + n = kx_0 + n$ .  $\triangle$

**Пример 6.3.** Свака функција  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  је непрекидна на  $\mathbb{R}$ .

**Решење:** За произвољно  $x_0 \in \mathbb{R}$  важи

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x^n = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^n = x_0^n = f(x_0).$$

$\triangle$

**Теорема 6.5.** Свака елементарна функција је непрекидна на свом домену.

**Доказ:** Проверићемо непрекидност неколико основних елементарних функција.

Степена функција,  $f(x) = x^\alpha$ . Присетимо се да се у најопштијем случају за произвољно  $\alpha$  степена функција дефинише помоћу низа рационалних бројева  $(q_n)$  који конвергира ка  $\alpha$  са

$$x^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{q_n}$$

Тада, за произвољно  $x_0 \geq 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} x^{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{q_n}$$

Ако претпоставимо да је  $x^{q_n}$  непрекидна (јесте као композиција непрекидних) добијамо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_0^{q_n} = x_0^\alpha = f(x_0).$$

За експоненцијалну функцију  $f(x) = a^x$  рачунамо лимес

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (a^{x+\Delta x} - a^x) = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (a^{\Delta x} - 1) = 0.$$

За логаритамску функцију  $f(x) = \ln x$

$$\lim_{\Delta x} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\ln(x + \Delta x) - \ln x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \ln 1 = 0.$$

У наставку ће да буде доказано да је инверзна функција непрекидне функције такође непрекидна.  $\square$

**Дефиниција 6.2.** Тачка  $x_0 \in A$  је тачка прекида функције  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ако функција није непрекидна у тачки  $x$ .

Практично, тачка  $x_0$  је тачка прекида функције  $f$  ако  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  не постоји или је различит од  $f(x_0)$ .

**Дефиниција 6.3.** Тачка прекида  $x_0 \in A$  функције  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  је

- прекид прве врсте ако су лимеси  $\lim_{x \rightarrow x_{0+}} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_{0-}} f(x)$  коначни, специјално, прекид прве врсте је отклоњив ако је

$$\lim_{x \rightarrow x_{0+}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_{0-}} f(x);$$

- прекид друге врсте ако бар један од лимеса  $\lim_{x \rightarrow x_{0+}} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_{0-}} f(x)$  не постоји или није коначан.

Ако  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  има отклоњив прекид у тачки  $x_0$  тада можемо да дефинишемо функцију  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  са

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ \lim_{x \rightarrow x_{0-}} f(x), & x = x_0. \end{cases}$$

која нема прекид у тачки  $x_0$ .

**Пример 6.4.** У тачки  $x = 0$  функција

- $f(x) = \operatorname{sgn}x$  има прекид прве врсте;
- $f(x) = |\operatorname{sgn}x|$  има отклоњив прекид;
- $f(x) = \frac{1}{x}$  има прекид друге врсте;
- $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  има прекид друге врсте.

**Пример 6.5.** Функција  $f(x) = [x]$  има у тачкама  $x \in \mathbb{Z}$  прекиде прве врсте.

## 6.2 Особине непрекидних функција

**Теорема 6.6.** Нека су  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидне у тачки  $x_0$ . Тада су функције  $f + g$ ,  $fg$ ,  $\frac{f}{g}$  ( $g(x_0) \neq 0$ ) непрекидне у тачки  $x_0$ .

**Теорема 6.7.** Нека је  $f : A \rightarrow B$  непрекидна у тачки  $x_0$  а  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна у  $f(x_0)$ . Тада је  $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна у  $x_0$ .

**Доказ:** Нека је  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  и  $\lim_{y \rightarrow f(x_0)} g(y) = g(f(x_0))$ . Тада је по теореме о смени променљиве

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow f(x_0)} g(y) = g(f(x_0))$$

што доказује да је  $g \circ f$  непрекидна у тачки  $x_0$ . □

**Теорема 6.8.** (Болцано-Кошијева теорема о међувредности) Нека је функција  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна и нека је  $f(a)f(b) < 0$ . Тада постоји  $c \in (a, b)$  тако да је  $f(c) = 0$ . Специјално, за свако  $\beta$  које је између  $f(a)$  и  $f(b)$  постоји  $c \in (a, b)$  тако да је  $f(c) = \beta$ .

**Доказ:** Нека је  $f(a) < 0$  а  $f(b) > 0$ . Уочимо скуп  $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$ . Тада,  $a \in A$  па, скуп  $A$  је непразан и ограничен одозго (са  $b$ ), што значи да постоји  $c = \sup A$ . Докажимо да  $c \in (a, b)$ .

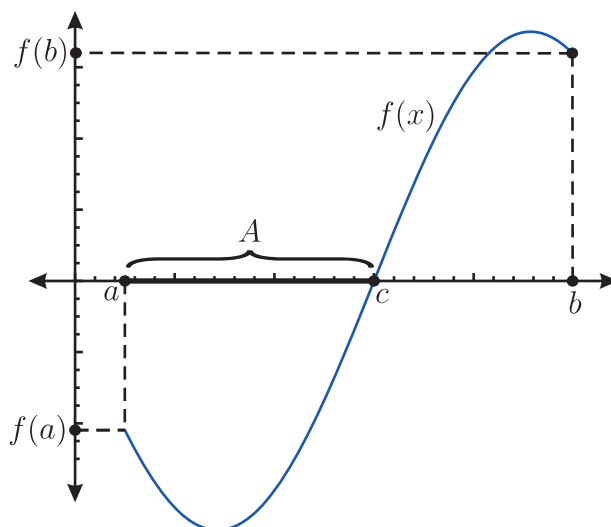


График 19: Болцано-Кошијева теорема о међувредности.

Прво, ако је  $c = a$  како је  $f$  непрекидна у  $a$  тј важи  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) < 0$  по важној последици, постоји  $\delta > 0$  тако да је  $f(x) < 0$  за све  $x \in [a, a + \delta]$ . То значи да је  $[a, a + \delta] \subseteq A$  па,  $\sup A > a + \delta = c + \delta$  што није могуће јер  $c = \sup A$ .

Друго, ако је  $c = b$  како је  $f$  непрекидна у  $b$  то значи да је  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b) > 0$ . Опет, по важној последици, постоји  $\delta > 0$  тако да је  $f(x) > 0$  за све  $x \in [b - \delta, b]$ . То значи да је  $[b - \delta, b] \cap A = \emptyset$  па,  $\sup A < b - \delta = c - \delta$  што није могуће јер  $c = \sup A$ .

Докажимо сада да је  $f(c) = 0$ . Користићемо сличне аргументе као у претходна два случаја. Нека је  $f(c) < 0$ , како је  $f$  непрекидна у  $c$  тј важи  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) < 0$  па по важној последици, постоји  $\delta > 0$  тако да је  $f(x) < 0$  за све  $x \in [c - \delta, c + \delta]$ . То значи да је  $[c - \delta, c + \delta] \subseteq A$  па,  $\sup A > c + \delta$  што није могуће јер  $c = \sup A$ .

Слично се доказује да  $f(c) > 0$  није могуће (као други случај).

Сада, ако је  $f(a) < \beta < f(b)$ , за функцију  $g(x) = f(x) - \beta$  важи  $g(a) < 0$ ,  $g(b) > 0$ , па, на основу већ доказаног, постоји  $c \in (a, b)$  тако да је  $g(c) = 0$  тј.  $f(c) - \beta = 0$  па је  $f(c) = \beta$ .  $\square$

**Пример 6.6.** Доказати да једначина  $x - \cos x = 0$  има решења.

**Решење:** Уочимо функцију  $f(x) = x - \cos x$ . Тада,  $f$  је непрекидна и за  $x < 1$  је  $f(x) < 0$  а за  $x > 1$  је  $f(x) > 0$ . Тада, на основу претходне теореме, постоји  $x \in (-1, 1)$  тако да је  $f(x) = 0$  тј. дата једначина има решење.  $\triangle$

**Теорема 6.9.** Свака непрекидна и инјективна функција  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  је строго монотона. Тада,  $\mathcal{R}_f$  је затворени интервал са границама  $f(a)$  и  $f(b)$ .

**Доказ:** Нека је, на пример,  $f(a) < f(b)$ . Тада, за произвољно  $x \in [a, b]$ , ако је  $f(x) < f(a)$  важи да је  $f(x) < f(a) < f(b)$  па, по Болцано-Кошијевој теореме, постоји  $c \in (x, b)$  тако да је  $f(c) = f(a)$  што значи да  $f$  није 1-1 јер  $c \neq a$ .

Ако је  $f(x) > f(b)$  тада  $f(a) < f(b) < f(x)$  па, по Болцано-Кошијевој теореме, постоји  $c \in (a, x)$  тако да је  $f(c) = f(b)$  што није могуће јер  $f$  је 1-1 а  $c \neq b$ .

Такође, за свако  $\alpha \in (f(a), f(b))$ , по Болцано-Кошијевој теореме, постоји  $c \in (a, b)$  тако да је  $f(c) = \alpha$ . Отуда,  $\mathcal{R}_f = \{f(x) \mid x \in [a, b]\} = [f(a), f(b)]$ .

Нека постоје  $x_1, x_2 \in (a, b)$  тако да је  $x_1 < x_2$  и  $f(x_1) > f(x_2)$ . Тада, како смо показали да је  $f(a) < f(x_2)$ , следи да је  $f(a) < f(x_2) < f(x_1)$  па, опет по Болцано-Кошијевој теореме, постоји  $c \in (a, x_1)$  тако да је  $f(c) = f(x_2)$  и  $c \neq x_2$  што није могуће јер  $c \neq x_2$  а  $f$  је 1-1.  $\square$

**Теорема 6.10.** (Непрекидност инверзне функције) Ако је бијективна функција  $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$  непрекидна на  $[a, b]$  тада је њена инверзна функција  $f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$  непрекидна на  $[c, d]$ .

**Доказ:** Прво, како је функција  $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$  инјективна и непрекидна, по претходној теореме она је строго монотона. Претпоставимо да је  $f$  строго растућа. Тада је и  $f^{-1}$  такође строго растућа.

Нека је  $y_0 \in [c, d]$ , покажимо да је  $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$  по дефиницији граничне вредности функције. Нека је  $\varepsilon > 0$  произвољно. Тада, како је  $x_0 - \varepsilon <$

$x_0 < x_0 + \varepsilon$  а функција  $f$  је растућа, следи да је  $f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$ . Нека је  $\delta > 0$  тако да је

$$f(x_0 - \varepsilon) < y_0 - \delta < y_0 < y_0 + \delta < f(x_0 + \varepsilon).$$

Тада, за свако  $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ , како је  $f^{-1}$  строго растућа важи да је

$$f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon)),$$

$$x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$$

тј.  $f^{-1}(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ . □

**Теорема 6.11.** (Вајерштрасова теорема) Свака функција  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  је ограничена на  $[a, b]$  и постоје  $x_m, x_M \in [a, b]$  тако да је

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_M), \quad \min_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_m).$$

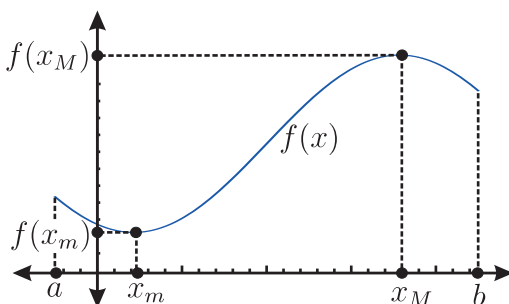


График 20: Максимум и минимум функције на  $[a, b]$ .

**Доказ:** Претпоставимо да  $f$  није ограничена одозго на  $[a, b]$ . Тада, постоји  $x_1 \in [a_1, b_1] = [a, b]$  тако да је  $f(x_1) > 1$ . Ако преполовимо интервал  $[a, b]$  на два интервала исте дужине, функција  $f$  неће да буде ограничена на једном од њих јер ако би била ограничена на оба интервала била би ограничена на њиховој унији што није могуће. Дакле постоји  $[a_2, b_2] \in \{[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}], [\frac{a_1+b_1}{2}, b_2]\}$  и  $x_2 \in [a_2, b_2]$  тако да је  $f(x_2) > 2$ .

Ако наставимо процес половљења интервала, добијамо низ интервала

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

где је  $[a_n, b_n] \in \{[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}], [\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}]\}$  ( $[a_n, b_n]$  је једна половина од  $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ ) и функција  $f$  није ограничена на  $[a_n, b_n]$  па, постоји  $x_n \in [a_n, b_n]$  тако да је  $f(x_n) > n$ .

За низове  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(x_n)$  важи:  $(a_n)$  је монотono растући и ограничен одозго,  $(b_n)$  је монотono опадајући и ограничен одоздо и  $a_n \leq x_n \leq b_n$ . На основу теореме о конвергенцији монотоних низова,  $(a_n)$  и  $(b_n)$  су конвергентни а како је

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - a}{2^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \in [a, b].$$

На основу теореме о укљештењу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c.$$

По теореме о лimesу функције преко лimesа низова,

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

што није могуће јер дата функција је непрекидна на  $[a, b]$  и ту долазимо до контрадикције.

Дакле, функција  $f$  је ограничена одозго. Слично се доказује да је  $f$  ограничена одоздо.

Отуда, скуп  $\mathcal{R}_f = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$  је ограничен па постоји  $\beta = \sup \mathcal{R}_f$  и  $\alpha = \inf \mathcal{R}_f$ .

Тада, за свако  $n \in \mathbb{N}$  како  $\beta - \frac{1}{n}$  није супремум скупа  $\mathcal{R}_f$ , постоји  $x_n \in [a, b]$  тако да је  $\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) < \beta$ . Тада, ако је  $x_M = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , по теореме о укљештењу  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_M) = \beta$ . Дакле,  $\beta = f(x_M) = \max \mathcal{R}_f$  што је требало доказати.

Слично се доказује да постоји  $x_m \in [a, b]$  тако да је  $f(x_m) = \min \mathcal{R}_f$ .  $\square$

Тврђење не важи ако интервал на којем је функција дефинисана није затворен и ограничен. На пример, функција  $f(x) = \frac{1}{x}$  нема максимум ни минимум на  $(0, \infty)$  а јесте непрекидна на овом интервалу.

**Последица 6.5.** Ако је  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна тада је  $\mathcal{R}_f = \left[ \min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x) \right]$ .

Дакле, слика затвореног и ограниченог интервала непрекидном функцијом је затворен и ограничен интервал.

### 6.3 Неке значајне граничне вредности.

**Пример 6.7.** Доказати да је  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**Решење:** Докажимо да је  $\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$  за све  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

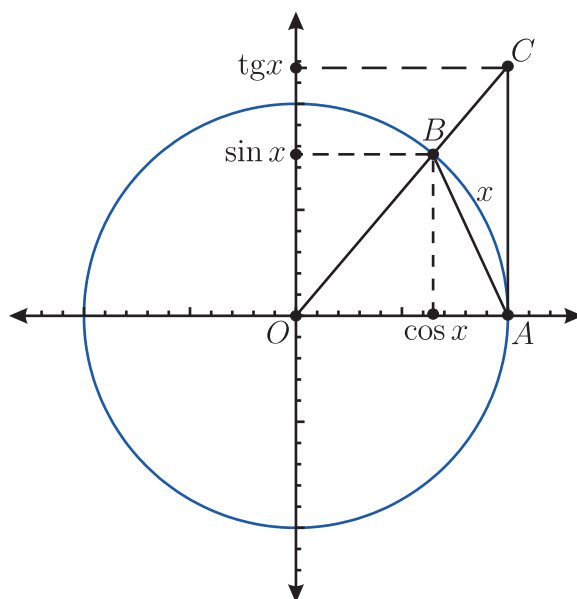


График 21: График из доказа.

Ако је  $P_1$  троугао  $OAB$ ,  $P_2$  површина кружног исечка који одговара луку  $x$  а  $P_3$  површина троугла  $OAC$  тада  $P_1 \leq P_2 \leq P_3$  и важи  $P_1 = \frac{\sin x}{2}$ ,  $P_2 = \frac{x}{2}$ ,  $P_3 = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$ . Тако добијамо да је

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$$

што имплицира да је

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin x}$$

па, када претходну релацију помножимо са  $\sin x$ , добијамо

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Када пустимо да  $x \rightarrow 0_+$  у претходној релацији, на основу теореме о укљештењу добијамо

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Слично, ако је  $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$  тада  $0 \leq -x \leq \frac{\pi}{2}$  па важи релација

$$\cos(-x) \leq \frac{\sin(-x)}{-x} \leq 1,$$

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

па је опет на основу теореме о укљештењу

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Дакле  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

△

**Пример 6.8.** Доказати да је  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ .

**Решење:** Користимо познату граничну вредност  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ .

Дату граничну вредност доказујемо помоћу теореме о граничној вредности функције преко граничне вредности низова. Нека је  $(x_n)$  произвољан низ који тежи бесконачности. Тада, ако је  $m_n = [x_n]$  низови  $(m_n)$  и  $(m_n + 1)$  такође теже бесконачности и важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n + 1} = e.$$

Полазимо од неједнакости

$$m_n \leq x_n < m_n + 1,$$

$$1 + \frac{1}{m_n + 1} < 1 + \frac{1}{x_n} \leq 1 + \frac{1}{m_n},$$

$$\left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n + 1}.$$

Тада су граничне вредности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n + 1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m_n}\right) = e \cdot 1 = e,$$

па, на основу теореме о укљештењу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

△

**Пример 6.9.** Доказати да је  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ .

**Решење:** Ако у претходној граничној вредности уведемо смену  $\frac{1}{t} = x$  важи да  $x \rightarrow \infty$  акко  $t \rightarrow 0$  па добијамо

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}.$$

△

**Пример 6.10.** Доказати да је  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ .

**Решење:** Присетимо се да је логаритамска функција непрекидна. Тада

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e.$$

△

**Пример 6.11.** Доказати да је  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ .

**Решење:** Овде користимо смену  $a^x - 1 = t$ , тада  $x = \log_a(t+1)$  и важи  $x \rightarrow 0$  акко  $t \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_a(t+1)}{t}} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a = \ln a.$$

△

**Пример 6.12.** Доказати да је  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ .

**Решење:** Овде примењујемо трансформацију

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}.$$

Тада:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} \frac{\alpha \ln(1+x)}{\alpha \ln(1+x)} = \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Знамо да је  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln e = 1$ , за леву граничну вредност на крају уводимо смену  $t = \alpha \ln(1+x)$ , тада  $x \rightarrow 0$  акко  $t \rightarrow 0$  и гранична вредност постаје  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = \ln e = 1$ . Тако доказујемо да је  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ . △

**Пример 6.13.** Ако је  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$  тада је  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = a^b$ .

**Решење:** Важи да је

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x) = \ln \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ln a$$

јер је логаритамска функција непрекидна. Такође

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x) = b \ln a.$$

Тада, како је експоненцијална функција непрекидна

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)} = e^{b \ln a} = (e^{\ln a})^b = a^b.$$

△

## 7 Диференцијални рачун реалних функција

Неке функције локално личе на праве  $y = kx + n$ . Како особине правих зависе искључиво од коефицијента  $k$ , у пракси је врло корисно знати ове коефицијенте за функције које се локално понашају као праве. Коефицијент  $k$  је заправо тангенс угла  $\varphi$  који права заклапа са  $x$ -осом. Наведену праву која додирује график функције називамо тангента.

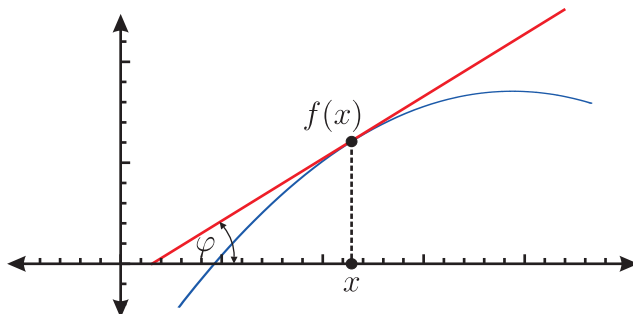


График 22: Тангента на график функције.

Нека је  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  и нека  $x_0 \in A$ . Да би одредили коефицијент  $k$  тангенте на график функције  $f$ , нека је  $\Delta x$  тако да  $x + \Delta x \in A$ . Тада ако је  $\varphi_0$  угао који хипотенуза правоуглог троугла са слике испод заклапа са  $x$ -осом, важи да је

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

и, што је најбитније,  $\varphi_0 \rightarrow \varphi$  када  $\Delta x \rightarrow 0$ .

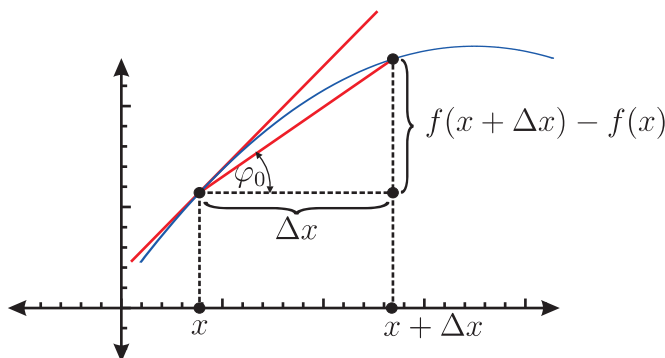


График 23: Дефиниција извода.

Мотивисани претходним, уводимо следећу дефиницију.

**Дефиниција 7.1.** Нека  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  и  $x_0 \in A$ . Ако постоји

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

тада кажемо да функција  $f$  има први извод у тачки  $x_0$  и обележавамо га са

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

**Пример 7.1.** *Одредити прве изводе елементарних функција:*

1.  $y = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ;
2.  $y = x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
3.  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;
4.  $y = \sin x$ ;
5.  $y = \cos x$ .

**Решење:** За одређивање првих извода датих функција, корисимо граничне вредности из претходног одељка.

1. За  $f(x) = c$

$$c' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0.$$

2. За  $f(x) = x^\alpha$

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^{\alpha-1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

Овде уводимо смену  $\frac{\Delta x}{x} = t$ , тада  $\Delta x \rightarrow 0$  ако  $t \rightarrow 0$  (за  $x \neq 0$ ). Тако добијамо

$$(x^\alpha)' = x^{\alpha-1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = x^{\alpha-1} \alpha.$$

3. За  $f(x) = a^x$

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Специјално  $(e^x)' = e^x$ .

4. За  $f(x) = \sin x$ ,

$$\sin' x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

овде користимо тригонометријски идентитет

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

и непрекидност функције  $\cos x$ . Тако добијамо

$$\sin' x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

У последњим граничним вредностима користили смо смену  $\frac{\Delta x}{2} = t$ .

5. Слично се доказује да је  $(\cos x)' = -\sin x$  трансформацијом збира косинуса у производ синуса и косинуса. △

**Пример 7.2.** Испитати да ли функције  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  и  $f(x) = |x|$  имају изводе у свакој тачки.

**Решење:** Прво, за функцију  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$  и све  $x \neq 0$  важи

$$(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

За  $x = 0$  граничну вредност морамо да рачунамо по дефиницији.

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0 + \Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = \infty.$$

Дакле,  $f'(0)$  не постоји.

Друго, за функцију  $f(x) = |x|$  и све  $x \neq 0$ , ако је  $x < 0$ ,  $f(x) = -x$  па је  $f'(x) = -1$  а ако је  $x > 0$ ,  $f(x) = x$  па  $f'(x) = 1$ . За  $x = 0$  извод морамо да рачунамо по дефиницији тј.

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \operatorname{sgn} \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} \Delta x.$$

Доказали смо да последња гранична вредност не постоји што значи да не постоји извод  $f'(0)$ . △

Приметимо да, иако је  $f(x) = |x|$  непрекидна у нули, она ме мора да има извод у нули.

**Теорема 7.1.** Ако функција  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  има извод у тачки  $x_0 \in A$ , тада је она непрекидна у тачки  $x_0$ .

**Доказ:** Нека је  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$  где је  $|f'(x_0)| < \infty$ .

Функција је непрекидна у тачки  $x_0$  ако је  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  а ако уведемо смену  $x = x_0 + \Delta x$  (тада  $x \rightarrow x_0$  ако  $\Delta x \rightarrow 0$ ) претходна гранична вредност је еквивалентна са

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0.$$

Ако потражимо последњи лимес добијамо

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

што доказује непрекидност функције  $f$  у тачки  $x_0$  □

## 7.1 Леви и десни извод

Слично левој и десној граничној вредности функције, може да се дефинише и анализира леви и десни извод функције.

**Дефиниција 7.2.** Нека је  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  и  $x \in A$ . Ако постоји

- $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0)$  њега називамо леви извод функције  $f$  у тачки  $x_0$ ;
- $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0)$  називамо га десни извод функције  $f$  у тачки  $x_0$ .

**Теорема 7.2.** Функција има извод у некој тачки ако она има леви и десни извод у тој тачки који су једнаки.

**Пример 7.3.** Одредити  $f'_-(0)$  и  $f'_+(0)$  функције  $f(x) = |x|$ .

**Решење:**

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} -1 = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

Отуда, на основу претходне теореме,  $f(x) = |x|$  нема извод за  $x = 0$ .  $\triangle$

## 7.2 Диференцијал функције

**Дефиниција 7.3.** Функција  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  је диференцијабилна у тачки  $x_0 \in A$  ако постоји  $f'(x_0)$  и  $|f'(x_0)| < \infty$ . Ако је функција диференцијабилна у свакој тачки скупа  $A$ , тада кажемо да је  $f$  диференцијабилна на  $A$  и пишемо  $f \in \mathcal{D}(A)$ .

Нека је  $f$  диференцијабилна у тачки  $x_0$ , тада

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$$

где је

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

То значи да прираштај (разлика вредности функције у такама  $x_0 + \Delta x$  и  $x_0$ ) функције  $f$  у тачки  $x_0$  може да се представи са

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

односно једнак је збиру линеарне функције  $df(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$  (са коефицијентом  $f'(x_0)$ ) и функције  $\varphi(\Delta x) = \alpha(\Delta x)\Delta x$  такве да је

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

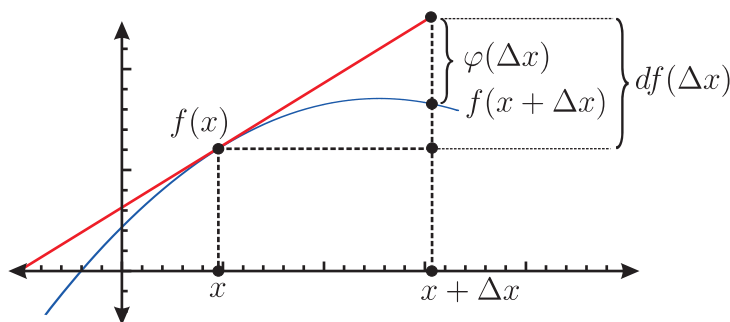


График 24: Диференцијал функције.

**Дефиниција 7.4.** Линеарна функција  $df(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$  се назива диференцијал функције  $f$  у тачки  $x_0$ .

Диференцијал функције има широку примену у математичкој теорији али на овом курсу та тврђења нећемо наводити.

**Теорема 7.3.** (Аритметичке операције и извод) Ако су функције  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  диференцијабилне у тачки  $x \in A$ , тада су  $f + g$ ,  $fg$ ,  $\frac{f}{g}$  ( $g(x) \neq 0$ ) диференцијабилне у тачки  $x$  и важи

$$1. (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x);$$

$$2. (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$3. \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

**Доказ:** Нека  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  и  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$  постоје и коначни су. Како  $f$  и  $g$  имају изводе у  $x$  оне су непрекидне у  $x$ .

1. За функцију  $f + g$

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

2. За функцију  $fg$

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x + \Delta x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)(g(x + \Delta x) - g(x)) + g(x)(f(x + \Delta x) - f(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \end{aligned}$$

3. За функцију  $\frac{f}{g}$  може да се изведе сличан доказ као за функцију  $fg$ . □

**Последица 7.1.** Ако је функција  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  диференцијабилна у  $x \in A$  тада за произвољно  $c \in \mathbb{R}$  важи

$$(cf)'(x) = c f'(x).$$

**Заиста:** Ако применимо претходну теорему

$$(cf)'(x) = c' f + c f' = 0 f + c f' = c f'.$$

□

**Последица 7.2.** Ако су  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  диференцијабилне у  $x$  тада је за произвољне  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  функција  $\alpha f + \beta g$  диференцијабилна у  $x$  и важи

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

**Заиста:** Ако применимо претходна два тврђења

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = (\alpha f)'(x) + (\beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

□

**Пример 7.4.** Израчунати  $\operatorname{tg}'(x)$  и  $\operatorname{ctg}'(x)$ .

**Решење:** Применићемо формулу за извод количника.

$$\operatorname{tg}'(x) = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

Аналогно  $\operatorname{ctg}'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$ .

△

### 7.3 Извод сложене функције, извод инверзне функције

**Теорема 7.4.** (Извод сложене функције) Ако је  $f : A \rightarrow B$  диференцијабилна у  $x$  а  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  диференцијабилна у  $f(x)$ , тада је  $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$  диференцијабилна у  $x$  и важи

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

**Доказ:** Нека постоје  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$  и  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(f(x)+\Delta y) - g(f(x))}{\Delta y} = g'(f(x))$ .

Тада,

$$\begin{aligned} \left( g(f(x)) \right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x + \Delta x) - f(x)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{f(x + \Delta x) - f(x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

За леву граничну вредност уводимо смену  $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y$  тада, због непрекидности функције  $f$  у тачки  $x$  (која је непрекидна јер има извод) из  $\Delta x \rightarrow 0$  следи  $\Delta y \rightarrow 0$ . Ако је  $y = f(x)$ ,  $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$ . Тако добијамо

$$\begin{aligned} \left( g(f(x)) \right)' &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= g'(y) f'(x) = g'(f(x)) f'(x). \end{aligned}$$

□

**Пример 7.5.** Доказати да је за  $g(x) \neq 0$ ,  $\left( \frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ .

**Решење:** Количник  $\frac{f}{g}(x)$  може да се представи као производ  $f(x) \frac{1}{g}(x)$ . Отуда, ако искористимо формулу за извод производа, да би одредили извод количника довољно је да знамо извод функције  $\frac{1}{g}(x)$ . Функција  $\frac{1}{g}(x)$  је композиција  $h \circ g(x)$  где је  $h(x) = \frac{1}{x}$ . Како је  $h'(x) = \frac{-1}{x^2}$  добијамо

$$\left( \frac{1}{g}(x) \right)' = (h \circ g(x))' = h(g(x))g'(x) = \frac{-1}{g^2(x)}g'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Тада,

$$\left( \frac{f}{g}(x) \right)' = f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left( \frac{1}{g}(x) \right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \left( -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

△

**Теорема 7.5.** (Извод инверзне функције) Ако бијективна функција  $f : A \rightarrow B$  има извод различит од нуле у тачки  $x \in A$ , тада њена инверзна функција  $f^{-1} : B \rightarrow A$  има извод у тачки  $y = f(x)$  и важи:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}.$$

**Доказ:** Нека постоји  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$ . Одредимо извод

$$(f^{-1}(y))' = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}}$$

Овде уводимо смену  $f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) = \Delta x$ . Како је  $f^{-1}$  непрекидна у  $y$  (јер  $f$  је непрекидна у  $x$ ) из  $\Delta y \rightarrow 0$  следи  $\Delta x \rightarrow 0$ . Када на једнакост  $f^{-1}(y + \Delta y) = \Delta x + x$  применимо функцију  $f$  добијамо  $\Delta y = f(x + \Delta x) - y = f(x + \Delta x) - f(x)$ . Тако добијамо

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

□

Из претходне теореме следи формула

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

**Пример 7.6.** Одредити изводе следећих функција

1.  $y = \log_a x$ ,  $x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;
2.  $y = \arcsin x$ ,  $x \in (-1, 1)$ ;
3.  $y = \arccos x$ ,  $x \in (-1, 1)$ ;
4.  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;
5.  $y = \operatorname{arcctg} x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Решење:** Применом претходне формуле лако добијамо тражене изводе.

1. За функцију  $f^{-1}(x) = \log_a x$ ,  $f(x) = a^x$ ,  $f'(x) = a^x \ln a$

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

2. За функцију  $f^{-1}(x) = \arcsin x$ ,  $f(x) = \sin x$ ,  $f'(x) = \cos x$

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. Аналогно претходном случају

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4. За функцију  $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}x$ ,  $f(x) = \operatorname{tg}x$ ,  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg}x)}} = \cos^2(\operatorname{arctg}x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \operatorname{arctg}x} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Користили смо тригонометријски идентитет  $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ .

4. Аналогно претходном случају

$$(\operatorname{arcctg}x)' = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

## 7.4 Изводи вишег реда

Ако функција  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  има извод у свакој тачки скупа  $B \subseteq A$  тада њен први извод можемо да посматрамо као посебну функцију  $f' : B \rightarrow \mathbb{R}$  која може да има извод у неким тачкама скупа  $B$ .

**Дефиниција 7.5.** Ако функција  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  има изводе у свим тачкама неке околине тачке  $x$  тада, други извод функције  $f$  у тачки  $x$  дефинишемо са

$$f''(x) = (f'(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Ако функција  $f^{(n-1)} : B \rightarrow \mathbb{R}$  има извод у свим тачкама неке околине тачке  $x$ , тада  $n$ -ти извод функције  $f$  у тачки  $x$  дефинишемо са

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

**Пример 7.7.** Одредити  $n$ -ти извод функција

1.  $f(x) = x^m$ ;
2.  $f(x) = \sin x$ ;
3.  $f(x) = \cos x$ ;
4.  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

**Решење:** Одредимо више изводе по дефиницији.

1. За функцију  $f(x) = x^m$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^m \\ f'(x) &= m x^{m-1} \\ f''(x) &= m(m-1) x^{m-2} \\ f'''(x) &= m(m-1)(m-2) x^{m-3} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \begin{cases} m(m-1)(m-2) \cdots (m-(n-1)) x^{m-n} & n < m, \\ m! & n = m, \\ 0 & n > m. \end{cases} \end{aligned}$$

2. За функцију  $f(x) = \sin x$ ;

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin x; \\f'(x) &= \cos x; \\f''(x) &= -\sin x; \\f'''(x) &= -\cos x; \\f^{(4)}(x) &= \sin x; \\&\vdots\end{aligned}$$

Одакле добијамо да је  $n$ -ти извод има циклус по модулу 4 и може да се запише са:

$$\sin^{(n)} x = \begin{cases} \sin x, & n \equiv 0 \pmod{4}; \\ \cos x, & n \equiv 1 \pmod{4}; \\ -\sin x, & n \equiv 2 \pmod{4}; \\ -\cos x, & n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

3. За функцију  $f(x) = \cos x$  аналогно претходном случају добијамо

$$\cos^{(n)} x = \begin{cases} \cos x, & n \equiv 0 \pmod{4}; \\ -\sin x, & n \equiv 1 \pmod{4}; \\ -\cos x, & n \equiv 2 \pmod{4}; \\ \sin x, & n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

4. За функцију  $f(x) = a^x$

$$\begin{aligned}f(x) &= a^x; \\f'(x) &= a^x \ln a; \\f''(x) &= a^x \ln^2 a; \\f'''(x) &= a^x \ln^3 a; \\&\vdots \\f^{(n)}(x) &= a^x \ln^n a.\end{aligned}$$

**Дефиниција 7.6.** Ако функција  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  има  $n$ -ти извод на скупу  $A$  тада кажемо да је  $f$   $n$ -пута диференцијабилна на  $A$  а ако је  $f^{(n)} : A \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна функција тада тажемо да је  $f$   $n$ -пута непрекидно-диференцијабилна на  $A$ .

## 7.5 Основне теореме диференцијалног рачуна

У овом одељку наводимо такозване теореме о средњој вредности, есенцијалне за даљу теорију.

**Теорема 7.6.** (Фермаова теорема) Нека функција  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  у тачки  $c \in (a, b)$  има локални екстремум (максимум или минимум на  $(c - \delta, c + \delta) \subseteq (a, b)$ ). Тада, ако је  $f$  диференцијабилна у  $c$  важи

$$f'(c) = 0.$$

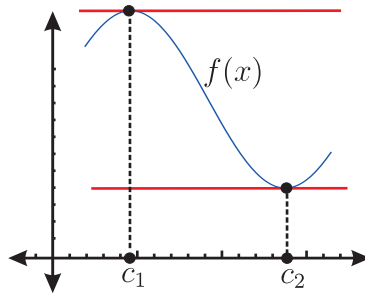


График 25: Екстремуми диференцијабилне функције.

**Доказ:** Нека  $f$  има максимум у  $c \in (a, b)$  на скупу  $(c - \delta, c + \delta) \subseteq (a, b)$ . Тада, за свако  $\Delta x$  тако да  $c + \Delta x \in (c - \delta, c + \delta)$  важи  $f(c) \geq f(c + \Delta x)$  па је  $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$ . Како је по наведеној теорему  $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$  добијамо

$$f'(c) = f'_+(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$$

зато што је у последњем изразу бројилац негативан а именилац позитиван. Такође

$$f'(c) = f'_-(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$$

зато што су у последњем изразу бројилац и именилац негативни. Дакле  $0 \leq f'(c) \leq 0$  па је  $f'(c) = 0$   $\square$

**Теорема 7.7.** (Ролова теорема) Нека је  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна на  $[a, b]$  и диференцијабилна на  $(a, b)$  и нека је  $f(a) = f(b)$ . Тада постоји тачка  $c \in [a, b]$  тако да је  $f'(c) = 0$ .

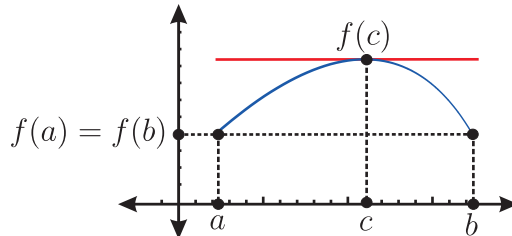


График 26: Ролова теорема.

**Доказ:** Како је  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна, по Вајерштрасовој теорему постоје тачке  $x_m, x_M \in [a, b]$  у којима функција достиже минималну и максималну вредност на  $[a, b]$ . Ако се максимум и минимум достижу на крајевима интервала односно ако је  $\{a, b\} = \{x_m, x_M\}$  тада, како је  $f(a) = f(b)$ , за све  $x \in [a, b]$  важи

$$f(a) = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(a).$$

Тако добијамо да је  $f(x) = f(a)$  за све  $x \in [a, b]$  односно  $f$  је константна функција па је њен извод једнак нули у свакој тачки интервала  $[a, b]$ .

Ако бар једна од тачака  $x_m, x_M$  припада унутрашњости интервала  $[a, b]$ , на пример,  $x_m \in (a, b)$  тада, како је  $f$  диференцијабилна на  $(a, b)$  она је диференцијабилна у тачки  $x_m$  која је минимум функције па, на основу Фермаове теореме  $f'(x_m) = 0$ .  $\square$

**Теорема 7.8.** (Лагранжева теорема) Нека је  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна на  $[a, b]$  и диференцијабилна на  $(a, b)$ . Тада постоји тачка  $c \in (a, b)$  тако да је

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

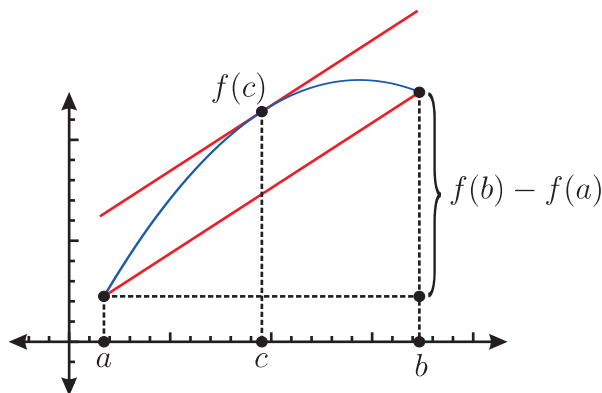


График 27: Лагранжева теорема.

**Доказ:** Уочимо функцију

$$F(x) = (f(x) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(x - a).$$

Тада,  $F(x)$  је непрекидна на  $[a, b]$  и диференцијабилна на  $(a, b)$  и важи

$$F(a) = (f(a) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(a - a) = 0,$$

$$F(b) = (f(b) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(b - a) = 0$$

тј.  $F(a) = F(b)$ . Дакле,  $F$  испуњава услове Ролове теореме па, постоји  $c \in (a, b)$  тако да је  $F'(c) = 0$ . Како је  $F'(x) = f'(x)(b - a) - (f(b) - f(a))$  добијамо

$$0 = F'(c) = f'(c)(b - a) - (f(b) - f(a)),$$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

□

**Теорема 7.9.** (Кошијева теорема) Нека су функције  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидне на  $[a, b]$ , диференцијабилне на  $(a, b)$  и нека је  $g'(x) \neq 0$  за све  $x \in (a, b)$ . Тада постоји  $c \in (a, b)$  тако да је

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Доказ:** Прво, функција  $g$  задовољава услове Лагранжеве теореме па

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a).$$

Како је  $b - a \neq 0$  и по претпоставци  $g'(c) \neq 0$  за  $c \in (a, b)$  закључујемо да је  $g(b) - g(a) \neq 0$ . Ово нам омогућава да дефинишемо функцију:

$$F(x) = (g(x) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} - (f(x) - f(a)).$$

Тада, функција  $F$  је непрекидна на  $[a, b]$ , диференцијабилна на  $(a, b)$  и важи

$$F(a) = (g(a) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} - (f(a) - f(a)) = 0,$$

$$F(b) = (g(b) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} - (f(b) - f(a)) = (f(b) - f(a)) - (f(b) - f(a)) = 0.$$

Дакле,  $F(b) = F(a)$  па функција  $F$  задовољава услове Ролове теореме што значи да постоји  $c \in (a, b)$  тако да је  $F'(c) = 0$ . Како је

$$F'(x) = g'(x) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} - f'(x)$$

добивамо

$$0 = F'(c) = g'(c) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} - f'(c),$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

## 7.6 Лопиталова правила

У овом одељку наводимо једну врло практичну теорему за одређивање граничне вредности диференцијабилних функција.

**Теорема 7.10.** (Прво Лопиталово правило) Нека су  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  функције које испуњавају услове

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ;
- $f$  и  $g$  су диференцијабилне на неком интервалу  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq A$ ;
- $g'(x) \neq 0$  за све  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ;
- постоји  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Тада

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Доказ:** Нека је  $\delta_0 < \delta$ . Тада  $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  и функције  $f, g$  су диференцијабилне на  $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$  а самим тим и непрекидне на  $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$ .

Због непрекидности функција важи да је

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

По трећем услову важи  $g'(x) \neq 0$  за све  $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$ . Отуда, функције  $f$  и  $g$  задовољавају услове Кошијеве теореме па

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

где је  $c_x$  тачка која припада интервалу са крајевима  $x_0$  и  $x$  (на пример, ако је  $x < x_0$ ,  $c_x \in (x, x_0)$ ). Тада, када потражимо лимес када  $x \rightarrow x_0$  у последњим релацијама добијамо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Како  $c_x \rightarrow x_0$  када  $x \rightarrow x_0$  а по четвртој претоставци постоји  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , постоји и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$  и важи

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

одакле добијамо да је

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

што је требало доказати. □

Напомињемо да ако  $f'(x)$  и  $g'(x)$  задовољавају услове теореме тада

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

**Пример 7.8.** *Одредити  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ .*

**Решење:** Функције  $f(x) = \ln(1+x)$  и  $g(x) = x$  задовољавају услове претходне теореме па је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln'(1+x)}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

△

**Теорема 7.11.** (*Друго Лопиталово правило*) Нека су  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  функције које испуњавају услове

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ ;
- $f$  и  $g$  су диференцијабилне на некој околини тачке  $x_0$ ;
- $g'(x) \neq 0$  на некој околини тачке  $x_0$ ;
- постоји  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Тада

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказ је сличан доказу првог Лопиталовог правила.

За граничну вредност из првог Лопиталовог правила се каже да је неодређеност облика  $\left(\frac{0}{0}\right)$  а за граничну вредност из другог правила неодређеност облика  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ . Сада наводимо остале примере неодређености које се свде на оне описане у претходним теоремама.

- $(0 \cdot \infty)$  Нека је  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ . Тада

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

а последњи лимес је облика  $\left(\frac{0}{0}\right)$ .

- $(\infty - \infty)$  Нека је  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ . Тада

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \frac{1}{g(x)}} \right)$$

а последњи лимес је облика  $\left(\frac{0}{0}\right)$ .

- $(0^0)$ ,  $(\infty^0)$ ,  $(1^\infty)$  Нека важи бар један пар услова

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty.$$

Тада, како је експоненцијална функција непрекидна,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\ln f(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\ln f(x)}$$

а лимес  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\ln f(x)$  је облика  $(0 \cdot \infty)$ .

**Пример 7.9.** Израчунати граничне вредности  $\lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0_+} x^x$ .

**Решење:** Прво,

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0_+} x = 0.$$

Друго, друга гранична вредност је облика  $(0^0)$  али применом експоненцијалне трансформације добијамо

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln x} = e^0 = 1.$$

△

## 7.7 Тејлорова формула

У овом одељку наводимо теорему фундаменталну за основе нумеричке математике. Теорема описује методу којом се вредности реалних функција приближно рачунају на рачунарима.

Нека функција  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  има извод  $n$ -тог реда на некој околини  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq A$  тачке  $x_0$ . Одредимо полином  $T_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$  тако да је

$$f^{(m)}(x_0) = T^{(m)}(x_0)$$

за  $m = 0, 1, \dots, n$  (при том  $f^{(0)}(x) = f(x)$ ). Како је

$$\begin{aligned} T^{(m)}(x) &= \sum_{k=m}^n k(k-1)\cdots(k-(m-1))a_k(x-x_0)^{k-m} \\ &= a_m m! + a_{m+1}(m+1)m\cdots 2(x-x_0) + \cdots + n(n-1)\cdots a_n(n-(m-1))(x-x_0)^{n-m} \end{aligned}$$

видимо да је  $T^{[m]}(x_0) = a_m m!$  па, када заменимо у траженом услову

$$f^{(m)}(x_0) = a_m m!$$

добивамо да су коефицијети полинома  $T_n$

$$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}.$$

**Дефиниција 7.7.** Нека функција  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  има извод  $n$ -тог реда на некој околини  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq A$ . Тада полином

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

називамо Тејлоров полином  $n$ -тог степена функције  $f$  у тачки  $x_0$ . Разлику

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

називамо остатак  $n$ -тог реда.

**Теорема 7.12.** (Лагранжов облик остатка) Нека функција  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  има извод  $(n+1)$ -ог реда на некој околини  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq A$  тачке  $x_0$ . Тада, за њен Тејлоров полином  $n$ -тог реда на околини тачке  $x_0$  односно остатак  $n$ -тог реда важи

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

где  $c$  припада интервалу ограниченом са  $x$  и  $x_0$ .

**Доказ:** Уочимо функције  $H(x) = f(x) - T_n(x)$  и  $g(x) = (x - x_0)^{(n+1)}$ .

Како је  $f^{(m)}(x_0) = T^{(m)}(x_0)$  за све  $m = 0, 1, \dots, n$  важи да је  $H^{(m)}(x_0) = 0$  за све  $m = 0, 1, \dots, n$ .

Такође, како је  $g^{(m)}(x) = (n+1)n(n-1)\cdots(n+1-(m-1))(x-x_0)^{n+1-m}$  добијамо да је  $g^{(m)}(x_0) = 0$  за све  $m = 0, 1, \dots, n$  и  $g^{(n+1)}(x_0) = (n+1)!$ .

Посматрајмо количник

$$\frac{H(x)}{g(x)} = \frac{H(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{H(x) - H(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

Како функције  $H$  и  $g$  задовољавају услове Кошијеве теореме о мођувредности на интервалу са крајевима  $x$  и  $x_0$ , постоји  $c_1$  које припада том интервалу и важи да је

$$\frac{H(x)}{g(x)} = \frac{H(x) - H(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{H'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{H'(c_1) - 0}{g'(c_1) - 0} = \frac{H'(c_1) - H'(x_0)}{g'(c_1) - g'(x_0)}.$$

Како функције  $H'$  и  $g'$  задовољавају услове Кошијеве теореме о мођувредности на интервалу са крајевима  $c_1$  и  $x_0$ , постоји  $c_2$  које припада том интервалу и важи да

$$\frac{H(x)}{g(x)} = \frac{H'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{H'(c_1) - H'(x_0)}{g'(c_1) - g'(x_0)} = \frac{H''(c_2)}{g''(c_2)} = \frac{H''(c_2) - 0}{g''(c_2) - 0} = \frac{H''(c_2) - H''(x_0)}{g''(c_2) - g''(x_0)}.$$

Претходни поступак можемо да наставимо све док су  $H^{(m)}(x_0)$  и  $g^{(m)}(x_0)$  једнаки нули тј. за све  $m = 3, 4, \dots, n$ . Тако долазимо до низа

$$\frac{H(x)}{g(x)} = \frac{H'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{H''(c_2)}{g''(c_2)} = \dots = \frac{H^{(n+1)}(c_{n+1})}{g^{(n+1)}(c_{n+1})}$$

где константе  $c_i$  припадају интервалима са границама  $c_{i-1}$  и  $x_0$  за све  $i = 1, \dots, n + 1$ . Како је

$$H^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - (T_n(x))^{(n+1)} = f^{(n+1)}(x) - 0 = f^{(n+1)}(x)$$

из једнакости

$$\frac{H(x)}{g(x)} = \frac{H^{(n+1)}(c_{n+1})}{g^{(n+1)}(c_{n+1})}$$

добивамо

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n + 1)!}.$$

Како  $c = c_{n+1}$  припада интервалу са границом  $x$  и  $x_0$  добијамо да је остатак  $n$ -тог реда Тејлоровог развоја функције  $f$ :

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

што је требало доказати. □

Специјално, ако је  $x_0 = 0$  Тејлоров полином степена  $n$  се назива Маклоренов полином степена  $n$ . Тада је

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} x^{n+1}$$

а  $c$  припада интервалу са границом  $0$  и  $x$  (на пример, ако је  $x < 0$  интервал је  $(x, 0)$ ).

Представљање функције помоћу Тејлоровог полинома и одговарајућег остатка се у литератури назива и Тејлоров развој.

Тејлоров развој је врло практичан у следећим околностима. Ако је  $|f^n(x)|$  ограничена са  $M$  за све  $x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  и све  $n \in \mathbb{N}$ , тада је

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

па је за све  $x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = M \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = M \cdot 0 = 0.$$

Отуда, повећањем степена Тејлоровог развоја смањујемо остатак. То нам омогућава да вредност функције  $f$  у некој тачки са довољно малом грешком одредимо помоћу вредности полинома  $T_n$  у тој тачки.

**Пример 7.10.** *Одредити Маклоренове развоје следећих функција*

1.  $f(x) = e^x$ ;
2.  $f(x) = \sin x$ ;
3.  $f(x) = \cos x$ ;
4.  $f(x) = (1+x)^\alpha$ .

**Решење:** Потребно је само да попунимо коефицијенте  $f^{(n)}(0)$  у формули

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x).$$

1. За функцију  $f(x) = e^x$  знамо да је  $f^{(n)}(x) = e^x$  па  $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ . Отуда, Маклоренов развој функције  $f(x) = e^x$  је

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x).$$

2. За функцију  $f(x) = \sin x$  знамо да је

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & n \equiv 0 \pmod{4} \\ \cos x, & n \equiv 1 \pmod{4} \\ -\sin x, & n \equiv 2 \pmod{4} \\ -\cos x, & n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Па је

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod{4} \\ 1, & n \equiv 1 \pmod{4} \\ 0, & n \equiv 2 \pmod{4} \\ -1, & n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^{k+1}, & n = 2k - 1 \end{cases}$$

Отуда, у Маклореновом развоју синуса фигуришу само непарни коефицијенти полинома и он је облика

$$\sin x = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} + R_{2n-1}(x).$$

3. Слично, за функцију  $f(x) = \cos x$  важи

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x, & n \equiv 0 \pmod{4} \\ -\sin x, & n \equiv 1 \pmod{4} \\ -\cos x, & n \equiv 2 \pmod{4} \\ \sin x, & n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Па је

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod{4} \\ 0, & n \equiv 1 \pmod{4} \\ -1, & n \equiv 2 \pmod{4} \\ 0, & n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} = \begin{cases} 0, & n = 2k - 1 \\ (-1)^k, & n = 2k \end{cases}$$

Дакле, у Маклореновом развоју косинуса фигуришу само парни коефицијенти полинома и он је облика

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + R_{2n}(x).$$

3. Одредимо  $n$ -ти извод функције  $f(x) = (1+x)^\alpha$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^\alpha; \\ f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}; \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}; \\ f'''(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}; \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}. \end{aligned}$$

Отуда

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))$$

што значи да је Маклоренов развој функције  $f$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!} x^k + R_n(x).$$

△

Следећи пример одражава суштину теорије представљене у овом одељку.

**Пример 7.11.** Израчунати  $\sqrt{e}$  на три децимална места.

**Решење:** Број  $\sqrt{e}$  може да се представи са  $e^{\frac{1}{2}}$ . Отуда, да би га одредили на три децимална места користимо Маколренов развој експоненцијалне функције за  $x = \frac{1}{2}$

$$e^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + R_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

где је

$$R_n = \frac{e^c}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

a  $c \in (0, \frac{1}{2})$ .

Идеја је да апсолутна вредност остатка не буде већа од  $10^{-3}$  односно  $\frac{1}{1000}$

$$|R_n| = \frac{e^c}{(n+1)!2^{n+1}} < \frac{e}{(n+1)!2^{n+1}}.$$

Последњи израз је мањи од 0,001 за  $n = 4$ . Дакле, Маклоренов полином четвртог степена апроксимира  $\sqrt{e}$  на три децимале и то је

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 1,648.$$

△

## 7.8 Представљање функција помоћу диференцијалног рачуна

Анализирајмо везу између првог извода функције и монотоности функције.

**Теорема 7.13.** Нека је  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна на  $[a, b]$  и диференцијабилна на  $(a, b)$ . Тада, ако је

- $f'(x) > 0$  за све  $x \in (a, b)$  функција  $f$  је строго растућа;
- $f'(x) < 0$  за све  $x \in (a, b)$  функција  $f$  је строго опадајућа;
- $f'(x) = 0$  за све  $x \in (a, b)$  функција  $f$  је константна.

**Доказ:** Нека су  $x_1, x_2 \in A$  произвољни такви да је  $x_1 < x_2$ . Тада, функција  $f$  на интервалу  $[x_1, x_2] \subseteq [a, b]$  задовољава услове Лагранжеве теореме па постоји  $c \in (x_1, x_2)$  тако да је

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Како је  $x_2 - x_1 > 0$  знак разлике  $f(x_2) - f(x_1)$  зависи само од  $f'(c)$ . Отуда

- ако је  $f'(c) > 0$  следи да је  $f(x_2) > f(x_1)$ ;
- ако је  $f'(c) < 0$  следи да је  $f(x_2) < f(x_1)$ ;
- ако је  $f'(c) = 0$  следи да је  $f(x_2) = f(x_1)$

чиме је тврђење доказано. □

**Теорема 7.14.** Нека је  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  диференцијабилна на  $[a, b]$ . Тада

- ако је функција  $f$  је растућа на  $[a, b]$  важи да је  $f'(x) \geq 0$  за све  $x \in (a, b)$ ;
- ако је функција  $f$  је опадајућа на  $[a, b]$  важи да је  $f'(x) \leq 0$  за све  $x \in (a, b)$ ;
- ако је функција  $f$  је константна на  $[a, b]$  важи да је  $f'(x) = 0$  за све  $x \in (a, b)$ .

**Доказ:** Како функција  $f$  има извод, за све  $x \in (a, b)$  важи да је

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Како је  $\Delta x > 0$  следи да је  $x < x + \Delta x$ . Ако је функција растућа важи да је  $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$  па је  $f'_+(x) > 0$ . Слично, ако је функција опадајућа  $f(x + \Delta x) - f(x) < 0$  па је  $f'_+(x) < 0$ . На крају, ако је  $f(x + \Delta x) - f(x) = 0$  следи да је  $f'_+(x) = 0$ . □

**Дефиниција 7.8.** Нека је  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  дата функција и  $c \in A$ . Тада функција  $f$  у тачки  $c$  има

- локални максимум ако постоји  $\delta > 0$  тако да

$$(\forall x \in A) |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(c);$$

- локални минимум ако постоји  $\delta > 0$  тако да

$$(\forall x \in A) |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(c);$$

- локални максимум односно локални минимум су строги ако је

$$(\forall x \in A \setminus \{c\}) |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \neq f(c)$$

тј. локални максимум односно минимум се достижу само у тачки  $c$ .

Локалне максимуме односно локалне минимуме називамо локални екстремуми.

**Теорема 7.15.** Ако функција  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  има локални екстремум у тачки  $c$ , тада ако је  $f$  диференцијабилна у  $c$  важи да је  $f'(c) = 0$ .

Доказ следи на основу Фермаове теореме.

**Дефиниција 7.9.** Тачке  $c \in A$  такве да је  $f'(c) = 0$  називају се стационарне тачке функције  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Пример 7.12.** Није свака стационарна тачка локални екстремум.

**Заиста:** Посматрајмо функцију  $f(x) = x^3$ , за њу је  $f'(x) = 3x^2$  и  $f'(0) = 0$  али нула није локални екстремум ове функције зато што за свако  $\delta > 0$ ,  $f(0 - \delta) = -\delta^3 < 0$  и  $f(0 + \delta) = \delta^3 > 0$ . △

**Теорема 7.16.** Нека је функција  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  диференцијабилна на околу  $(a, b) \subseteq A$  тачке  $c \in (a, b)$ . Тада, ако за све  $x \in (a, c)$  и све  $y \in (c, b)$  важи да је  $f'(x)f'(y) < 0$  (тј. ако први звод мења знак у тачки  $c$ ) тачка  $c$  је локални екстремум функције  $f$  а ако је  $f'(x)f'(y) > 0$  тада  $c$  није локални екстремум функције  $f$ .

**Доказ:** Нека је на пример  $f'(x) > 0$  за све  $x \in (a, c)$  а  $f'(x) < 0$  за све  $x \in (c, b)$ . Тада, по првој теореме овог одељка, функција  $f$  је растућа на  $[a, c]$  а опадајућа на  $[c, b]$  па, за све  $x \in [a, b]$  важи

- ако је  $x < c$  следи да је  $f(x) < f(c)$ ,
- ако је  $x > c$  следи да је  $f(x) < f(c)$ .

Дакле, тачка  $c$  је локални максимум функције  $f$ .

Слично се доказује да ако је  $f'(x) < 0$  за све  $x \in (a, c)$  а  $f'(x) > 0$  за све  $x \in (c, b)$  функција  $f$  у тачки  $c$  има локални минимум.

Ако је  $f'(x) > 0$  за све  $x \in (a, c)$  а  $f'(x) > 0$  за све  $x \in (c, b)$ , тада је функција  $f$  растућа на  $[a, c]$  и на  $[c, b]$  а то имплицира да је  $f$  растућа на  $[a, b]$ . Тада, за све  $x < c$ ,  $f(x) < f(c)$  а за  $x > c$ ,  $f(x) > f(c)$  што значи да  $c$  не може да буде локални екстремум.

Слично, ако је  $f'(x) < 0$  за све  $x \in (a, c)$  и  $f'(x) < 0$  за све  $x \in (c, b)$  функција  $f$  је опадајућа на  $[a, b]$  па,  $c$  не може да буде њен локални екстремум. □

**Пример 7.13.** Функција  $f(x) = |x|$  има локални минимум у тачки  $x = 0$  а функција  $f(x) = x^3$  нема локални екстремум у тачки  $x = 0$ .

**Заиста:** За  $f(x) = |x|$ , како је  $f'(x) = -1 < 0$  за све  $x \in (-\infty, 0)$  а  $f'(x) = 1 > 0$  за све  $x \in (0, \infty)$ , по претходној теореме  $f(x) = |x|$  има локални минимум у тачки  $x = 0$ .

Друго, за функцију  $f(x) = x^3$  важи  $f'(x) = 3x^2 \geq 0$  што имплицира да њен први извод не мења знак у тачки  $x = 0$  па, по претходној теореме,  $x = 0$  није локални екстремум.  $\triangle$

Приметимо да на основу претходне теореме и претходног примера функција не мора да буде диференцијабилна у локалном екстремуму.

**Теорема 7.17.** Нека је  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  таква да је

$$f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0, \quad f^{(n+1)}(c) \neq 0$$

и нека је  $f^{(n+1)}(x)$  непрекидна функција на некој околини тачке  $c$ . Тада

- ако је  $(n + 1)$  парно и ако је  $f^{(n+1)}(c) > 0$  функција  $f$  има локални минимум у тачки  $c$  а ако је  $f^{(n+1)}(c) < 0$  функција  $f$  има локални максимум у  $c$ ;
- ако је  $(n + 1)$  непарно, функција  $f$  нема у тачки  $c$  локални екстремум.

**Доказ:** Како је  $f^{(n+1)}(x)$  непрекидна на околини тачке  $c$  и  $f^{(n+1)}(c) \neq 0$ , по важној последици, постоји околина  $(c - \delta, c + \delta)$  тачке  $c$  тако да су  $f^{(n+1)}(x)$  и  $f^{(n+1)}(c)$  истог знака за све  $x \in (c - \delta, c + \delta)$ .

Тејлоров развој  $n$ -тог реда функције  $f$  у тачки  $c$  је облика

$$f(x) = f(c) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + R_n(x)$$

а због претпоставке  $f^{(k)}(c) = 0$  за  $k = 1, \dots, n$  добијамо да је

$$f(x) - f(c) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - c)^{n+1}.$$

Ако је  $(n + 1)$  парно, тада је  $(x - c)^{n+1} > 0$  па знак разлике  $f(x) - f(c)$  зависи само од  $f^{(n+1)}(\xi)$ . Ако је  $f^{(n+1)}(c) > 0$  тада је  $f^{(n+1)}(\xi) > 0$  за све  $\xi \in (c - \delta, c + \delta)$  (јер  $\xi$  припада интервалу са границом  $c$  и  $x$ ) па је  $f(x) - f(c) > 0$  тј.  $f(x) > f(c)$  за све  $x \in (c - \delta, c + \delta)$  што значи да је  $c$  локални минимум функције  $f$ . Слично, ако је  $f^{(n+1)}(c) < 0$  тада је  $f(x) < f(c)$  за све  $x \in (c - \delta, c + \delta)$  па је  $c$  локални максимум функције  $f$ .

Ако је  $(n + 1)$  непарно, тада  $(x - c)^{n+1}$  мења знак у  $c$  а како је  $f^{(n+1)}(\xi)$  сталног знака, производ  $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - c)^{n+1} = f(x) - f(c)$  мења знак у тачки  $c$  што значи да  $c$  није локални екстремум дате функције  $f$ .  $\square$

**Пример 7.14.** Испитати да ли је  $x = 0$  локални екстремум функције  $f(x) = x^n$ .

**Решење:** Ако је  $f(x) = x^n$  тада је  $f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$  а  $f^{(n)}(0) = n! > 0$ . Отуда, на основу претходне теореме,  $x = 0$  је минимум функције  $f$  за  $n$ -парно а није локални екстремум за  $n$ -непарно.  $\triangle$

Сада наводимо дефиницију тангенте на диференцијабилну функцију. Потребна нам је права чији је коефицијент правца једнак првом изводу функције у тачки  $x_0$  и која пролази кроз тачку  $(x_0, f(x_0))$ .

**Дефиниција 7.10.** Тангента диференцијабилне функције  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  у тачки  $x_0$  је права

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

У литератури су познати концепти конвексности и конкавности реалних функција. Они се дефинишу користећи адитивност функција а тај поступак је много дуг и компликован за овај курс. Уместо тога, за дефинисање конвексности искористићемо једну лепу геометријску особину конвексних функција а то је да су тачке њеног графика увек изнад њене тангенте у произвољној тачки интервала конвексности, као што је приказано на графику испод. Слично, конкавним функцијама график је увек испод тангенте у произвољној тачки интервала конкавности.

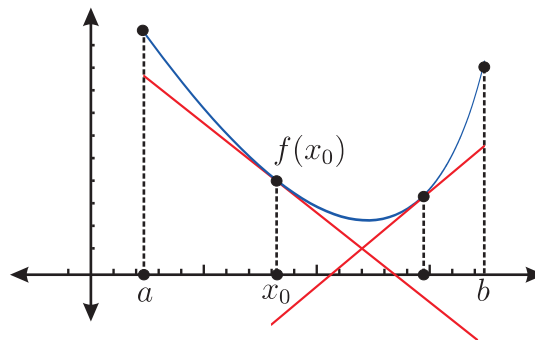


График 28: Конвексност графика функције.

**Дефиниција 7.11.** Нека је  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  диференцијабилна на  $(a, b)$ .

- Ако је за све  $x, x_0 \in (a, b)$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

тада кажемо да је функција  $f$  конвексна на  $(a, b)$ .

- Ако је за све  $x, x_0 \in (a, b)$

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

тада кажемо да је функција  $f$  конкавна на  $(a, b)$ .

**Теорема 7.18.** Нека функција  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  има други извод у свакој тачки интервала  $(a, b)$ . Тада

- ако је  $f''(x) > 0$  за све  $x \in (a, b)$  функција  $f$  је конвексна на  $(a, b)$ ;
- ако је  $f''(x) < 0$  за све  $x \in (a, b)$  функција  $f$  је конкавна на  $(a, b)$ .

**Доказ:** Нека је  $x_0 \in (a, b)$  произвољно. Тејлоров развој другог реда функције  $f$  на околини тачке  $x_0$  је

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2$$

где је  $c$  тачка интервала са крајевима  $x$  и  $x_0$ . Како је  $(x - x_0)^2 \geq 0$ ,

- ако је  $f''(c) > 0$  следи да је  $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  тј. функција је конвексна;
- ако је  $f''(c) < 0$  следи да је  $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  тј. функција је конкавна

што је требало доказати. □

**Дефиниција 7.12.** Тачка  $x_0$  је превојна тачка функције  $f$  ако постоји  $\delta$  тако да

- функција  $f$  је конвексна на  $(x_0 - \delta, x_0)$  а конкавна на  $(x_0, x_0 + \delta)$  или
- функција  $f$  је конкавна на  $(x_0 - \delta, x_0)$  а конвексна на  $(x_0, x_0 + \delta)$ .

Практично, функција у превојној тачки мења конвексност.

**Теорема 7.19.** Нека  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  има други извод у свим тачкама интервала  $(a, b)$ . Ако је  $x_0 \in (a, b)$  таква да је  $f''(x)f''(y) < 0$  за све  $x \in (a, x_0)$  и све  $y \in (x_0, b)$  тада је  $x_0$  превојна тачка функције  $f$ .

**Доказ:** Нека је  $f''(x) > 0$  за све  $x \in (a, x_0)$  а  $f''(x) < 0$  за све  $x \in (x_0, b)$ . Тада, на основу претходне теореме, функција  $f$  је конвексна на  $(a, x_0)$  а конкавна на  $(x_0, b)$  што значи да је  $x_0$  превојна тачка функције  $f$ . □

Приметимо из доказа претходне теореме да у превојној тачки  $x_0$  други извод  $f''(x_0)$  је једнак нули или не постоји.

**Пример 7.15.** Испитати конвексност функција  $f(x) = x^n$  за  $n \geq 2$ .

**Решење:** За функцију  $f(x) = x^n$  важи  $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ . Бројеви  $n$  и  $n-2$  су исте парности. Ако је  $n$ -парно,  $f''(x) \geq 0$  па је у овом случају свака од функција конвексна. Ако је  $n$ -непарно, тада је  $f''(x) < 0$  за  $x < 0$  а  $f''(x) > 0$  за  $x > 0$ . Отуда, у овом случају су функције конкавне за  $x < 0$  а конвексне за  $x > 0$  а  $x = 0$  је превојна тачка и важи  $f''(0) = 0$ . △

Приметимо да је у парном случају за  $n > 2$  такође  $f''(0) = 0$  али  $x = 0$  није превојна тачка.

## 7.9 Асимптоте графика функције

На крају овог поглавља анализирамо праве које су такве да им се график функција довољно приближава када  $x$  тежи неком броју или ка бесконачности.

**Дефиниција 7.13.** Права  $x = x_0$  је вертикална асимптота функције  $f$  ако је  $|\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)| = \infty$  или  $|\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)| = \infty$ .

**Пример 7.16.** Права  $x = 0$  је вертикална асимптота функција  $f(x) = \frac{1}{x^n}$  за све  $n \in \mathbb{N}$ .

**Дефиниција 7.14.** Права  $y = kx + n$  је десна коса асимптота функције  $f$  ако је

$$f(x) = kx + n + \alpha(x)$$

где је  $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$

Лева коса асимптота се добија као у претходној дефиницији само се захтева да  $x \rightarrow -\infty$ . На пример, функција  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  има праву  $y = \frac{\pi}{2}$  као десну косу асимптоту а праву  $y = -\frac{\pi}{2}$  као леву косу асимптоту. Ако је  $k = 0$  коса асимптота се назива хоризонтална асимптота.

**Теорема 7.20.** Права  $y = kx + n$  је десна коса асимптота функције ако постоје граничне вредности

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

**Доказ:** ( $\Rightarrow$ ) Нека је  $y = kx + n$  десна коса асимптота функције  $f$ . Тада, по дефиницији

$$f(x) = kx + n + \alpha(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$$

Тада је

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - n) = 0$$

па је

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = 0.$$

Како је

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n}{x} = 0$$

добивамо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - kx}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} - k \right) = 0$$

одакле је

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

( $\Leftarrow$ ) Нека је  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  и  $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$ . Тада, за функцију

$$\alpha(x) = f(x) - kx - n$$

важи

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - n) = 0$$

што је требало доказати. □

## 8 Примитивна функција и неодређени интеграл

У овом поглављу дефинишемо поступак којим се од неке функције добија функција чији је извод дата функција. Математичким речником, опишимо оператор који је инверзан оператору диференцирања.

**Дефиниција 8.1.** Функција  $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  је примитивна функција функције  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  на интервалу  $(a, b)$  ако је за све  $x \in (a, b)$

$$F'(x) = f(x).$$

Егзистенција примитивне функције дате функције зависи од интервала као што илуструје следећи пример.

**Пример 8.1.** Функција  $F(x) = \ln x + c$  ( $c \in \mathbb{R}$  је константа) је примитивна функција функције  $f(x) = \frac{1}{x}$  на интервалу  $(0, \infty)$  док је функција  $F(x) = \ln(-x) + c$  њена примитивна функција на интервалу  $(-\infty, 0)$ .

**Заиста:** За све  $x \in (0, \infty)$  важи

$$F'(x) = (\ln x + c)' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$$

док за све  $x \in (-\infty, 0)$  важи

$$F'(x) = (\ln(-x) + c)' = \frac{1}{-x}(-1) + 0 = \frac{1}{x}.$$

△

Приметимо да је у претходном примеру константа  $c$  могла да буде произвољан реалан број што значи да на датом интервалу дата функција може да има више примитивних функција. Следећа теорема описује све примитивне функције дате функције на датом интервалу.

**Теорема 8.1.** Нека је  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  дата функција.

- Ако је  $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  примитивна функција функције  $f$  на интервалу  $(a, b)$  тада је и  $F(x) + c$  примитивна функција функције  $f$  на интервалу  $(a, b)$  за произвољно  $c \in \mathbb{R}$ .
- Ако су  $F, G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  две примитивне функције функције  $f$  на интервалу  $(a, b)$  тада постоји  $c \in \mathbb{R}$  тако да је

$$G(x) = F(x) + c$$

за све  $x \in (a, b)$ .

**Доказ:** Прво, ако је  $F'(x) = f(x)$  за све  $x \in (a, b)$  тада је за произвољно  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$(F(x) + c)' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$$

за све  $x \in (a, b)$ .

Друго, нека су  $F, G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  такве да је  $F'(x) = G'(x) = f(x)$  за све  $x \in (a, b)$ . Тада, функција  $H(x) = G(x) - F(x)$  је диференцијабилна на  $(a, b)$  и за свако  $x \in (a, b)$  је

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Тада, ако су  $x_1, x_2 \in (a, b)$  произвољни (можемо да претпоставимо да је  $x_1 < x_2$ ), функција  $H$  задовољава услове Лагранжеве теореме на  $[x_1, x_2]$  па постоји  $c \in (x_1, x_2)$  тако да је

$$H(x_2) - H(x_1) = H'(c)(x_2 - x_1) = 0(x_2 - x_1) = 0$$

што значи да је  $H(x_2) = H(x_1)$ . Отуда, функција  $H$  је константна па постоји  $c \in \mathbb{R}$  тако да је  $H(x) = c$  за све  $x \in (a, b)$ . Тако добијамо да је

$$H(x) = G(x) - F(x) = c,$$

$$G(x) = F(x) + c$$

за све  $x \in (a, b)$ . □

**Дефиниција 8.2.** Скуп свих примитивних функција функције  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  на интервалу  $(a, b)$  називамо неодређени интеграл функције  $f$  на  $(a, b)$  у ознаци

$$\int f(x)dx.$$

Ако је  $F(x)$  једна примитивна функција функције  $f(x)$  на интервалу  $(a, b)$  тада је на основу претходне теореме

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Пример 8.2.** На основу првог примера из одељка, на интервалу  $(0, \infty)$  је

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

док је на интервалу  $(-\infty, 0)$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + c.$$

**Теорема 8.2.** Нека је  $F'(x) = f(x)$  а  $G'(x) = g(x)$  за све  $x \in (a, b)$ . Тада је

1.  $d \int f(x)dx = f(x)dx$  мј.  $(\int f(x)dx)' = f(x)$ ;
2.  $\int d(F(x)) = F(x) + c$ ;
3.  $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ ;
4.  $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ .

**Доказ:** Присетимо се да је по дефиницији  $df(x) = f'(x)dx$ .

1.

$$\left( \int f(x)dx \right)' = (F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

2.

$$\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + c.$$

3.

$$\begin{aligned}\int k f(x) dx &= \int k F'(x) dx = \int k d(F(x)) = \int d(kF(x)) \\ &= kF(x) + c = kF(x) + kc' = k(F(x) + c') = k \int f(x) dx.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\int (f(x) + g(x)) dx &= \int (F'(x) + G'(x)) dx = \int d(F(x) + G(x)) = \\ &= F(x) + G(x) + c = F(x) + c_1 + G(x) + c_2 \\ &= \int f(x) dx + \int g(x) dx.\end{aligned}$$

□

**Пример 8.3.** Таблица неодређених интеграла

1.  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1;$
2.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$
3.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \int e^x dx = e^x + c;$
4.  $\int \sin x dx = -\cos x + c;$
5.  $\int \cos x dx = \sin x + c;$
6.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c;$
7.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c;$
8.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c;$
9.  $\int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c;$
10.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + c;$
11.  $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c.$

**Решење:** За 1. до 9., доказали смо у претходном поглављу да су изводи функција са леве стране подинтегралне функције. Докажимо исто то за 10.

$$\begin{aligned}(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}|)' &= \frac{1}{|x + \sqrt{x^2 \pm 1}|} \operatorname{sgn}(x + \sqrt{x^2 \pm 1}) \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm 1}}\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}} \frac{x + \sqrt{x^2 \pm 1}}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}.\end{aligned}$$

△

Овде напомињемо да неодређени интергралаи  $\int e^{-x^2} dx, \int \cos^2 x dx, \int \sin^2 x dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx,$  постоје али не могу да буду представљени као коначни изрази у којима фигуришу елементарне функције. Отуда, они не могу да буду израчунати класичним методама интеграције које ћемо да научимо у овом одељку.

## 8.1 Основне методе интеграције, метода смене

**Теорема 8.3.** Нека је  $F(x)$  примитивна функција функције  $f(x)$  на интервалу  $(a, b)$ . Нека је  $\varphi : (c, d) \rightarrow (a, b)$  диференцијабилна функција. Тада,  $F(\varphi(x))$  је примитивна функција функције  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  тј. важи

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(x)) + c.$$

**Доказ:** Нека је  $F'(x) = f(x)$  за све  $x \in (a, b)$  и нека је  $\varphi : (c, d) \rightarrow (a, b)$  диференцијабилна. Тада је

$$(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

што комплетира доказ. □

**Пример 8.4.** Израчунати следеће интеграле

1.  $\int e^{\sin x} \cos x dx;$

2.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arccos x};$

3.  $\int \frac{dx}{\cos x};$

4.  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx;$

5.  $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

**Решење:** Идеја је да у подинтегралном изразу препознамо функцију која дефинише смену и њен диференцијал.

1. Уводимо смену  $\sin x = t$ ,  $\cos x dx = dt$

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^t dt = e^t + c = e^{\sin x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. Уводимо смену  $\arccos x = t$ ,  $-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} = - \int \frac{dt}{t} = - \ln |t| + c = - \ln |\arccos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\cos x} \frac{\cos x}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx.$$

Уводимо смену  $\sin x = t$ ,  $\cos x dx = dt$ . Тако добијамо

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

4. Приметимо да се као поткорена величина појављује израз  $a^2 - x^2$ . Отуда,

$$a^2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq x^2 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{a} \leq 1.$$

Тада,

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx.$$

Овде уводимо смену  $\frac{x}{a} = \sin t$ ,  $dx = a \cos t dt$ , како  $\frac{x}{a} \in [-1, 1]$  следи да  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  па је  $\cos t > 0$ . Тако добијамо

$$\begin{aligned} I &= a \int \sqrt{1 - \sin^2 t} a \cos t dt = a^2 \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t = a^2 \int \cos^2 t dt \\ &= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left( \int dt + \int \cos 2t dt \right) = \\ &= \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + c = \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} 2 \sin t \cos t \right) + c \\ &= \frac{a^2}{2} (t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}) + c \\ &= \frac{a^2}{2} (\arcsin x + \sin \arcsin x \sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}) + c \\ &= \frac{a^2}{2} (\arcsin x + x \sqrt{1 - x^2}) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5. Уводимо смену  $\frac{x}{a} = \operatorname{tgt}$ ,  $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$ ,  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{a^3} \int \frac{dx}{\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^3} \int \frac{adt}{(1 + \operatorname{tgt}^2)^{\frac{3}{2}} \cos^2 t} \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{\cos^3 t}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{a^2} \int \cos t dt = \frac{1}{a^2} \sin t + c \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{\operatorname{tgt}}{\sqrt{1 + \operatorname{tgt}^2}} + c = \frac{1}{a^2} \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

△

## 8.2 Метода парцијалне интеграције

**Теорема 8.4.** Нека су  $u, v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  диференцијабилне функције. Тада, постоји  $\int u dv$  ако постоји  $\int v du$  и важи

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

**Доказ:** Како су  $u$  и  $v$  диференцијабилне функције,  $uv : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  је диференцијабилна функција и важи

$$d(uv) = u dv + v du.$$

Ако применимо оператор интеграције на претходни израз добијамо

$$\begin{aligned} \int d(uv) &= \int (u dv + v du), \\ uv &= \int u dv + \int v du \end{aligned}$$

чиме је теорема доказана. □

**Пример 8.5.** Израчунати интеграле

- $\int \sqrt{x} \ln x dx$ ;
- $\int \arctg x dx$ ;
- $\int x \arctg^2 x dx$ .

**Решење:** Код оваквих интеграла за  $v$  се узима функција која може да се интегрира а за  $u$  остатак од подинтегралног израза.

За први интеграл

$$u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}$$
$$dv = \sqrt{x} dx, \quad v = \int \sqrt{x} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}.$$

Тада,

$$\int \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \int \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{x} = \frac{2}{3} \left( x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

За други интеграл

$$u = \arctg x, \quad du = \frac{1}{1+x^2};$$
$$dv = dx, \quad v = \int dx = x.$$

Тада,

$$I = \int \arctg x dx = x \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2}.$$

Овде уводимо смену  $1+x^2 = t$ ,  $x dx = \frac{dt}{2}$ . Тако добијамо

$$I = x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln |t| + c = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

За трећи интеграл се узима да је  $u = \arctg^2 x$  а  $dv = x dx$ . Ради се слично претходном примеру.  $\triangle$

**Пример 8.6.** Израчунати интеграле  $\int x^2 \sin x dx$ ,  $\int x^3 e^{2x} dx$ .

**Решење:** Интеграл облика  $\int p_n(x) \sin(ax) dx$ ,  $\int p_n(x) \cos(ax) dx$  и  $\int p_n(x) e^{ax} dx$  се решавају са  $n$  парцијалних интерграција где се за  $u$  увек узима полином  $p_n(x)$  а за  $dv$  остатак израза као што илуструје следеће решење.

За  $\int x^2 \sin x dx$  нека је

$$u = x^2, \quad du = 2x dx;$$
$$dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x.$$

Тада,

$$I = \int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx.$$

Овде опет радимо парцијалну интеграцију и то

$$u = x, \quad du = dx;$$

$$dv = \cos x dx, \quad v = \sin x$$

па добијамо

$$I = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Други интеграл се ради аналогно. △

**Пример 8.7.** Израчунати интеграл  $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ .

**Решење:** Прво радимо малу трансформацију подинтегралног израза.

$$I = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx - \int x \frac{x}{(1+x^2)^2} dx.$$

Сада,

$$u = x, \quad du = dx \\ dv = \frac{x}{(1+x^2)^2} dx, \quad v = \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx.$$

За интеграл  $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$  уводимо смену  $1+x^2 = t$ ,  $x dx = \frac{dt}{2}$  па је

$$v = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Тако добијамо

$$I = \arctg x + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \left( \arctg x + \frac{x}{1+x^2} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

△

**Пример 8.8.** Израчунати  $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Решење:** За  $n = 1, 2$  решења су позната. Применићемо сличну трансформацију као у претходном примеру:

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int x \frac{xdx}{(1+x^2)^n}.$$

Аналогно претходном задатку,

$$u = x, \quad du = dx \\ dv = \frac{x}{(1+x^2)^n} dx, \quad v = \int \frac{x}{(1+x^2)^n} dx.$$

За интеграл  $\int \frac{x}{(1+x^2)^n} dx$  уводимо смену  $1+x^2 = t$ ,  $x dx = \frac{dt}{2}$  па је

$$v = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{2(1-n)} \frac{1}{t^{n-1}} = \frac{1}{2(1-n)} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

Тако добијамо

$$I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} \\ = \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}.$$

Применом аналогних трансформација се раде интеграли  $I_{n-1}, I_{n-2}, \dots, I_2$  и заменом у претходном изразу се добија решење. △

### 8.2.1 Интеграција рационалних функција

**Дефиниција 8.3.** Нека су  $p_n, q_m$  полиноми са реалним коефицијентима. Тада функцију

$$R(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$$

називамо рационална функција.

**Теорема 8.5.** (Еуклидов алгоритам дељења) Нека су  $p_n$  и  $q_m$  полиноми са реалним коефицијентима и нека је  $\deg p_n = n, \deg q_m = m$ . Тада постоје јединствени полиноми  $g$  и  $r$  такви да је  $\deg r < m$  и

$$p_n(x) = g(x)q_m(x) + r(x).$$

Полиноме  $g$  и  $r$  из претходне теореме називамо количник и остатак дељења полинома  $p_n$  полиномом  $q_m$ . Отуда, свака рационална функција  $R(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$  може да се представи у облику

$$R(x) = \frac{g(x)q_m(x) + r(x)}{q_m(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q_m(x)}$$

где је  $q$  полином (чији се интеграл лако рачуна) а  $R_1(x) = \frac{r(x)}{q_m(x)}$  је рационална функција таква да је  $\deg r < m$ .

За интеграцију рационалних функција којима је степен бројиоца већи од степена имениоца користимо две теореме које ће да буду доказане на предмету Математика 2.

**Теорема 8.6.** (Сводљивост полинома) Сваки полином  $q_m$  са реалним коефицијентима може да се представи као производ полинома облика  $(x - a)^k$  и  $(x^2 + bx + c)^m$  где је  $b^2 - 4c < 0$ .

**Теорема 8.7.** Ако је

$$q_m(x) = (x - a_1)^{n_1} \cdots (x - a_k)^{n_k} \cdot (x^2 + b_1x + c_1)^{m_1} \cdots (x^2 + b_lx + c_l)^{m_l}$$

разлагање полинома  $q_m$  тада, рационална функција  $R(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$  где је  $n < m$  може да се представи као збир

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{A_{1i}}{(x - a_1)^i} + \cdots + \sum_{i=1}^{n_k} \frac{A_{ki}}{(x - a_k)^i} + \sum_{i=1}^{m_1} \frac{B_{1i}x + C_{1i}}{(x^2 + b_1x + c_1)^i} + \cdots + \sum_{i=1}^{m_l} \frac{B_{li}x + C_{li}}{(x^2 + b_lx + c_l)^i}.$$

Сада, када интегралимо функцију  $R(x)$ , она је збир интеграла  $\int \frac{A_{ji}}{(x - a_j)^i} dx$  и интеграла  $\int \frac{B_{ji}x + C_{ji}}{(x^2 + b_jx + c_j)^i} dx$ .

Интеграл  $\int \frac{dx}{(x - a)^k}$  се једноставно решавају сменом  $x - a = t, dx = dt$  и тако добијамо

$$\int \frac{dx}{(x - a)^k} = \int \frac{dt}{t} = \begin{cases} \ln |t| + c = \ln |x - a| + c, & k = 1 \\ \frac{1}{1-k} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + c, & k > 1 \end{cases}$$

Интеграл  $\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k} dx$ , где је  $b^2 - 4c < 0$  се једноставном трансформацијом сведе на интеграле  $\int \frac{dx}{(t^2+1)^k}$  и  $\int \frac{tdt}{(t^2+1)^k}$  као што илуструје следећи пример.

**Пример 8.9.** Израчунати  $\int \frac{xdx}{(x^2+x+1)^k}$ ,  $k > 1$ .

**Решење:** Израз у имениоцу трансформишемо на следећи начин

$$x^2 + x + 1 = \frac{3}{4} \left( \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right).$$

Тада

$$I = \int \frac{xdx}{(x^2+x+1)^k} = \frac{4^k}{3^k} \int \frac{xdx}{\left( \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right)^k}.$$

Овде уводимо смену  $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = t$ ,  $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dt$ ,  $x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}t - 1)$ . Тако добијамо

$$I = \frac{4^k \sqrt{3}}{3^k \cdot 2} \int \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3}t - 1)}{(t^2 + 1)^k} dt = \frac{4^{k-1} \sqrt{3}}{3^k} \left( \sqrt{3} \int \frac{t dt}{(t^2 + 1)^k} - \int \frac{dt}{(1 + t^2)^k} \right).$$

Интеграл  $\int \frac{t dt}{(t^2+1)^k}$  се ради сменом  $t^2 + 1 = u$ ,  $t dt = \frac{du}{2}$  и једнак је

$$\int \frac{t dt}{(t^2 + 1)^k} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^k} = \frac{1}{2(1-k)} \frac{1}{(t^2 + 1)^{k-1}} + c$$

док се интеграл  $\int \frac{dt}{(1+t^2)^k}$  ради са  $k$  парцијалних интеграција као што је описано у претходном примеру.  $\triangle$

За вежбу, урадити интеграл  $\int \frac{2x^3+3x^2+2x+1}{x^2+x+1} dx$ . Напомињемо да је степен бројиоца већи од степена имениоца те је потребно прво извршити дељење бројиоца имениоцем.

**Пример 8.10.** Израчунати интеграл  $\int \frac{x+2}{x(x^2+1)^2} dx$ .

**Решење:** Овде прво вршимо трансформацију рационалне функције

$$\frac{x+2}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Изједначавањем коефицијената добија се систем

$$\begin{aligned} 0 &= A + B; \\ 0 &= C; \\ 0 &= 2A + B + D; \\ 1 &= C + E; \\ 2 &= A \end{aligned}$$

који има решење  $A = 2$ ,  $B = -2$ ,  $C = 0$ ,  $D = -2$ ,  $E = 1$ . Тада,

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x(x^2+1)^2} dx &= 2 \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{xdx}{x^2+1} - 2 \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \\ &= 2 \ln|x| - \ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \left( \arctg x + \frac{x}{x^2+1} \right) + c \\ &= \ln \frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} \frac{2+x}{x^2+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\triangle$

### 8.2.2 Интеграција неких ирационалних функција

У овом одељку наводимо неколико примера интеграција функција у којима фигуришу коренови неког реда. Напомињемо да рационална функција може да се буде и количник полинома са више променљивих.

#### • Интеграли облика

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$$

Ако је  $n = \text{NZS}(n_1, \dots, n_k)$ , сменом  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$  интеграл се своди на интеграл рационалне функције.

**Пример 8.11.** Израчунати  $\int \frac{1}{x+1} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$ .

**Решење:** По наведеном методу, уводимо смену

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t, \quad \frac{x-1}{x+1} = t^2, \quad x = \frac{t^2-1}{1-t^2},$$

$$dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt.$$

Тада,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x+1} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx &= \int \frac{1}{1 + \frac{t^2+1}{1-t^2}} t \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt = 2 \int \frac{t^2}{1-t^2} dt \\ &= \int \frac{t^2-1+1}{1-t^2} dt = 2 \left( - \int dt + \int \frac{dt}{1-t^2} \right) \\ &= -2t + \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c \\ &= -2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \ln \left| \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} \right| + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

△

**Пример 8.12.** Израчунати интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt[3]{x+1})^2}$ .

**Решење:** У овом интегралу фигуришу трећи и квадратни корен. Како је  $\text{NZS}(2, 3) = 6$ , уводимо смену

$$\sqrt[6]{x+1} = t, \quad x+1 = t^6, \quad dx = 6t^5 dt.$$

Тако добијамо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt[3]{x+1})^2} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)^2} = 6 \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = 6 \int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2} dt \\ &= 6 \left( \int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} \right) \\ &= 6 \left( \arctgt - \frac{1}{2} \arctgt - \frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2} \right) + c \\ &= 3 \arctgt - 3 \frac{t}{1+t^2} + c \\ &= 3 \arctg \sqrt[6]{x+1} - 3 \frac{\sqrt[6]{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

△

• **Интегралы облика**

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

Ови интегралы се решавају тзв. Ојлеровом сменом

- $a > 0$ , смена  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t$ ;
- $c > 0$ , смена  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$ ;
- ако  $(x - x_1)|ax^2 + bx + c$ , смена  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}(x - x_1)t$ .

**Пример 8.13.** Израчунати  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ .

**Решење:** Уводимо смену

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1} &= x+t, \\ x^2+1 &= x^2+2xt+t^2, \\ x &= \frac{1-t^2}{2t}, \\ dx &= -\frac{t^2+1}{2t^2}dt, \\ \sqrt{x^2+1} &= \frac{1-t^2}{2t} + t = \frac{1+t^2}{2t}.\end{aligned}$$

Тако добијамо

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \int \frac{2t}{1+t^2} \left( -\frac{t^2+1}{2t^2} \right) dt = -\int \frac{dt}{t} \\ &= -\ln|t| + c = -\ln|x - \sqrt{x^2+1}| + c \\ &= \ln \frac{1}{|x - \sqrt{x^2+1}| + c} = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

△

За вежбу, израчунати интеграл  $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$ .

### 8.2.3 Интеграција неких тригонометријских функција

• **Интегралы облика**

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

где је  $R$  рационална функција. Уводимо смену  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ ,  $x = 2 \operatorname{arctg} t$ ,  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ . Тада

$$\begin{aligned}\sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Тако добијамо интеграл

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

који представља интеграл рационалне функције.

**Пример 8.14.** Израчунати интеграл  $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ .

**Решење:** Сменом  $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$  добијамо

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + c, c \in \mathbb{R}.$$

△

Напомињемо да постоје интегрални облици у којима у рационалној функцији фигуришу синус и косинус који могу да се реше једноставнијом сменом.

**Пример 8.15.** Израчунати интеграл  $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin x}$ .

**Решење:**

$$I = \int \frac{dx}{\cos^3 x \sin x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^4 x \sin x} = \int \frac{\cos x dx}{(1-\sin^2 x)^2 \sin x}.$$

Овде уводимо смену  $\sin x = t$ ,  $\cos x dx = dt$  и тако добијамо интеграл

$$I = \int \frac{dt}{t(1-t^2)^2}$$

који је интеграл рационалне функције. Решење интеграла је

$$I = \ln |\operatorname{tg} x| + \frac{1}{2 \cos^2 x} + c, c \in \mathbb{R}.$$

△

• **Интегрални облици**

$$\int R(\operatorname{tg} x) dx.$$

Решавају се сменом  $\operatorname{tg} x = t$ ,  $x = \operatorname{arctg} t$ ,  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ . Добија се интеграл рационалне функције

$$\int R(t) \frac{dt}{1+t^2}.$$

**Пример 8.16.** Израчунати  $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

**Решење:** Сменом  $\operatorname{tg} x = t$  добијамо

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2} \left( \operatorname{arctg} t + \frac{t}{1+t^2} \right) + c = \frac{1}{2} \left( x + \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \right) + c, c \in \mathbb{R}.$$

△

• **Интегрални облици**

$$\int \sin^m x \cos^n x dx.$$

Овде разликујемо два случаја. Прво, ако је бар један од степена синуса или косинуса непаран, тада

$$\begin{aligned} \int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx &= \int (\sin^2 x)^k \cos^n x \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \sin x dx \\ &= - \int (1-t^2)^k t^n dt. \end{aligned}$$

Користили смо смену  $\cos x = t$ ,  $-\sin x dx = dt$ , добијен је интеграл полинома.

Друго, ако су степени синуса и косинуса парни, користимо трансформацију

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

и примењујемо на следећи начин:

$$\int \sin^{2k} x \cos^{2n} x dx = \int (\sin^2 x)^k (\cos^2 x)^n dx = \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^n dx$$

поступак настављамо док бар један од степенова синуса или косинуса буде непаран и примењујемо претходну смену.

**Пример 8.17.** Израчунати интеграле  $\int \cos^5 x dx$ ,  $\int \cos^4 x dx$ .

**Решење:** За први интеграл

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx \\ &= \int (1 - t^2)^2 dt = \int (1 - 2t^2 + t^4) dt = t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + c \\ &= \sin x - 2\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Користили смо смену  $\sin x = t$ .

За други интеграл

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4}(x + \sin 2x) + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \\ &= \frac{1}{4}(x + \sin 2x) + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \sin 4x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

△

• **Интеграли облика**

$$\int \sin ax \cos bxdx, \quad \int \sin ax \sin bxdx, \quad \int \cos ax \cos bxdx.$$

Решавају се коришћењем трансформације производа синуса или косинуса у збир:

$$\begin{aligned} \sin ax \cos bx &= \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x); \\ \sin ax \sin bx &= \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x); \\ \cos ax \cos bx &= \frac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x). \end{aligned}$$

**Пример 8.18.** Израчунати интеграл  $\int \sin 5x \cos 3xdx$ .

**Решење:**

$$\int \sin 5x \cos 3xdx = \frac{1}{2} \left( \int \sin 8xdx + \int \sin 2xdx \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\cos 8x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

△

## 9 Одређени интеграл

Мотивацију за увођење одређеног интеграла налазимо у Архимедовом доказу формуле за површину круга. Ако круг изделимо на  $n$  подударних делова дијагоналама и делове сложимо као на графику, добијени објекат личи на правоугаоник чије су стране полупречник круга  $r$  и полу-обим  $r\pi$  а све финије поделе се приближавају правоугаонику.

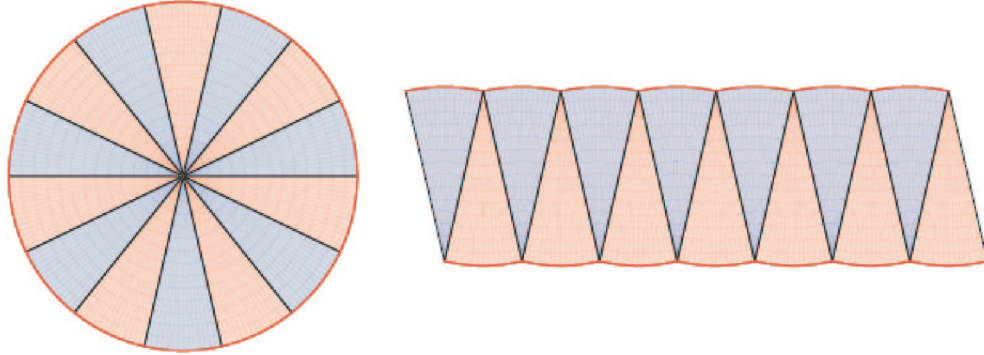


График 29: Подела круга ради добијања површине.

Отуда, површина круга полупречника  $r$  је једнака површини добијеног правоугаоника тј.  $r \cdot r\pi = r^2\pi$ .

Главни задатак у овом поглављу ће да буде одређивање површине криволинијског трапеза

$$\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

где је  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  произвољна функција.

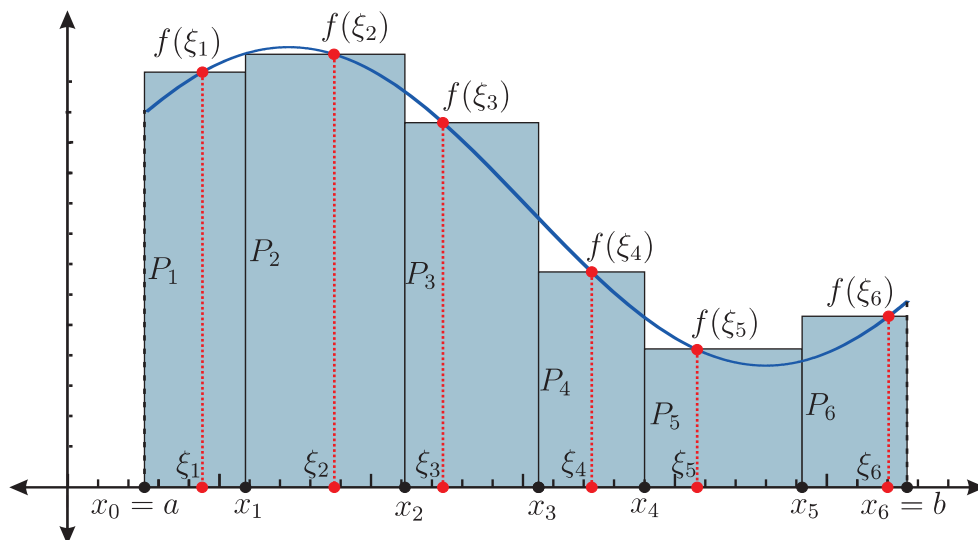


График 30: Апроксимација криволинијског трапеза правоугаоницима.

Идеја је да површину трапеза  $\mathcal{T}$  апроксимирамо збиром површина фино одабраних правоугаоника.

Нека је

$$\mathcal{P} = \{x_i \in [a, b] \mid i = 0, 1, \dots, n; a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

подела интервала  $[a, b]$  растућим низом тачака и нека је

$$\mathcal{E} = \{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \mid i = 1, \dots, n\}$$

фамилија истакнутих тачака.

Уочимо правоугаонике  $P_i = [x_{i-1}, x_i] \times [0, f(\xi_i)]$  са основом дужине  $x_i - x_{i-1}$  и висином  $f(\xi_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тада, површина трапеза  $\mathcal{T}$  је приближно једнака суми површина правоугаоника  $P_i$  тј.

$$\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}).$$

Суму  $\sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E})$  називамо интегрална сума функције  $f$  на интервалу  $[a, b]$  која одговара подели  $\mathcal{P}$  са истакнутим тачкама  $\mathcal{E}$ .

Да би што прецизније одредили површину трапеза  $\mathcal{P}$  потребно је да интервал  $[a, b]$  равномерно изделимо на што ситније подинтервале. У ту сврху уводимо следећу дефиницију.

**Дефиниција 9.1.** *Параметар поделе  $\mathcal{P} = \{x_i \in [a, b] \mid i = 0, 1, \dots, n; a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  интервала  $[a, b]$  је реалан број*

$$\lambda(\mathcal{P}) = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}).$$

Јасно је да смањењем параметра поделе, односно дужине највећег интервала, добијамо све ситнију поделу трапеза  $\mathcal{T}$  на правоугаонике. Нас ће да занима гранични случај интегралне суме када параметар поделе тежи нули те отуда следећа дефиниција.

**Дефиниција 9.2.** *Кажемо да је*

$$\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = I$$

ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathcal{P}, \mathcal{E}) \lambda(\mathcal{P}) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - I| < \varepsilon.$$

Тада,  $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E})$  је тачна површина трапеза  $\mathcal{T}$ .

**Дефиниција 9.3.** *Ако постоји  $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = I$ ,  $|I| < \infty$  и он не зависи од поделе  $\mathcal{P}$  нити од истакнутих тачака  $\mathcal{E}$ , њега називамо одређени интеграл функције  $f$  на интервалу  $[a, b]$ . Тада пишемо*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E})$$

и кажемо да је функција  $f$  интегрална на интервалу  $[a, b]$  у ознаци  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ .

**Пример 9.1.** Израчунати интеграл  $\int_a^b c \, dx$ .

**Решење:** Подинтегрална функција у овом случају је константна функција  $f(x) = c$ ,  $x \in [a, b]$ . Нека је  $\mathcal{P} = \{x_i \in [a, b] \mid i = 0, 1, \dots, n; a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  подела интервала  $[a, b]$  са истакнутим тачкама  $\mathcal{E} = \{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \mid i = 1, \dots, n\}$ . Тада

$$\begin{aligned} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) \\ &= c(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1}) = c(x_n - x_0) = c(b - a). \end{aligned}$$

Отуда,

$$\int_a^b c \, dx = \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} c(b - a) = c(b - a).$$

△

**Пример 9.2.** Дирихлеова функција  $\chi_{\mathbb{Q}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  није интеграбилна на  $[0, 1]$ .

**Решење:** Присетимо се да је Дирихлеова функција дата са

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Нека је  $\mathcal{P} = \{x_i \in [a, b] \mid i = 0, 1, \dots, n; 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1\}$  подела интервала  $[0, 1]$  са истакнутим тачкама  $\mathcal{E} = \{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \mid i = 1, \dots, n\}$ . Тада

$$\sigma(\chi_{\mathbb{Q}}, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = \sum_{i=1}^n \chi_{\mathbb{Q}}(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \begin{cases} 1, & \mathcal{E} \subset \mathbb{Q}, \\ 0, & \mathcal{E} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Отуда, интегрална сума, а самим тим и њена гранична вредност, зависе од избора истакнутих тачака па закључујемо да

$$\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(\chi_{\mathbb{Q}}, \mathcal{P}, \mathcal{E})$$

не постоји.

△

## 9.1 Интеграбилност функција

У овом одељку анализирамо својства интеграбилних функција и одређујемо довољне услове да функција буде интеграбилна.

**Теорема 9.1.** Свака интеграбилна функција на интервалу  $[a, b]$  је ограничена на  $[a, b]$ .

**Доказ:** Нека је  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  интеграбилна. Претпоставимо да  $f$  није ограничена одозго. Нека је  $\mathcal{P} = \{x_i \in [a, b] \mid i = 0, 1, \dots, n; a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  произвољна подела интервала  $[a, b]$ .

Нека је  $M > 0$  произвољно. Постоји подинтервал  $[x_{k-1}, x_k]$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$  на којем функција  $f$  није ограничена (у супротном, ако би  $f$  била ограничена

на сваком интервалу  $[x_{i-1}, x_i]$ , била би ограничена и на њиховој унији  $[a, b]$ . Нека су  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$  произвољне тачке и нека је

$$\sigma_0 = \sum_{i \neq k} f(x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Због неограничености функције  $f$  на  $[x_{k-1}, x_k]$ , постоји  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$  тако да је

$$f(\xi_k) > \frac{M - \sigma_0}{x_k - x_{k-1}}.$$

Ако је  $\mathcal{E} = \{\xi_i \mid i = 1, \dots, n\}$  тада

$$\begin{aligned} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i \neq k} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &> \sigma_0 + \frac{M - \sigma_0}{x_k - x_{k-1}}(x_k - x_{k-1}) = M. \end{aligned}$$

Дакле, за произвољну поделу  $\mathcal{P}$ , постоје истакнуте тачке  $\mathcal{E}$  тако да се интегрална сума  $\sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E})$  може учинити произвољно великом што није могуће ако  $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E})$  постоји.  $\square$

Постоји метода тзв. несвојствених интеграла којом је могуће интегралити неограничене функције и о томе ће бити речи у наставку.

**Теорема 9.2.** Свака непрекидна функција  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  је интегрална на  $[a, b]$ .

**Доказ:** Нека је  $\mathcal{P} = \{x_i \in [a, b] \mid i = 0, 1, \dots, n; a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  произвољна подела интервала  $[a, b]$  са истакнутим тачкама  $\mathcal{E} = \{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \mid i = 1, \dots, n\}$ .

Како је  $f$  непрекидна на сваком  $[x_{i-1}, x_i]$ , по Вајерштрасовој теорему постоје  $x_i^m, x_i^M \in [x_{i-1}, x_i]$  тако да је

$$f(x_i^m) = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad f(x_i^M) = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

за све  $i = 1, \dots, n$ .

Уочимо суме

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n f(x_i^m)(x_i - x_{i-1}), \quad S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n f(x_i^M)(x_i - x_{i-1}).$$

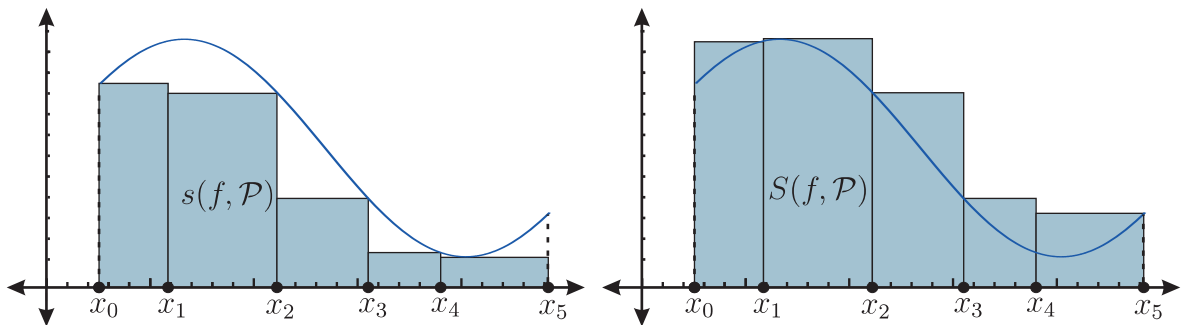


График 31: Дарбуове суме.

Приметимо (график изнад) да сума  $s(f, \mathcal{P})$  расте а да  $S(f, \mathcal{P})$  опада када се параметар поделе  $\mathcal{P}$  довољно смањује. Такође, за произвољну поделу  $\mathcal{P}$  важи да је

$$s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}).$$

Дакле,  $s(f, \mathcal{P})$  расте и ограничена је одозго а  $S(f, \mathcal{P})$  опада и ограничена је одозо када  $\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0$  што значи да

$$\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} s(f, \mathcal{P}), \quad \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} S(f, \mathcal{P})$$

постоје.

$$\text{Докажимо да је } \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} (S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P})) = 0.$$

Нека је  $\varepsilon > 0$  произвољно. Због непрекидности функције  $f$  на  $[a, b]$ , постоји  $\delta > 0$  тако да за све  $x_1, x_2 \in [a, b]$

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}.$$

Нека је  $\mathcal{P}$  подела интервала  $[a, b]$  таква да је  $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ . Тада,  $|x_i^M - x_i^m| \leq |x_i - x_{i-1}| < \delta$  (јер  $x_i^M, x_i^m \in [x_{i-1}, x_i]$ ) за све  $i = 1, \dots, n$  па је

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n (f(x_i^M) - f(x_i^m))(x_i - x_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{(b-a)}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{(b-a)} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{(b-a)}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Дакле,  $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} S(f, \mathcal{P}) = \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} s(f, \mathcal{P}) = I$ .

Како за произвољну поделу  $\mathcal{P}$  са истакнутим тачкама  $\mathcal{E}$  важи

$$\begin{aligned} f(x_i^m) &\leq f(\xi_i) \leq f(x_i^M), \\ f(x_i^m)(x_i - x_{i-1}) &\leq f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq f(x_i^M)(x_i - x_{i-1}), \\ \sum_{i=1}^n f(x_i^m)(x_i - x_{i-1}) &\leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n f(x_i^M)(x_i - x_{i-1}), \\ s(f, \mathcal{P}) &\leq \sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) \leq S(f, \mathcal{P}) \end{aligned}$$

по теореме о укљештењу, добијамо да је

$$\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = I$$

чиме је теорема доказана. □

Малом модификацијом претходног доказа може да се докаже и следеће тврђење

**Теорема 9.3.** Свака монотона функција  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  је интегрална на  $[a, b]$ .

**Пример 9.3.** Израчунати интеграл  $\int_a^b x dx$ .

**Решење:** Како је функција  $f(x) = x$  непрекидна, она је интегралбилна што значи да гранична вредност  $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E})$  постоји. Отуда, нема потребе да претходни лимес рачунамо за произвољне поделе већ је довољно да га израчунамо користећи одабрану фамилију подела чији параметар тежи нули. У овом примеру користећемо тзв. еквилистантну поделу интервала.

Нека је  $n \in \mathbb{N}$  произвољно и нека је  $h = \frac{b-a}{n}$ . Нека је

$$\mathcal{P} = \{x_k = a + kh \mid k = 0, 1, \dots, n\}, \quad \mathcal{E} = \{\xi_k = a + kh \mid k = 1, \dots, n\}.$$

Тада,  $x_k - x_{k-1} = h$  за све  $k = 1, \dots, n$  па,  $\lambda(\mathcal{P}) = h$  што значи да  $\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0$  ако  $n \rightarrow \infty$ .

Отуда,

$$\begin{aligned} \int_a^b x dx &= \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a + kh)h = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( ah \sum_{k=1}^n 1 + h^2 \sum_{k=1}^n k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( na \frac{b-a}{n} + \frac{b^2 - 2ab + a^2 n(n-1)}{2} \right) \\ &= ab - a^2 + \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{n^2} \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$

△

На сличан начин могу да се одреде интеграли  $\int_a^b x^2 dx$ ,  $\int_a^b x^3 dx$  итд.

## 9.2 Особине одређеног интеграла

Из дефиниције одређеног интеграла је очигледно следеће.

**Дефиниција 9.4.** Нека је  $f$  дата функција. Тада

- $\int_a^a f(x) dx = 0$ ;
- $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$ .

Сада наводимо неколико особина одређеног интеграла.

**Теорема 9.4.** (Линеарност интеграла) Ако  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$  тада  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a, b]$  за произвољне  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и важи

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

**Доказ:** Нека  $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E})$  и  $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(g, \mathcal{P}, \mathcal{E})$  постоје. Тада

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx &= \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(\alpha f + \beta g, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i))(x_i - x_{i-1}) \\ &= \alpha \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \beta \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

□

Како се на овом курсу ради интеграција непрекидних функција, следеће тврђење наводимо без доказа.

**Теорема 9.5.** Ако  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$  тада

- $f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$ ;
- $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ ;
- $\frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a, b]$ , при том  $f(x) > 0$  за све  $x \in [a, b]$ ;
- $f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ , за произвољан  $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ .

**Теорема 9.6.** (Адитивност одређеног интеграла) Нека је  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  и нека је  $c \in (a, b)$ . Тада је

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Доказ:** Како је  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , на основу претходне теореме следи да  $f \in \mathcal{R}[a, c]$  и  $f \in \mathcal{R}[c, b]$ .

Нека је  $\mathcal{P}_1 = \{x_i \mid i = 1, \dots, n; a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = c\}$  подела интервала  $[a, c]$  са истакнутим тачкама  $\mathcal{E}_1 = \{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \mid i = 1, \dots, n\}$  и нека је  $\mathcal{P}_2 = \{y_i \mid i = 1, \dots, m; c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b\}$  подела интервала  $[c, b]$  са истакнутим тачкама  $\mathcal{E}_2 = \{\eta_i \in [y_{i-1}, y_i] \mid i = 1, \dots, m\}$ .

Тада,  $\mathcal{P}_c = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$  је подела интервала  $[a, b]$  која садржи тачку  $c$  јер

$$0 < x_1 < \dots < x_n = c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b$$

а  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$  је одговарајућа фамилија истакнутих тачака и важи

$$\lambda(\mathcal{P}_c) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lambda(\mathcal{P}_1) \rightarrow 0 \wedge \lambda(\mathcal{P}_2) \rightarrow 0.$$

Како по претпоставци  $\lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E})$  постоји, он може да се израчуна и помоћу

подела које садрже тачку  $c$ . Отуда

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{\lambda(\mathcal{P}_c) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}_c, \mathcal{E}) = \lim_{\lambda(\mathcal{P}_c) \rightarrow 0} \left( \sum_{i=0}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=0}^m f(\eta_j)(y_j - y_{j-1}) \right) \\ &= \lim_{\lambda(\mathcal{P}_1) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \lim_{\lambda(\mathcal{P}_2) \rightarrow 0} \sum_{j=0}^m f(\eta_j)(y_j - y_{j-1}) \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \end{aligned}$$

чиме је теорема доказана.  $\square$

**Теорема 9.7.** (Монотоност одређеног интеграла) Нека су  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$  такве да је  $f(x) \leq g(x)$  за све  $x \in [a, b]$ . Тада

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

**Доказ:** Нека је  $\mathcal{P}$  произвољна подела интервала  $[a, b]$  са истакнутим тачкама  $\mathcal{E}$ . Тада, за све  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} f(\xi_i) &\leq g(\xi_i), \\ f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) &\leq g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \\ \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) &\leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \\ \sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) &\leq \sigma(g, \mathcal{P}, \mathcal{E}), \\ \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathcal{P}_c, \mathcal{E}) &\leq \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(g, \mathcal{P}_c, \mathcal{E}), \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

чиме је теорема доказана.  $\square$

Овде напомињемо да, иако смо одређени интеграл увели тако да израчунамо површину криволинијског трапеца која је позитивна, вредност одређеног интеграла функције може да буде и негативна или једнака нули.

**Последица 9.1.** Ако је  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $f(x) \geq 0$  за све  $x \in [a, b]$  тада је

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

**Заиста:** Ако је  $f(x) \geq 0$  за све  $x \in [a, b]$  на основу претходне теореме је

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b 0 dx = 0.$$

$\square$

**Теорема 9.8.** Ако је  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  тада

- $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx;$
- $\inf_{x \in [a, b]} f(x)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x)(b-a).$

**Доказ:** За први део, знамо да је за све  $x \in [a, b]$

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

па је због монотоности интеграла

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

што доказује да је

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Друго, како је свака интеграбилна функција ограничена, постоје  $\inf_{x \in [a, b]} f(x)$  и  $\sup_{x \in [a, b]} f(x)$  и коначни су. Тада како је за све  $x \in [a, b]$

$$\inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

због монотоности интеграла је

$$\begin{aligned} \int_a^b \inf_{x \in [a, b]} f(x) dx &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \sup_{x \in [a, b]} f(x) dx, \\ \inf_{x \in [a, b]} f(x) \int_a^b dx &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x) \int_a^b dx, \\ \inf_{x \in [a, b]} f(x)(b-a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x)(b-a) \end{aligned}$$

што доказује тврђење. □

На крају наводимо теоријски врло значајну тзв. прву теорему о средњој вредности. Разлог за термин прва је зато што се она у историји математичких наука прва појавила.

**Теорема 9.9.** (Прва теорема о средњој вредности)

- Ако је  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  и ако је  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$  а  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  тада постоји  $\mu \in [m, M]$  тако да је

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a).$$

- Ако је  $f$  непрекидна на  $[a, b]$  тада постоји  $c \in [a, b]$  тако да је

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

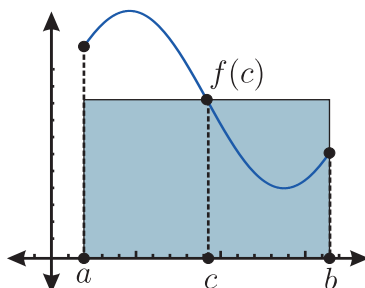


График 32: Површина трапеза је једнака површини правоугаоника.

**Доказ:** За први део, уочимо функцију  $F : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$  дату са  $F(t) = t(b - a)$ . Тада,  $F$  је непрекидна и по претходној теорему важи

$$F(m) = m(b - a) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x)(b - a) = F(M).$$

Дакле,

$$F(m) \leq \int_a^b f(x)dx \leq F(M)$$

па, по Болцано-Кошијевој теорему о међувредности, постоји  $\mu \in (m, M)$  тако да је

$$F(\mu) = \mu(b - a) = \int_a^b f(x)dx.$$

За други део, уочимо функцију  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  са  $G(x) = f(x)(b - a)$ . Како је  $f$  непрекидна на  $[a, b]$ , по Вајерштрасовој теорему постоје  $x_m, x_M \in [a, b]$  такви да је

$$f(x_m) = \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(x_M) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

На основу претходне теореме важи да је

$$\min_{x \in [a, b]} f(x)(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max_{x \in [a, b]} f(x)(b - a)$$

што имплицира да је

$$G(x_m) \leq \int_a^b f(x)dx \leq G(x_M).$$

Како је  $G$  непрекидна функција, на основу Болцано-Кошијеве теореме о међувредности постоји  $c$  које је између  $x_m$  и  $x_M$ , и које припада интервалу  $(a, b)$  тако да је

$$G(c) = f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)dx$$

чиме је теорема доказана. □

### 9.3 Њутн-Лајбницева формула

У овом одељку наводимо најзначајнију теорему овог поглавља која нам могућава да све методе интеграције неодређених интеграла применимо на рачунање одређених интеграла.

**Теорема 9.10.** *Ако је  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна на  $[a, b]$  тада је  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  дата са*

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

*примитивна функција функције  $f$  на  $[a, b]$ .*

**Доказ:** Докажимо да је

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Због адитивности одређеног интеграла важи да је

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Због непрекидности функције  $f$ , на основу прве теореме о средњој вредности, постоји  $c$  које је између  $x$  и  $x + \Delta x$  тако да је

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f'(c)(x + \Delta x - x) = f'(c)\Delta x.$$

При том  $c \rightarrow x$  када  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Тада, због непрекидности функције  $f$ ,

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} c\right) = f(x)$$

што доказује теорему. □

**Последица 9.2.** *Непрекидна функција на затвореном и ограниченом интервалу има примитивну функцију.*

**Теорема 9.11.** (Њутн-Лајбницова формула) Ако је  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  примитивна функција непрекидне функције  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  на  $[a, b]$  тада је

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

**Доказ:** Како је по претходној теореме  $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$  једна примитивна функција функције  $f$  на  $[a, b]$ , по теореме о одређивању свих примитивних функција дате функције, постоји  $c \in \mathbb{R}$  тако да је за све  $x \in [a, b]$

$$F(x) = \varphi(x) + c$$

где је  $\varphi$  функција из претходне теореме. Тада,

$$F(b) - F(a) = (\varphi(b) + c) - (\varphi(a) + c) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

□

**Пример 9.4.** Израчунати интеграл  $\int_a^b x^k dx$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq -1$ .

**Решење:** Како је  $\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)' = x^k$  за све  $x \in [a, b]$ , по Њутн-Лајбницовој формули

$$\int_a^b x^k dx = \left. \frac{x^{k+1}}{k+1} \right|_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

△

## 9.4 Рачунање одређеног интеграла

У овом одељку наводимо најосновније методе интеграције одређених интеграла.

**Теорема 9.12.** (Метода смене) Нека је  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна а  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  непрекидно-диференцијабилна бијекција. Тада

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx.$$

**Доказ:** Непрекидна функција  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  има на  $[a, b]$  примитивну функцију  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  тј. важи да је  $F'(x) = f(x)$  за све  $x \in [a, b]$ . Тада је по Њутн-Лајбницовој формули

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Како је за све  $x \in [\alpha, \beta]$

$$\left(F(\varphi(x))\right)' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

функција  $F(\varphi(x))$  је примитивна функција функције  $f(\varphi(x))\varphi'(x)$  па је по Њутн-Лајбницовој формули

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

При том,  $\varphi(\alpha) = a$  и  $\varphi(\beta) = b$  јер је функција  $\varphi$  непрекидна и бијективна па је због тога и монотона.  $\square$

**Пример 9.5.** Израчунати  $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$ ,  $a > 0$ .

**Решење:** Прво примењујемо малу трансформацију подинтегралног израза:

$$I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = a \int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx$$

Овде уводимо смену  $\frac{x}{a} = \sin t$ ,  $dx = a \cos t dt$ . Како  $\frac{x}{a} \in [0, 1]$  (јер  $t \in [0, a]$ ) и  $t = \arcsin \frac{x}{a}$  смена је добро дефинисана и пресликава  $[0, \frac{\pi}{2}]$  у интервал  $[0, a]$ . Тада,

$$\begin{aligned} I &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt \right) = \frac{a^2 \pi}{4}. \end{aligned}$$

$\triangle$

**Теорема 9.13.** Нека је  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  интегрална. Тада

- ако је  $f$  парна тада  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$ ;
- ако је  $f$  непарна тада  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ .

**Доказ:** Због адитивности интеграла важи

$$I = \int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

За леви интеграл уводимо смену  $x = -t$ ,  $dx = -dt$  и он постаје

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt.$$

Отуда, ако је функција  $f$  парна добијамо

$$I = \int_0^a f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx,$$

док, ако је функција непарна добијамо

$$I = \int_0^a f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx = - \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

□

**Теорема 9.14.** *Ако је  $f$  интеграбилна и периодична функција са периодом  $p$  тада*

$$\int_a^{a+p} f(x)dx = \int_0^p f(x)dx.$$

**Доказ:** Нека је  $f(x+p) = f(x)$  за све  $x$  из домена функције  $f$ . Тада, због адитивности интеграла

$$\int_a^{a+p} f(x)dx = \int_a^p f(x)dx + \int_p^{a+p} f(x)dx.$$

Ако за други интеграл уведемо смену  $x - p = t$  добијамо

$$\int_p^{a+p} f(x)dx = \int_0^a f(t)dt.$$

Тада је, опет због адитивности интеграла

$$I = \int_a^p f(x)dx + \int_0^a f(t)dt = \int_0^p f(x)dx.$$

□

**Теорема 9.15.** *(Метода парцијалне интеграције) Нека су  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидно-диференцијабилне на  $[a, b]$ . Тада је*

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

**Доказ:** Како су по претпоставци  $u, u', v, v'$  непрекидне функције, функција  $u'v + uv'$  је непрекидна па је и интеграбилна. Како је

$$u'v + uv' = (uv)'$$

по Њутн-Лајбницевој формули важи да је

$$\int_a^b (u'v + uv')dx = \int_a^b (uv)'dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) = uv \Big|_a^b.$$

Како је  $u'(x)dx = du$  и  $v'(x)dx = dv$  добијамо

$$\int_a^b u dv + \int_a^b v du = uv \Big|_a^b$$

чиме је теорема доказана. □

**Пример 9.6.** Израчунати интеграл  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Решење:** Важи да је

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}; \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

За  $n \geq 2$  нека је

$$u = \sin^{n-1} x, \quad du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx;$$

$$dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x.$$

Тада,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

Решавањем добијене једначине по  $I_n$  добијамо рекурзивну формулу

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Тада, ако је  $n$  парно тј.  $n = 2k$

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k} \frac{2k-3}{2k-2} I_{2k-4} = \dots = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3 \cdot 1}{2k(2k-2)\dots 4 \cdot 2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2},$$

а, ако је  $n$  непарно тј.  $n = 2k+1$  добијамо

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{2k}{2k+1} \frac{2k-2}{2k-1} I_{2k-3} = \dots = \frac{2k(2k-2)\dots 4 \cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 3 \cdot 1} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

△

## 9.5 Примена одређеног интеграла

У овом одељку наводимо неколико најосновних примера примене одређеног интеграла. Модификацијом описаних метода, могу се добити формуле за одређивање многих физичких величина.

### 9.5.1 Површина фигура у равни

Како је одређени интеграл уведен са намером да се израчуна површина криволинијског трапеза, њега можемо да искористимо да израчунамо површину фигура у равни које могу да буду добијене као унија или разлика криволинијских трапеза.

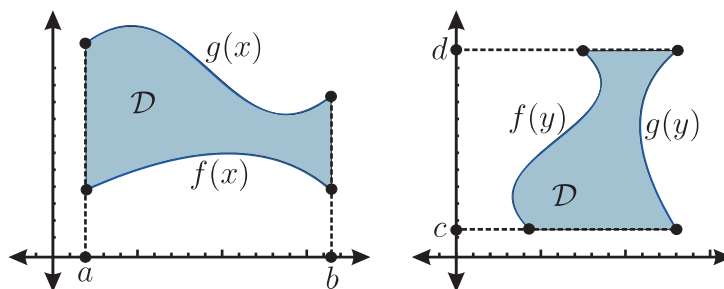


График 33: Елементарне површи у равни.

На пример, површина фигуре (приказане на графику изнад, лево)

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

где су  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  интегралбилне функције, може да се израчуна помоћу формуле

$$P(\mathcal{D}) = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

Такође, заменом улога променљивим  $x$  и  $y$ , површину фигуре (приказане на графику изнад, десно)

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, f(y) \leq x \leq g(y)\}$$

рачунамо помоћу формуле

$$P(\mathcal{D}) = \int_c^d (g(y) - f(y)) dy.$$

**Пример 9.7.** Израчунати површину елипсе дате једначином  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ .

**Решење:** Елипса приказана на графику испод је симетрична у односу на координатне осе па је зато њена површина четири пута већа од површине њеног дела из првог квадранта

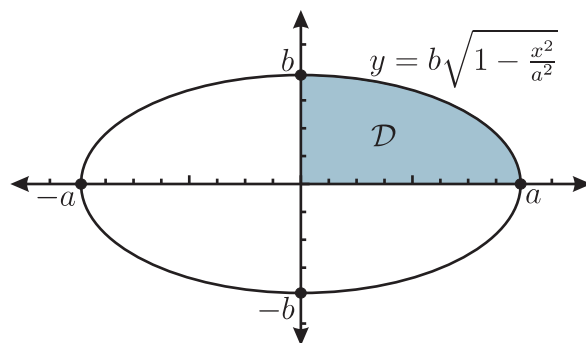


График 34: Елипса.

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right\}.$$

Отуда, површина елипсе је једнака

$$4P(\mathcal{D}) = 4 \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = ab\pi.$$

### 9.5.2 Дужина лука графика функције

Нека је  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидно-диференцијабилна функција. Одредимо дужину лука криве

$$\gamma = \{ (x, f(x)) \mid x \in [a, b] \}.$$

Нека је  $\mathcal{P} = \{x_i \mid i = 0, 1, \dots, n; a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  подела интервала  $[a, b]$ . Нека су

$$A_i = (x_i, f(x_i))$$

$i = 0, 1, \dots, n$  тачке криве  $\gamma$ . Дужину криве  $\gamma$  апроксимирамо помоћу дужине изломљене линије  $A_0A_1 \dots A_n$ .

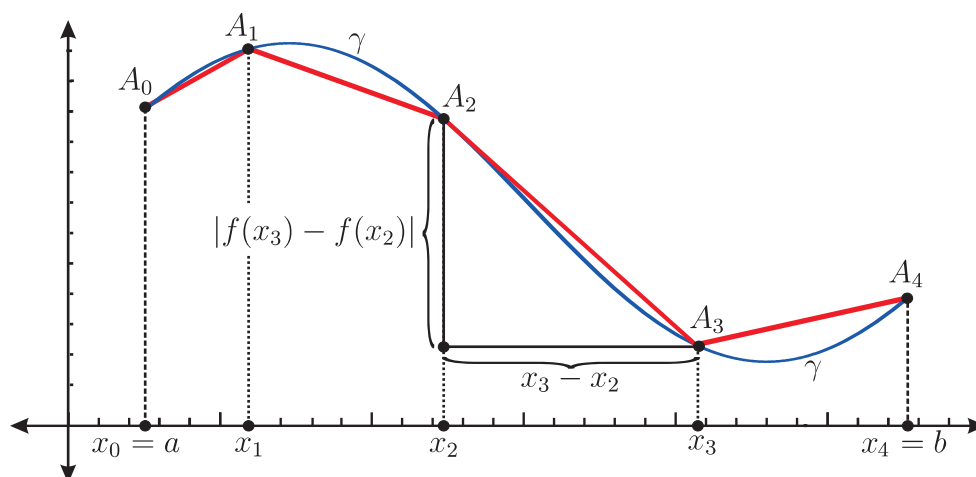


График 35: Изломљена линија апроксимира график функције.

Применом Питагорине теореме, дужина дужи  $A_{i-1}A_i$  је

$$\overline{A_{i-1}A_i} = \sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2}.$$

Како је функција  $f$  непрекидно-диференцијабилна на  $[x_{i-1}, x_i]$ , она задовољава услове Лагранжеве теореме о средњој вредности па постоји  $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$  тако да је

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

за све  $i = 1, \dots, n$ .

Тако добијамо да је за све  $i = 1, \dots, n$ .

$$\overline{A_{i-1}A_i} = \sqrt{f'^2(c_i)(x_i - x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2} = \sqrt{1 + f'^2(c_i)}(x_i - x_{i-1}).$$

Нека је сада  $\mathcal{E} = \{c_i \mid i = 1, \dots, n\}$  фамилија истакнутих тачака. Тада, дужина изломљене линије  $A_0A_1 \cdots A_n$  постаје

$$\overline{A_0A_1 \cdots A_n} = \sum_{i=1}^n \overline{A_{i-1}A_i} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'^2(c_i)}(x_i - x_{i-1}) = \sigma(\sqrt{1 + f'^2}, \mathcal{P}, \mathcal{E}).$$

Дакле, дужина изломљене линије је једнака интегралној суми  $\sigma(\sqrt{1 + f'^2}, \mathcal{P}, \mathcal{E})$ . Како је  $f'$  по претпоставци непрекидна, функција  $\sqrt{1 + f'^2}$  је непрекидна као композиција непрекидних функција па је самим тим и интегралбилна. Како се све финијим поделама интервала  $[a, b]$  добијају све боље апроксимације криве  $\gamma$  изломљеном линијом  $A_0A_1 \cdots A_n$ , дужину лука криве  $\gamma$  добијамо када  $\lambda(\mathcal{P})$  тежи нули. Отуда

$$\bar{\gamma} = \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(\sqrt{1 + f'^2}, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

### 9.5.3 Запремина обртних тела

Нека је  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  интегралбилна функција. Одредимо запремину тела  $T$  које је настало ротацијом криволинијског трапеза

$$\mathcal{T} = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

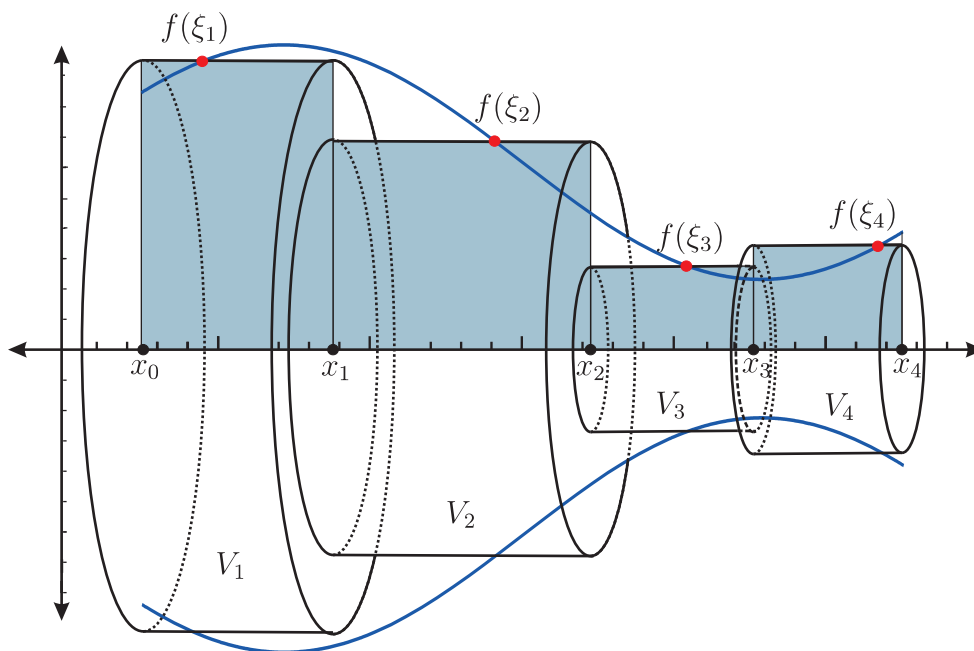


График 36: Ваљци апроксимирају обртно тело.

око  $x$ -осе. Идеја је да уместо ротације трапеза извршимо ротацију правоугаоника који апроксимирају трапез и тако запремину тела  $T$  апроксимирамо помоћу запремине ваљка као што је приказано на графику изнад.

Нека је  $\mathcal{P} = \{x_i \mid i = 0, 1, \dots, n; a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  подела интервала  $[a, b]$  и нека је  $\mathcal{E} = \{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \mid i = 1, \dots, n\}$  фамилија истакнутих тачака. Нека је  $V_i$  запремина ваљка добијеног ротацијом правоугаоника  $P_i = [x_{i-1}, x_i] \times [0, f(\xi_i)]$  око основе која се налази на  $x$ -оси,  $i = 1, \dots, n$ . Тада

$$V_i = \pi f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

за све  $i = 1, \dots, n$ . Отуда, запремина тела  $V$  је приближно једнака суми

$$\sum_{i=1}^n V_i = \pi \sum_{i=1}^n f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \pi \sigma(f^2, \mathcal{P}, \mathcal{E}).$$

Финијом поделом интервала  $[a, b]$  добијамо све боље апроксимације запремине тела  $T$  а његову тачну запремину добијемо када  $\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0$ . Тако добијамо

$$V(T) = \pi \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f^2, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Приметимо да, како је  $f$  интегралбилна на  $[a, b]$ , и  $f^2$  је интегралбилна на  $[a, b]$  што значи да интеграл  $\int_a^b f^2(x) dx$  постоји.

**Пример 9.8.** Израчунати запремину сфере полупречника  $r$ .

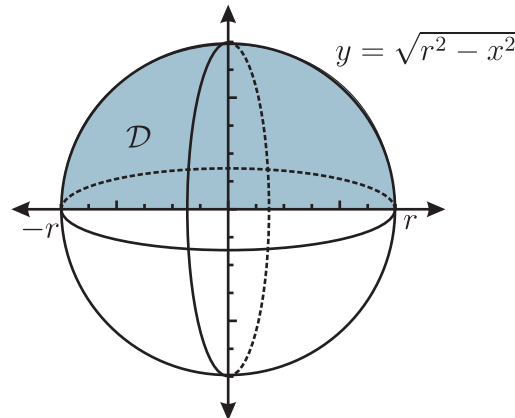


График 37: Сфера као обртно тело.

**Решење:** Сфера полупречника  $r$  може да се добије ротацијом око  $x$ -осе полу-круга датог у форми криволинијског трапеца функције  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $x \in [-r, r]$  тј. површи

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \mid -r \leq x \leq r, 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}.$$

Тада, запремина добијеног обртног тела је

$$\pi \int_{-r}^r f^2(x) dx = \pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

△

### 9.5.4 Површина обртних тела

Нека је  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидно-диференцијабилна функција. Одредимо површину површи  $S$  настале ротацијом графика функције  $f$  на интервалу  $[a, b]$  око  $x$ -осе. Уместо ротације графика, извршићемо ротацију изломљене линије која апроксимира график. Линија се конструише као код рачунања дужине лука криве.

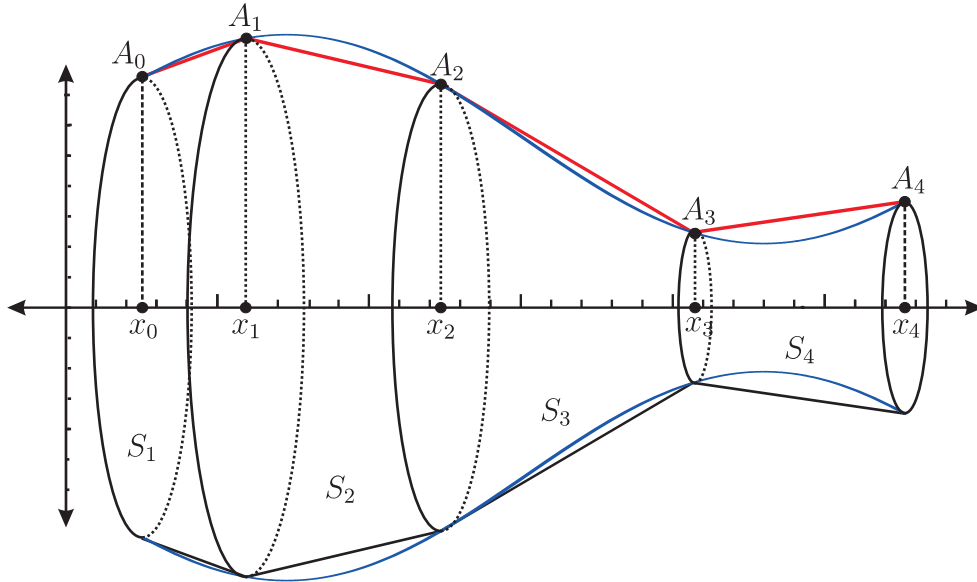


График 38: Зарубљене купе апроксимирају површину обртног тела.

Нека је  $\mathcal{P} = \{x_i \mid i = 0, 1, \dots, n; a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  подела интервала  $[a, b]$  и нека су

$$A_i = (x_i, f(x_i))$$

$i = 1, \dots, n$  тачке на графику. Одредимо површину површи настале ротацијом изломљене линије  $A_0A_1 \dots A_n$ . Ротацијом дужи  $A_{i-1}A_i$  добија се омотач зарубљене купе површине  $S_i$  чија су основице полупречника  $f(x_{i-1})$  и  $f(x_i)$  а изводница је једнака дужини дужи  $A_{i-1}A_i$ . Код рачунања дужине лука графика функције смо, применом Лагранжеве теореме, доказали да је

$$\overline{A_{i-1}A_i} = \sqrt{1 + f'^2(c_i)}(x_i - x_{i-1})$$

где је  $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Како је површина омотача зарубљене купе једнака  $\pi(r_1 + r_2)s$  где су  $r_1$  и  $r_2$  основице а  $s$  је дужина изводнице купе, добијамо

$$S_i = \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{1 + f'^2(c_i)}(x_i - x_{i-1})$$

за све  $i = 1, \dots, n$ . Површина површи настале ротацијом целе изломљене линије  $A_0A_1 \dots A_n$  је

$$\sum_{i=1}^n S_i = \pi \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{1 + f'^2(c_i)}(x_i - x_{i-1})$$

а површина површи  $S$  се добија када  $\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0$  тј.

$$P(S) = \pi \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{1 + f'^2(c_i)}(x_i - x_{i-1}).$$

Израз са десне стране није гранична вредност интегралне суме јер у њој фигуришу вредности функције у три тачке  $x_{i-1}$ ,  $x_i$  и  $c_i$ . Међутим, ако је  $\xi_i$  произвољна тачка интервала  $[x_{i-1}, x_i]$ , како  $|x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0$  када  $\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0$ , закључујемо да  $x_{i-1} \rightarrow \xi_i$ ,  $x_i \rightarrow \xi_i$  и  $c_i \rightarrow \xi_i$  када  $\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0$ . Отуда, у последњој суми, тачке  $x_i$ ,  $x_{i-1}$  и  $c_i$  можемо да заменимо са  $\xi_i$  и тако добијамо интегралну суму

$$\begin{aligned} P(S) &= \pi \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) + f(\xi_i)) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} (x_i - x_{i-1}) \\ &= 2\pi \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} (x_i - x_{i-1}) \\ &= 2\pi \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sigma(f \sqrt{1 + f'^2}, \mathcal{P}, \mathcal{E}) \\ &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \end{aligned}$$

Интеграл  $\int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$  постоји јер су функције  $f$  и  $f'$  непрекидне па је самим тим непрекидна и композиција  $f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}$ .

**Пример 9.9.** Израчунати површину сфере полупречника  $r$ .

**Решење:** Сфера полупречника  $r$  може да се добије ротацијом око  $x$ -осе графика функције  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  на интервалу  $[-r, r]$ . Тада, њена површина је једнака

$$2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + (r^2 - x^2)'^2} dx = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4r^2\pi.$$

△

## 9.6 Несвојствени интеграл

Постоји могућност рачунања интеграла у ситуацијама када функција није ограничена или није непрекидна у некој од граница интервала интеграције или када интервал интеграције није коначан.

**Дефиниција 9.5.** Нека је функција  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна на  $(a, b]$  и има прекид у тачки  $a$ . Тада се интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

назива несвојствени.

Овај тип интеграла се ради помоћу граничне вредности

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a + \frac{1}{n}}^b f(x) dx.$$

Са десне стране се добија низ интеграла који нису несвојствени и ако он конвергира кажемо да дати несвојствени интеграл конвергира.

**Пример 9.10.** Испитати конвергенцију интеграла  $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ .

**Решење:** Функција  $f(x) = \frac{1}{x}$  има прекид друге врсте у нули зато дати интеграл рачунамо на следећи начин:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln 1 - \ln \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty.$$

Дакле, дати интеграл не конвергира. △

**Дефиниција 9.6.** Нека је  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна функција. Интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

се назива несвојствени

Овакав тип интеграла се ради на следећи начин:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n f(x) dx.$$

Интеграл са десне стране се ради на интервалима  $[a, n]$  (претпоставља се да је  $n > a$ ) и нису несвојствени. Ако добијени низ интеграла конвергира кажемо да несвојствени интеграл конвергира.

**Пример 9.11.** Испитати конвергенцију несвојственог интеграла  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ .

**Решење:** Овде формирамо следећи низ интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x} dx = - \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n} - e^0) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} = 1.$$

Дакле, дати интеграл конвергира. △

На крају овог курса, наводимо методу за проверу конвергенције бројних редова помоћу несвојствених интеграла. Метод је познат као Кошијев интегрални критеријум и може да се реконструише из решења следећег примера.

**Пример 9.12.** Доказати да ред  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  конвергира за  $p > 1$  а дивергира за  $p \in (-\infty, 1]$ .

**Решење:** Јасно је да за  $p \leq 0$  дати ред дивергира јер му општи члан  $\frac{1}{n^p}$  не тежи нули.

Ако је  $p \in (0, 1]$ , суму реда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  можемо геометријски да представимо као површину правоугаоника који садрже криволинијски трапез

$$\mathcal{T} = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq \infty, 0 \leq y \leq \frac{1}{n^p} \right\}$$

као што је приказано на слици испод.

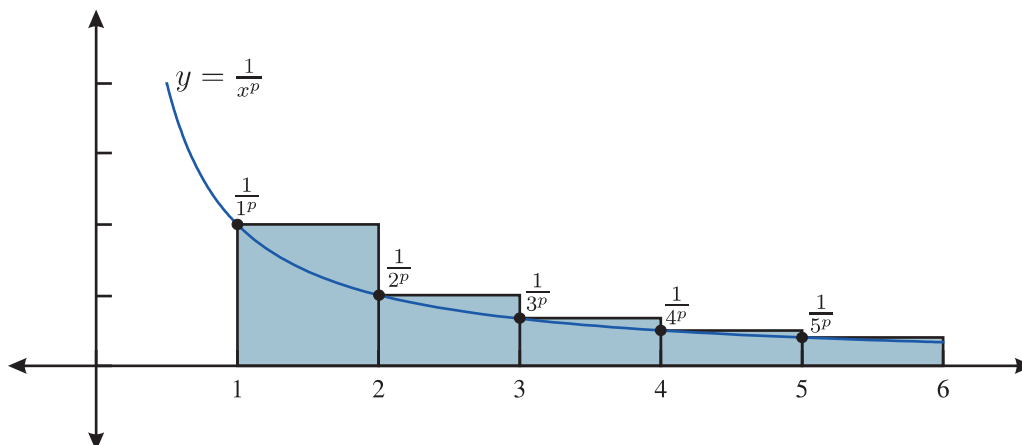


График 39: Сума реда представљена као површина која садржи криволинијски трапез.

Тада

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} > \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{x^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1-p} - 1}{1-p} = \infty.$$

Дакле, сума реда је већа од бесконачности па и сама мора да буде једнака бесконачно што значи да ред дивергира.

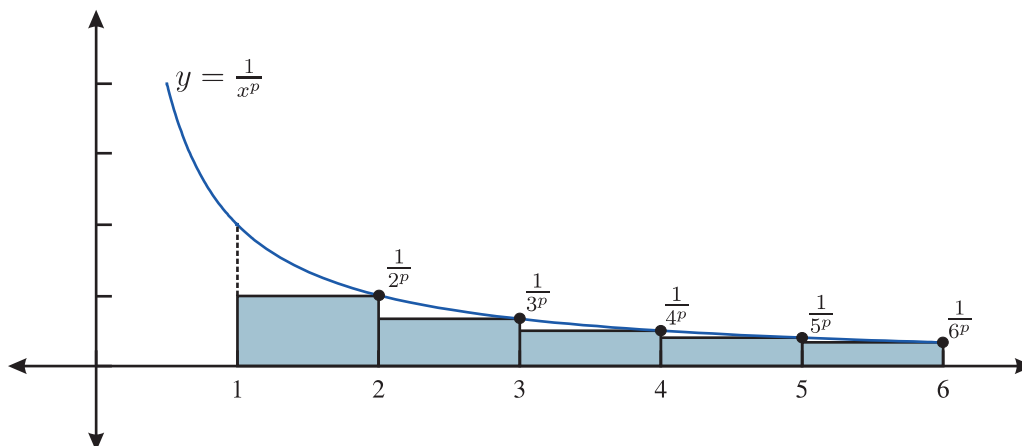


График 40: Сума реда представљена као површина сарджана у криволинијском трапезу.

Ако је  $p > 1$ , суму реда  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  можемо геометријски да представимо као површину правоугаоника су садржани у криволинијском трапезу

$$\mathcal{T} = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq \infty, 0 \leq y \leq \frac{1}{n^p} \right\}$$

као што је приказано на графику изнад.

Тада

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{x^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1-p} - 1}{1-p} = \frac{-1}{1-p} > 0.$$

Дакле, сума реда са позитивним члановима је мања од коначног реалног броја па и сама мора да буде коначна односно дати ред конвергира.  $\triangle$

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \mid \|\nabla\| \|\nabla f + \mathcal{M}\| \|\nabla\| & \leq 1. \\ \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R} \mid \mathcal{M} \sqrt{\nabla\{f\}} \nabla & \\ \mathcal{M} \nabla \setminus \|\mathcal{T}\| \|\nabla\| & \subseteq \mathbb{R}. \end{aligned}$$