Универзитет у Крагујевцу

Природно – математички факултет

Институт за математику и информатику

С Е М И Н А Р С К И   Р А Д

из предмета

Образовни софтвер

Примена *Wolfram Mathematica-е* у настави математике

Тема: Операције са комплексним бројевима

Ментори:

др Марија Станић

мр Слађана Димитријевић

Студент:

Милутиновић Данијела 1011/2011

Крагујевац

јануар 2012. године

Припрема за час реализован помоћу Wolfram Mathematica-е

Ток часа

Уводни део часа (10 минута)

Час почињемо кратким подсећањем на то шта су комплексни бројеви, имагинарна јединица и модуо комплексног броја.

Једначина $x^2 + 1 = 0$ (и не само она) нема решење у скупу реалних бројева, па се зато структура реалних бројева $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ проширује до структуре у којој једначина има решење. Та нова структура је **структура комплексних бројева**. Елемент $\boldsymbol{i}$**,** такав да важи $i^2 + 1 = 0$ назива се **имагинарна јединица**. Скуп комплексних бројева означава се са $\mathbb{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$, где се уређен пар (a, b) реалних бројева a и b назива **комплексан број**.

Алгебарски облик комплексног броја означава се са $z = a + ib$. Реални број a назива се **реални део** комплексног броја z и означава се са $a = Re(z)$, а реални број b назива се **имагинарни део** комплексног броја z и означава се са $b = Im(z)$.

Пример 1. Одредити реални и имагинарни део комплексног броја

$$z = 1 - \sqrt{3} + 4i.$$

Решење. За дати комплексан број имамо да је:

$$Re(z) = 1 - \sqrt{3}\,, \text{ а } Im(z) = 4.$$

Модуо комплексног броја $z = a + ib$ дефинише се са: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, a, b \in \mathbb{R}$.

Пример 2. Израчунати модуо комплексног броја $z = 3 + 2\sqrt{2}i$.

Решење. Рачунајући по наведеној формули добијамо:

$$|z| = \sqrt{3^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{9 + 8} = \sqrt{17}.$$

За два комплексна броја (a, b) и (c, d) каже се да су **једнака** и пишу се $(a, b) = (c, d)$ ако и само ако $a = c$ и $b = d$.

Пример 3. За које ће вредности m и n бити једнаки комплексни бројеви $(3m, 8)$ и $(9, -4n)$?

Решење. Из $3m = 9$ и $8 = -4n$ следи да је $m = 3$ и $n = -2$. Дакле, ако је $m = 3$ и $n = -2$, ова два комплексна броја су једнака.

Централни део часа (30 минута)

После кратког подсетника, упознајемо ученике са темом овог часа, а то су операције са комплексним бројевима.

Збиром комплексних бројева (a, b) и (c, d) назива се комплексан број $(a + c, b + d)$, где је $a + c, b + d$ сабирање реалних бројева. Операција сабирања комплексних бројева означава се такође са $+$ и записује:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Ако узмемо алгебарски облик ових комплексних бројева, видимо да ово заиста важи:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Пример 4. Сабрати следеће бројеве: $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = 7 + 5i$.

Решење. Збир комплексних бројева рачунамо на следећи начин:

$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (7 + 5i) = (2 + 7) + (-3 + 5)i = 9 + 2i$$

или

$$z_1 + z_2 = (2, -3) + (7,5) = (2 + 7, -3 + 5) = (9,2).$$

За сабирање комплексних бројева важе комутативни и асоцијативни закон. То показујемо на следећи начин:

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b)$
- $\big((a, b) + (c, d)\big) + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) = (a + c + e, b + d + f)$

$$= (a, b) + (c + e, d + f) = (a, b) + \big((c, d) + (e, f)\big)$$

Комплексан број $(0,0)$ назива се **нула**, јер за било који комплексан број (a, b) важи:

$$(a, b) + (0,0) = (a, b).$$

Комплексан број $(-a, -b)$ је супротан елеменат за комплексан број (a, b), јер важи:

$$(a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0,0).$$

Дакле, $-(a, b) = (-a, -b)$.

Пример 5. Израчунати разлику комплексних бројева $z_1 = 3 - 2i$ и $z_2 = \frac{1}{2} - i$.

Решење. Разлику комплексних бројева рачунамо на следећи начин:

$$z_1 - z_2 = (3 - 2i) - \left(\frac{1}{2} - i\right) = (3 - 2i) + \left(-\frac{1}{2} + i\right) = \left(3 - \frac{1}{2}\right) + (-2 + 1)i = \frac{5}{2} - i$$

или

$$z_1 - z_2 = (3, -2) - \left(\frac{1}{2}, -1\right) = (3, -2) + \left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{5}{2}, -1\right).$$

Производ комплексних бројева (a, b) и (c, d) је комплексан број $(ac - bd, ad + bc)$. Дакле, множење комплексних бројева своди се на множење, одузимање и сабирање реалних бројева. Операција множења комплексних бројева означава се такође са $\cdot$ и записује:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Ако узмемо алгебарски облик комплексних бројева, до резултата множења долазимо тако што се бројеви $a + bi$ и $c + di$ множе као обични биноми и при том се користи чињеница да је $i^2 = -1$. Дакле, биће:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (a + bi)c + (a + bi)di = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i\ .$$

Пример 6. Помножити следеће комплексне бројеве: $z_1 = -3 - 4i$ и $z_2 = 5 - i$.

Решење. Производ комплексних бројева рачунамо на следећи начин:

$$z_1 \cdot z_2 = (-3 - 4i) \cdot (5 - i) = -3 \cdot 5 - 4i \cdot 5 - 3 \cdot (-i) - 4i \cdot (-i) = -15 - 20i + 3i + 4i^2$$

$$= -15 - 17i - 4 = -19 - 17i$$

или

$$z_1 \cdot z_2 = (-3, -4) \cdot (5, -1) = (-3 \cdot 5 - (-4) \cdot (-1), -3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 5) = (-15 - 4, 3 - 20)$$

$$= (-19, -17)\ .$$

Множење комплексних бројева задовољава следеће правилности:

- $(a, b) \cdot (1,0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$
- $(a, 0) = a \ , \ (b, 0) = b \ \Rightarrow \ (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \ \wedge \ (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$
- $i = (0,1) \ \Rightarrow \ i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1\, , 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0)$

  $i = (0, -1) \ \Rightarrow \ i^2 = (-1,0)$

Пример 7. Израчунати: $i^3 + i^4 - i^5 + i^6 - i^7$.

Решење. У овом задатку користимо чињеницу да је $i^2 = -1$, па добијамо следеће:

$$
\begin{aligned}
i^3 + i^4 - i^5 + i^6 - i^7 &= i^2 \cdot i + (i^2)^2 - (i^2)^2 \cdot i + (i^2)^3 - (i^2)^3 \cdot i \\
&= -1 \cdot i + (-1)^2 - (-1)^2 \cdot i + (-1)^3 - (-1)^3 \cdot i \\
&= -i + 1 - i - 1 + i = -i\,.
\end{aligned}
$$

Дељењем комплексних бројева опет добијамо комплексан број:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bci - adi - bdi^2}{c^2 - (di)^2} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

за $c^2 + d^2 \neq 0$.

Пример 8. Поделити следеће комплексне бројеве: $z_1 = 4 + i$ и $z_2 = 2 - 3i$.

Решење. Количник два комплексна броја добијамо на следећи начин:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+i}{2-3i} = \frac{4+i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{8+2i+12i-3}{4+9} = \frac{5+14i}{13} = \frac{5}{13} + \frac{14}{13}i\,.$$

Конјуговани комплексни број $\bar{z}$ датог комплексног броја $z = a + bi$ је број $a - bi$, који се од z разликује у знаку имагинарног дела.

Пример 9. Одредити конјуговано комплексне бројеве следећих бројева:

$$z_1 = 3 - \sqrt{2}i\ ,\ z_2 = -7 - 5i\ ,\ z_3 = 13 + \frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

Решење. На основу дефиниције конјуговано комплексног броја добијамо:

$$z_1 = 3 - \sqrt{2}i \quad \Rightarrow \quad \overline{z_1} = 3 + \sqrt{2}i$$

$$z_2 = -7 - 5i \quad \Rightarrow \quad \overline{z_2} = -7 + 5i$$

$$z_3 = 13 + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \Rightarrow \quad \overline{z_3} = 13 - \frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

На крају, наводимо алгебарске законе које задовољава структура комплексних бројева $(\mathbb{C},+,\cdot)$. За ма које комплексне бројеве x, y и z важе формуле:

- $x+y=y+x$
- $x+0=x$
- $x+(y+z)=(x+y)+z$
- $x+(-x)=0$
- $x\cdot y=y\cdot x$
- $x\cdot 1=x$
- $x\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\cdot\frac{1}{x}=1$
- $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
- $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

Пример 10. Израчунати:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1000}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1000}.$$

Решење. Овај задатак можемо решити на следећи начин:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1000}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1000}=\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right)^{500}+\left(\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right)^{500}$$

$$=\left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^{500}+\left(\frac{1-2i+i^2}{2}\right)^{500}=i^{500}+(-i)^{500}$$

$$=(i^2)^{250}+((-i)^2)^{250}=(-1)^{250}+(-1)^{250}=1+1=2.$$

Пример 11. Израчунати: $\bar{z}-z-2\cdot\frac{\bar{z}}{z}$ ако је $z=1-i$.

Решење. Најпре ћемо одредити $\bar{z}$ и ту вредност заменити у нашем изразу.

$\bar{z}=1+i$

$$\bar{z}-z-2\cdot\frac{\bar{z}}{z}=1+i-(1-i)-2\cdot\frac{1+i}{1-i}=2i-\frac{2+2i}{1-i}=\frac{2i-2i^2-2-2i}{1-i}=\frac{-2\cdot(-1)-2}{1-i}=\frac{0}{1-i}=0.$$

Пример 12. Дати су комплексни бројеви $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 + i$. Одредити комплексан број $z = x + iy$, ако је:

$$Re(z\overline{z_1}) = -1\,, Im\left(\frac{z}{z_2}\right) = \frac{3}{5}.$$

Решење.

Најпре ћемо израчунати производ $z \cdot \overline{z_1}$ и количник $\frac{z}{z_2}$:

$$z \cdot \overline{z_1} = (x + iy)(3 - 2i) = 3x + 3yi - 2xi - 2yi^2 = 3x + 2y + i(-2x + 3y)$$

$$\frac{z}{z_2} = \frac{x+iy}{2+i} = \frac{x+iy}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2x+2yi-xi-yi^2}{4-i^2} = \frac{2x+y+i(-x+2y)}{5} = \frac{2x+y}{5} + \frac{-x+2y}{5}i\,.$$

Затим одредимо реални део броја $z \cdot \overline{z_1}$ и имагинарни део броја $\frac{z}{z_2}$:

$$Re(z \cdot \overline{z_1}) = 3x + 2y \;\;,\;\; Im\left(\frac{z}{z_2}\right) = \frac{-x+2y}{5}.$$

Сада добијамо систем:

$$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ \dfrac{-x + 2y}{5} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

и његовим решавањем добијамо да је $x = -1$ и $y = 1$.

Дакле, наш тражени комплексан број је $z = -1 + i$.

Завршни део часа (5 минута)

Заједно са ученицима понављамо које су то операције са комплексним бројевима, како се примењују и које законитости важе за комплексне бројеве. Дајемо им и неколико задатака за вежбу.

Задаци за вежбу

1. Израчунати:
   а) $i^{21} - i^{17} + i^{36} - i^{42}$;
   б) $(1-i)^4 + (-5+4i)(2+3i)$.

2. Одредити конјугован број комплексном броју:
   а) $(1-i)^3$;
   б) $\frac{2+3i}{4-5i}$.

3. Израчунати:

$$z = \frac{(1+i)^8 + (i-1)^8}{(1+i)^6 - (1-i)^6}.$$

4. Израчунати вредност израза $x^2 - x + 1$ за $x = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Л и т е р а т у р а

- Г. Војводић, В. Петровић, Р. Деспотовић, Б. Шешеља, *Математика за II разред средње школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2004

- Ж. Ивановић, С. Огњановић, *Математика 2 – збирка решених задатака и тестова за II разред гимназија и техничких школа*, Круг, Београд, 2010