Dr Lopandić

SKRIPTA
iz
EUKLIDSKE GEOMETRIJE
-zadaci sa rešenjima-

Štampali
studenti II godine matematike PMF-a
BEOGRAD, 1967

Zadaci iz Stereometrije

Zadatak 1: Ako je u prostoru dato mnoštvo od n ravni u kom se svake dve ravni seku, nikoje tri ne seku po jednoj pravoj, niti su uporedne nekoj pravoj i nikoje četiri ne seku u jednoj tački, dokazati da ravni tog mnoštva razlažu prostor na

$$\alpha_n = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$$

konveksnih delova, od kojih

$$\beta_n = (n^2 - n + 2)$$

dopire u beskonačnost, a ostalih

$$\gamma_n = \frac{1}{6}(n^3 - 6n^2 + 11n - 6)$$

delova su ograničeni.

Dokaz: Iz uvedenih pretpostavki sledi da navedenom mnoštvu ν ravni seče

$$(\nu + 1) - b_y$$

ravan po ν pravih, od kojih nikoje dve nisu uporedne, i nikoje tri ne seku u jednoj tački. Prema zadatku 17. tih ν pravih razlaže

$$(\nu + 1) - b_y$$

ravan na

$$\frac{1}{2}(\nu^2 + \nu + 2)$$

oblasti, od kojih 2ν oblasti dopire u beskonačnost, a ostalih

$$\frac{1}{2}(\nu^2 - 3\nu + 2)$$

oblasti su ograničene. Svaka od tih oblasti razlaže izvestan deo prostora koji je dobijen razlaganjem sa ν pomenutih ravni na dva dela pa se dodavanjem

$$(\nu + 1) - b_c$$

ravni broj delova prostora povećava za

$$\frac{1}{2}(n^2 + n + 2).$$

Kako je za $\nu = 1$ broj delova prostora

$$\alpha_1 = 2,$$

biće za $\nu = n$

$$\alpha_n = 2 + \frac{1}{2}(1^2 + 1 + 2) + \frac{1}{2}(2^2 + 2 + 2)... + \frac{1}{2}[(n-1)^2 + (n-1) + 2]$$

Kako je

$$1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

i

$$1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

nalazimo da je

$$\alpha_n = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6).$$

Da bi se odredio broj ograničenih i broj neograničenih delova prostora, odredimo najpre za koliko se povećava broj neograničenih delova prostora dodavanjem $(\nu+1) - b_c$ ravni. Svaka od neograničenih oblasti iz $(\nu+1) - b_c$ ravni razlaže jedan deo prostora dobijen razaganjem prethodnim ravnima na dva neograničena dela dok svaka od ograničenih oblasti iz $(\nu+1) - b_c$ ravni razlaže neki ranije dobijeni deo prostora na dva dela od kojih je jedan istog tipa, a drugi obavezno ograničen. Stoga se dodavanjem $(\nu+1) - b_c$ ravni, broj neograničenih delova prostora povećava za 2ν. Kako je za $\nu = 1$ broj neograničenih delova prostora $\beta_1 = 2$, biće za $\nu = n$

$$\begin{aligned}\beta_n &= 2 + 2(2-1) + 2(3-1) + ... + 2(n-1)\\ &= 2 + 2[1 + 2 + ... + (n-1)]\\ &= 2 + 2\frac{n(n-1)}{2}\\ &= n^2 - n + 2.\end{aligned}$$

Kako je

$$\alpha_n = \beta_n + \gamma_n$$

biće

$$\gamma_n = \alpha_n - \beta_n,$$

tj.

$$\gamma_n = \frac{1}{6}(n^3 - 6n^2 + 11n - 6).$$

Da bi se dokazalo da su dobijeni delovi prostora konveksni, primetimo da je svaki od tih delova presek n poluprostora, dakle n konveksnih likova, pa je prema poznatom stavu i taj deo prostora konveksan.

Zadatak 2: Ako su ω_1,...,ω_n $(n \geq 5)$ konveksni prostorni likovi, od kojih svaka četiri imaju najmanje jednu zajedničku tačku dokazati da svih n pomenutih likova takođe imaju bar jednu zajedničku tačku.

Dokaz: Analognim postupkom kao kod zadatka 12. najpre treba dokazati da je teorema tačna kada je $n = 5$, a zatim metodom matematičke indukcije, kao pri rešavanju zadatka 13., dokazuje se da je teorema tačna i za $n > 5$.

Napomena: Ovaj stav pedstavlja uopštenje Helijeve teoreme na prostorne likove.

Zadatak 3: Ako su A_1,...A_n proizvoljne tačke u prostoru, pri čemu svake četiri od tih n tačaka pripadaju nekoj kugli poluprečnika r, dokazati da postoji kugla poluprečnika r, koja sadrži svih n tačaka.

Dokaz: Obeležimo sa ω_1,...,ω_n kugle kojima su središta A_1,...,A_n a poluprečnici jednaki duži r. S obzirom da postoji kugla poluprečnika r koja sadrži bilo koje četiri od n tačaka, npr. A_i, A_j, A_k, A_e biće središte te kugle zajednička tačka kugli $\omega_i, \omega_j, \omega_k, \omega_e$. Stoga, svake četiri od n kugli, tj. konveksnih likova ω_1,...,ω_n imaju bar jednu zajedničku tačku, te prema Helijevoj teoremi, svih n kugli ω_1,...ω_n imaju bar jednu zajedničku tačku, recimo O. S obzirom da tačka O pripada svim kuglama ω_1,...,ω_n kojima su središta A_1,...,A_n, a poluprečnici jednaki duži r, kugla ω kojoj je središte O, a poluprečnik jednak duži r, sadrži svih n tačaka A_1,...,A_n.

Zadatak 4: Ako su A_1,...,A_n tačke u prostopu takve da je duž određena bilo kojim dvema od tih n tačaka manja ili jednaka duži d, dokazati da postoji kugla poluprečnika

$$r = \frac{\sqrt{6}}{4}d$$

koja sadrži svih n tačaka.

Dokaz: Analogno zadatku 3, najpre treba dokazati da postoji kugla poluprečnika

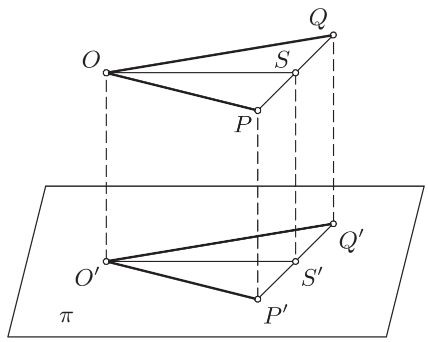
$$r = \frac{\sqrt{6}}{4}d$$

koja sadrži bilo koje četiri od n datih tačaka A_1,...,A_n, pa će prema prethodnom zadatku postojati kugla koja sadrži svih n tačaka.

Napomena: Ovaj stav predstavlja Jungovu teoremu za n tačaka koje se nalaze u prostoru. Analogno, ovaj stav se uopštava za n tačaka kodimenzionalnog prostora, gde je $n \geq (k+1)$. U tom slučaju biće

$$r = \sqrt{\frac{k}{2(k+1)}}.$$

Zadatak 5: Ako je ugao ω' upravna projekcija ugla ω na izvesnu ravan π, koja je uporedna sa simetralom ugla ω, dokazati da je simetrala s ugla ω uporedna sa simetralom s' ugla ω'.



Slika uz zadatak 5

Dokaz: Neka su p i q kraci ugla ω, a p' i q' odgvarajući kraci ugla ω'. Obeležimo sa O i O' temena uglova ω i ω', a sa P i Q tačke polupravih p i q takve da je

$$OP = OQ,$$

a sa P' i Q' njima odgovarajuće tačke na polupravama p' i q'. Duž PQ seče pravu s u nekoj tački S, njenu odgovarajuću tačku obeležimo sa S'. Po pretpostavci je prava s uporedna sa ravni π, pa je uporedna i sa svojom projekcijom $O'S'$ na ravan π. Dokažimo da je prava $O'S'$ istovetna sa pravom s'.
Kod trougla OPQ tačka S je središte stranice PQ, a duž OS upravna na stranici PQ i paralelna sa $O'S'$, pa je pri navedenom projektovanju tačka S' središte duži $P'Q'$, a duž $O'S'$ upravna na duži $P'Q'$. Stoga, sledi da je

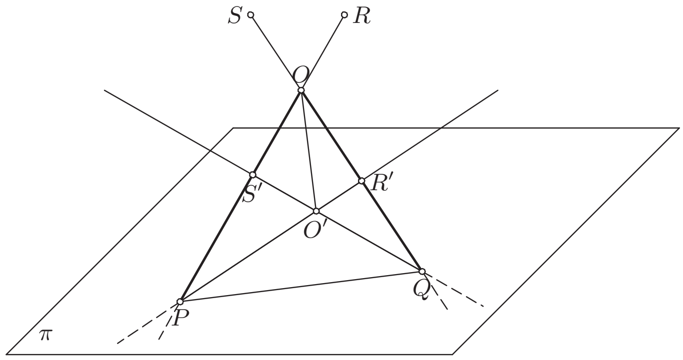
$$\triangle O'S'P' \cong \triangle O'S'Q',$$

pa je

$$\angle P'O'S' = \angle Q'O'S'$$

i prema tome je prava $O'S'$ simetrala ugla $P'O'Q'$, tj. ugla ω'. Kako ugao može da ima samo jednu simetralu, biće prava $O'S'$ istovetna sa pravom s'.

Zadatak 6: Dokazati da je upravna projekcija pravog ugla na ravan koja seče oba njegova kraka ili oba njegova produženja tup ugao, zatim da je upravna projekcija pravog ugla na ravan koja seče jedan njegov krak i produžen drugi krak, oštar ugao.



Slika uz zadatak 6

Dokaz: Pretpostavimo da ravan π seče krake pravog ugla $\angle POQ$ u tačkama P i Q. Ako sa O' obeležimo upravnu projekciju tačke O, kod pravouglih trouglova POO', QOO', POQ biće

$$O'P < OP$$

$$O'Q < OQ$$

i

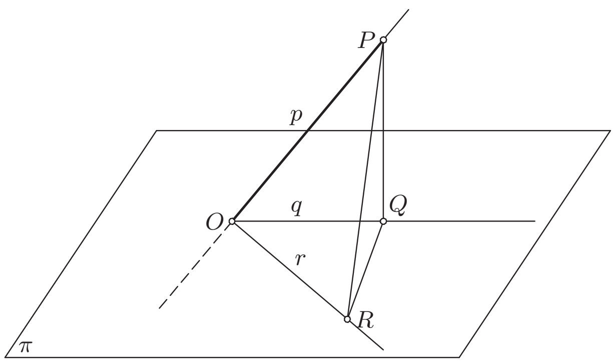
$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2,$$

pa je

$$PQ^2 > O'P^2 + O'Q^2.$$

Stoga sledi da je upravna projekcija $PO'Q$ ugla $\angle POQ$ na ravan π tup ugao. Upravna projekcija pravog ugla $\angle ROS$ koji je unakrsan sa uglom $\angle POQ$ i kome projekcijska ravan π ne seče nijedan krak je ugao $\angle R'O'S'$ unakrsan sa uglom $\angle P'O'Q'$, dakle tup ugao. Najzad uporedna projekcija pravog ugla $\angle POS$ kome projekcijska ravan π seče krak OP i produžen drugi krak OS je $\angle P'O'S'$ naporedan sa tupim uglom $\angle PO'Q$, dakle oštar ugao.

Zadatak 7: Dokazati da je nagib kose prave prema nekoj ravni manji od svih uglova koje ta prava zahvata s pravama te ravni koje sadrže i njen prodor.



Slika uz zadatak 7

Dokaz: Obeležimo sa p bilo koju kosu pravu spram ravni ω, sa O njenu prodornu tačku, sa q upravnu projekciju prave p na ravan π i sa r bilo koju drugu pravu ravni π koja sadrži tačku O. Neka je P proizvoljna tačka prave p koja je različita od O. Njena upravna projekcija Q na ravan π je na pravoj q. Neka je zatim R tačka prave r sa bilo koje strane od O takva da je

$$OQ = OR.$$

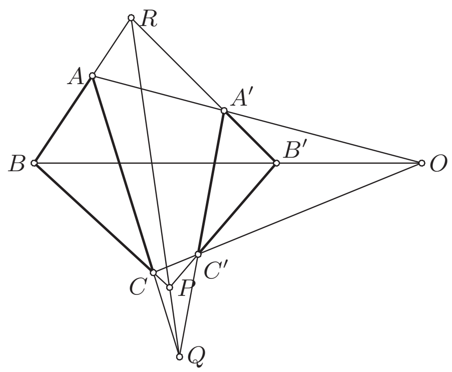
Pri tome je trougao PQR pravougli, pa je hipotenuza PR veća od katete PQ. Trouglovi OPQ i OPR imaju zajedničku stranicu OP, jednake stranice OQ i OR, a stranica PQ je manja od stranice PR, pa je

$$\angle POQ < \angle POR.$$

Zadatak 8: Dokazati da su svake dve prave koje seku tri mimoilazne prave takođe mimoilazne.

Dokaz: Neka dve prave p_1 i p_2 seku tri mimolilazne prave a, b, c. Prva prava neka seče u tačkama A_1, B_1, C_1, a druga u tačkama A_2, B_2, C_2. Ako prave p_1 i p_2 ne bi bile mimoilazne, saglasno definiciji, one bi pripadale izvesnoj ravni π. Svaka od pravih a, b, c imala bi s ravni π po dve zajedničke tačke A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2, pa bi sve tri prave a, b, c pripadale ravni π, što je nemoguće, jer su one mimoilazne. Stoga su prave p_1 i p_2 takođe mimoilazne.

Zadatak 9: Ako dva trougla ABC i $A'B'C'$ imaju takav položaj u prostoru da se prave određene stranicama BC i $B'C'$, CA i $C'A'$, AB i $A'B'$ seku u tačkama npr. P, Q, R dokazati da se prave AA', BB', CC' seku u jednoj tački ili su međusobno uporedne, zatim da tačke P, Q, R pripadaju jednoj pravoj.



Slika uz zadatak 9

Dokaz: Po pretpostavci, prave BC i $B'C'$ se seku te određuju izvesnu ravan α, prave CA i $C'A'$ se seku te određuju izvesnu ravan β, prave AB i $A'B'$ se seku te određuju izvesnu ravan γ. S obzirom da trouglovi ABC i $A'B'C'$ ne pripadaju jednoj ravni, ravni α,β,γ su različite. Tačke A i A' pripadaju ravni β i γ, pa je prava AA' presek ravni β i

γ. Isto tako je prava BB' presek ravni α i γ, a prava CC' presek ravni α i β. Kako su B, C, B', C' tačke ravni α koje ne pripadaju jednoj pravoj, prave BB' i CC' se seku ili su međusobno uporedne. Ako se prave BB' i CC' seku u nekoj tački O, tačka O pripada i ravni β i ravni γ, prema tome, nalaze se na pravoj AA' po kojoj se seku ravni β i γ. Stoga se prave AA', BB', CC' seku u jednoj tački. Ako su prave BB' i CC' uporedne, i prava AA' je uporedna sa njima. Zaista, ako prava AA' ne bi bila uporedna s pravama BB' i CC', ona bi sekla recimo pravu BB' u nekoj tački O, jer su tačke A, B, A', B' u jednoj ravni. Prema dokazanom i prava CC' sadržala bi tačku O, što je nemoguće, jer su prave BB' i CC' uporedne. Stoga je prava AA' uporedna sa pravama BB' i CC'. Dokažimo sada drugi deo stava. S obzirom da su ravni ABC i $A'B'C'$ različite, a tačke P, Q, R zajedničke tim dvema ravnima, tačke P, Q, R su na presečnoj pravoj tih dveju ravnih ABC i $A'B'C'$.

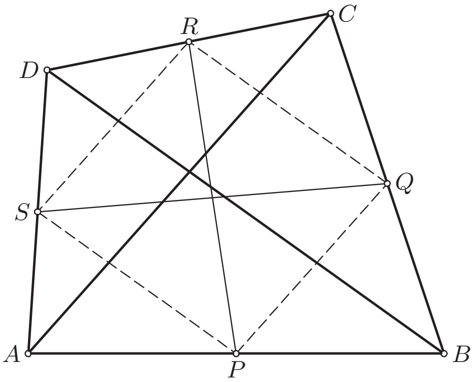
Zadatak 10: Ako su tačke P, Q, R, S u kojima stranice AB, BC, CD, DA prostranog četvorougla $ABCD$ prodiru izvesnu ravan π temena paralelograma. Dokazati da je ravan π uporedna sa dijagonalama AC i BD tog četvorougla.

Dokaz: S obzirom da su prave PQ i RS po kojim ravan π seče ravan ABC i ADC međusobom uporedne, presečna prava AC ravni ABC i ADC uporedna s ravni π. Istim postupkom dokazuje se da je prava BD uporedna sa ravni π.

Zadatak 11: Ako su P, Q, R, S tačke u kojima stranice AB, BC, CD, DA prostornog četvorougla $ABCD$ prodiru proizvoljnu ravan π uporednu sa dijagonalama AC i BD tog četvorougla, dokazati da su tačke P, Q, R, S temena paralelograma.

Dokaz: Kako je ravan π uporedna s pravom AC po kojoj se seku ravni ABC i ADC, prave PQ i RS po kojima ravan π seče ravni ABC i ADC međusobno su uporedne. Na isti način dokazuje se da su i prave QR i PS međusobno uporedne. Otuda sledi da su tačke P, Q, R, S temena paralelograma.

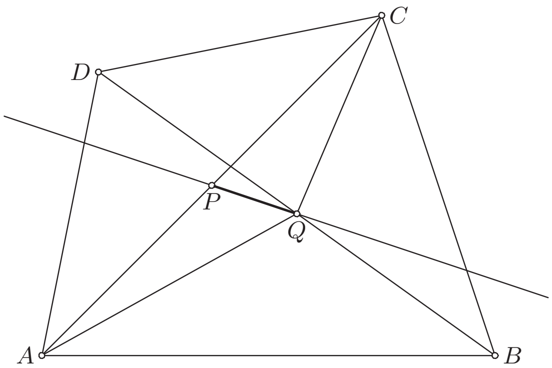
Zadatak 12: Ako su duži koje spajaju središta naspramnih stranica prostornog četvorougla $ABCD$ uporedne jedna na drugoj, dokazati da su dijagonale tog četvorougla međusobno jednake.



Slika uz zadatak 12

Dokaz: Obeležimo sa P, Q, R, S središta stranica AB, BC, CD, DA prostornog četvorougla $ABCD$. Po pretpostavci su duži PR i QS upravne međusobno, dakle ne pripadaju istoj pravoj. S obzirom da su duži PQ i RS srednje linije trouglovova ABC i ADC koje odgovaraju zajedničkoj stranici AC, duži PR i QS su uporedne međusobno i jednake polovini duži AC. Isto tako duži QR i PS su uporedne međusobno i jednake polovini duži BD. Otuda sledi da je $PQRS$ paralelogram sa upravnim dijagonalama, pa su mu sve stranice jednake. Stoga su i dijagonale AC i BD četvorougla $ABCD$ međusobno jednake.

Zadatak 13: Ako su naspramne stranice AB i CD, zatim BC i AD prostornog četvorougla $ABCD$ međusobno jednake, dokazati da je prava koja sadrži središta P i Q dijagonala AC i BD zajednička normala pravih AC i BD.



Slika uz zadatak 13

Dokaz: Iz podudarnosti trouglova BCD i DAB sledi da je

$$\angle CBD = \angle ADB.$$

Kako je

$$\angle CBD = \angle CBQ \quad i \quad \angle ADB = \angle ADQ,$$

biće

$$\angle CBQ = \angle ADQ.$$

Iz podudarnosti trouglova BCQ i ADQ sledi da je

$$CQ = AQ,$$

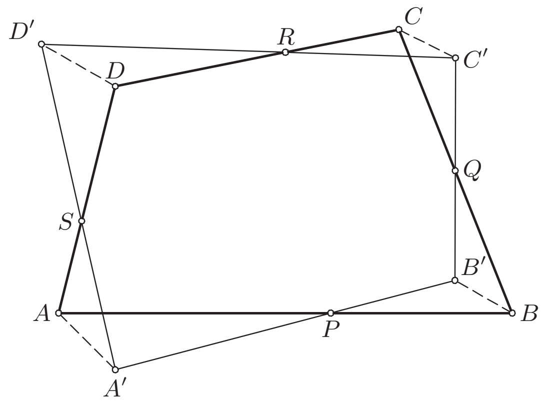
stoga je trougao ACQ jednakokrak, pa je prava PQ upravna na dijagonali AC četvorougla $ABCD$. Na isti način dokazuje se da je prava PQ upravna i na dijagonali BD tog četvorougla, pa je prava PQ zajednička normala pravih AC i BD.

Zadatak 14: Ako su P i R tačke stranica AB i CD prostornog četvorougla $ABCD$ takve da je

$$AP : PB = DR : RC,$$

a Q i S tačke u kojima stranice BC i AD prodiru proizvoljnu ravan π koja sadrži tačke P i R, dokazati da je

$$BQ : QC = AS : SD.$$



Slika uz zadatak 14

Dokaz: Ako obeležimo sa A', B', C', D' uporedne projekcije tačaka A, B, C, D na ravan π imamo da je

$$\triangle PAA' \sim \triangle PBB' \quad i \quad \triangle RDD' \sim \triangle RCC',$$

pa je

$$AA' : BB' = AP : PB \quad i \quad DD' : CC' = DR : RC.$$

Stoga je

$$AA' : BB' = DD' : CC'$$

i prema tome je

$$AA' : DD' = BB' : CC'.$$

Kako je

$$\triangle SAA' \sim \triangle SDD' \quad i \quad \triangle QBB' \sim \triangle QCC',$$

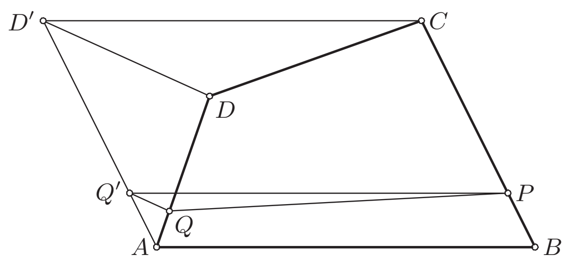
biće

$$AS : SD = AA' : DD' \quad i \quad BQ : QC = BB' : CC',$$

pa je

$$AS : SD = BQ : QC.$$

Zadatak 15: Dokazati da svaka ravan uporedna dvema naspramnim stranicama prostornog četvorougla seče druge dve stranice na proporcionalne odnose.



Slika uz zadatak 15

Dokaz: Neka proizvoljna ravan π uporedna naspramnim stranicama AB i CD prostornog četvorougla $ABCD$ seče druge dve stranice BC i AD u tačkama P i Q. Obeležimo sa D' tačku ravni ABC takvu da je četvorougao $ABCD'$ paralelogram. Kako je $CD' \| AB$, a $AB \| \pi$, biće i $CD' \| \pi$. Sad su dve prave CD i CD' koje se seku uporedne s ravni π, pa je ravan CDD' određena tim pravama uporedna s ravni π. S obzirom da su tačke D i D' iste, a tačke A i D s raznih strana ravni π, biće tačke A i D' s raznih strana ravni π, pa duž AD' prodire ravan π u nekoj tački Q'. Iz uporednosti ravni π i CDD', sleduje da su prave PQ' i CD' po kojima one seku ravan ABC među sobom uporedne. Stoga je $AB \| PQ' \| CD'$ i prema tome

$$BP : CP = AQ' : D'Q'.$$

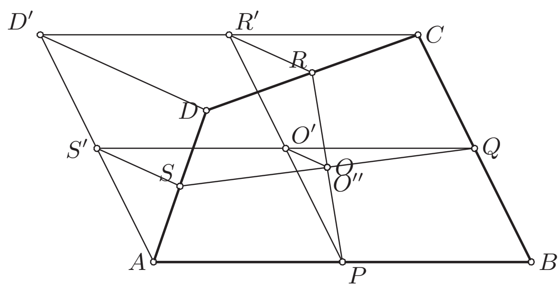
Isto tako je $DD' \| QQ'$, te je

$$AQ : DQ = AQ' : D'Q'.$$

Iz dobijenih dveju proporcija nalazimo da je

$$BP : CP = AQ : DQ.$$

Zadatak 16: Ako su P i R tačke u kojima naspramne stranice AB i CD prostornog četvorougla $ABCD$ prodiru proizvoljnu ravan π uporednu s drugim dvema stranicama, a Q i S tačke u kojima stranice BC i AD tog četvorougla prodiru proizvoljnu ravan π' uporednu s drugim dvema stranicama, dokazati da tačke P, Q, R, S pripadaju jednoj ravni.



Slika uz zadatak 16

Dokaz: Ako sa D' obeležimo tačku takvu da je četvorougao $ABCD'$ paralelogram, biće ravan ADD' uporedna s ravni π, a ravan CDD' uporedna s ravni π'. Pri tome, duži CD' i AD' prodiru ravni π i π' u tačkama R' i S' takvim da je $PR' \| BC \| AD'$ i $RR' \| DD'$, zatim $QS' \| AB \| D'C$ i $SS' \| DD'$. Ravni π i π' ne mogu biti istovetne, jer bi tada sve stranice četvorougla $ABCD$ bile uporedne sa svakom od tih ravni, pa bi četvorougao $ABCD$ bio ravan, sto je suprotno pretpostavci. Otud sledi da se ravni π i π' seku po nekoj pravoj t. Ta prava sadrži presek O' duži PR' i QS', a seče duži PR i QS u izvesnim tačkama O i O''. Dokažimo da su tačke O i O'' istovetne, tj. da se duži PR i QS seku. S obzirom da je tačka D izvan ravni paralelograma $ABCD'$, a tačke R i S na dužima CD i AD, biče tačke R i S s iste strane ravni $ABCD'$. Sad su tačke P i Q u ravni $ABCD'$, a tačke R i S s iste strane od te ravni, pa su unutrašnje tačke O i O'' duži PR i QS s iste strane ravni $ABCD'$, i prema tome, na pravoj t s iste strane od tačke O'. Kako je $\triangle POO' \sim \triangle PRR'$ i $\triangle CRR' \sim \triangle CDD'$, biće

$$O'O : R'R = PO' : PR' = AS' : AD'$$

i

$$R'R : DD' = CR' : CD',$$

pa je

$$O'O = \frac{AS'}{AD'} \cdot R'R \quad i \quad R'R = \frac{CR'}{CD'} \cdot D'D$$

i prema tome

$$O'O = \frac{AS'}{AD'} \cdot \frac{CR'}{CD'} \cdot D'D. \tag{1}$$

Kako je $\triangle QO''O' \sim \triangle QSS'$ i $\triangle ASS' \sim \triangle ADD'$, biće

$$O'O'' : S'S = QO' : QS' = CR' : CD'$$

i

$$S'S : D'D = AS' : AD',$$

pa je

$$O'O'' = \frac{CR'}{CD'} \cdot S'S \quad i \quad S'S = \frac{AS'}{AD'} \cdot D'D,$$

i prema tome

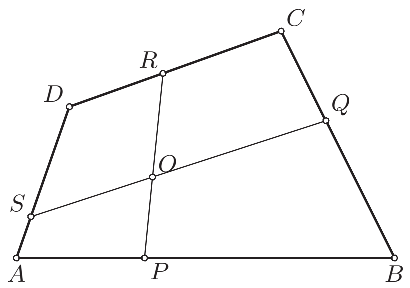
$$O'O'' = \frac{AS'}{AD'} \cdot \frac{CR'}{CD'} \cdot D'D \tag{2}$$

Iz jednakosti (1) i (2) sledi da je

$$O'O = O'O''.$$

S obzirom da su duži $O'O$ i $O'O''$ jednake, a tačke O i O'' na pravoj t s iste strane od tačke O', tačke O i O'' su istovetne, pa se duži PR i QS seku. Stoga, tačke P, Q, R, S pripadaju jednoj ravni.

Zadatak 17: Ako je $ABCD$ prostorni četvorougao i O proizvoljna tačka prostora, dokazati da tačke P, Q, R, S u kojima prave AB, BC, CD, DA prodiru ravni OCD, ODA, OAB, OBC pripadaju jednoj ravni.



Slika uz zadatak 17

Dokaz: S obzirom da tačke O, P, R pripadaju dvema raznim ravnima PCD i RAB, one se ne seku na presečnoj pravoj tih dveju ravni. Isto tako, tačke O, Q, S pripadaju dvema raznim ravnima QDA i SBC, pa se one takođe nalaze na presečnoj pravoj tih dveju ravni. Otud sledi da je O zajednička tačka pravih PR i QS, pa su tačke P, Q, R, S u jednoj ravni.

Zadatak 18: Dokazati da je potreban i dovoljan uslov pod kojim četiri tačke P, Q, R, S pravih određenih stranicama AB, BC, CD, DA prostornog četvorougla $ABCD$ pripadaju jednoj ravni je da bude

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1.$$

(Menelajeva teorema za prostorne četvorouglove).

Dokaz: Dokažimo najpre da je navedeni uslov potreban. Zato pretpostavimo da tačke P, Q, R, S pripadaju jednoj ravni, recimo π. Prava određena dijagonalom AC prodire ravan π ili je sa njom uporedna. Ako je prodire u nekoj tački T, biće tačke P, Q, T u kojima produžene stranice AB, BC, CA trougla ABC prodiru ravan π na jednoj pravoj, isto tako biće tačke R, S, T u kojima produžene stranice CD, DA, AC trougla CDA prodiru ravan π na jednoj pravoj, pa je prema Menelajevoj teoremi

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CT}{TA} = -1$$

i

$$\frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} \cdot \frac{AT}{TC} = -1.$$

Množenjem odgovarajućih strana nalazimo da je

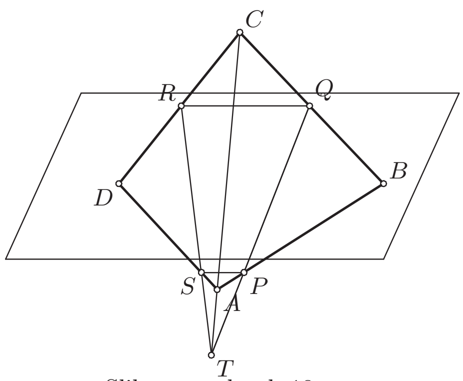
$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1.$$

Ako je prava AC uporedna s ravni π, ona je uporedna i s pravama PQ i RS, pa je

$$\frac{AP}{RD} \cdot \frac{BQ}{SA} = 1$$

i prema tome

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1.$$



Slika uz zadatak 18

Sad dokažimo da je navedeni uslov dovoljan. Naime pretpostavljajući da je

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1,$$

dokažimo da tačke P, Q, R, S pripadaju jednoj ravni. Tačke P, Q, R ne pripadaju jednoj pravoj. Zaista, ako bi one bile na jednoj pravoj, one bi bile u ravni ABC, pa bi ravan ABC sadržala dve tačke C i R stranice CD, dakle i tačku D. U tom slučaju sva temena prostornog četvorougla $ABCD$ pripadala bi jednoj ravni, što je nemoguće. S obzirom da tačke P, Q, R ne pripadaju jednoj pravoj, one određuju neku ravan π. Ako bi S' bila tačka u kojoj prava AD prodire ravan π, imali bismo da je

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS'}{S'A} = 1,$$

pa je

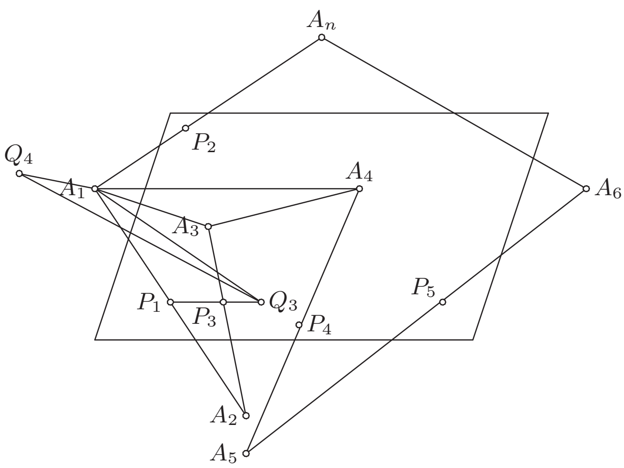
$$\frac{DS}{SA} = \frac{DS'}{S'A}$$

i prema tome tačka S' istovetna s tačkom S. Dakle, sve četiri tačke P, Q, R, S pripadaju jednoj ravni.

Zadatak 19: Ako su $P_1, \dots, P_n$ tačke u kojima proizvoljna ravan π seče prave određene stranicama $A_1A_2, \cdots, A_nA_1$ prostornog n-tougla $A_1 \dots A_n$, dokazati da je

$$\frac{A_1P_1}{P_1A_2} \cdot \frac{A_2P_2}{P_2A_3} \cdot \dots \cdot \frac{A_nP_n}{P_nA_1} = (-1)^n$$

(Menelajeva teorema za prostorne mnogouglove).



Slika uz zadatak 19

Dokaz: Ravan π seče prave određene dijagonalama $A_1A_3, A_1A_4, ..., A_1A_{n-1}$ u izvesnim tačkama $Q_3, Q_4, \dots, Q_{n-1}$, ili je uporedna s nekim od tih pravih. Ako pretpostavimo da ravan π seče sve pomenute prave, biće tačke P_1, P_2, Q_3 u kojima produžene stranice trougla $A_1A_2A_3$ prodiru ravan π na jednoj pravoj, tačke P_3, Q_3, Q_4 u kojima produžene stranice trougla $A_1A_3A_4$ prodiru ravan π na jednoj pravoj , $\dots$, tačke Q_{n-1}, P_{n-1}, P_n u kojima produžene stranice trougla $A_1A_{n-1}A_n$ prodiru ravan π na jednoj pravoj. Otuda je

$$\begin{aligned} \frac{A_1P_1}{P_1A_2} \cdot \frac{A_2P_2}{P_2A_3} \cdot \frac{A_3Q_3}{Q_3A_1} &= -1, \\ \frac{A_3P_3}{P_3A_4} \cdot \frac{A_4Q_4}{Q_4A_1} \cdot \frac{A_1Q_3}{Q_3A_3} &= -1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots & \quad \dots \\ \frac{A_{n-1}P_{n-1}}{P_{n-1}A_n} \cdot \frac{A_nP_n}{P_nA_1} \cdot \frac{A_1Q_{n-1}}{Q_{n-1}P_{n-1}} &= -1 \end{aligned} \tag{1}$$

Množenjem odgovarajućih strana ovih jednakosti, nalazimo da je

$$\frac{A_1P_1}{P_1A_2} \cdot \frac{A_2P_2}{P_2A_3} \cdot \dots \cdot \frac{A_nP_n}{P_nA_1} = (-1)^n. \qquad (2)$$

Ako bi neka dijagonala $A_1A_3, A_1A_4, \dots, A_1A_{n-1}$ npr. dijagonala A_1A_3, bila uporedna s ravni π, prvim dvema iz gornjih jednakosti odgovaralo bi jednakosti

$$\frac{A_1P_1}{P_1A_2} \cdot \frac{A_2P_2}{P_2A_3} = 1$$

i

$$\frac{A_3P_3}{P_3A_4} \cdot \frac{A_4Q_4}{Q_4A_1} = 1,$$

jer bi u tom slučaju duži P_1P_2 i P_3Q_4 bile uporedne s dijagonalom A_1A_3. Stoga je u tom slučaju jednakost (2) tačna.

Zadatak 20: Ako su P, Q, R, S tačke u kojima stranice AB, BC, CD, DA prostornog četvorougla $ABCD$ prodiru neku ravan π, dokazati da tačke P', Q', R', S' simetrične sa tačkama P, Q, R, S u odnosu na središta odgovarajućih stranica pripadaju jednoj ravni.

Dokaz: Prema Menelajevoj teoremi za prostorne četvorouglove imamo da je

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1.$$

S obzirom da su tačke P', Q', R', S' simetrične tačkama P, Q, R, S u odnosu na središta odgovarajućih stranica, biće

$$AP = P'B,\ PB = AP,\ BQ = Q'C,\ QC = BQ',$$

$$CR = R'D,\ RD = CR',\ DS = S'A,\ SA = DS',$$

pa je

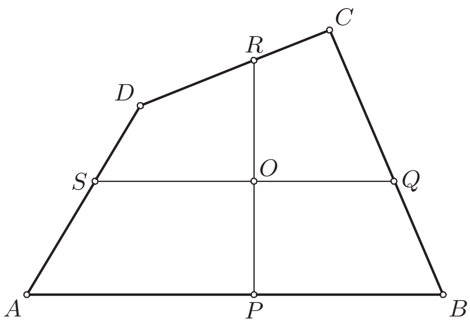
$$\frac{AP'}{P'B} \cdot \frac{BQ'}{Q'C} \cdot \frac{CR'}{R'D} \cdot \frac{DS'}{S'A} = 1.$$

Otuda sledi da tačke P', Q', R', S' pripadaju istoj ravni.

Zadatak 21: Neka su P, Q, R, S tačke pravih koje su određene stranicama AB, BC, CD, DA prostornog četvorougla $ABCD$. Dokazati da je potreban i dovoljan uslov pod kojim se ravni PCD, QDA, RAB, SBC seku u jednoj tački izražen s jednakosti

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1.$$

(Čevijeva teorema za prostorne četvorouglove).



Slika uz zadatak 21

Dokaz: Dokažimo najpre da je navedeni uslov potreban. Zato pretpostavimo da se ravni PCD, QDA, RAB, SBC seku u nekoj tački O. S obzirom da tačke O, P, R pripadaju dvema raznim ravnima PCD i RAB, tačke O, P, R su na presečnoj pravoj tih dveju ravni. Isto tako tačke O, Q, S pripadaju presečnoj pravoj QDA i SBC. Otuda sledi da tačke P, Q, R, S pripadaju jednoj ravni, pa je prema Menelajevoj teoremi za prostorne četvorouglove

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1.$$

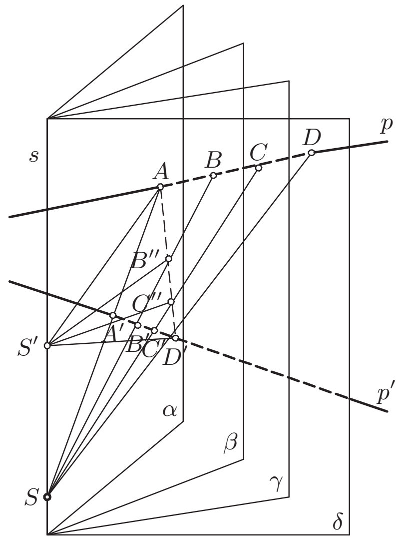
Sad dokažimo da je taj uslov i dovoljan. Iz jednakosti

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$$

sledi da tačke P, Q, R, S pripadaju jednoj ravni, pa se prave PR i QS seku u nekoj konačnoj ili beskrajno dalekoj tački O. S obzirom da se ravni PCD i RAB seku po pravoj PR, a ravni QAD i SBC seku po pravoj QS, ravni PCD, QDA, RAB, SBC se seku u tački O.

Zadatak 22: Ako su A, B, C, D i A', B', C', D' tačke u kojima dve prave p i p' prodiru četiri ravni $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ koje se seku po nekoj pravoj s, dokazati da su dvorazmere tačaka A, B, C, D i A', B', C', D' među sobom jednake, tj. da je $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Dokaz: Prave p i p' pripadaju jednoj ravni ili se mimoilaze. Ako pripadaju nekoj ravni π, prave AA', BB', CC', DD' po kojima ta ravan seče ravni $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ uporedne su sa pravom s ili se seku u nekoj tački koja se nalazi na pravoj s. Stoga je prema zadatku $\ldots (ABCD) = (A'B'C'D')$.



Slika uz zadatak 22

Pretpostavimo da su prave p i p' mimoilazne. Dve prodorne tačke pravih p i p' koje nisu u istoj ravni $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ npr. tačke A i D' određuju pravu p'' koja prodire te četiri ravni u tačkama A, B'', C'', D'. Prave p i p' se seku, dakle pripadaju jednoj ravni, te je prema dokazanom delu ovog zadatka $(ABCD) = (AB''C''D')$. Isto tako, prave p' i p'' se seku, dakle pripadaju nekoj ravni. Stoga je $(A'B'C'D') = (AB''C''D')$. Iz dobijenih dveju jednakosti sledi da je $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Zadatak 23: Ako je $A_1 \dots A_n$ ravan ili prostorni poligon i P proizvoljna tačka prostora, dokazati da je zbir duži koje spajaju tačku P s temenima tog poligona veći od poluobima tog poligona.

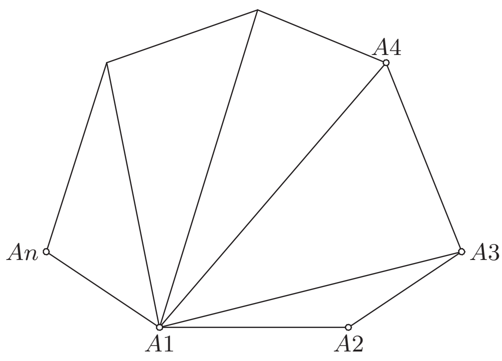
Dokaz: Prema poznatom stavu imamo da je

$$PA_1 + PA_2 \geqslant A_1A_2, \dots, PA_n + PA_1 \geqslant A_nA_1.$$

S obzirom da tačka P ne može pripadati svim stranicama poligona $A_1 \dots A_n$, no može u svim dobijenim relacijama važiti znak jednakosti, prema tome, biće

$$PA_1 + \dots + PA_n \geqslant \frac{1}{2}(A_1A_2 + \dots + A_nA_1).$$

Zadatak 24: Ako je S zbir unutrašnjih uglova prostornog n-tougla, a R prav ugao, dokazati da je $S < (n-2) \cdot 2R$.



Slika uz zadatak 24

Dokaz: Ake se konstruišu sve dijagonale koje polaze iz istog temena, npr. A_1, prostornog n-tougla $A_1 \dots A_n$ biće

$$\angle A_n A_1 A_2 \leqslant \angle A_2 A_1 A_3 + \angle A_1 A_3 A_4 + \cdots + \angle A_{n-1} A_1 A_n$$

i

$$\begin{aligned} &\angle A_2 A_3 A_4 \leqslant \angle A_2 A_3 A_1 + \angle A_1 A_3 A_4, \\ &\angle A_3 A_4 A_5 \leqslant \angle A_3 A_4 A_1 + \angle A_1 A_4 A_5, \\ &\dots\dots\dots \\ &\angle A_{n-2} A_{n-1} A_n \leqslant \angle A_{n-2} A_{n-1} A_1 + \angle A_1 A_{n-1} A_n. \end{aligned}$$

Kako je poligon $A_1 \dots A_n$ prostorni, ne može u svim navedenim relacijama da važi znak jednakosti, prema tome biće

$$\begin{aligned} &\angle A_n A_1 A_2 + \angle A_1 A_2 A_3 + \cdots + \angle A_{n-1} A_n A_1 < \\ &< (\angle A_3 A_1 A_2 + \angle A_1 A_2 A_3 + \angle A_2 A_3 A_1) + \cdots + \\ &+ (\angle A_{n-1} A_1 A_1 + \angle A_1 A_{n-1} A_n + \angle A_{n-1} A_n A_1) \end{aligned}$$

tj.

$$S < (n-2) \cdot 2R.$$

Podudarnost triedara 1.

Zadatak 25: Dokazati da su dva triedra podudarna ako su im jednaki odgovarajući ivični uglovi (III stav podudarnosti triedara).

Dokaz: Da bi triedri $Sabc$ i $S'a'b'c'$ sa jednakim odgovarajućim ivičnim uglovima bili podudarni, treba dokazati da su im jednaki i odgovarajući diedri. Neka su A, B, C, A', B', C' tačke polupravih a, b, c, a', b', c' takve da su duži SA, SB, SC, $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$ među sobom jednake. Jednakokraki trouglovi ASB, BSC, CSA podudarni su redom trouglovima $A'S'B'$, $B'S'C'$, $C'S'A'$ pa su duži AB, BC, CA jednake dužima

$A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ i prema tome, uglovi BAC i $B'A'C'$ među sobom jednaki. Pored toga, uglovi SAB i SAC na osnovicama pravih dvaju trouglova su oštri i jednaki uglovima $S'A'B'$ i $S'A'C'$. Neka su P i P' tačke duži SA i $S'A'$ takve da su odsečci AP i $A'P'$ jednaki. Ravni π i π' upravne na pravama SA i $S'A'$ seku poluprave AB, AC i $A'B'$, $A'C'$ u tačkama Q, R i Q', R'. Trouglovi APQ, AQR, ARP podudarni su trouglovima $A'P'Q'$, $A'Q'R'$, $A'R'P'$ pa su duži PQ, QR, RP jednake dužima $P'Q'$, $Q'R'$, $R'P'$ i prema tome, uglovi RPQ i $R'P'Q'$ jednaki. Kako su RPQ i $R'P'Q'$ uglovi diedara koji odgovaraju ivicama a i a', biće i ti diedri jednaki. Analognim postupkom dokazuje se da su ostali parovi odgovarajućih diedara takođe jednaki, prema tome, pomenuti triedri su podudarni.

Zadatak 26: Dokazati da su dva triedra podudarna ako su im jednaki odgovarajući diedri (VI stav podudarnosti triedara).

Dokaz: Da bi triedri $Sabc$ i $S'a'b'c'$ sa jednakim odgovarajućim diedrima bili podudarni, treba dokazati da su im jednaki i odgovarajući ivični uglovi. Triedri polarni ovim triedrima, prema stavu III, imaju jednake odgovarajuće ivične uglove, pa su im i odgovarajući diedri jednaki. Otud sleduje da su kod triedara $Sabc$ i $S'a'b'c'$ jednaki odgovarajući ivični uglovi, prema tome, oni su podudarni.

Zadatak 27: Ako su dva ivična ugla i njima zahvaćeni diedar jednog triedra jednaki odgovarajućim ivičnim uglovima i odgovarajućem diedru drugog triedra, dokazati da su pomenuti triedri podudarni (I stav podudarnosti triedara).

Dokaz: Neka su ivični uglovi (a, b), (a, c) triedra $Sabc$ jednaki ivičnim uglovima (a', b'), (a', c') triedra $S'a'b'c'$ i diedri zahvaćeni tim uglovima takođe jednaki. Kao i u primeru 1., na ivicama a, b, c, a', b', c' odredimo tačke A, B, C, A', B', C' takve da duži SA, SB, SC, $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$ budu među sobom jednake. Jednakokraki trouglovi SAB, SAC podudarni su trouglovima $S'A'B'$, $S'A'C'$ pa su oštri uglovi SAB i SAC jednaki uglovima $S'A'B'$ i $S'A'C'$, a duži AB i AC jednake dužima $A'B'$ i $A'C'$. Neka su P i P' tačke duži SA i $S'A'$ takve da su odsečci AP i $A'P'$ jednaki, a π i π' pavni koje su u tačkama P i P' upravne na polupravama AS i $A'S'$. Kako su uglovi SAB, SAC i $S'A'B'$, $S'A'C'$ oštri, ravni π i π' seći će poluprave AB, AC i $A'B'$, $A'C'$ u tačkama Q, R i Q', R'. Trouglovi APQ, APR podudarni su trouglovima $A'P'Q'$, $A'P'R'$ pa su duži PQ, PR jednake dužima $P'Q'$, $P'R'$. Pored toga, uglovi RPQ i $R'P'Q'$ kao uglovi diedara koji odgovaraju ivicama a i a' pomenutih triedara, po predpostavci jednaki su, pa su trouglovi PQR i $P'Q'R'$ takođe podudarni, i prema tome, duži QR i $Q'R'$ jednake. Sad iz podudarnih trouglova AQR i $A'Q'R'$ nalazimo da su uglovi QAR i $Q'A'R'$, tj. uglovi BAC i $B'A'C'$ jednaki. Najzad, iz podudarnih trouglova ABC i $A'B'C'$ sledi jednakost duži BC i $B'C'$, a iz podudarnih trouglova SBC i $S'B'C'$ jednakost uglova BSC i $B'S'C'$, tj. ivičnih uglova (b, c) i (b', c') datih triedara. Otuda su, prema zadatku 25., triedri $Sabc$ i $S'a'b'c'$ podudarni.

Zadatak 28: Ako su jedan ivični ugao i na njemu nalegli diedri jednog triedra jednaki odgovarajućem ivičnom uglu i odgovarajućim diedrima drugog triedra, dokazati da su ti triedri podudarni (II stav podudarnosti triedara).

Dokaz: Neka su kod triedara $Sabc$, $S'a'b'c'$ jednaki ivični uglovi (b, c), (b', c'), a diedri koji odgovaraju ivicama b, c jednaki diedrima koji odgovaraju ivicama b', c'. Triedri polarni ovim triedrima imaju jednaka po dva odgovarajuća ivična ugla i diedre zahvaćene njima, pa su prema prethodnom stavu podudarni, odakle sledi da su i ivični uglovi (a, b), (a', b') jednaki, prema tome, pomenuti triedri podudarni.

Zadatak 29a: Ako su dva ivična ugla i diedar naspram jednog od njih nekog triedra jednaki odgovarajućim ivičnim uglovima i odgovarajućem diedru drugog triedra, a diedri naspram drugog para pomenutih ivičnih uglova oštri, pravi ili tupi, dokazati da su ti triedri podudarni (V stav podudarnosti triedara).

Dokaz: Neka su kod triedara $Sabc$, $S'a'b'c'$ ivični uglovi (a, b) i (a, c) jednaki ivičnim uglovima (a', b') i (a', c'), diedri koji odgovaraju ivicama b i b' jednaki, a diedri koji odgovaraju ivicama c i c' oštri, pravi ili tupi. Ako su diedri koji odgovaraju ivicama c i c' pravi, stav je jednostavan. U ostala dva slučaja dovoljno je dokazati da su ivični uglovi (b, c) i (b', c') jednaki, pa će pomenuti triedri biti podudarni. (v. zad. 25). Pretpostavimo da ivični uglovi (b, c) i (b', c') nisu jednaki, već da je

$$\angle(b, c) > \angle(b', c').$$

U uglu (b, c) postoji poluprava c_1 sa krajem S takva da je

$$\angle(b, c_1) = \angle(b', c').$$

Triedri $Sabc$ i $S'a'b'c'$ su podudarni (v. zad. 27), pa su unutrašnji diedri koji odgovaraju ivicama c_1 i c' među sobom jednaki. Pored toga je $\angle(a, c_1) = \angle(a', c')$ i prema tome

$$\angle(a, c_1) = \angle(a, c').$$

Kod triedra Sac_1c jednaki su ivični uglovi (a, c_1) i (a, c), pa su i diedri naspram njih jednaki. Otuda sledi da su oba naspramna diedra, čija zajednička ivica sadrži polupravu c_1, oštra ili tupa; što je nemoguće; dakle, ivični uglovi (b, c) i (b', c') su jednaki i, prema tome, triedri $Sabc$ i $S'a'b'c'$ podudarni.

Zadatak 29b: Ako su dva diedra i ivični ugao naspram jednog od njih nekog triedra jednaki odgovarajućim diedrima i odgovarajućem ivičnom uglu drugog triedra, a oba ivična ugla naspram drugog para pomenutih diedara oštra, prava ili tupa, dokazati da su ti triedri podudarni (IV stav podudarnosti triedara).

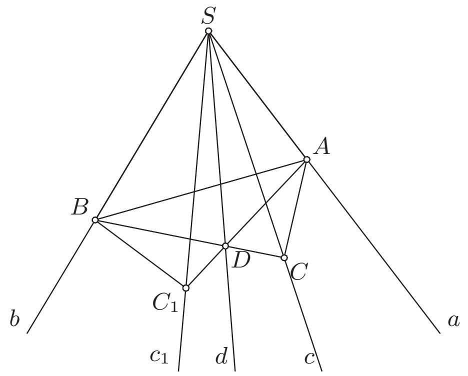
Dokaz: Neka su kod triedara $Sabc$, $S'a'b'c'$ diedri koji odgovaraju ivicama b i c jednaki diedrima koji odgovaraju ivicama b' i c', ivični uglovi (a, c) i (a', c') jednaki, a ivični uglovi (a, b) i (a', b')stri, pravi ili tupi. Njima polarni triedri $S_1a_1b_1c_1$, $S_1'a_1'b_1'c_1'$ su prema prethodnom zadatku, podudarni, pa su i triedri $Sabc$, $S'a'b'c'$ takodje podudarni

Zadatak 29: Ako su dva diedra i ivični ugao naspram jednog od njih nekog triedra jednaki odgovarajućim diedrima i odgovarajućem ivičnom uglu drugog triedra, a oba ivična ugla naspram drugog para pomenutih diedara oštra, prava ili tupa, dokazati da su ti triedri podudarni (IV stav podudarnosti triedara).

Dokaz: Neka su kod triedra $Sabc$ i $S'a'b'c'$ diedri koji odgovaraju ivicama b i c jednaki diedrima koji odgovaraju ivicama b' i c', ivični uglovi (a, c) i (a', c') jednaki, a ivični uglovi (a, b) i (a', b') oštri, pravi ili tupi. Njima polarni triedri $S_1a_1b_1c_1$ i $S_1'a_1'b_1'c_1'$ su, prema predhodnom zadatku, podudarni pa su i triedri $Sabc$ i $S'a'b'c'$ takođe podudarni.

Zadatak 30: Ako su dva ivična ugla jednog triedra jednaka odgovarajućim ivičnim uglovima drugog triedra, a diedri zahvaćeni tim uglovima nejednaki, dokazati da je naspram većeg od tih diedara veći ivični ugao, a naspram manjeg manji ivični ugao.

Dokaz: Neka je kod triedra $Sabc$ i $S'a'b'c'$ $\angle(a, b) = \angle(a', b')$, $\angle(a, c) = \angle(a', c')$, a diedar naspram ugla (b, c) veći od diedra naspram ugla (b', c'). Treba dokazati da je $\angle(b, c) > \angle(b', c')$. Iz uvedene pretpostavke sleduje da u diedru koji je zahvaćen pljosnima (a, b) i (a, c) postoji polupravа c_1 sa krajem S takva da je triedar $Sabc_1$ podudaran triedru $S'a'b'c'$. Poluravan koja sadrži c_1 i ima ivicu određenu polupravom a nalazi se u diedru zahvaćenom pljosnima (a, b) i (a, c), prema tome, ona seče pljosan (b, c) po nekoj polupravoj d. Ta poluprava je u uglu (a, c_1), izvan njega ili je istovetna sa polupravom c_1.



Slika 1 uz zadatak 30

U prvom slučaju biće

$$\angle(a, c_1) = \angle(a, d) + \angle(d, c_1)$$

i

$$\angle(b, c) = \angle(b, d) + \angle(d, c).$$

Prema predhodnoj teoremi, kod triedra $Sacd$ i Sbc_1d je

$$\angle(a,d)+\angle(d,c)>\angle(a,c)$$

i

$$\angle(b,d)+\angle(d,c_1)>\angle(b,c_1),$$

pa je

$$\angle(a,d)+\angle(d,c_1)+\angle(b,d)+\angle(d,c)>\angle(a,c)+\angle(b,c_1),$$

odnosno

$$\angle(a,c_1)+\angle(b,c)>\angle(a,c)+\angle(b,c_1).$$

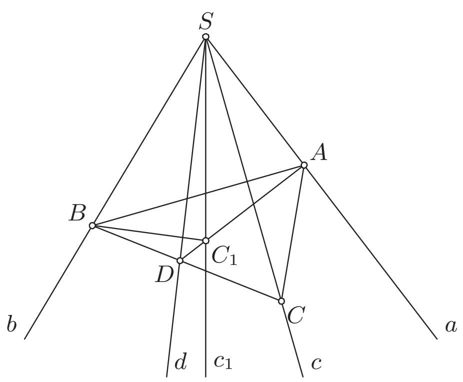
Uglovi (a,c) i (a,c_1) su među sobom jednaki, pa je

$$\angle(b,c)>\angle(b,c_1),$$

odnosno

$$\angle(b,c)>\angle(b',c'),$$

što je trebalo dokazati.



Slika 2 uz zadatak 30

U drugom slučaju biće

$$\angle(a,c_1)=\angle(a,d)-\angle(c_1,d)$$

i

$$\angle(b,c)=\angle(b,d)+\angle(d,c).$$

Kod triedara $Sacd$ i Sbc_1d je

$$\angle(a,d)+\angle(d,c)>\angle(a,c)$$

i

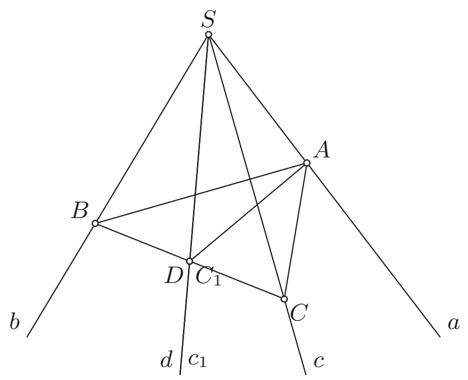
$$\angle(b,c_1)>\angle(b,d)-\angle(d,c_1),$$

pa je kao u prvom slučaju

$$\angle(b,c)>\angle(b,c_1),$$

odnosno

$$\angle(b,c)>\angle(b',c').$$



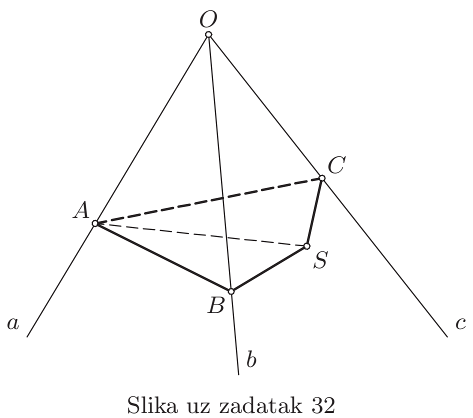
Slika 3 uz zadatak 30

U trećem slučaju biće poluprava c_1 u uglu (b, c) pa je $\angle(b, c) > \angle(b, c_1)$, odnosno $\angle(b, c) > \angle(b', c')$.

<u>Zadatak 31:</u> Ako su dva diedra jednog triedra jednaka odgovarajućim diedrima drugog triedra, a ivični uglovi na kojima naležu ti diedri nejednaki, dokazati da je naspram većeg od tih uglova veći diedar, a naspram manjeg manji diedar.

<u>Dokaz:</u> Koristiti svojstva njima polarnih rogljeva (v. zad. 30)

<u>Zadatak 32:</u> Dokazati da se naspram jednakih ivičnih uglova triedra nalaze jednaki i unutrašnji diedri.



Slika uz zadatak 32

<u>Dokaz:</u> Neka su kod triedra $Oabc$ ivični uglovi (a, b) i (a, c) među sobom jednaki. Obeležimo sa A proizvoljnu tačku ivice a, sa β i γ ravni kroz tačku A upravne na ivicama b i c, a sa B i C tačke u kojima te ravni seku prave određene ivicama b i c. S obzirom da su ravni β i γ kroz tačku A upravne na kracima neopruženog ugla (b, c), one se seku po nekoj pravoj koja sadrzi tačku A i prodire ravan pljosni (b, c) u nekoj tački S.

Pri tome je

$$\triangle AOB \cong \triangle AOC,$$

pa je $AB = AC$. Sad je

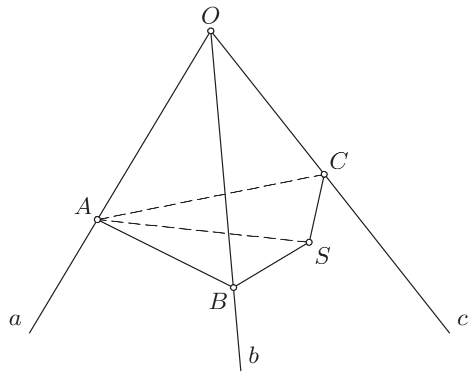
$$\triangle SAB \cong \triangle SAC,$$

pa je

$$\angle ABS = \angle ACS.$$

No uglovi ABS i ACS su uglovi diedra koji odgovaraju ivicama b i c, te su i diedri koji odgovaraju ivicama b i c među sobom jednaki.

Zadatak 33: Dokazati da se naspram jednakih unutrašnjih diedara triedra nalaze jednaki ivični uglovi.



Slika uz zadatak 33

Dokaz: Neka su kod triedra $Oabc$ jednaki unutrašnji diedri koji odgovaraju ivicama b i c. Obeležimo sa A proizvoljnu tačku ivice a, sa β i γ ravni kroz tačku A upravne na ivicama b i c, a sa B i C tačke u kojima te ravni seku prave određene ivicama b i c. S obzirom da su ravni β i γ kroz tačku A upravne na kracima neopruženog ugla (b, c), one se seku po nekoj pravoj koja sadrži tačku A i prodire ravan pljosni (b, c) u nekoj tački S. Pri tome je

$$\triangle SAB \cong \triangle SAC,$$

pa je $AB = AC$. Sad je

$$\triangle OAB \cong \triangle OAC,$$

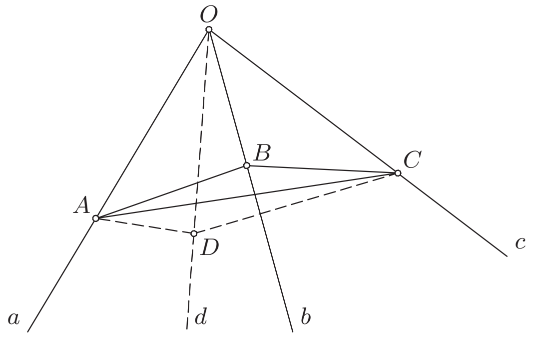
pa je

$$\angle AOB = \angle AOC,$$

i prema tome

$$\angle(a, b) = \angle(a, c).$$

<u>Zadatak 34:</u> Ako su svi ivični uglovi četvorostranog roglja među sobom jednaki, dokazati da su naspramni diedri tog roglja među sobom jednaki.



Slika uz zadatak 34

<u>Dokaz:</u> Neka je $Oabcd$ četvorostrani rogalj kome su svi ivični uglovi među sobom jednaki. Ako su A i C tačke ivica a i c takve da je $OA = OC$, podnožja normala iz tih tačaka na pravoj koja sadrži ivicu b je ista tačka B, a podnožja normala na pravoj koja sadrži ivicu d je ista tačka D. Pri tome su jednakokraki trouglovi ABC i ADC sa zajedničkom osnovom AC podudarni, pa je $\angle ABC = \angle ADC$. No uglovi ABC i ADC su uglovi diedra koji odgovaraju ivicama b i d, pa su i diedri koji odgovaraju naspramnim ivicama d i b datog roglja među sobom jednaki. Analogno se dokazuje da su i diedri koji odgovaraju naspramnim ivicama a i c takođe među sobom jednaki.

<u>Zadatak 35:</u> Dokazati da je zbir svih unutrašnjih diedara n-tostranog konveksnog roglja veći od zbira 2_{n-4}, a manji od 2_n pravih diedara.

<u>Dokaz:</u> Prema zadatku 32, ugao svakog unutrašnjeg diedra konveksnog roglja je suplementan s odgovarajućim ivičnim uglom njemu polarnog roglja. Stoga, ako obeležimo sa S_n zbir uglova svih unutrašnjih diedara datog konveksnog roglja, sa S'_n zbir ivičnih uglova njemu polarnog roglja i sa R prav ugao, imamo da je

$$S'_n = 2_n R - S'_n \cdot S.$$

S obzirom da je polarni rogalj datog konveksnog roglja takođe konveksan, biće $S'_n < 4R$, pa je

$$S_n > (2_n - 4)R.$$

Otuda je i zbir svih unutrašnjih diedara n-tostranog konveksnog roglja veći od zbira 2_{n-4} pravih diedara. Svaki unutrašnji diedar konveksnog roglja takođe je konveksan, dakle, manji je od zbira dva prava diedra. Stoga je zbir svih unutrašnjih diedara n-tostranog konveksnog roglja manji od zbira 2_n pravih diedara.

Zadatak 36: Dokazati da je zbir uglova koje proizvoljna poluprava iz vrha konveksnog triedra obrazuje s njegovim ivicama veći od poluzbira ivičnih uglova tog triedra. Kada se pomenuta poluprava nalazi u triedru, dokazati da je zbir uglova koje ona zahvata s ivicama manji od zbira ivičnih uglova tog triedra.

Dokaz: Ako je p poluprava kojoj je kraj vrh S konveksnog triedra $Sabc$ biće

$$\angle(p,b)+\angle(p,c)\geqslant\angle(b,c),$$

$$\angle(p,c)+\angle(p,a)\geqslant\angle(c,a),$$

$$\angle(p,a)+\angle(p,b)\geqslant\angle(a,b).$$

Kako poluprava p ne može istovremeno pripadati svim trima pljosnima triedra, ne mogu istovremeno važiti jednakosti u svim navedenim relacijama, prema tome biće

$$\angle(p,a)+\angle(p,b)+\angle(p,c)>\frac{1}{2}[\angle(b,c)+\angle(c,a)+\angle(a,b)].$$

Ako je poluprava p u tom triedru, biće

$$\angle(p,b)+\angle(p,c)<\angle(a,b)+\angle(a,c),$$

$$\angle(p,c)+\angle(p,a)<\angle(b,c)+\angle(b,a),$$

$$\angle(p,a)+\angle(p,b)<\angle(c,a)+\angle(c,b).$$

Otuda je

$$\angle(p,a)+\angle(p,b)+\angle(p,c)<\angle(b,c)+\angle(c,a)+\angle(a,b).$$

Zadatak 37: Dokazati da je zbir uglova koje proizvoljna poluprava iz vrha konveksnog n-tostranog roglja zahvata s njegovim ivicama veći od poluzbira ivičnih uglova tog roglja. Ako se pomenuta poluprava nalazi u tom roglju, dokazati da je zbir uglova koje ona zahvata s ivicama manji od zbira ivičnih uglova tog roglja pomnoženog sa $\frac{n-1}{2}$.

Dokaz: Ako je p poluprava kojoj je kraj vrh S konveksnog n-tostranog roglja $Sa_1a_2\dots a_n$, biće

$$\angle(p,a_1)+\angle(p,a_2)\geqslant\angle(a_1,a_n),\dots,\angle(p,a_n)+\angle(p,a_1)\geqslant\angle(a_n,a_1).$$

Poluprava p ne može pripadati svim pljosnima roglja, prema tome, ne mogu istovremeno važiti jednakosti u svim navedenim relacijama. Otuda je

$$\angle(p,a_1)+\angle(p,a_2)+\cdots+\angle(p,a_n)>\frac{1}{2}[\angle(a_1,a_2)+\angle(a_2,a_3)+\cdots+\angle(a_n,a_1)].$$

Ako je poluprava p u tom roglju, biće

$$\angle(p,a_1)+\angle(p,a_2)<\angle(a_2,a_3)+\cdots+\angle(a_n,a_1)$$
- -
$$\angle(p,a_n)+\angle(p,a_1)<\angle(a_1,a_2)+\cdots+\angle(a_{n-1},a_n)$$

Otuda je

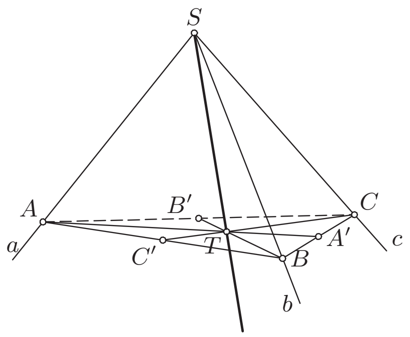
$$\angle(p,a_1)+\angle(p,a_2)+\cdots+\angle(p,a_n)<\frac{n-1}{2}[\angle(a_1,a_2)+\angle(a_2,a_3)+\cdots+\angle(a_n,a_1)].$$

Zadatak 38: Dokazati da se ravni, od kojih svaka sadrži jednu ivicu triedra i raspolovnicu naspramnog ivičnog ugla, seku po jednoj pravoj.

Dokaz: Neka su a, b, c ivice triedra kome je vrh S, a', b', c' raspolovnice njegovih ivičnih uglova $\angle(b,c)$, $\angle(c,a)$, $\angle(a,b)$ i α, β, γ ravni određene polupravama a i a', b i b', c i c'. Ako su A, B, C tačke ivica a, b, c takve da je

$$SA=SB=SC,$$

trouglovi SBC, SCA, SAB su jednakokraki, te poluprave a', b', c' sadrže središta A', B', C' duži BC, CA, AB.

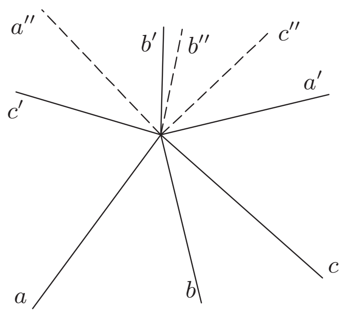


Slika uz zadatak 38

Otud sleduje da su duži AA', BB', CC' težišne linije trougla ABC, pa se seku u jednoj tački, težištu T tog trougla. Tačka S je izvan ravni ABC, a tačka T u ravni ABC, pa su S i T dve razne tačke. Obe pripadaju ravnima α, β, γ pa se te tri ravni seku po pravoj ST.

Zadatak 39: Dokazati da simetralne ravni spoljašnjih diedara triedra seku ravni naspramnih pljosni po pravama koje pripadaju jednoj ravni.

Dokaz: Neka su α, β, γ simetralne ravni spoljašnjih diedara koji odgovaraju ivicama a, b, c triedra $Sabc$ i a_1, b_1, c_1 prave po kojima ravni α, β, γ seku ravni (b,c), (c,a), (a,b). Poluprave a', b', c' koje imaju zajednički kraj S, upravne su na ravnima (b,c), (c,a), (a,b) a nalaze se s onih strana od tih ravni s kojih nisu poluprave a, b, c, su ivice jednog konveksnog triedra $Sa'b'c'$; neka su a'', b'', c'' raspolovnice njegovih ivičnih uglova (b',c'), (c',a'), (a',b').



Slika uz zadatak 39

Kako su poluprave b' i c' upravne na pljosnima (a,c) i (a,b), one su upravne i na ivici a, pa je i raspolovnica a'' ugla (b',c') upravna na ivici a. S obzirom da je poluprava a'' sadržana u simetralnoj ravni diedra koji odgovara ivici a triedra $Sabc$, a upravna na preseku te ravni s ravni α, biće $a''\perp\alpha$. Kako su poluprave a' i a'' upravne u tački S na ravnima (b,c) i α, biće ravan određena polupravama a' i a'' upravna na presečnoj pravoj a_1 ravni α i (b,c). Isto tako, ravan određena polupravama b' i b'' upravna je na pravoj b_1, a ravan određena polupravama c' i c'' upravna je na pravoj c_1. Prema prethodnom zadatku, ravni (a',a''), (b',b''), (c',c'') se seku po jednoj pravoj, npr. s. Kako su prave a_1, b_1, c_1 upravne u tački S na ravnima (a',a''), (b',b''), (c',c''), one su upravne u tački S i na pravoj s po kojoj se seku te tri ravni. Otud sleduje da prave a_1, b_1, c_1 pripadaju jednoj ravni.

Zadatak 40: Dokazati da se simetralne ravni unutrašnjih diedara triedra seku po jednoj pravoj koja s pljosnima triedra zahvata jednake uglove, zatim da se simetralne ravni dva spoljašnja diedra i simetralna ravan unutrašnjeg nesusednog diedra seku po jednoj pravoj koja takođe s ravnima pljosni triedra zahvata jednake uglove.

Dokaz: Obeležimo sa α, β, γ simetralne ravni unutrašnjih diedara koji odgovaraju ivicama a, b, c triedra $Sabc$. Ravni β i γ ne mogu biti istovetne, imaju zajedničku tačku S, dakle seku se po izvesnoj pravoj s koja sadrži vrh S triedra. Dokažimo da prava s pripada i ravni α. Kako su β i γ simetralne ravni diedra koje odgovaraju ivicama b i c, sve tačke ravni β jednako su udaljene od ravni (a,b) i (b,c), a sve tačke ravni γ jednako udaljene od ravni (a,c) i (b,c). Otud sledi da su tačke preseka s ravni β i γ jednako udaljene od ravni (a,b) i (a,c). Sem toga, prava s se nalazi delom u unutrašnjem diedru koji odgovara ivici a, a delom u diedru koji je njemu unakrsan. Stoga, prava s pripada ravni α, pa se sve tri ravni α, β, γ seku po pravoj s.
Ako je P proizvoljna tačka prave s različita od S, a A, B, C upravne projekcije te tačke na ravnima (b,c), (c,a), (a,b) biće

$$\triangle SPA \cong \triangle SPB \cong \triangle SPC,$$

pa su nagibni uglovi PSA, PSB, PSC prave s prema tim ravnima jednaki.
Analogan postupak primenjuje se i pri izvođenju dokaza drugog dela zadatka.

Zadatak 41: Dokazati da prave kroz vrh triedra, sadržane u simetralnim ravnima spoljašnjih diedara i upravne na odgovarajućim ivicama pripadaju jednoj ravni koja s pljosnima pomenutog triedra zahvata jednake uglove.

Dokaz: Neka su α, β, γ simetralne ravni unutrašnjih, a α_1, β_1, γ_1 simetralne ravni spoljašnjih diedara koji odgovaraju ivicama a, b, c triedra Sabc. Pored toga, neka su a_1, b_1, c_1 prave kroz vrh S triedra, sadržane u ravni α_1, β_1, γ_1 a upravne na ivicama a, b, c. Prema prethodnom zadatku, ravni α, β, γ seku se po izvesnoj pravoj s. Kako je $a_1 \subset \alpha_1$ i $\alpha_1 \perp \alpha$, biće $a_1 \perp \alpha$, prema tome i na svakoj pravoj ravni α, pa je $a_1 \perp s$. Isto tako je $b_1 \perp s$ i $c_1 \perp s$. Prave a_1, b_1, c_1 upravne su na pravoj s u istoj tački S, prema tome, one pripadaju izvesnoj ravni σ koja je u tački S upravna na pravoj s.
Dokažimo da ta ravan σ zahvata s pljosnima triedra Sabc jednake uglove. Kako je prava s upravna u tački S na ravni σ, ona je upravna na svim pravama te ravni koje sadrže S, dakle i na presečnoj pravoj p ravni (b, c) s ravni σ. Stoga se prava s nalazi u ravni koja je u tački S upravna na pravoj p, prema tome i na ravnima $(b,\ c)$ i σ. Otud sleduje da ravan σ zahvata s ravni (b, c) ugao komplementan s uglom koji prava s zahvata s ravni (b, c). Istim postupkom dokazuje se da ravan σ zahvata s ravnima (c, a) i (a, b) uglove komplementne s uglovima koje prava s zahvata s ravnima (c, a) i (a, b). Prema prethodnom zadatku, prava s zahvata s pljosnima (b, c), (c, a), (a, b) jednake uglove, pa su i uglovi koje ravan σ zahvata s ravnima pljosni triedra medju sobom jednaki.

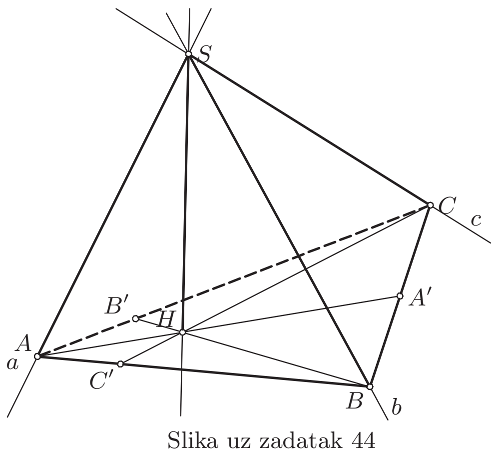
Zadatak 42: Dokazati da simetrale uglova koji su naporedni ivičnim uglovima triedra pripadaju jednoj ravni koja s ivicama tog triedra zahvata jednake uglove, zatim da simetrale dvaju ivičnih uglova i simetrala ugla koji je naporedan trećem ivičnom uglu pripadaju jednoj ravni koja takodje s ivicama triedra zahvata jednake uglove.

Dokaz: Neka su a_1, b_1, c_1 simetrale uglova koji su naporedni ivičnim uglovima $(b,\ c)$, $(c,\ a)$, $(a,\ b)$ triedra Sabc. Prave a_1 i b_1 se seku u tački S, prema tome, one odredjuju izvesnu ravan ω. Kako ta ravan sadrži simetralu ugla koji je naporedan s ivičnim uglom $(b,\ c)$, prave određene ivicama b i c zahvataju s ravni ω jednake uglove. Isto tako, ravan ω sadrži simetralu ugla koji je naporedan s ivičnim uglom $(c,\ a)$, stoga prave određene ivicama c i a zahvataju s ravni ω jednake uglove. Otud sledi da prave određene ivicama a i b zahvataju s ravni ω jednake uglove, pa prema zadatku 40. ravan ω sadrži simetralu ivičnog ugla $(a,\ b)$ ili pak simetralu c_1 njemu naporednog ugla. Ako bi ravan ω sadržala simetralu ivičnog ugla $(a,\ b)$, ona bi sekla taj ivični ugao, pa bi morala da seče još jedan ivični ugao triedra, što je nemoguće, jer ravan ω seče naporedne uglove ostala dva ivična ugla. Otud sleduje da ravan ω sadrži i simetralu c_1 ugla koji je naporedan s ivičnim uglom $(a,\ b)$. Prema tome, prave a_1, b_1, c_1 pripadaju istoj ravni ω koja s ivicama a, b, c triedra zahvata jednake uglove.
Analogan postupak primenjuje se i pri izvođenju dokaza drugog dela ovog zadatka.
Iz ovog zadatka neposredno sleduje da postoje četiri ravni koje sadrže vrh triedra od kojih svaka zahvata s ivicama triedra jednake uglove.

Zadatak 43: Dokazati da se ravni koje sadrže simetrale ivičnih uglova triedra i upravne su na njima seku po jednoj pravoj koja je upravna na ravni određenim simetralama uglova naporednih s uglovima tog triedra.

Dokaz: Neka su α, β, γ ravni koje sadrže simetrale ivičnih uglova (b,c), (c,a), (a,b) triedra Sabc i upravne su na njima. Ravni α i β imaju zajedničku tačku S i upravne su na ravnima (b,c) i (c,a) koje se seku, pa se i te dve ravni seku po izvesnoj pravoj q koja sadrži tačku S. Prema zadatku 41. svaka prava ravni α kroz tačku S zahvata s polupravama b i c jednake uglove, pa i prava q zahvata s tim polupravama jednake uglove. Isto tako, svaka prava ravni β kroz tačku S zahvata s polupravama c i a jednake uglove,pa i prava q zahvata s tim polupravama jednake uglove. Otud sledi da prava q zahvata s polupravama a i b jednake te je, prema zadatku 41. sadržana u ravni γ. Prema tome, ravni α, β, γ se seku po pravoj q.
Prema prethodnom zadatku, simetrale uglova koji su naporedni s ivičnim uglovima triedra pripadaju izvesnoj ravni ω. Kako su simetrale uglova koji su naporedni ivičnim uglovima $(b,\ c)$, $(c,\ a)$, $(a,\ b)$ triedra Sabc upravne na ravnima α, β, γ biće i ravan ω upravna na ravnima α, β, γ. Otud sledi da je prava q po kojoj se seku ravni α, β, γ upravna na ravni ω.

Zadatak 44: Dokazati da se ravni od kojih svaka sadrži jednu ivicu triedra i upravna je na naspramnoj pljosni seku po jednoj pravoj.



Slika uz zadatak 44

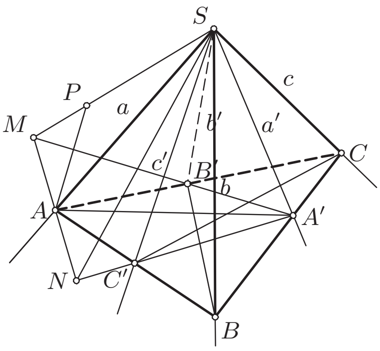
Dokaz: Obeležimo sa a, b, c ivice triedra kome je vrh S, sa α, β, γ ravni njenih pljosni $\angle(b,c)$, $\angle(c,a)$, $\angle(a,b)$ i sa α', β', γ' ravni koje sadrže redom ivice a, b, c i upravne su na ravnima α, β, γ.
Neka je A proizvoljna tačka ivice a, različita od S, a π ravan upravna na ivici a u tački A. Ivice b i c prodiru ravan π ili s njom nemaju zajedničkih tačaka. Pretpostavimo najpre da ivice b i c prodiru ravan π u tačkama B i C. Ravan α' sadrži ivicu a koja je upravna na ravan π, te je i $\alpha' \perp \pi$. Kako je $\alpha' \perp \pi$ i $\alpha' \perp \alpha$, ravan α' upravna je u izvesnoj tački A' na pravoj BC po kojoj se seku ravni α i π. Otud sledi da su sve prave ravni α' upravne na pravoj BC, pa je i $AA' \perp BC$. Dakle, duž AA' je visina trougla

ABC. Ravan β sadrži ivicu a koja je upravna na ravan π, pa je $\beta \perp \pi$. Kako je $\beta \perp \pi$ i $\beta \perp \beta'$, ravan β je upravna u izvesnoj tački B' na pravoj BB' po kojoj se seku ravni β' i π. Otud sleduje da su sve prave ravni β upravne na pravoj BB', te je i $AC \perp BB'$. Dakle, duž BB' je visina trougla ABC.
Na potpuno isti način dokazuje se da je i prava CC' po kojoj se seku ravni γ' i π upravna na pravoj AB u nekoj tački C', te je takođe duž CC' visina trougla ABC. Kako prave AA', BB', CC' sadrže visine trougla ABC, one se seku u ortocentru H tog trougla. Tačka S je izvan ravni π, a tačka H u ravni π, pa su S i H dve razne tačke. Obe te tačke pripadaju ravnima α', β', γ' te se one seku po pravoj SH.
Neka čitalac analizira slučaj kad ivice b i c ne prodiru ravan π.

Zadatak 45: Dokazati da prave kroz vrh triedra, sadržane u ravnima njegovih pljosni, a upravne na naspramnim ivicama pripadaju jednoj ravni.

Dokaz: Neka su a, b, c ivice triedra kome je vrh S, a zatim a_1 ,b_1, c_1 prave kroz S sadržane u ravnima pljosni $\angle(b,c)$, $\angle(c,a)$, $\angle(a,b)$ upravne na naspramnim ivicama a, b, c. Dokazaćemo da prave a_1, b_1, c_1 pripadaju jednoj ravni. U tom cilju, obeležimo sa a', b', c' upravne projekcije ivica a, b, c na ravnima naspramnih pljosni, a sa α, β, γ ravni određene polupravama a i a', b i b', c i c'. Te tri ravni sadrže ivice triedra i upravne su na naspramnim pljosnima, pa se prema prethodnom zadatku seku po jednoj pravoj s koja sadrži tačku S. Prava a_1 je upravna na na dvema polupravama a i a' ravni α, pa je upravna na svim pravama te ravni, dakle i na pravoj s. Istim postupkom dokazuje se da su i prave b_1, c_1 upravne na pravoj s. Na taj način, sve tri prave a_1, b_1, c_1 seku pravu s u tački S i upravne su na njoj, prema tome one pripadaju jednoj ravni.

Zadatak 46: Ako su a', b', c' upravne projekcije ivica a, b, c na ravnima naspramnih pljosni triedra $Sabc$, dokazati da su ravni određene polupravama a i a', b i b', c i c' simetrale diedra triedra $Sa'b'c'$.



Slika uz zadatak 46

Dokaz: Neka je A proizvoljna tačka ivice a različita od S, a π ravan upravna na ivici a u tački A. Ivice b i c prodiru ravan π ili ne , neka ih prodiru u tačkama B i C. U

zadatku 45. dokazano je da ravni određene polupravama a i a', b i b', c i c' seku ravan π po pravama koje sadrže visine AA', BB', CC' trougla ABC pa su prema zadatku 43. prave AA', BB', CC' simetrale uglova trougla $A'B'C'$. Obeležimo sa M i N podnožja upravnih kroz tačku A na pravama $A'B'$ i $A'C'$, a sa P i Q podnožja upravnih kroz tačku A na ravnima $SA'B'$ i $SA'C'$. Primenom stava o trima normalama nalazimo da je $SM \perp A'B'$ i $SN \perp A'C'$, a iz podudarnih trouglova MAA' i NAA' da je $MA' = NA'$. Pored toga trouglovi SMA' i SNA' imaju zajedničku stranicu SA', dakle, podudarni su, pa je $SM = SN$.
Najzad je $\triangle SAM \cong \triangle SAN$. Ravni trouglova $\triangle SAM$ i $\triangle SAN$ sadrže po dve prave upravne na pravama $A'B'$ i $A'C'$, dakle upravne i na ravnima $SA'B'$ i $SA'C'$. Otuda sledi da su tačke P i Q na pravama SM i SN, po kojima ravni SAM i SAN seku ravni $SA'B'$ i $SA'C'$.
Stoga su duži AP i AQ visine podudarnih trouglova $\triangle SAM$ i $\triangle SAN$, pa su među sobom jednake. Otud sledi da tačka A pripada simetričnoj ravni diedra koji odgovara ivici a' triedra $Sa'b'c'$ i prema tome da je ravan određena polupravama a i a' simetralna ravan diedra a' triedra $Sa'b'c'$.
Istim postupkom dokazuje se da su i ravni određene polupravama b i b', c i c' simetrale diedra b' i c' triedra $Sa'b'c'$.

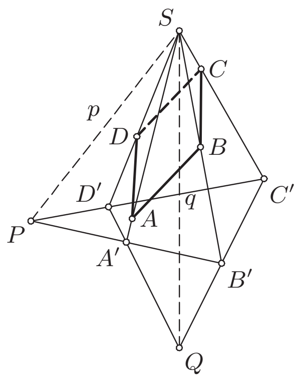
Zadatak 47: Odrediti potrebne i dovoljne uslove pod kojima će presek jedne ravni sa konveksnim četvorostranim rogljem biti:

a) paralelogram,

b) pravougaonik,

c) romb,

d) kvadrat.



Slika uz zadatak 47

Dokaz: Obeležimo sa $Sabcd$ bilo koji konveksni četvorostrani rogalj. Ravni ab i cd nisu istovetne, a imaju zajedničku tačku S, dakle seku se po nekoj pravoj p koja sadrži tačku S. Isto tako, ravni bc i ad nisu istovetne a imaju zajedničku tačku S, dakle seku se po nekoj pravoj q koja takođe sadrži tačku S.

a) Odredimo najpre potrebne uslove, zato pretpostavimo da neka ravan π seče rogalj $Sabcd$ po paralelogramu $ABCD$. S obzirom da ravan π seče ravan ab i cd po uporednim pravama AB i CD, ravan π je uporedna sa pravom p po kojoj se seku ravni ab i cd. Isto tako, ravan π seče ravni bc i ad po uporednim pravama BC i AD, pa je ravan π uporedna i sa pravom q po kojoj se seku ravni bc i ad. Prema tome, da bi presek ravni π sa rogljem $Sabcd$ bio paralelogram, potrebno je da ravan π bude uporedna sa pravama p i q po kojima se seku ravni naspramnih pljosni tog roglja. Dokažimo da su ti uslovi i dovoljni. Neka je π ravan uporedna sa pravama p i q, koja seče rogalj $Sabcd$ po četvorouglu $ABCD$. S obzirom da se ravni ab i cd seku po pravoj p koja je uporedna sa ravni π, presečne prave, AB i CD tih ravni sa ravni π međusobno su uporedne. Isto tako, ravni bc i ad seku se po pravoj q koja je uporedna sa ravni π, pa su presečne prave BC i AD tih ravni sa ravni π među sobom uporedne. Otud sledi da je četvorougao $ABCD$ paralelogram. Prema tome, da bi presek ravni π sa rogljem $Sabcd$ bio paralelogram potrebno je i dovoljno da ta ravan π bude uporedna s pravama p i q po kojima se seku ravni naspramnih pljosni tog roglja.

b) S obzirom da je pravougaonik paralelogram, moraju biti zadovoljeni uslovi navedeni u prethodnom delu ovog zadatka. Sem toga, ako bi presek $ABCD$ neke ravni π sa rogljem $Sabcd$ bio pravougaonik prave p i q uporedne sa susednim stranicama AB i AD pravougaonika $ABCD$ moraju biti uporedne među sobom. Obrnuto, ako su prave p i q upravne među sobom, presek $ABCD$ roglja $Sabcd$ sa ravni π koja je uporedna sa pravama p i q je pravougli paralelogram. Prema tome, da bi presek ravni π sa rogljem $Sabcd$ bio pravougli paralelogram potrebno je i dovoljno da ravan π bude uporedna sa pravama p i q i da prave p i q budu među sobom jednake.

c) S obzirom da je romb takođe paralelogram, moraju biti zadovoljeni uslovi navedeni u prvom delu ovog zadatka.

Zadatak 48: Odrediti potrebne i dovoljne uslove da presek ravni s tetraedrom bude:

a) paralelogram,

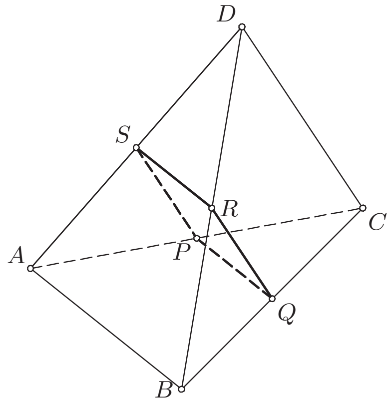
b) romb,

c) pravougaonik,

d) kvadrat.

Dokaz:

a) Ako izvesna ravan π seče ivice AC, BC, BD, AD tetraedra $ABCD$ u tačkama P, Q, R, S takvim da je četvorougao $PQRS$ paralelogram, biće $PQ \parallel RS$ i $RS \parallel QR$. S obzirom da ravni ABC i ABD sadrže dve uporedne prave PQ i RS, njihova presečna prava AB uporedna je sa pravama PQ i RS, i prema tome, sa ravni π. Isto tako je prava CD uporedna sa ravni π.



Slika uz zadatak 48

Dakle, ravan π mora da bude uporedna sa naspramnim ivicama AB i CD tog tetraedra. Obrnuto ako proizvoljna ravan π uporedna naspramnim ivicama AB i CD tetraedra $ABCD$ seče ostale ivice AC, BC, BD, AD u tačkama P, Q, R, S biće četvorougao $PQRS$ paralelogram. Zaista, ravni ABC i ABD sadrže pravu AB koja je uporedna sa ravni π, pa su i presečne prave PQ i SR tih ravni sa ravni π uporedne sa pravom AB, dakle i među sobom. Isto tako su prave PS i QR uporedne među sobom. Otuda sledi da je četvorougao $PQRS$ paralelogram. Prema tome, da bi presek ravni π s tetraedrom $ABCD$ bio paralelogram, potrebno je i dovoljno da ta ravan bude uporedna s naspramnim ivicama AB i CD.

b) Ako izvesna ravan π seče ivice AC, BC, BD, AD tetraedra $ABCD$ u tačkama P, Q, R, S takvim da je četvorougao $PQRS$ romb, prema (a) biće $AB \parallel \pi$ i $CD \parallel \pi$. Sem toga je $AB \parallel PQ$ i $CD \parallel QR$, pa je

$$PQ : AB = QC : BC \quad i \quad QR : CD = BQ : BC.$$

S obzirom da je kod romba $PQ = QR$, iz dobijenih proporcija nalazimo da je

$$AB : CD = BQ : CQ.$$

Obratno, ako proizvoljna ravan π uporedna naspramnim ivicama AB i CD tetraedra $ABCD$ seče ostale ivice AC, BC, BD, AD u tačkama P, Q, R, S pri čemu je

$$AB : CD = BQ : CQ,$$

tj.

$$AB \cdot CQ = CD \cdot BQ. \tag{1}$$

biće četvorougao $PQRS$ romb.
Zaista, iz (a) neposredno sledi da je četvorougao $PQRS$ paralelogram. Sem toga je $AB \parallel PQ$ i $CD \parallel QR$, pa je

$$AB : PQ = BC : CQ \quad i \quad CD : QR = BC : BQ,$$

tj.

$$AB \cdot BQ = PQ \cdot BC \tag{2}$$

i

$$CD \cdot BQ = QR \cdot BC. \tag{3}$$

Iz jednakosti (1), (2), (3) nalazimo da je

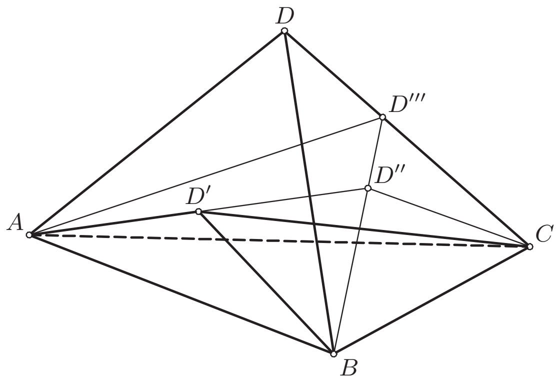
$$PQ \cdot BC = QR \cdot BC,$$

pa je $PQ = QR$. Otuda sledi da su i susedne stranice paralelograma $PQRS$ jednake, pa je taj paralelogram romb. Prema tome, da bi presek ravni π s tetraedrom $ABCD$ bio romb, potrebno je i dovoljno da bude $\pi \parallel AB$, $\pi \parallel CD$ i $AB : CD = BQ : CQ$.

c) Ako izvesna ravan π seče ivice AC, BC, BD, AD tetraedra $ABCD$ u tačkama P, Q, R, S takvim da je četvorougao $PQRS$ pravougaonik, kao u prvom delu ovog zadatka biće $AB \parallel \pi$ i $CD \parallel \pi$. Sem toga je $AB \parallel PQ$ i $CD \parallel QR$, a kod četvorougla $PQRS$, $PQ \parallel QR$, pa je $AB \perp CD$.
Obrnuto, ako neka ravan π uporedna naspramnim ivicama AB i CD tetraedra $ABCD$ kod koga je $AB \perp CD$ seče ostale ivice AC, BC, BD, AD u tačkama P, Q, R, S biće četvorougao $PQRS$ pravougaonik. Zaista, kao u prvom delu ovog zadatka zaključujemo da je četvorougao $PQRS$ paralelogram. Kako je $PQ \parallel AB$ i $QR \parallel CD$, a $AB \perp CD$, biće $PQ \perp QR$ pa je paralelogram $PQRS$ pravougli.Prema tome, da bi presek ravni π s tetraedrom $ABCD$ bio pravougaonik, potrebno je i dovoljno da bude $\pi \parallel AB$, $\pi \parallel CD$ i $AB \perp CD$.

d) Ako izvesna ravan π seče ivice AC, BC, BD, AD tetraedra $ABCD$ u tačkama P, Q, R, S takvim da je četvorougso $PQRD$ kvadrat, kao u prethodnom delu ovog zadatka biće $AB \parallel \pi$, $CD \parallel \pi$ i $AB \perp CD$. Sem toga, kao u delu (b) ovog zadatka biće $AB : CD = BQ : CQ$. Obrnuto tvrđenje dokazuje se kao u prethodnim slučajevima. Prema tome, da bi presek ravni π s paralelogramom $ABCD$ bio kvadrat, potrebno je i dovoljno da bude $\pi \parallel AB$, $\pi \parallel CD$, $AB : CD = BQ : CQ$.
S obzirom da tetraedar ima tri para naspramnih ivica, postoje tri porodice paralelograma po kojima ravni mogu seći jedan tetraedar. Uglovi svih paralelograma jedne porodice jednaki su uglovima koje zahvataju odgovarajuće naspramne ivice tog tetraedra. Iz navedenog sledi da uvek postoje tri ravni koje seku tetraedar po rombovima, da se samo specijalni tetraedri, tetraedri s uspravnim naspramnim ivicama, mogu seći s ravnima tako da preseci budu pravougaonici, a da postoje najviše tri ravni koje seku takav jedan tetraedar po kvadratima.

Zadatak 49: Ako dva tetraedra $ABCD$ i $ABCD'$ imaju zajedničku pljosan ABC, a teme D' se nalazi u tetraedru $ABCD$, dokazati da je zbir ivičnih uglova kod temena D' veći od zbira uglova kod temena D.



Slika uz zadatak 49

Dokaz: Kako je tačka D' u tetraedru $ABCD$, ona je između temena A i neke unutrašnje tačke D'' pljosni BCD, zatim je tačka D'' između tačke B i neke unutrašnje tačke D''' duži CD. Dokažimo najpre da je zbir ivičnih uglova kod temena D' tetraedra $ABCD'$ veći od zbira ivičnih uglova kod temena D'' tetraedra $ABCD''$. Kod konveksnog triedra s vrhom B i ivicama BC, BD', BD'' je

$$\angle D'BD'' + \angle CBD'' > \angle CBD',$$

a kod konveksnog triedra s vrhom C i ivicama CB, CD', CD'' je

$$\angle D'CD'' + \angle BCD'' > \angle BCD'.$$

Sabiranjem odgovarajućih strana dobijenih nejednakosti nalazimo da je

$$\angle CBD'' + \angle BCD'' + \angle D'BD'' + \angle D'CD'' > \angle CBD' + \angle BCD'.$$

Ako sa R obeležimo prav ugao, kod trouglova BCD' i BCD'' biće

$$\angle CBD' + \angle BCD' = 2R - \angle BD'C$$

i

$$\angle CBD'' + \angle BCD'' = 2R - \angle BD''C,$$

pa je

$$\angle BD'C + \angle D'BD'' + \angle D'CD'' > \angle BD''C.$$

Uglovi $AD'B$ i $AD'C$ su spoljašnji uglovi trouglova $BD'D''$ i $CD'D''$, pa je

$$\angle D'BD'' = \angle AD'B - \angle AD''B$$

i

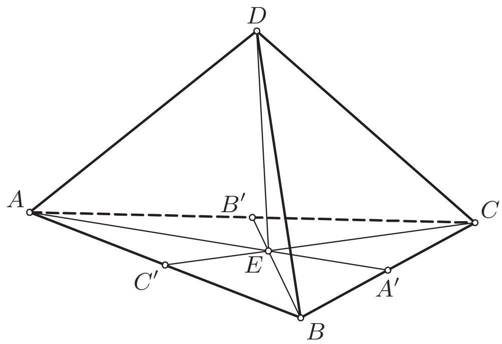
$$\angle D'CD'' = \angle AD'C - \angle AD''C,$$

i prema tome

$$\angle BD'C + \angle AD'B + \angle AD'C > \angle BD''C + \angle AD''B + \angle AD''C.$$

Analognim postupkom dokazuje se da je zbir ivičnih uglova kod temena D'' tetraedra $ABCD''$veći od zbira ivičnih uglova kod temena D''' tetraedra $ABCD'''$; zatim da je zbir ivičnih uglova kod temena D''' tetraedra $ABCD'''$ veći od zbira ivičnih uglova kod temena D tetraedra $ABCD$. Otuda sledi da je zbir ivičnih uglova kod temena D' tetraedra $ABCD'$ veći od zbira ivičnih uglova kod temena D tetraedra $ABCD$.

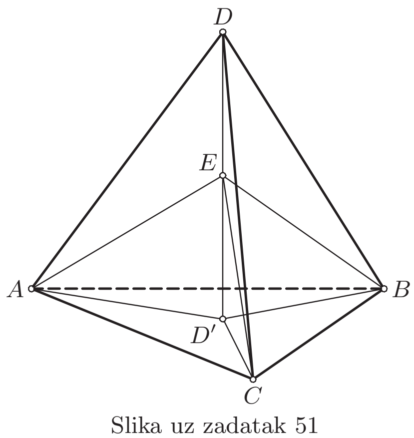
Zadatak 50: Ako su svi ivični uglovi kod temena D tetraedra $ABCD$ pravi, dokazati da se podnožje E iz temena D poklapa s ortocentrom trougla ABC.



Slika uz zadatak 50

Dokaz: Ravan ADE sadrži pravu DE upravnu na ravni ABC i pravu AD upravnu na ravni BCD, pa je ravan ADE upravna na ravnima ABC i DBC, dakle i na pravoj BC po kojoj se seku ravni ABC i DBC. Otuda sledi da je $AE \perp BC$. Na isti način dokazuje se da je $BE \perp AC$, pa je tačka E ortocentar trougla ABC.

Zadatak 51: Ako je E središte visine DD' pravilnog tetraedra $ABCD$, dokazati da su ivični uglovi kod temena E tetraedra $ABCE$ pravi.



Slika uz zadatak 51

Dokaz: Tačka D' je središte jednakostraničnog trougla ABC, pa je

$$AD' = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

pri čemu je duž a jednaka ivicama tetraedra $ABCD$. Duži AD' i DD' su katete pravouglog trougla ADD', pa je

$$DD' = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

i prema tome

$$ED' = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Kod trougla AED' ugao D' je prav, pa je

$$AE^2 = AD'^2 + ED'^2.$$

S obzirom da je

$$AD' = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad i \quad ED' = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

biće

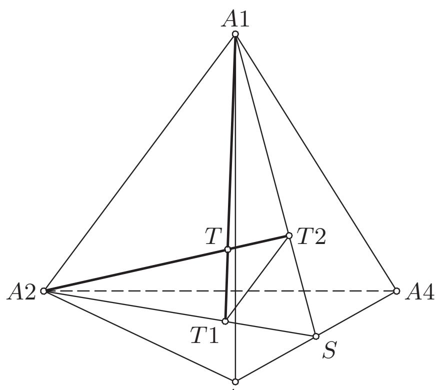
$$AE^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Iz podudarnih trouglova AED' i BED' nalazimo da je $AE = BE$, pa je

$$AE^2 + BE^2 = AB^2.$$

Iz toga sledi da je ugao E trougla ABE prav. Isto tako su uglovi E trouglova BCE i CAE pravi, pa su i ivični uglovi kod temena E tetraedra $ABCE$ takođe pravi.

Zadatak 52: Dokazati da se težišne linije $A_\nu T_\nu$ bilo kojeg poliedra koji ima i temena A_1, A_2 seku u jednoj tački, težištu T tog poliedra, pri čemu je $A_\nu T = (n-1)TT_\nu$.



Slika uz zadatak 52

Dokaz: Izvedimo dokaz metodom indukcije. Zato, najpre dokažimo da se dve težišne linije $A_\nu T_\nu$ za $\nu = 1, ..., 4$ tetraedra $A_1A_2A_3A_4$ seku u jednoj tački T takvoj da je $A_\nu T = 3TT_\nu$. Ako sa S obeležimo središte ivice A_3A_4 biće tačke T_1 i T_2 na dužinama A_2S i A_1S, pa se duži A_1T_1 i A_2T_2 seku u nekoj tački T.
Sem toga, tačke T_1 i T_2 duži A_2S i A_1S su takve da je $SA_2 = 3ST_1$ i $SA_1 = 3ST_2$, pa je $A_1A_2 \| T_1T_2$, i prema tome $A_1A_2 = 3T_1T_2$. Sad je

$$\triangle TA_1A_2 \sim \triangle TT_1T_2,$$

pa je

$$A_1A_2 : T_1T_2 = A_1T : TT_1 \quad i \quad A_1A_2 : T_1T_2 = A_2T : TT_2.$$

Kako je

$$A_1A_2 = 3T_1A_2 = 3T_1T_2,$$

biće

$$A_1T = 3TT_1 \quad i \quad A_2T = 3TT_2.$$

Istim postupkom dokazuje se da i težišne linije A_3T_3, A_4T_4 seku A_1T_1 u tačkama koje imaju istu osobinu, pa se sve te presečne tačke poklapaju, i prema tome sve težišne linije tetraedra imaju zajedničku tačku T takvu da je $A_\nu T = 3TT_\nu$.
Pretpostavimo sad da je stav dokazan za slučaj kad poliedar ima $n-1$ temena, a dokažimo da on važi i u slučaju kad poliedar ima n temena. Ako sa S obeležimo težišta mnoštva tačaka $A_3, A_4, \ldots, A_n$ biće tačke T_1 i T_2 na dužima A_2S i A_1S, pa se duži A_1T_1 i A_2T_2 seku u nekoj tački T. Sem toga, tačke T_1 i T_2 duži A_2S i A_1S su takve da je $SA_2 = nST_1$ i $SA_1 = nST_2$, pa je $A_1A_2 \| T_1T_2$, i prema tome $A_1A_2 = nT_1T_2$. Sad je

$$\triangle TA_1A_2 \sim \triangle TT_1T_2,$$

pa je

$$A_1A_2 : T_1T_2 = A_1T : TT_1 \quad i \quad A_1A_2 : T_1T_2 = A_2T : TT_2.$$

S obzirom da je

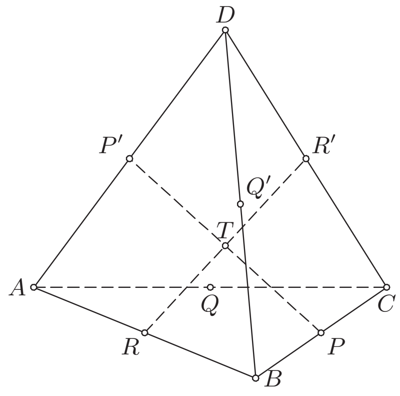
$$A_1A_2 = nT_1T_2,$$

biće

$$A_1T = nTT_1 \quad i \quad A_2T = nTT_2.$$

Istim postupkom dokazuje se i da težišne linije $A_3T_3, \ldots, A_nT_n$ seku duži A_1T_1 u temenima koja imaju istu osobinu, pa se i sve te presečne tačke poklapaju, i prema tome, sve težišne linije poliedra se seku u jednoj tački T takvoj da je $A_\nu T = (n-1)TT_\nu$.
U prvom delu dokazali smo da je tvrđenje tačno kada poliedar ima četiri temena, prema tome, tvrđenje je tačno i u slučaju kad poliedar ima $5, 6, 7, \ldots, n$ temena.

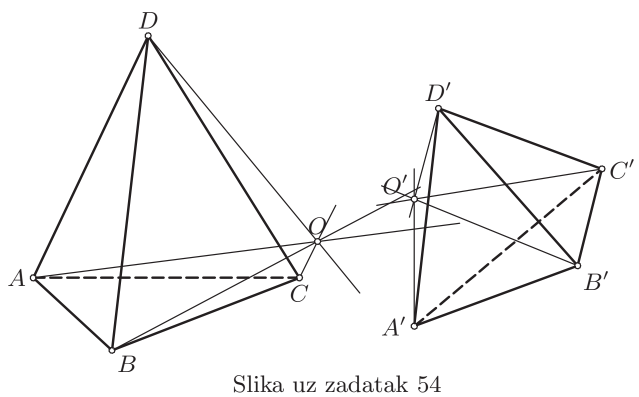
Zadatk 53: Dokazati da se ravni od kojih svaka sadrži središte jedne ivice tetraedra, a upravna je na naspramnoj ivici, seku u jednoj tački koja je simetrična sa središtem opisane sfere u odnosu na težište tog tetraedra.



Slika uz zadatak 53

Dokaz: Prema zadatku 52. težište T tetraedra $ABCD$ poklapa se sa središtem duži koja spaja središta bilo kojih dveju naspramnih ivica, pa je ravan koja sadrži središte jedne ivice, a upravna je na naspramnoj ivici tog tetraedra, simetrična sa simetralnom ravni te naspramne ivice u odnosu na težište T tog tetraedra. S obzirom da se simetrične ravni ivica tetraedra seku u jednoj tački, središtu O sfere opisane oko tog tetraedra, njima simetrične ravni u odnosu na tačku T takođe se seku u nekoj tački M koja je simetrična sa tačkom O u odnosu na tačku T.

Zadatak 54: Ako se prave kroz temena A, B, C, D tetraedra $ABCD$ upravne na pljosnima $B'C'D', C'D'A', D'A'B', A'B'C'$ tetraedra $A'B'C'D'$ seku u jednoj tački O, dokazati da se i prave kroz temena A', B', C', D' upravne na pljosnima BCD, DAB, ABC takođe seku u jednoj tački O'.



Slika uz zadatak 54

Dokaz: Najpre dokažimo da se prave kroz bilo koja dva temena tetraedra $A'B'C'D'$ upravne na odgovarajućim pljosnima tetraedra $ABCD$ seku. Izvedimo dokaz za normale kroz temena C' i D'. Ravan ν određena tačkama O, A, B sadrži prave OA i OB upravne na ravnima $B'C'D'$ i $C'D'A'$, pa je ravan ν upravna i na pravoj $C'D'$ po kojoj se seku ravni $B'C'D'$ i $C'D'A'$. S obzirom da ivica AB pripada ravni ν koja je upravna na ivici $C'D'$ biće $AB \perp C'D'$. Iz toga sledi da postoji ravan ν' koja sadrži ivicu $C'D'$, a upravna je na ivici AB. Ta ravan sadrži upravne kroz C' i D' na pljosnima DAB i CAB, prema tome, te upravne se seku u nekoj tački O'. Analognim postupkom dokazuje se da se upravne kroz bilo koja dva temena tetraedra $A'B'C'D'$ na odgovarajućim pljosnima tetraedra $ABCD$ takođe seku. Sad dokažimo da se sve te presečne tačke poklapaju, tj. da i prave kroz temena A' i B' upravne na pljosnima BCD i ACD sadrže tačku O'. S obzirom da te upravne seku prave $O'C'$ i $O'D'$, a ne pripadaju ravni $O'C'D'$, te upravne sadrže presek O' upravnih kroz C' i D'. Pri tome, sve prave kroz temena tetraedra $A'B'C'D'$ upravne na odgovarajućim pljosnima tetraedra $ABCD$ takođe se seku u jednoj tački O'.

Zadatak 55: Neka su A', B', C', D' središta krugova ispisanih u pljosni BCD, CDA, DAB, ABC tetraedra $ABCD$.

a) Ako se duži AA' i BB' seku, dokazati da je $AC : AD = BC : BD$.

b) Ako je $AC : AD = BC : BD$, dokazati da se duži AA' i BB' seku.

c) Ako se duži AA', BB' seku, dokazati da se i duži CC' i DD' seku.

d) Ako se duži AA', BB', CC' seku u jednoj tački O, dokazati da i duž DD' sadrži tačku O.

Dokaz:

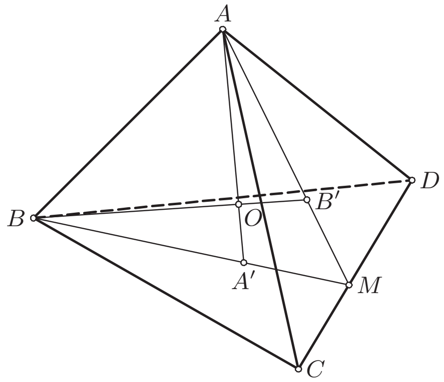
a) S obzirom da se duži AA' i BB' seku, one određuju izvesnu ravan π. Tačke C i D su s raznih strana te ravni, pa duž CD prodire istu u nekoj tački M. Ta tačka je presek simetrale AB' ugla CAD sa stranicom CD trougla ACD, pa je

$$CM : DM = AC : AD. \tag{1}$$

Isto tako, M je tačka u kojoj simetrala ugla CBD seče stranicu CD ugla BCD, pa je

$$CM : DM = BC : BD \tag{2}$$

Iz proporcija (1) i (2) sledi da je $AC : AD = BC : BD$.



Slika uz zadatak 55

b) Ako je M tačka u kojoj simetrala AB' ugla CAD seče stranicu CD trougla ACD i M' tačka u kojoj simetrala ugla CBD seče stranicu CD trougla BCD, biće

$$AC : AD = CM : MD \quad i \quad BC : BD = CM' : M'D.$$

Po pretpostavci je

$$AC : AD = BC : BD,$$

pa je

$$CM : MD = CM' : M'D.$$

Iz ove dve proporcije sledi da su tačke M i M' istovetne. S obzirom da su tačke A' i B' unutrašnje tačke stranica BM i AM trougla MAB, duži AA' i BB' se seku.

c) S obzirom da se duži AA' i BB' seku, prema prvom delu zadatka, biće

$$AC : AD = BC : BD,$$

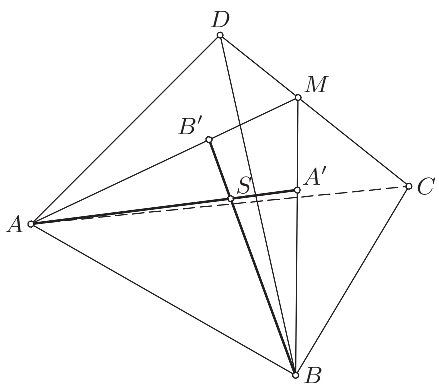
pa je

$$AC : BC = AD : BD.$$

Iz ove proporcije, primenom prethodnog dela ovog zadatka, zaključujemo da se i duži CC' i DD' seku.

d) S obzirom da se duži BB' i CC' seku, one određuju izvesnu ravan π. Iz pretpostavke da se duži AA' i BB' seku, prema prethodnom delu zadatka, sledi da se i duži CC' i DD' seku, a iz pretpostavke da se duži AA' i CC' seku, sledi da se duži BB' i DD' seku. Dakle, prava DD' seče dve prave BB' i CC' ravni π, te ona ili pripada ravni π, ili prodire tu ravan u tački O. Prava DD' ne može biti u ravni π, jer bi u tom slučaju ravan π sadržala tačke B, C, D pa bi ona bila istovetna sa ravni BCD, što je nemoguće, jer ravan π sadrži tačke B' i C' koje su izvan ravni BCD. Prema tome, duž sadrži presečnu tačku O duži AA', BB', CC'.

Zadatak 56: Ako su proizvodi naspramnih ivica tetraedra među sobom jednaki, dokazati da se duži koje spajaju temena tog tetraedra sa središtima krugova upisanim u naspramnim pljosnima seku u jednoj tački.



Slika uz zadatak 56

Dokaz: Neka su A', B', C', D' središta krugova upisanih i pljosni BCD, CDA, DAB, ABC tetraedra $ABCD$ kod koga su proizvodi naspramnih ivica među sobom jednaki. Iz jednakosti

$$AD : BC = BD : AC$$

sledi da je

$$AC : AD = BC : BD.$$

Ako obeležimo sa M i N tačke u kojima simetrale AB' i BA' uglova CAD i CBD seku duži CD, imamo da je

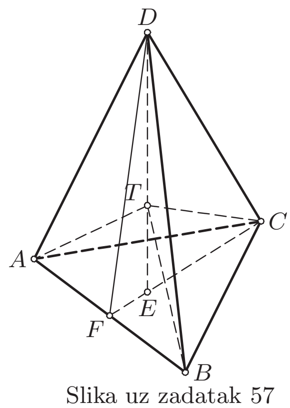
$$AC : AD = CM : MD \quad i \quad BC : BD = CN : ND.$$

Otuda je

$$CM : MD = CN : ND,$$

pa su tačke M i N istovetne. S obzirom da je M tačka prave CD koja je mimoilazna sa pravom AB, tačka M nije na pravoj AB, pa su tačke A, B, M temena izvesnog trougla ABM. Tačke A' i B' su unutrašnje tačke strania BM i AM tog trougla, prema tome, duži AA' i BB' se seku u nekoj tački S. Na isti način dokazujemo da se duži AA' i CC' seku u nekoj tački S', a duži BB' i CC' seku u nekoj tački S''. Prava CC' seče dve prave AA' i BB' ravni ABM, prema tome, one pripadaju toj ravni, ili pak prodire tu ravan u tački S. Prava CC' ne može biti u ravni ABM, jer bi u tom slučaju dve tačke C i M ivice CD bile u ravni ABM pa bi i tačka bila u toja ravni, što je nemoguće. S obzirom da prava CC' prodire ravan ABM u tački S i s obzirom da su tačke C i C' sa raznih strana od te ravni, duž CC' sadrži tačku S. Na isti način dokazujemo da i duž DD' sadrži tačku S, prema tome, duži AA', BB', CC', DD' se seku u jednoj tački.

Zadatak 57: U tetraedru $ABCD$ odrediti tačku T takvu da zapremine tetraedra $ABCT$, $BCDT$, $CDAT$, $DABT$ budu među sobom jendnake.



Slika uz zadatak 57

Dokaz: Neka je T tačka u tetraedru $ABCD$ takva da su zapremine tetraedra $ABCT$, $BCDT$, $CDAT$, $DABT$ među sobom jednake. Ako obeležimo sa F tačku u kojoj ravan

CDT seče ivicu AB, imamo da je

$$\frac{V(ACDT)}{V(ACDF)} = \frac{S(CDT)}{S(CDF)} \quad \text{i} \quad \frac{V(BCDT)}{V(BCDF)} = \frac{S(CDT)}{S(CDF)}.$$

otud je

$$\frac{V(ACDT)}{V(ACDF)} = \frac{V(BCDT)}{V(BCDF)}.$$

S obzirom da je

$$V(ACDT) = V(BCDT),$$

imamo da je

$$V(ACDF) = V(BCDF).$$

Tetraedri $ACDF$ i $BCDF$ imaju zajedničku osnovicu CDF i jednake zapremine, pa su im jednake i visine, dakle i duži AF i BF. Stoga je tačka F središte ivice AB. Analognim postupkom dokazuje se da ravan određena tačkom T i bilo kojom drugom ivicom sadrži središte naspramne ivice. Otud sledi da je tačka T težište tetraedra $ABCD$. Dokažimo sad obrnuto poređenje, naime, pretpostavljajući da je T težište tetraedra $ABCD$, dokažimo da je

$$V(ABCT) = V(BCDT) = V(CDAT) = V(DABT).$$

Ako obeležimo sa E težište trougla ABC, biće tačka T između tačaka D i E takva da je $DE = 4TE$. S obzirom da tetraedri $ABCT$ i $ABCD$ imaju zajedničku pljosan ABC i s obzirom da je $TE = \frac{1}{4}DE$, biće

$$V(ABCT) = \frac{1}{4}V(ABCD).$$

Isto tako je

$$V(BCDT) = \frac{1}{4}V(ABCD),$$

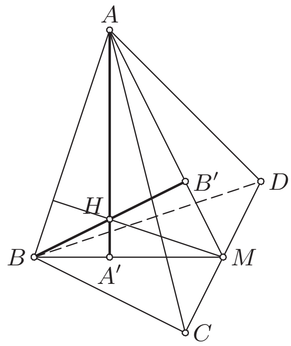
$$V(CDAT) = \frac{1}{4}V(ABCD),$$

$$V(DABT) = \frac{1}{4}V(ABCD),$$

pa je

$$V(ABCT) = V(BCDT) = V(CDAT) = V(DABT).$$

Zadatak 58: Ako se prave određene dvema visinama tetraedra seku, dokazati da se prave određene drugim dvema visinama takođe seku.

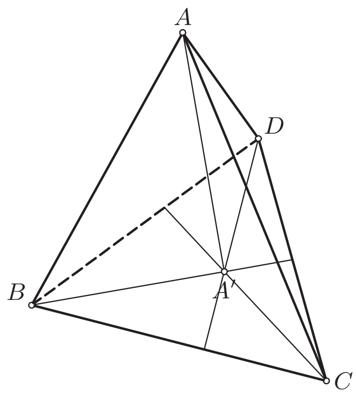


Slika uz zadatak 58

<u>Dokaz:</u> Pretpostavimo da se prave određene visinama AA' i BB' tetraedra $ABCD$ seku u izvesnoj tački H, a dokažimo da se prave određene visinama CC' i DD' takođe seku. Kako se prave AA' i BB' seku, one određuju izvesnu ravan α koja sadrži temena A, B i prema tome ivicu AB. Ta ravan sadrži upravne AA' i BB' na ravnima BCD i ACD, pa je i sama upravna na tim ravnima, dakle i na pravoj CD po kojoj se seku ravni ACD i BCD. Kako je $\alpha \perp CD$, sve prave ravni α upravne su na pravoj CD, pa je i $AB \perp CD$. Ako je M tačka u kojoj α seče CD, biće ABM trougao kome je H ortocentar, pa je $PH \perp AB$ u izvesnoj tački N. Ravan β određena tačkama N, C, D sadrži prave CD i MN upravne na AB, pa je i sama upravna na toj pravoj. Kako je ravan β upravna na pravoj AB koja pretstavlja presek ravni ABC i ABD, ravan β upravna je na ravnima ABC i ABD. Otud sledi da su prave CC' i DD' sadržane u ravni β, a kako su upravne na ravnima koje se seku i te dve prave se seku u nekoj tački H'.

<u>Zadatak 59:</u> Ako su dva para naspramnih ivica tetraedra upravna, dokazati da je i treći par naspramnih ivica upravan, tj. da je tetraedar ortogonalan.

<u>Dokaz:</u> Neka je kod tetraedra $ABCD$ $BC \perp AD$ i $BD \perp AC$, dokažimo da je $AB \perp CD$.

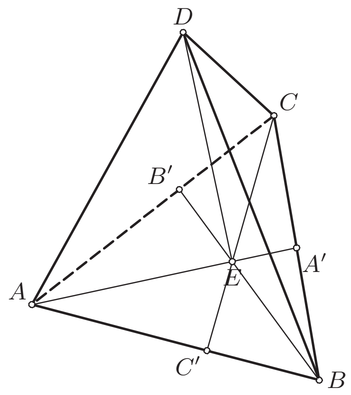


Slika uz zadatak 59

Upravna projekcija A' temena A na ravan BCD različita je od tačaka B, C ili se poklapa sa nekom od njih. Ako pretpostavimo da je tačka A' različita od tih tačaka, biće duži $A'C$ i $A'D$ upravne projekcije ivice AC i AD na ravan BCD. Dve prave AA' i AC ravni $AA'C$ upravne su na pravoj BD, pa je i presečna prava $A'C$ te ravni sa ravni BCD upravna na pravoj BD. Isto tako je presečna prava $A'D$ ravni $AA'D$ sa ravni BCD upravna na pravoj BC. Otud sleduje da prave $A'C$ i $A'D$ sadrže visine iz temena C i D trougla BCD, pa je presek A' tih pravih ortocentar trougla BCD. Stoga je prava $A'B$ upravna na pravoj CD. Sad je prava CD upravna na dvema pravama AA' i BA' ravni $AA'B$, pa su upravna na svim pravima te ravni, dakle i na pravoj AB. Ako se tačka A' poklapa s tačkom B, biće prava AB upravna na ravni BCD pa je upravna i na pravoj CD koja se nalazi u toj ravni. Ako se tačka A' poklapa s jednom od tačaka B i C, npr. C, biće prava BC upravna na dvema pravama AC i AD ravni ACD, dakle i na pravoj CD. Sad je prava CD upravna na dvema pravama AB i BC ravni ABC, pa je upravna i na pravoj AB.

Zadatak 60: Dokazati da su podnožja visina ortogonalnog tetraedra ortocentri pljosni tog tetraedra.

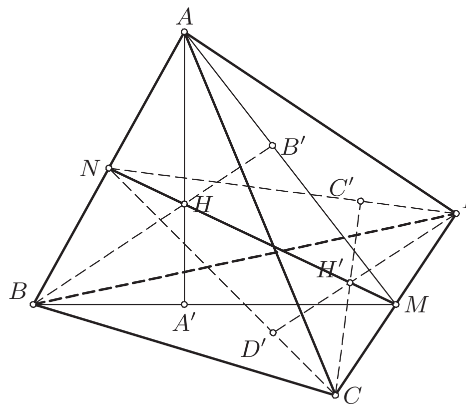
Dokaz: Neka je E podnožje visine iz temena D ortogonalnog tetraedra $ABCD$.



Slika uz zadatak 60

Prava BC upravna je na dvema pravama AD i DE ravni ADE, pa je upravna i na toj ravni. Stoga je prava AE upravna na pravoj BC. Isto tako je prava BE upravna na pravoj AC, pa je podnožje E visine iz temena D ortocentar trougla ABC. Analogno se dokazuje da su i podnožja ostalih visina ortocentri odgovarajućih pljosni.

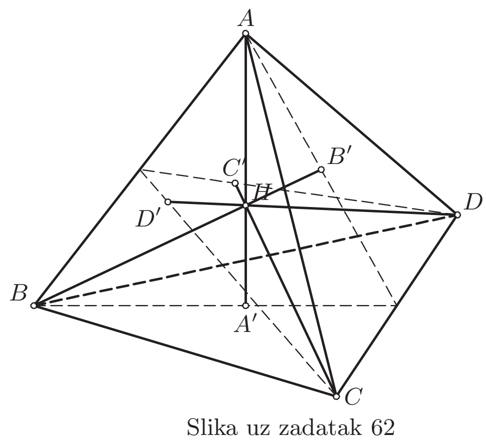
Zadatak 61: Ako su kod tetraedra $ABCD$ naspramne ivice AB i CD među sobom upravne, dokazati da se prave određene visinama AA' i BB' seku u izvesnoj tački H, a prave određene visinama CC' i DD' seku u izvesnoj tački H', pri čemu tačke H i H' pripadaju zajedničkoj normali mimoilaznih pravih AB i CD.



Slika uz zadatak 61

Dokaz: Prave AA' i BB' ne mogu biti istovetne. Zaista, ako bi one bile takve, bile bi ravni ACD i BCD upravne na istoj pravoj, dakle uporedne među sobom, što je nemoguće jer se ravni ACD i BCD seku po pravoj CD. Otud sleduje da je bar jedna od pravih AA' i BB', npr. AA', različita od prave AB i prema tome da prave AB i AA' određuju izvesnu ravan α. Prava CD upravna je na dvema pravama AB i AA' ravni α, pa je i sama upravna na toj ravni u izvesnoj tački M. Sad je ravan α upravna na pravoj CD po kojoj se seku ravni ACD i BCD, te je upravna i na ravnima ACD i BCD. Tačke A i B su sadržane u ravni α koja je upravna na ravnima BCD i ACD, pa su visine AA' i BB' sadr"zane u ravni α i upravne na presečnim pravama BM i AM te ravni s ravnima BCD i ACD. Stoga prave AA' i BB' sadrže visine iz temena A i B trougla AMB, pa se seku u izvesnoj tački H, ortocentru tog trougla. Otuda sleduje da je prava MH upravna na pravoj AB u izvesnoj tački N i prema tome da tačka H pripada zajedničkoj normali MN mimoilaznih pravih AB i CD. Istim postupkom se dokazuje da se seku i prave CC' i DD' u nekoj tački H' koja pripada pravoj MN.

Zadatak 62: Dokazati da se prave odredjene visinama ortogonalnog tetraedra seku u jednoj tački, ortocentru tog tetraedra.

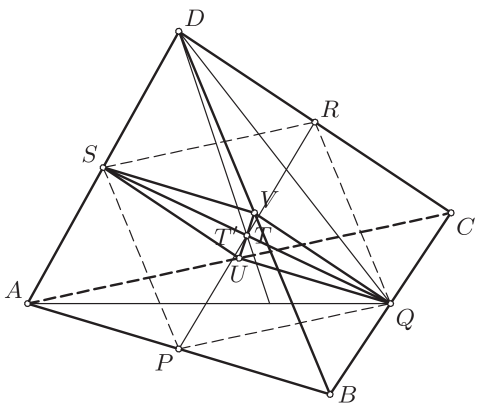


Slika uz zadatak 62

Dokaz: Kod ortogonalnog tetraedra sve nasprame ivice upravne su među sobom, pa se prema prethodnom zadatku prave određene bilo kojim dvema visinama tog tetraedra seku. Obeležimo sa AA', BB', CC' i DD' visine tetraedra $ABCD$, sa H tačku u kojoj se seku prave AA' i BB', a sa π ravan određenu tim dvema pravama. Dokažimo da i prave CC', DD' takođe sadrže tačku H. Kada prava, npr. CC' ne bi sadržala tačku H, ona bi sekla prave AA' i BB' u dvema raznim tačkama H_1 i H_2 koje pripadaju ravni π, pa bi i prava CC' pripadala ravni π. U tom slučaju, ravan π sadrži upravne AA' i BB' na ravnima BCD i ACD, pa je upravna i na presečnoj pravoj CD tih dveju ravni; isto tako, ravan π sadrži upravne AA' i CC' na ravnima BCD i ABD, pa je upravna i na presečnoj pravoj BD tih dveju ravni. Dakle, dve stranice BD i CD trougla BCD upravne su na ravni π i prema tome među sobom uporedne, što je nemoguće. Otud sleduje da prava CC' ne pripada ravni π. Kako prava CC' seče obe prave AA' i BB' koje se nalaze u ravni π, a sama ne pripada toj ravni, ona prodire ravan π u presečnoj tački H pravih AA' i BB'. Istim postupkom dokazuje se da i prava DD' prodire ravan π u tački H, pa sve prave određene visinama AA', BB', CC', i DD' ortogonalnog tetraedra $ABCD$ seku u istoj tački H, ortocentru tog tetraedra.

Zadatak 63: Dokazati da kod ortogonalonog tetraedra središta ivica i podnožja zajedničkih normala naspramnih ivica pripadaju jednoj sferi kojoj se središte poklapa sa težištem tog tetraedra.

Dokaz: Neka su P, Q, R, S, U i V središta ivica AB, BC, CD, DA, AC i BD ortogonalnog tetraedra $ABCD$.



Slika uz zadatak 63

Duži PQ i RS kao srednje linije trouglova ABC i ADC uporedne su ivici AC, dakle i među sobom, a duži PS i QR kao srednje linije trouglova ABD i CBD uporedne su ivici BD, dakle i među sobom. Otud sleduje da je četvorougao $PQRS$ paralelogram. Kako su naspramne ivice AC i BD tetraedra $ABCD$ među sobom upravne, upravne su među sobom i njima uporedne duži PQ i RS, pa je paralelogram $PQRS$ pravougli.

Stoga su njegove dijagonale PQ i RS jednake, one se seku u izvesnoj tački T koja ih polovi. Istim postupkom dokazuje se da je četvorougao $USVQ$ pravougli paralelogram kome su dijagonale QS i UV jednake, one se seku u izvesnoj tački T' koja ih polovi. Obe tačke, T i T', su središta iste duži QS, pa je $T = T'$. S obzirom da su duži PR, QS, UV sa zajedničkim središtem T među sobom jednake, tačke P, Q, R, S, U, V pripadaju izvesnoj sferi ω kojoj je središte T. Ta sfera sadrži središta stranica svih pljosni tetraedra $ABCD$, prema tome i Ojlerove krugove tih pljosni. No podnožja visina pojedinih pljosni su na Ojlerovim krugovima tih pljosni, a ta podnožja istovetna sa podnožjima zajedničkih normala naspramnih ivica ortogonalnog tetraedra $ABCD$ tačke sfere ω.

Dokažimo još da se središte T sfere ω poklapa sa težištem T^* tog tetraedra. Težišne linije AA' i DD' tetraedra $ABCD$ seku se u tački T^*, pri čemu je

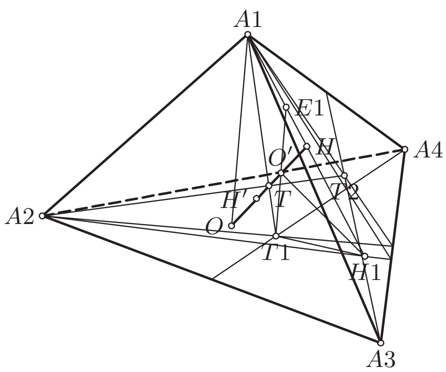
$$AT^* = 3T^*A' \quad i \quad DT^* = 3T^*D',$$

zatim

$$AD' = 2D'Q \quad i \quad DA' = 2A'Q.$$

Otud sleduje da se središte T duži SQ poklapa sa tačkom T^*, pa se i središte sfere ω poklapa sa središtem tetraedra $ABCD$.

Zadatak 64 : Dokazati da kod ortogonalnog tetraedra težišta pljosni, ortocentri pljosni i tačke koje dele duži što spajaju ortocentar s temenima tako da odsečci pri ortocentru budu dva puta manji od odsečaka pri temenima, pripadaju jednoj sferi λ kojoj je središte O' između ortocentra H i središta O opisane sfere tetraedra pri čemu je $OO' = 2O'H$, a poluprečnik jednak trećini poluprečnika opisane sfere tetraedra.



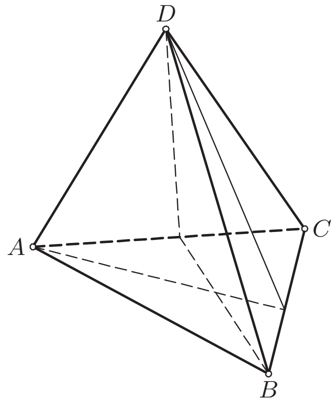
Slika uz zadatak 64

Dokaz: Obeležimo sa H, T, O ortocentar, težište i središte opisane sfere ortogonalnog tetraedra $A_1A_2A_3A_4$, a sa H_i, T_i, O_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ ortocentre, težišta i središta opisanih krugova pljosni naspram temena A_1. Prema zadatku 63. tačka T je središte duži OH, a prema Ojlerovoj teoremi, tačka T_i je na duži O_iH_i takva da je $H_iT_i = 2T_iO_i$. S obzirom

da se podnožja visina ortogonalnog tetraedra poklapaju sa ortocentrima odgovarajućih pljosni, prave A_iH_i se seku u tački H. Prema zadatku 52. duži A_iT_i seku se u tački T tako da je $A_iT = 3TT_i$, pa je $T_1T_2T_3T_4$ tetraedar sličan i u sličnom položaju s tetraedrom $A_1A_2A_3A_4$ u odnosu na tačku T. Otud sledi da je tetraedar $T_1T_2T_3T_4$ takođe ortogonalan da mu se ortocentar H' i središte O' opisane sfere nalaze na pravoj OH pri čemu je $H-T-H'$, $O-T-O'$ i $HT = 3TH'$, $OT = 3TO'$. Iz A_i-T-T_i, $H-T-H'$ i $A_iT = 3TT_i$, $HT = 3TH'$ sledi da je $HA_i \parallel H'T_i$, tj. $HH_i \parallel H'T_i$. S obzirom da je tačka O' središte duži HH', a uglovi H_i i T_i trapeza $HH'T_iH_i$ pravi biće $O'T_i = O'H_i$. Tačka O' je središte sfere λ opisane oko tetraedra $T_1T_2T_3T_4$ pa iz $O'T_i = O'H_i$ sledi da i tačke H_i pripadaju sferi λ. Ako su E_i tačke duži HA_i takve da je $A_iE_i = 2E_iH$, biće te tačke simetrične tačkama T_i u odnosu na O', te i one pripadaju sferi λ.
Kako je tačka O' središte duži HH', a tačka H' središte duži $O'O$, biće središte O' sfere λ tačka duži OH takva da je $OO' = 2O'H$. Tačke O' i E_i su na stranicama OH i A_iH takve da je $OO' = 2O'H$ i $A_iE_i = 2E_iH$, pa je $OA_i = 3O'E_i$ i prema tome poluprečnik sfere λ jednak trećini poluprečnika sfere opisane oko tetraedra $A_1A_2A_3A_4$.

Zadatak 65: Dokazati da su potrebni i dovoljni uslovi pod kojima je tetraedar $ABCD$ ortogonalan izraženi jednakostima

$$AD^2 + BC^2 = BD^2 + CA^2 = CD^2 + AB^2.$$



Slika uz zadatak 65

Dokaz: Dokažimo najpre da su navedeni uslovi potrebni, naime , pretpostavljajući da je tetraedar $ABCD$ ortogonalan, dokažimo da je

$$AD^2 + BC^2 = BD^2 + CA^2 = CD^2 + AB^2.$$

S obzirom da je tetraedar $ABCD$ ortogonalan, imamo da je $AD \perp BC$ i $BD \perp AC$. Stoga postoji ravan α koja sadrži ivicu AD, a upravna je na ivici BC i ravan β koja sadrži ivicu BD, a upravna je na ivici AC. Kako je ravan α upravna na ivici BC, razlika kvadrata odstojanja svake njene tačke od tačaka B i C je stalna, pa je

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2,$$

i prema tome

$$BD^2 + AC^2 = CD^2 + AB^2.$$

Isto tako, razlika kvadrata odstojanja svake tačke ravni β od tačaka A i C je stalna, pa je

$$AB^2 - BC^2 = AD^2 - CD^2,$$

i prema tome

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

Otuda je

$$AD^2 + BC^2 = BD^2 + CA^2 = CD^2 + AB^2.$$

Sad dokažimo da su navedeni uslovi dovoljni, naime, dokažimo da iz jednakosti

$$AD^2 + BC^2 = BD^2 + CA^2 = CD^2 + AB^2$$

sledi da je tetraedar $ABCD$ ortogonalan. S obzirom da je

$$BD^2 + AC^2 = CD^2 + AB^2$$

biće

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2,$$

pa su tačke A i D u nekoj ravni α upravnoj na ivici BC. Stoga je $AD \perp BC$. Isto tako, iz jednakosti

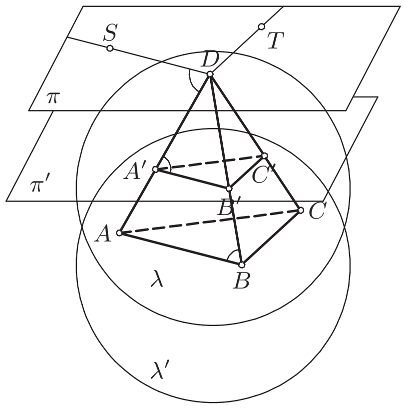
$$AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$$

sledi da je

$$AB^2 - BC^2 = AD^2 - CD^2,$$

pa su B i D u nekoj ravni β upravnoj na ivici AC. Stoga je $BD \perp AC$. Otuda sledi da je tetraedar $ABCD$ ortogonalan.

Zadatak 66: Ako su A', B', C' tačke u kojima ivice AD, BD, CD tetraedra $ABCD$ pripadaju izvesnoj sferi λ' koja sadrži temena A, B, C, dokazati da je ravan π' određena tačkama A', B', C' uporedna sa ravni π koja u temenu D dodiruje sferu opisanu oko tetraedra $ABCD$.

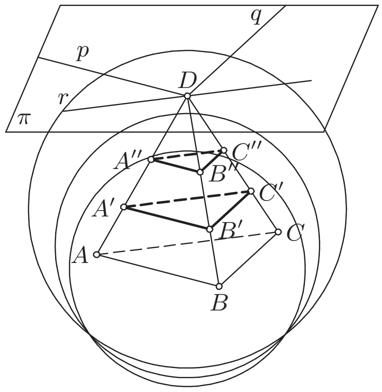


Slika uz zadatak 66

Dokaz: Ravan ABD ima sa sferom λ zajedničke tačke A, B, D, a sa sferom λ' zajedničke tačke A, B,A', B', prema tome, ona seče sfere λ i λ' po krugovima k i k' pri čemu $k \subset A, B, D$, a $k' \subset A, B, A', B'$. Sem toga, ravan ABD ima sa ravni π zajedničku tačku D, a sa ravni π' zajedničke tačke A' i B', prema tome, ona seče ravni π i π' po pravama s i s', pri čemu $s \subset D$, a $s' \subset A', B'$. Kako su tačke A, B, A', B' na krugu k', a tačke A' i B' unutrašnje tačke duži AD i BD, biće četvorougao $ABB'A'$ tetivan i konveksan, pa je njegov spoljašnji ugao kod temena A' jednak unutrašnjem uglu kod temena B, tj. $\angle B'A'D = \angle ABB'$. Tačka D je na polupravoj BB', pa je $\angle ABB' \equiv \angle ABD$. S obzirom da ravan π dodiruje sferu λ u tački D i prava s dodiruje krug k u tački D. Ako je S proizvoljna tačka prave s one strane prave AD s koje nije B, biće $\angle ABD \equiv \angle SDA'$. Tačka A je na polupravoj DA', pa je $\angle SDA \equiv \angle SDA'$. Otuda je $\angle B'A'D = \angle SDA'$. Kako su uglovi $\angle B'A'D$ i $\angle SDA'$ naizmenični i jednaki, biće kraci DS i $A'B'$ upravni, pa je i $s \parallel s'$. Na isti način dokazuje se da i ravan BCD seče ravni π i π' po upravnim pravama t i t' pri čemu $t \subset D$, a $t' \subset B', C'$. Kako su ravni π i π' različite, a dve neparalelne prave s i t ravni π uporedne sa dvema pravama s' i t' ravni π', biće ravni π i π' među sobom uporedne.

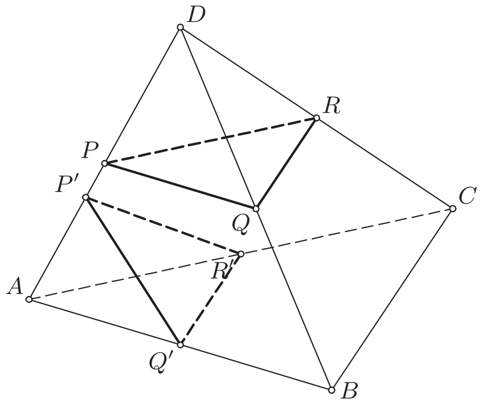
Zadatak 67: Ako su A', B', C' i A'', B'', C'' tačke u kojima ivice AD, BD, CD tetraedra $ABCD$ prodiru dve sfere λ' i λ'' koje sadrže temena A, B, C, dokazati da su trouglovi $A'B'C'$ i $A''B''C''$ slični, a ravni $A'B'C'$ i $A''B''C''$ uporedne.

Dokaz: Neka su p, q, r prave po kojima ravni ABD, BCD, CAD seku ravan koja u temenu D dodiruje sferu λ opisanu oko tetraedra $ABCD$. Kao u prethodnom primeru, dokazuje se da je $A'B'\|p$, $B'C'\|q$, $C'A'\|r$ i $A''B''\|p$, $B''C''\|q$, $C''A''\|r$, te je $A'B'\|A''B''$, $B'C'\|B''C''$, $C'A'\|C"A"$. Otud sleduje da su odgovarajuće stranice trouglova $A'B'C'$ i $A''B''C''$ među sobom uporedne, pa je $\angle A'B'C' \sim \angle A''B''C''$. Iz uporednosti odgovarajućih stranica tih trouglova takođe sleduje da su ravni $A'B'C'$ i $A''B''C''$ među sobom uporedne.



Slika uz zadatak 67

Zadatak 68: Ako su P, Q, R tačke u kojima ivice AD, BD, CD tetraedra $ABCD$ prodiru proizvoljnu sferu λ koja sadrži temena A, B, C a P', Q', R' tačke u kojima ivice AD, AB, AC prodiru proizvoljnu sferu λ' koja sadrži temena B, C, D, dokazati da su trouglovi PQR i $P'Q'R'$ slični.



Slika uz zadatak 68

Dokaz: Dokažimo najpre da su uglovi kod temena P i P' trouglova PQR i $P'Q'R'$ jednaki. S obzirom na date pretpostavke neposredno zaključujemo da su četvorouglovi $ABQP$ i $BDP'Q'$ konveksni i tetivni, te su im spoljašnji uglovi DPQ i $AP'Q'$ jednaki istom naspramnom unutrašnjem uglu. Stoga je $\angle DPQ = \angle AP'Q'$. Isto tako je $\angle DPR = \angle AP'R'$. Triedri s temenima P i $P^{‘}$, a ivicama PD, PQ, PR i $P'A$, $P'Q'$, $P'R'$ imaju jednaka po dva ivična ugla i diedri zahvaćeni njima, pa su isti podudarni, odakle sleduje da su i treći ivični uglovi jednaki, tj. da je $\angle RPQ = \angle R'P'Q'$. Kako je

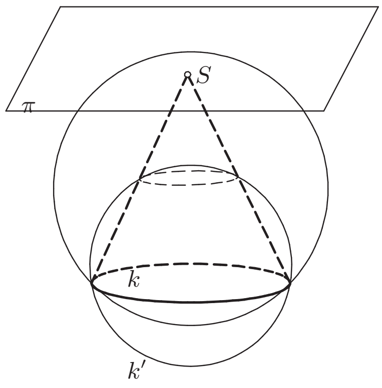
$$\angle DPQ \sim \angle DBA \quad i \quad \angle DPR \sim \angle DCA,$$

biće

$$PQ : PD :: AB : BD \quad i \quad PR : PD :: AC : CD,$$

i prema tome,
$$PQ : PR :: (AB : CD) : (AC : BD).$$
Isto tako je
$$P'Q' : P'R' :: (AB : CD) : (AC : BD).$$
Iz poslednjih dveju proporcija nalazimo da je
$$PQ : PR :: P'Q' : P'R'.$$
S obzirom da je kod trouglova
$$\angle QPR = \angle Q'P'R' \quad i \quad PQ : PR :: P'Q' : P'R',$$
biće
$$\angle PQR \sim \angle P'Q'R'.$$

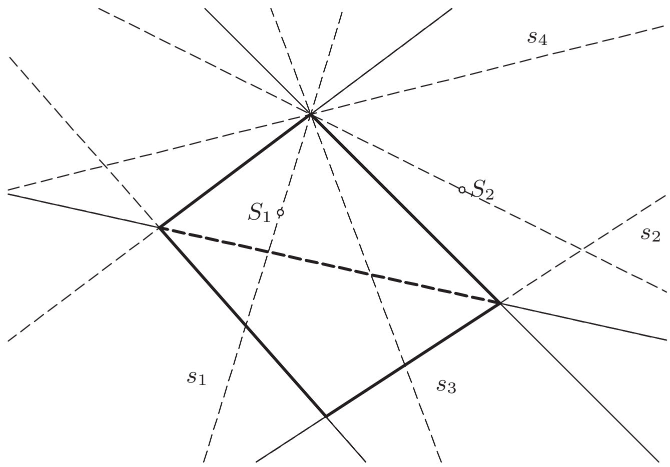
Zadatak 69: Ako je kružna površ (k) osnova i tačka S vrh jedne kupe, dokazati da je presek svake sfere koja sadrži rub osnove te kupe s njenim omotačem krug čija je ravan uporedna s ravni koja u tački S dodiruje sferu opisanu oko te kupe.



Slika uz zadatke 69 i 70

Zadatak 70: Ako je kružna površ (k) osnova i tačka S vrh neke kupe, dokazati da je presek svake ravni π' uporedne s ravni π koja u tački S dodiruje sferu opisanu oko te kupe s omotačem te kupe krug k', pri čemu krugovi k i k' pripadaju jednoj sferi.

Zadatak 71: Dokazati da u opštem slučaju postoji osam sfera koje dodiruju ravni određene pljosnima jednog tetraedra.



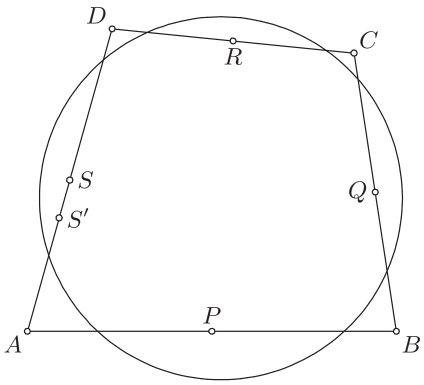
Slika uz zadatak 71

Dokaz: Skup središta svih sfera koje dodiruju ravni određene pljosnima ABC, ACD, ADB tetraedra $ABCD$ su četiri prave. Obeležimo ih sa s_1, s_2, s_3, s_4. Te četiri prave sustiču simetralne ravni τ_1 i τ_2 diedara određenih ravnima pljosni ABC i BCD, u opštem slučaju, u osam tačaka. Svaka od tih tačaka jednako je udaljena od ravni svih pljosni tetraedra, prema tome, svaka od njih je središte sfere koja dodiruje ravni svih pljosni tog tetraedra. Stoga, u opštem slučaju postoji osam sfera, koje dodiruju ravni određene pljosnima tetraedra $ABCD$.
Neka od pravih s_1, s_2, s_3, s_4 može da bude uporedna s jednom od ravni τ_1 i τ_2, no takvih pravih može biti najviše tri. Otuda sleduje da može postojati pet, šest, sedam ili osam sfera koje dodiruju ravni određene pljosnima jednog tetraedra.

Napomena: Ravni određene pljosnima tetraedra razlažu prostor na petnaest delova i to na: 1 tetraedar, 4 roglja, 4 zarubljena roglja i 6 krovova. Jedna od pomenutih sfera nalazi se u gamom tetraedru, to je upisana sfera tetraedra, po jedna sfera nalazi se u svakom od zarubljenih rogljeva, to su spolja upisane sfere prvog reda, i najzad ostale tri sfere, ukoliko postoje, nalaze se po jedna u krovovima, to su spolja upisane sfere drugoga reda nekog tetraedra.

Zadatak 72: Dokazati da tačke P, Q, R, S u kojima stranice AB, BC, CD, DA prostornog četvorougla $ABCD$ dodiruju izvesnu sferu λ pripadaju jednoj ravni.

Dokaz: Tri razne tačke P, Q, R sfere λ ne pripadaju jednoj pravoj. Zaista, ako bi one bile na jednoj pravoj imala bi ta prava sa sferom λ tri zajedničke tačke, što je nemoguće. Stoga tačke P, Q, R određuju izvesnu ravan π, dokažimo da i tačka S pripada toj ravni.



Slika uz zadatak 72

U tom cilju dokažimo najpre da stranica AD prodire ravan π, a zatim da se prodorna tačka poklapa s tačkom S. Nijedno teme četvorougla $ABCD$ ne pripada ravni π. Zaista, ako bi neko teme tog četvorougla, npr. teme A bilo u ravni π, imala bi stranica AB dve tačke A i P zajedničke s pravom π, pa bi sve tačke te stranice bile u ravni π. Tada bi dve tačke B i Q stranice BC pripadale ravni π, pa bi sve tačke te stranice bile u ravni π. Zatim bi dve tačke C i R stranice CD pripadale ravni π, pa bi sve tačke te stranice bile u ravni π. Najzad, dve tačke D i A stranice AD pripadale ravni π, pa bi sve tačke te stranice bile u ravni π. Dakle, bio bi četvorougao $ABCD$ ravan, što je suprotno pretpostavci. Stoga je tačka A izvan ravni π, tačka B s one strane ravni π s koje nije A, tačka C s one strane ravni π s koje nije B, tačka D s one strane ravni π s koje nije C, pa su tačke A i D s raznih strana ravni π. Otud sleduje da duž AD prodire ravan π u izvesnoj tački S'. Obe tačke S i S' su među tačkama A i D, pa je $A-S'-S$ ili $S-S'-D$ ili $S'S$. Pretpostavimo da je $A-S'-S$. U tom slučaju je $AS'<AS$ i $AS=AP$, pa je $AS'<AP$, i prema tome nagib duži AP prema ravni π manji od nagiba duži AS' prema ravni π. Ta'cke A, P, B su na istoj pravoj, pa su nagibi duži AP i BP prema ravni π jednaki, no krajevi P i Q jednakih duži BP i BQ pripadaju ravni π, pa su nagibi tih duži prema ravni π jednaki. Zatim su tačke B, Q, C na jednoj pravoj, pa su nagibi duži BQ i CQ prema ravni π jednaki, no krajevi Q i R jednakih duži CQ i CR pripadaju ravni π, pa su nagibi tih duži prema ravni π jednaki. Zatim su tačke C, R, D na jednoj pravoj, pa su nagibi duži CR i DR prema ravni π jednaki. Iz $A-S'-S$ i $A-S-D$ nalazimo da je $DS<DS'$, te s obzirom na $DR=DS$ imamo $DR<DS'$, pa je nagib duži DR prema ravni π veći od nagiba duži DS' prema ravni π. Dakle, nagib duži $AS^{\text{'}}$ prema ravni π je veći od nagiba duži DS' prema ravni π, što je nemoguće, jer tačke A, S', D pripadaju istoj pravoj. Stoga nije $A-S'-S$. Istim postupkom dokazuje se da nije ni $S-S'-D$, prema tome biće $S'S$. Otud sleduje da tačke P, Q, R, S pripadaju jednoj ravni.

<u>Zadatak 73:</u> Odrediti potrebne i dovoljne uslove pod kojima postoji sfera koja dodiruje svih šest ivica tetraedra.

<u>Dokaz:</u> Pretpostavimo da postoji sfera σ koja dodiruje svih šest ivica tetraedra $ABCD$; obeležimo sa P, Q, R, P', Q', R' dodirne tačke te sfere s ivicama AB, BC, CA, AD, BD, CD. S obzirom da su duži AP', AQ', AR odsečci na tangentama kroz tačku A na sferu σ, imamo da je

$$AP' = AQ = AR.$$

Isto tako je

$$BP = BQ' = BR,\ CP = CQ = CR',\ DP' = DQ' = DR'.$$

Otuda je

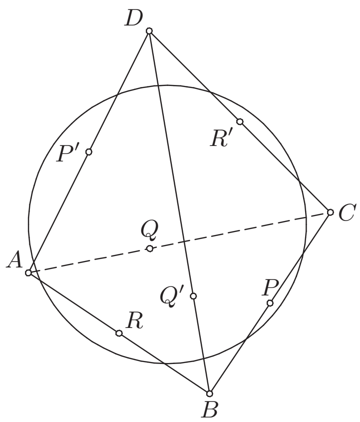
$$AB + CD = AR + RB + CR' + R'D = AP' + P'D + BP + PC = AD + BC.$$

Isto tako je

$$AB + CD = AC + BD,$$

pa je

$$AB + CD = BC + AD = AC + BD.$$



Slika uz zadatatk 73

Stoga, da bi postojala sfera koja dodiruje svih šest ivica tetraedra, potrebno je da zbirovi naspramnih ivica tog tetraedra budu među sobom jednaki. Dokažimo da je taj uslov i dovoljan, naime, pretpostavljajući da su zbirovi naspramnih ivica tetraedra $ABCD$ među sobom jednaki, dokažimo da postoji sfera koja dodiruje sve njegove ivice. Iz jednakosti

$$AD + BC = BD + CA$$

sledi da je

$$AB + AC - BC = AB + AD - BD.$$

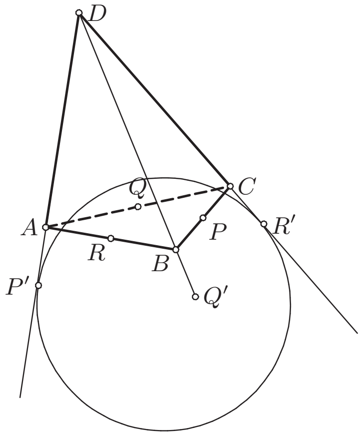
Ako sa R i R' obeležimo tačke u kojima krugovi upisani u trouglove ABC i ABD dodiruju stranicu AB, imamo da je

$$AR = \frac{1}{2}(AB + AC - BC) \quad i \quad AR' = \frac{1}{2}(AB + AD - BD),$$

pa je $AR = AR'$. Stoga su tačke R i R' istovetne, prema tome, krugovi upisani u trouglove ABC i ABD dodiruju stranicu AB u istoj tački R. Na isti način dokazuje se da i krugovi upisani u bilo koje druge dve pljosni tetraedra dodiruju zajedničku stranicu tih pljosni u istoj tački. Na taj način dobijamo na ivicama AB, BC, CA, AD, BD, CD tačke P,Q,R,P',Q',R'. S obzirom da krugovi PQR i $P'Q'R$ upisani u trouglove ABC i ABD dodiruju pravu AB u istoj tački, oni određuju neku sferu σ. Ta sfera dodiruje pet ivica BC,CA,AB,AD,BD tetraedra $ABCD$ u tačkama P,Q,R,P',Q'. Sfera σ dodiruje ivice BC i BD u tačkama P i Q', prema tome, ona seče pljosan BCD po krugu koji u tačkama P i Q' dodiruje stranice BC i BD trougla BCD. Otuda sledi da se taj krug poklapa s upisanim krugom trougla BCD, prema tome, duž CD dodiruje taj krug, dakle i sferu σ u tački R'. Stoga sfera σ dodiruje dve ivice tetraedra, pa je stav dokazan.

Zadatak 74: Odrediti potrebne i dovoljne uslove pod kojima postoji sfera koja dodiruje tri ivice tetraedra i produženja ostalih triju ivica.

Dokaz: Pretpostavimo da neka sfera σ dodiruje ivice BC, CA, AB i produženja ivica AD, BD, CD tetraedra $ABCD$, respektivno u tačkama P, Q, R, P', Q', R'.



Slika uz zadatak 74

Kao u prethodnom zadatku, imamo da je

$$AP' = AQ = AR,\ BP = BQ' = BR,\ CP = CQ = CR',\ DP' = DB' = DC'.$$

Otuda je

$$AD - BC = DP' - AP' - BP - CP = DQ' - BQ' - AQ - CQ = BD - AC.$$

Isto tako je

$$AD - BC = CD - AB.$$

Stoga, da bi postojala sfera koja dodiruje tri ivice i produženja ostalih triju ivica tetraedra, potrebno je da razlike naspramnih ivica tog tetraedra budu među sobom jednake.

Na analogan način kao u prethodnom zadatku dokazuje se da je ovaj uslov i dovoljan.

Napomena: Postoji najviše pet sfera koje dodiruju ivice, odnosno produženja ivica tetraedra. Te sfere nazivamo poluupisanim sferama tetraedra.

Zadatak 75: Dokazati da se prave koje spajaju dodirne tačke sfere s naspramnim ivicama tetraedra seku u jednoj tački.

Dokaz: Neka su P, Q, R, P', Q', R' tačke u kojima poluupisana sfera ω dodiruje ivice BC, CA, AB, AD, BD, CD tetraedra $ABCD$. Prema zadatku 72. tačke P, Q, P', Q' u kojima stranice BC, CA, AD, DB prostornog četvorougla $BCAD$ dodiruju sferu ω pripadaju izvesnoj ravni π. Pri tome je četvorougao $PQP'Q'$ konveksan, te se prave PP' i QQ' seku. Na isti način dokazujemo da i prava RR' seče prave PP' i QQ'. S obzirom da prava RR' ne pripada ravni π, prave PP', QQ', RR' seku se u jednoj tački.

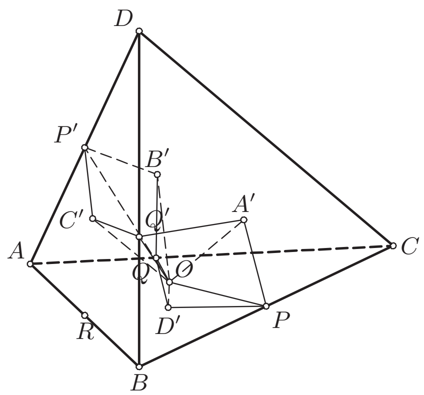
Zadatak 76: Ako je zbir dveju naspramnih ivica jednak zbiru drugih dveju naspramnih ivica tetraedra, dokazati da je zbir diedara koji odgovaraju pravim dvema naspramnim ivicama jednak zbiru diedara koji odgovaraju drugim dvema naspramnim ivicama tog tetraedra.

Dokaz: Neka je kod tetraedra $ABCD$ zbir naspramnih ivica BC i AD jednak zbiru naspramnih ivica CA i BD. Iz jednakosti

$$AD + BC = BD + CA$$

sledi da je

$$AB + AC - BC = AB + AD - BD.$$



Slika uz zadatak 76

Ako su R i R' tačke u kojima krugovi ABC i ABD dodiruju stranicu AB, imamo da je

$$AR = \frac{1}{2}(AB + AC - BC) \quad i \quad AR' = \frac{1}{2}(AB + AD - BD),$$

pa je $AR = AR'$. Otuda sledi da su tačke R i R' istovetne, prema tome, krugovi upisani u trouglove ABC i ABD dodiruju stranicu AB u istoj tački R, te pripadaju jednoj sferi ω koja dodiruje ivice BC, AD, CA, BD u izvesnim tačkama P, P', Q, Q'. Ako obeležimo sa O središte sfere ω i sa A', B', C', D' njene upravne projekcije na pljosnima BCD, CDA, DAB, ABC, imamo da je

$$\angle B'P'C' + \angle A'PD' = \angle B'P'O + \angle OP'C + \angle A'PO + \angle OPD' \tag{1}$$

$$\angle C'Q'A' + \angle B'OD' = \angle C'Q'O + \angle OQ'A' + \angle B'QO + \angle OQD' \tag{2}$$

S obzirom da je

$$\triangle OQD \cong \triangle OPD',\ \triangle OPA \cong \triangle OQ'A',$$

$$\triangle OQ'C' \cong \triangle OP'C',\ \triangle OP'B \cong \triangle OQB',$$

biće

$$\angle OQD' = \angle OPD',\ \angle A'PO = \angle A'Q'O,$$

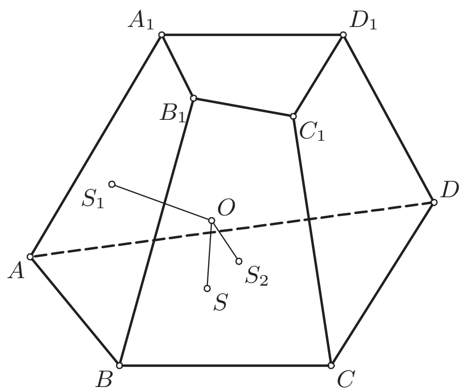
$$\angle C'Q'O = \angle C'P'O,\ \angle B'P'O = \angle OQB'.$$

Otuda sledi da su desne strane jednakosti (1) i (2) među sobom jednake, pa je

$$\angle B'P'C' + \angle A'PD' = \angle C'Q'A' + \angle B'OD'.$$

Stoga je i zbir diedara koji odgovaraju naspramnim ivicama AD i BC jednak zbiru diedara koji odgovaraju naspramnim ivicama BD i AC.

Zadatak 77: Ako su sve pljosni heksaedra tetivni četvorouglovi, dokazati da njegova temena pripadaju jednoj sferi.



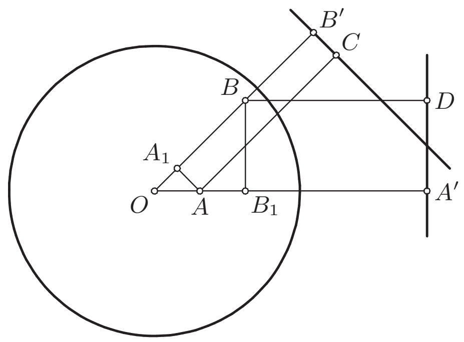
Slika uz zadatak 77

Dokaz: Neka je $ABCDA_1B_1C_1D_1$ heksaedar kome su sve pljosni tetivni četvorouglovi. Obeležimo sa k i k_1 krugove opisane oko pljosni $ABCD$ i ABB_1A_1, sa S i S_1 središta tih krugova, a sa n i n_1 prave kroz S i S_1 upravne na ravnima krugova k i k_1. Najpre dokažimo da se prave n i n_1 seku u tački koja je jednako udaljena od temena A, B, C, D, A_1, B_1. Tačke prave n jednako su udaljene od temena A, B, C, D pa je prava n presek simetralnih ravni duži AB, BC, CD, DA. Isto tako, tačke prave n_1 jednako su udaljene od temena A, B, B_1, A_1 pa je prava n_1 presek simetralnih ravni duži AB, BB_1, B_1A_1, A_1A. Dakle, obe prave n i n_1 pripadaju simetralnoj ravni duži AB, te s obzirom da su upravne na ravnima krugova k i k_1 koje se seku po pravoj AB, one se seku i među sobom u nekoj tački O. Ta tačka jednako je udaljena od tačaka A, B, C, D, A_1, B_1, prema tome, postoji sfera ω kojoj je središte O, a koja sadrži pomenutih šest tačaka. Dokažimo da i tačke C_1,D_1 pripadaju sferi ω. Saglasno pretpostavci, četvorougao BCC_1B_1 je tetivan, te postoji krug k_2 koji sadrži njegova temena. Neka je S_2 središte toga kruga, a n_2 prava kroz S_2 upravna na ravni kruga k_2. Sad se istim postupkom dokazuje da prava n_2 seče obe prave n i n_1. Kako prava n_2 seče prave n i n_1, a ne pripada simetralnoj ravni duži AB u kojoj se nalaze n i n_1, prava n_2 seče n i n_1 u tački O. S obzirom da je $OC = OC_1$, bice i C_1 tačka sfere ω. Istim postupkom dokazuje se da tačka D_1 pripada sferi ω. Tim je stav dokazan.

Zadatak 78: Ako su α i β polarne ravni dveju tačaka A i B u odnosu na sferu $\sigma(O, r)$, a C i D podnožja upravnih iz tačaka A i B na ravnima β i α, dokazati da je

$$OA : AC = OB : BD.$$

(Salmonova teorema).



Slika uz zadatak 78

Dokaz: Obeležimo sa A' i B' tačke u kojima prave OA i OB prodiru ravni α i β, a sa A_1 i B_1 upravne projekcije tačaka A i B na pravama OB i OA. S obzirom da je

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB',$$

biće

$$OA : OB = OB' : OA'. \tag{1}$$

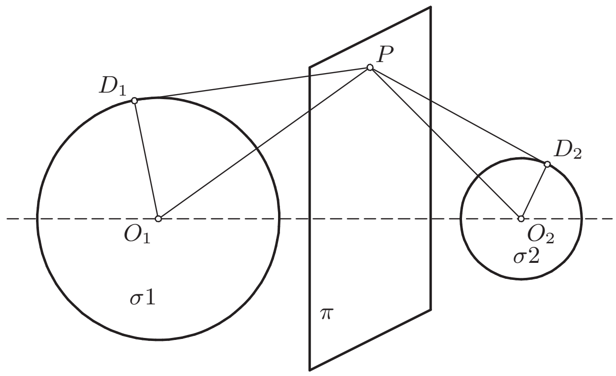
Iz sličnosti trouglova OAA_1 i OBB_1 sledi da je

$$OA : OB = OA_1 : OB_1 \tag{2}$$

Iz dobijenih jednakosti (1) i (2) nalazimo da je

$$OA : OB = (OA_1 - OB') : (OB_1 - OA') = A_1B' : B_1A' = AC : BD.$$

Zadatak 79: Dokazati da je skup svih tačaka kojima su potencije u odnosu na dve date sfere među sobom jednake, ravan upravna na pravoj koja je određena središtima tih dveju sfera.



Slika uz zadatak 79

Dokaz: Ako obeležimo sa O_1 i O_2 središta, a sa r_1 i r_2 poluprečnike dveju sfera σ_1 i σ_2, i sa P tačku čije su potencije u odnosu na sfere σ_1 i σ_2 medju sobom jednake, biće

$$O_1P^2 - r_1^2 = O_2P^2 - r_2^2,$$

tj.

$$O_1P^2 - O_2P^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Iz ove jednakosti sledi da je razlika kvadrata duži O_1P i O_2P stalna, pa su sve tačke s jednakim potencijama u odnosu na sfere σ_1 i σ_2u izvesnoj ravni π koja je upravna na pravoj O_1O_2. Obrnuto, ako je P' bilo koja tačka ravni π, bice

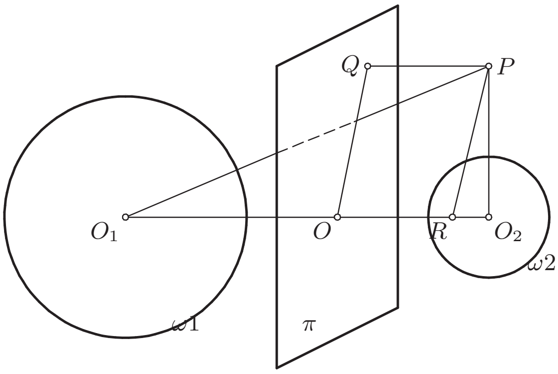
$$O_1P'^2 - O_2P'^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

tj.

$$O_1P'^2 - r_1^2 = O_2P'^2 - r_2^2,$$

pa su potencije tačke P' u odnosu na sfere σ_1 i σ_2 među sobom jednake. Stoga, skup svih tačaka čije su potencije u odnosu na sfere σ_1 i σ_2 jednake je izvesna ravan upravna na pravoj O_1O_2.

Zadatak 80: Dokazati da je razlika potencija neke tačke P u odnosu na dve date sfere ω_1 i ω_2 jednaka dvostrukom proizvodu duži koja spaja središta tih sfera i odstojanja tačke P od radikalne ravni tih dveju sfera.



Slika uz zadatak 80

Dokaz: Ako su O_1 i O_2 središta, r_1 i r_2 poluprečnici i π radikalna ravan sfera ω_1 i ω_2, a Q i R podnožja upravnih iz tačke P na ravni π i pravoj O_1O_2 i O tačka u kojoj prava O_1O_2 prodire ravan π, imamo da je

$$\begin{aligned}
&(O_1P^2 - r_1^2) - (O_2P^2 - r_2^2) = (O_1P^2 - O_2P^2) - (r_1^2 - r_2^2)\\
&= (O_1R^2 - O_2R^2) - (O_1O^2 - O_2O^2)\\
&= (O_1R + RO_2)(O_1R - RO_2) - (O_1O + OO_2)(O_1O - OO_2)\\
&= O_1O_2[(O_1R - O_1O) + (OO_2 - RO_2)]\\
&= O_1O_2(OR + OR) = 2O_1O_2 \cdot OR = 2O_1O_2 \cdot PQ.
\end{aligned}$$

Zadatak 81: Dokazati da je skup svih tačaka prostora kojima je razlika potencija, u odnosu na dve sfere ω_1 i ω_2 stalna, ravan uporedna s radikalnom ravni tih dveju sfera.

Dokaz: S obzirom da razlika potencija neke tačke u odnosu na dve sfere ω_1 i ω_2 zavisi samo od odstojanja te tačke od radikalne ravni tih sfera, skup svih tačaka prostora kojima je razlika potencija u odnosu na dve sfere ω_1 i ω_2 stalna je ravan uporedna sa radikalnom ravni tih dveju sfera.

Zadatak 82: Dokazati da se radikalne ravni triju sfera s nekolinearnim središtima seku po jednoj pravoj, radikalnoj osi tih triju sfera. Ako su središta triju sfera kolinearne tačke, dokazati da su radikalne ravni tih sfera među sobom uporedne ili istovetne.

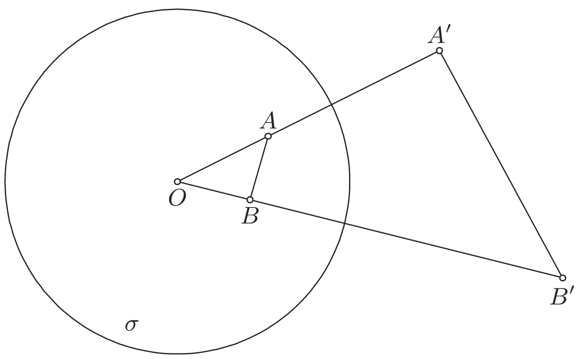
Dokaz: Neka su O_1, O_2, O_3 središta triju sfera ω_1, ω_2, ω_3, a π_1, π_2, π_3 radikalne ravni sfera ω_2 i ω_3, ω_3 i ω_1, ω_1 i ω_2. Ako tačke O_1, O_2, O_3 nisu kolinearne, prave O_2O_3 i O_3O_1 se seku, pa se i ravni π_1 i π_2 upravne na njima seku po nekoj pravoj s. Prema tome, bilo koja tačka prave s ima jednake potencije kako u odnosu na sfere ω_2 i ω_3, tako i u odnosu na sfere ω_3 i ω_1, pa su potencije te tačke jednake i u odnosu na sfere ω_1 i ω_2. Otuda sledi da ta tačka pripada i ravni π_3, pa se radikalne ravni π_1, π_2, π_3 pomenutih sfera ω_1, ω_2, ω_3 s nekolinearnim središtima seku po jednoj pravoj, radikalnoj osi tih triju sfera. Ako su središta O_1, O_2, O_3 sfera ω_1, ω_2, ω_3 na jednoj pravoj, radikalne ravni π_1, π_2, π_3 tih sfera upravne su na toj pravoj, prema tome, one su među sobom uporedne, ili se dve odnosno sve tri poklapaju.

Zadatak 83: Dokazati da se radikalne ravni četiri sfera sa nekim planarnim središtima O_1,O_2,O_3,O_4 seku u jednoj tački , radikalnom središtu tih sfera.

Dokaz: Ako su ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 četiri sfere sa nekomplanarnim središtima O_1, O_2, O_3, O_4 i nikoje tri nisu od tačaka O_1, O_2, O_3, O_4 ne pripadaju jednoj pravoj. Stoga se, prema prethodnom zadatku, radikalne ravni bilo kojih triju od sfera ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 seku po jednoj pravoj radikalnoj osi tih triju sfera. Obeležimo sa s_1, s_2, s_3, s_4 radikalne ose sfera ω_2, ω_3, ω_4; ω_3, ω_4, ω_1; ω_4, ω_1, ω_2; ω_1, ω_2, ω_3. Radikalne ose s_1, s_2 pripadaju radikalnoj pravoj sfera ω_3, ω_4, a upravne su na ravnima $O_2O_3O_4$ i $O_3O_4O_1$ koje se seku, pa se i prave s_1, s_2 seku u nekoj tački S. Pri tome, tačka S ima jednake potencije u odnosu na sfere ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Otuda sledi da tačka S pripada svim pravama s_1, s_2, s_3, s_4 i svim radikalnim ravnima sfera ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, pa se sve radikalne ose kao i sve radikalne ravni sfera ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 seku u jednoj tački, radikalnom središtu tih sfera.

Zadatak 84: Ako su A, A' i B, B' dva para inverznih tačaka u odnosu na sferu $\sigma(O, r)$, dokazati da je:

$$A'B' = AB \cdot \frac{r^2}{OA \cdot OB}.$$



Slika uz zadatak 84

Dokaz: Iz jednakosti uglova AOB i $B'O'A'$ i iz jednakosti

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB',$$

tj.

$$OA : OB = OB' : OA'$$

sledi da je $\triangle AOB \sim \triangle B'O'A'$, pa je

$$AB : A'B' = OA : OB'$$

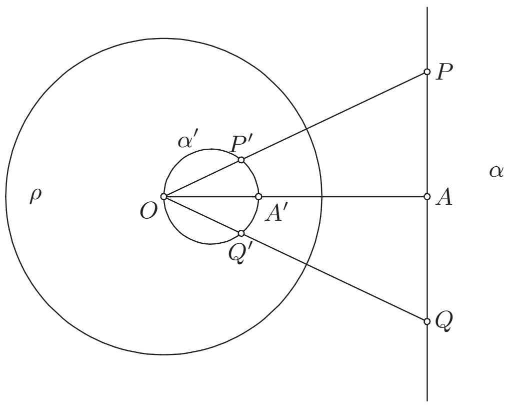
Otuda je

$$A'B' = AB \cdot \frac{OB'}{OA}$$

i prema tome

$$A'B' = AB \cdot \frac{r^2}{OA \cdot OB}.$$

Zadatak 85: Dokazati da je inverzan lik ravan α u odnosu na sferu $\sigma(O, r)$ takođe ravan lik ili sfera, prema tome da li ravan α sadrži ili ne sadrži središte sfere σ.



Slika uz zadatak 85

Dokaz: Ako ravan α sadrži središte O sfere σ, saglasno definiciji , svakoj tački P ravni α odgovara tačka P' koja takođe pripada ravni α, i obrnuto, svaka tačka Q' ravni α je inverzna nekoj tački Q te iste ravni, pa je inverzan lik ravni α u odnosu na sferu σ ta ista ravan. Sada pretpostavimo da ravan α ne sadrži središte O sfere σ.
Ako obeležimo sa A podnožje upravne iz tačke O na ravni α, sa P proizvoljnu tačku ravni α, a sa A' i P' tačke inverzne tačkama A i P u odnosu na sferu σ, imamo da je

$$OA \cdot OA' = OP \cdot OP',$$

pa je

$$OA : OB = OP' : OA'.$$

Sem toga je $\angle AOP = \angle P'O'A'$, pa je $\triangle OAP \sim \triangle OP'A'$ i prema tome

$$\angle OAP = \angle OP'A'.$$

S obzirom da je $\angle OAP$ prav, i njemu jednak $\angle OP'A'$ je prav. Stoga je tačka P' na sferi α' kojoj je duž OA' prečnik. Obrnuto, ako je Q' bilo koja tačka sfere α', a Q tačka u kojoj prava OQ' seče ravan α , imamo da je

$$\angle OAQ = \angle OQ'A' \quad i \quad \angle AOQ = \angle Q'OA',$$

pa je $\triangle OAQ \sim \triangle OQ'A'$. Otuda je

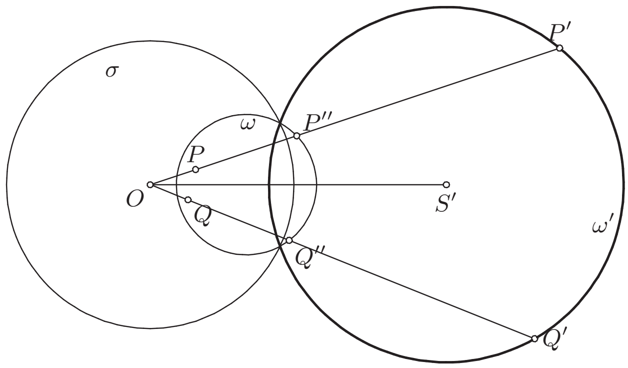
$$OA : OQ = OQ' : OA',$$

tj.

$$OA \cdot OA' = OQ \cdot OQ',$$

pa je tačka Q' inverzna sa tačkom Q u odnosu na sferu σ. Prema tome, inverzan lik ravni α koja ne sadrži središte O inverzije je sfera α kojoj je duž OA' prečnik.

Zadatak 86: Dokazati da je inverzan lik sfere ω u odnosu na neku sferu $\sigma(O,r)$ ravan ili sfera , prema tome da li sfera ω sadrži ili ne sadrži središte sfere σ.



Slika uz zadatak 86

Dokaz: Analizirajmo najpre slučaj kada sfera ω sadrži središte O sfere σ. Ako obeležimo sa OA prečnik i sa P proizvoljnu tačku sfere ω, a sa A' i P' tačke inverzne s tačkama A i P u odnisu na sferu σ, imamo da je

$$OA \cdot OA' = OP \cdot OP' \quad i \quad \angle AOP = \angle P'OA',$$

pa je $\triangle AOP \sim \triangle P'OA'$, i prema tome $\angle APO = \angle P'A'O$. S obzirom da je ugao AOP prav , i njemu jednak ugao $P'A'O$ je prav. Otuda sledi da inverzne tačke svih tačaka sfere ω pripadaju ravni ω' koja je u tački A' upravna na pravoj OA. Obrnuto, ako je Q' proizvoljna tačka ravni ω' i Q tačka u kojoj prava OQ' seče sferu ω, imamo da je

$$\angle AOQ = \angle Q'OA' \quad i \quad \angle AQO = \angle Q'A'O,$$

pa je $\triangle AOQ \sim \triangle Q'OA'$. Otuda je

$$OA : OQ' = OQ : OA',$$

tj.

$$OA \cdot OA' = OQ \cdot OQ',$$

pa je tačka Q' inverzna s tačkom Q u odnosu na sferu σ. Prema tome, inverzan lik sfere ω koja sadrži tačku O u odnosu na sferu σ je ravan ω' koja je u tački A' upravna na pravoj OA. Sad pretpostavimo da sfera ω ne sadrži središte O sfere σ.
Ako je P proizvoljna tačka sfere ω, a P' njena inverzna tačka u odnosu na sferu σ i P'' druga zajednička tačka prave OP sa sferom, imamo da je

$$OP \cdot OP' = r^2 \quad i \quad OP \cdot OP'' = t^2$$

gde je t^2 potencija tačke O u odnosu na sferu ω. Stoga je

$$OP' : OP'' = r^2 : t^2,$$

pa se inverzne tačke svih tačaka sfere ω u odnosu na sferu σ nalaze na izvesnoj sferi ω' koja je homotetična sa sferom u odnosu na tačku O. Obrnuto, ako je Q' bilo koja tačka sfere ω', Q'' njoj hipotetična tačka na sferi ω i Q druga zajednička tačka prave OQ'' sa sferom ω , imamo da je

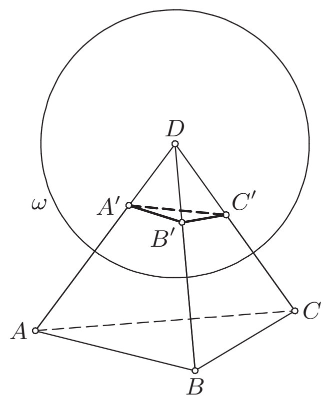
$$OQ' : OQ'' = r^2 : t^2 \quad i \quad OQ \cdot OQ'' = t^2,$$

pa je

$$OQ \cdot OQ' = r^2.$$

Stoga je tačka Q' inverzna s tačkom Q u odnosu na sferu σ. Prema tome, inverzan lik sfere koja ne sadrži središte inverzije je takodje sfera.

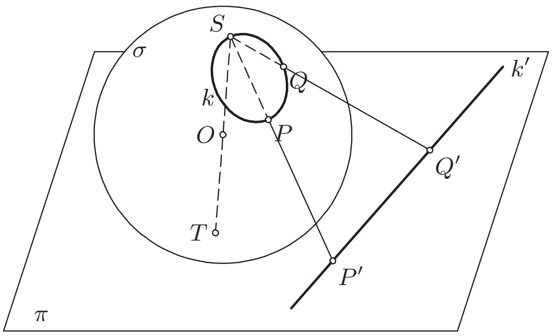
Zadatak 87: Dokazati da je ugao pod kojim se seku krugovi opisani oko dveju pljosni tetraedra jednak sa uglom pod kojim se seku krugovi opisani oko druge dve pljosni tog tetraedra.



Slika uz zadatak 87

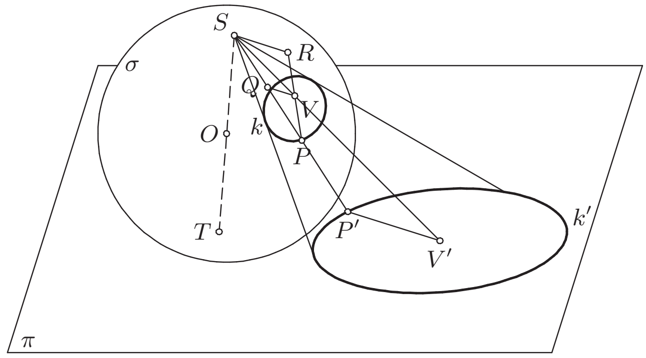
Dokaz: Obeležimo sa $ABCD$ proizvoljan tetraedar, sa ω bilo koju sferu kojoj je središte D, a sa A', B', C' tačke inverzne tačkama A, B, C u odnosu na sferu ω. S obzirom da krugovi ABD, BCD, CAD sadrže središta D te inverzije, njima inverzni likovi su prave $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$. Naprotiv, krug ABC ne sadrži tačku D' pa je njegov lik takođe krug $A'B'C'$. Kako je inverzno preslikavanje konformno, ugao pod kojim se seku krugovi ABC i ABD jednak je uglu pod kojim se seku krug $A'B'C'$ i prava $A'B'$, a ugao pod kojim se seku krugovi BCD i CAD je jednak uglu pod kojim se seku prave $B'C'$ i $C'A'$. No ugao pod kojim se seku krug $A'B'C'$ i prava $A'B'$ jednak je uglu pod kojim se seku prave $B'C'$ i $C'A'$, pa je i ugao pod kojim se seku krugovi ABC i ABD jednak uglu pod koji se seku krugovi BCD i CAD.

Zadatak 88: Dokazati da je stereografska projekcija kruga k koji se nalazi na sferi σ prava ili krug, prema tome da li krug k sadrži ili ne sadrži središte tog stereografskog projektovanja.



Slika 1 uz zadatak 88

Dokaz: Analizirajmo najpre slučaj kada krug k sadrži središte S stereografskog projektovanja. Neka je π ravan koja je uporedna na dijametru ST sfere σ u nekoj tački, recimo T, a α ravan kruga k. Ako je P proizvoljna tačka kruga k različita od S, prava SP zahvata sa pravom ST oštar ugao, prema tome, ona prodire ravan π u nekoj tački P'. Dve razne ravni π i α imaju zajedničku tačku P', dakle seku se po nekoj pravoj k' koja sadrži tačku P'. Dirka kruga k u tački S uporedna je sa pravom k', prema tome, ona projektuje tačku S kruga k u beskrajno daleku tačku prave k'. Otud sleduje da stereografske projekcije svih tačaka kruga k pripadaju pravoj k'. Obrnuto, ako je Q' proizvoljna tačka kruga k', prava SQ' je različita od dirke kruga k u tački S, prema tome ona seče krug k u još nekoj tački Q. Stoga je tačka Q' stereografska projekcija izvesne tačke Q kruga k. Otuda sleduje da je stereografska projekcija kruga koji sadrži središte S projektovanja prava linija.
Sad pretpostavimo da krug k ne sadrži središte S projektovanja. Neka je π ravan koja je upravna na dijametru ST sfere σ u nekoj tački, na primer T. Ako je k mali krug sfere σ, postoji konusna površ koja dodiruje sferu σ po tom krugu. Neka je V vrh te konusne površi. S obzirom da tačka S nije na krugu k, prava SV nije izvodnica te konusne površi, tj. dirka sfere σ u tački S. Stoga prava SV nije uporedna s ravni π, dakle prodire tu ravan u nekoj tački V'.



Slika 2 uz zadatak 88

Ako je P proizvoljna tačka kruga k, iz istih razloga prava SP prodire ravan π u nekoj tački P'. Obeležimo sa Q tačku u kojoj prava kroz tačku V uporedna s pravom $V'P'$ seče pravu SP', a sa R tačku u kojoj prava kroz S uporedna s pravom VQ seče pravu VP. Pri tome je $\triangle RSP \sim \triangle VQP$, pa je

$$RS : RP = VQ : VP.$$

Duži RS i RP su jednake kao odsečci na tangentama sfere σ, pa je

$$VQ = VP.$$

Kako je $\triangle SV'P' \sim \triangle SVQ$, imamo da je

$$V'P : VQ = SV' : SV,$$

pa je $V'P' = VQ$

$$\frac{SV'}{SV} = VP\frac{SV'}{SV}.$$

Iz ove jednakosti sleduje da duž $V'P'$ ne zavisi od izbora tačke P na krugu k, prema tome stereografsko projektovanje svih tačaka kruga k iz tačke S na ravan π pripadaju izvesnom krugu k' kome je središte V', a poluprečnik

$$r' = VP\frac{SV'}{SV}.$$

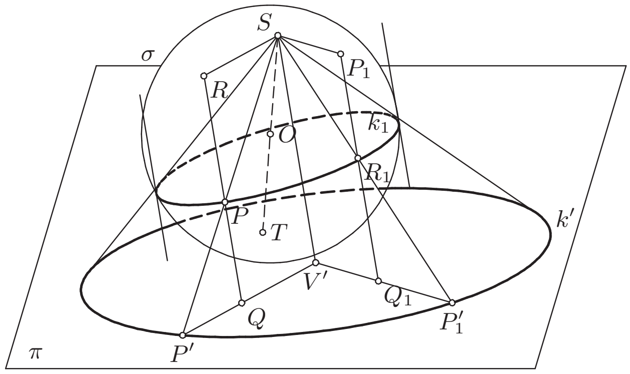
Obrnuto, ako je P_1' bilo koja tačka kruga k', a prava SP_1' ne dodiruje sferu σ u tački S, prema tome, ona prodire tu sferu u nekoj tački P_1. Dokažimo da je prava P_1 tačka kruga k. Obeležimo sa Q_1 tačku u kojoj prava kroz tačku V uporedna sa pravom $V'P_1'$ seče pravu SP_1'.

S obzirom da je $\triangle SV'P_1' \sim \triangle SVP_1$ imamo da je

$$V'P_1' : VP_1 = SV' : SV,$$

tj. da je
$$V'P_1' = VP_1\frac{SV'}{SV}.$$
Otuda i iz jednakosti
$$V'P_1' = VP\frac{SV'}{SV}$$
sledi da je
$$VP_1 = VP,$$
pa je VP_1 dirka sfere σ, i prema tome P_1 tačka kruga k. Stoga je svaka tačka kruga k' stereografska projekcija neke tačke kruga k.

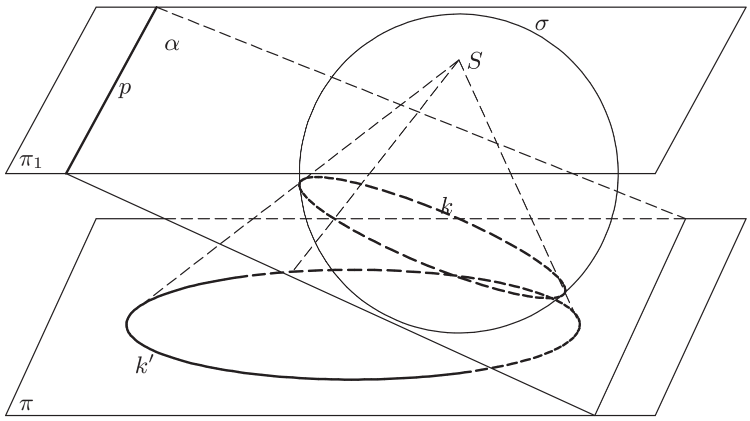
Ako je k veliki krug sfere σ, postoji cilindrična provrš koja dodiruje sferu σ po krugu k. S obzirom da tačka S nije na krugu k prava kroz tačku S uporedna sa izvodnicama pomenute cilindrične površi nije dirka sfere σ u tački S, prema tome, ona prodire ravan π u nekoj tački V'. Ako je P proizvoljna tačka kruga k, iz istih razloga prava SP prodire ravan π u nekoj tački P'. Obeležimo sa Q i R tačke u kojima izvodnice cilindrične površi kroz tačku P seče pravu $V'P'$ i pravu kroz tačku S uporednu s pravom $V'P'$. Pri tome je $\triangle RSP \sim \triangle QP'P$, pa je
$$PR : RS = PQ : QP'.$$
Duži PR i RS su jednake kao odsečci na tangentama sfere σ kroz tačku R, pa je
$$QP' = PQ.$$
Kako je $\triangle SP'V \sim \triangle PQP'$, imamo da je
$$V'P' : SV = QP' : PQ,$$
pa je $V'P' = SV$. Iz ove jednakosti sledi da duž $V'P'$ ne zavisi od položaja tačke P na krugu k, prema tome, stereografske projekcije svih tačaka kruga k iz tačke S na ravan π pripadaju izvesnom krugu k' kome je središte V', a poluprečnik jednak duži SV'. Obrnuto, ako je P_1' bilo koja tačka kruga k', prava SP_1' ne dodiruje sferu σ u tački S, prema tome, ona prodire istu u nekoj tački P_1. Dokažimo da je P_1 tačka kruga k. Obeležimo sa Q_1 i R_1 tačke u kojima prava kroz tačku P_1 uporedna s pravom SV' seče pravu $V'P_1'$ i pravu kroz tačku S uporednu s pravom $V'P_1'$. Pri tome je
$$\triangle P_1R_1S \sim \triangle P_1Q_1P_1' \quad i \quad \triangle P_1Q_1P_1' \sim \triangle SV'P_1',$$
pa je
$$\triangle P_1R_1S \sim \triangle SV'P_1',$$
i prema tome
$$R_1S : R_1P_1 = V'P_1' : V'P_1' = V'S,$$
pa je i $RS = RP$. Otuda je prava R_1P_1 dirka sfere σ, pa je P_1 tačka kruga k. Stoga je svaka tačka kruga k' stereografska projekcija neke tačke kruga k.



Slika 3 uz zadatak 88

Prema tome, stereografska projekcija kruga k sfere σ koji ne sadrži središte projektovanja je takođe krug.

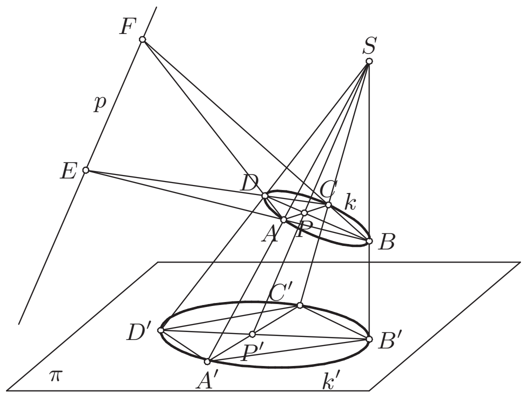
Zadatak 89: Ako krug k i prava p pripadaju izvesnoj ravni α, a nemaju zajedničkih tačaka, dokazati da postoje u prostoru takva ravan π i tačka S da centralna projekcija kruga k iz tačke S na ravan π bude takođe krug, a centralna projekcija prave p iz tačke S na ravan π bude beskrajno daleka prava ravni π.



Slika uz zadatak 89

Dokaz: Neka je σ proizvoljna sfera koja sadrži krug k. S obzirom da se prava p nalazi u ravni kruga k, a sa krugom k nema zajedničkih tačaka, prava p nema ni sa sferom σ zajedničkih tačaka. Stoga postoje dve ravni koje sadrže pravu p i dodiruju sferu σ. Neka je π_1 bilo koja od njih. Obeležimo sa S tačku kojoj ravan π_1 dodiruje sferu σ, a sa π ravan koja dodiruje sferu σ a uporedna je sa ravni π_1. Krug k sfere σ ne sadrži tačku S pa je prema zadatku . . . , centralna projekcija kruga k iz tačke S na ravan π takođe krug. Prava p je u ravni π_1 koja sadrži tačku S a uporedna je s ravni π, pa je njena centralna projekcija iz tačke S na ravan π, beskrajno daleka prava ravni π.

Zadatak 90: Ako je P proizvoljna tačka u krugu k, dokazati da u prostoru postoje takva ravan π i tačka S da centralna projekcija k' kruga k iz tačke S na ravan π bude takođe krug, a centralna projekcija P' tačke P iz iste tačke S na ravan π bude središte kruga k'.

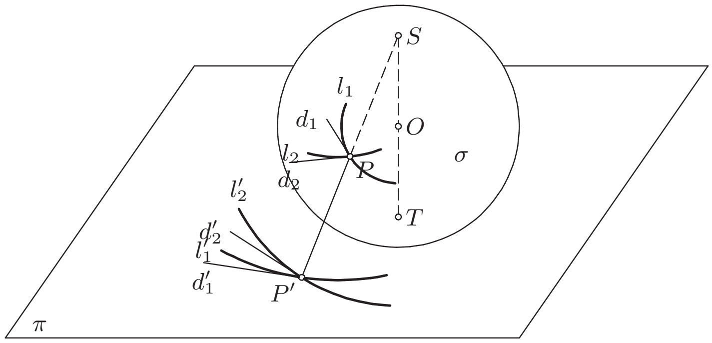


Slika uz zadatak 90

Dokaz: Neka su AC i BD bilo koje dve tetive kruga k koje sadrže tačku P, a E i F tačke u kojima se seku prave određene naspramnim stranicama AB i CD, BC i AD tetivnog četvorougla $ABCD$. S obzirom da je presečna tačka P dijagonala AC i BD tog četvorougla u krugu k, prava p određena tačkama E i F nema sa krugom k zajedničkih tačaka. Stoga, prema prethodnom zadatku (zad.89.), postoje u prostoru takva ravan π i tačka S da centralna projekcija k' kruga k iz tačke S na ravan π bude takođe krug, a centralna projekcija p' prave p iz tačke S na ravan π bude beskrajno daleka prava ravni π. Ako obeležimo sa A', B', C', D' projekcije tačaka A, B, C, D iz tačke S na ravan π, kod tetivnog četvorougla $A'B'C'D'$ biće naspramne stranice među sobom uporedne, pa je četvorougao $A'B'C'D'$ pravougli paralelogram, kome se dijagonale $A'C'$ i $B'D'$ seku u tački P', središtu kruga k'.

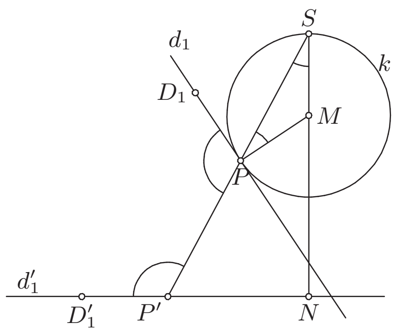
Zadatak 91: Dokazati da pri stereografskom projektovanju uglovi ne menjaju svoju veličinu, tj. da je stereografsko projektovanje komformno preslikavanje.

Dokaz: Obeležimo sa π projekcijsku ravan koja je upravna na dijametru ST sfere σ u njenoj tački, npr. T, sa l_1 i l_2 dve linije sfere σ koje se seku u nekoj tački P, a sa l_1' i l_2' projekcije tih linija iz tačke S na ravan π. S obzirom da se linije l_1 i l_2 seku u izvesnoj tački, i projekcije tih linija će se seći u tački P', projekciji tačke P na ravan π.



Slika 1 uz zadatak 91

Dokažimo da je ugao pod kojim se seku linije l_1 i l_2 u tački P jednak s uglom pod kojim se seku linije l_1' i l_2' u tački P', tj. da dirke d_1 i d_2 linija l_1 i l_2 u tački P zahvataju ugao jednak s uglom kojeg zahvataju dirke d_1' i d_2' linija l_1' i l_2' u tački P'.



Slika 2 uz zadatak 91

Prave d_1 i d_1' pripadaju izvesnoj ravni koja seče sferu σ po nekom krugu k_1; taj krug sadrži tačku S i dodiruje pravu d_1 u tački P, a njegov poluprečnik MS upravan na pravoj d_1' u nekoj tački N. Ako su D_1 i D_1' proizvoljne tačke pravih d_1 i d_1' s one strane od prave PP' s koje nije tačka M, imamo da je

$$\angle D_1PP' = R + \angle SPM = R + \angle PSM = \angle PP'D_1'$$

gde je R prav ugao. Stoga prave d_1 i d_1' zahvataju s pravom PP' jednake suprotne uglove. Isto tako prave d_2 i d_2'. Triedri $P(P'D_1D_2)$, $P'(PD_1'D_2')$ su podudarni jer imaju jednake po dve odgovarajuće pljosni i zajednički dijedar određen tim pljosnima, pa je i $\angle D_1PD_2 = \angle D_1'P'D_2'$.

Zadatak 92: Ako je s zbir svih ivica poliedra, a d najveća od duži koja spaja njegova dva temena, dokazati da je $s > 3d$.

Dokaz: Obeležimo sa A i B dva najudaljenija temena poliedra a sa α i β ravni koje su u tačkama A i B upravne na pravoj AB. Sva ostala temena tog poliedra nalaze se između ravni α i β. Zaista, ako se neko teme P poliedra ne bi nalazilo između ravni α i β, već npr. u ravni β ili s one strane ravni β s koje nije tačka A, bila bi duž koja spaja temena A i P veća od duži koja spaja temena A i B, što je pretpostavkom isključeno. Dakle, sva ostala temena poliedra su između ravni α i β, pa su i ravni kroz ta temena upravne na ravni AB između ravni α i β. Obeležimo sa γ_1 onu od tih ravni koja je susedna ravni α, a γ_2 onu od tih ravni koja je susedna ravni γ_1, itd.; a sa C_1 i C_2, itd. tačke u kojima te ravni seku duž AB. Između ravni α i γ_1 nalaze se najmanje tri odsečka koji pripadaju ivicama poliedra, svaki od njih veći je od duži AC_1 ili je jednak toj duži, a zbir tih odsečaka veći je od $3AC_1$. Između ravni γ_1 i γ_2 nalaze se najmanje tri odsečka koji pripadaju ivicama poliedra, svaki od njih veći je od duži C_1C_2 ili je jednak toj duži, pa je i njihov zbir veći ili jednak $3C_1C_2$, itd. Otud sledi da je zbir svih pomenutih odsečaka na ivicama veći od zbira svih duži AC_1, C_1C_2, itd., pa je i zbir svih ivica poliedra veći od trostruke duži AB, i prema tome $s > 3d$.

Zadatak 93: Dokazati da je kod svake zatvorene poliedarske površi broj pljosni s neparnim brojem stranica paran.

Dokaz: Neka je ω zatvorena poliedarska površ koja ima m pljosni s parnim i n pljosni s neparnim brojem stranica. Zbir l stranica svih pljosni površi ω jednak je dvostrukom broju ivica te površi, dakle l je paran broj. Međutim, zbir stranica svih m pljosni s parnim brojem stranica je paran broj, te da bi l bio paran broj mora i n biti paran broj.

Zadatak 94: Dokazati da je kod svake zatvorene poliedarske površi broj rogljeva s neparnim brojem pljosni paran.

Dokaz: Neka je ω zatvorena poliedarska površ koja ima m rogljeva s parnim i n rogljeva s neparnim brojem pljosni. Zbir l ivica svih rogljeva površi ω jednak je dvostrukom broju ivica te površi, dakle l je paran broj. Međutim, zbir ivica svih m rogljeva s parnim brojem pljosni je paran broj, te da bi l bio paran broj mora i n biti paran broj.

Zadatak 95: Dokazati da ne postoji zatvorena poliedarska površ koja ima manje od šest ivica, niti postoji zatvorena poliedarska površ koja ima sedam ivica, zatim dokazati da postoji zatvorena poliedarska površ koja ima n ivica, gde je $n \geq 8$.

Dokaz: Neka je λ proizvoljna pljosan zatvorene poliedarske površi ω. Minimalan broj stranica te pljosni je tri. Izvan ravni koje sadrži pljosan λ postoji bar jedno teme površi ω. U tom temenu sustiču se najmanje tri ivice površi ω koje su različite od stranica pljosni λ, prema tome, površ ω ima bar šest ivica.
Drugi deo stava dokažimo indirektno. Stoga pretpostavimo da postoji zatvorena poliedarska površ koja ima sedam ivica. Sve pljosni te površi moraju biti trostrane. Zaista, ako bi neka pljosan bila npr. četvorostrana, svako teme te pljosni je zajednički kraj

najmanje triju ivica površi ω, od kojih su dve stranice te pljosni, stoga bi broj ivica površi ω bio najmanje 8, što je nemoguće. Dakle, sve pljosni površi ω su trostrane. Zbir stranica svih tih pljosni jednak je dvostrukom broju ivica površi ω, dakle 14. U tom slučaju broj pljosni površi ω ne možemo odrediti, jer količnik 14:3 nije ceo broj. Otud sleduje da ne postoji zatvorena poliedarska površ koja ima sedam ivica.
Da bi smo dokazali treći deo zadatka, analizirajmo slučaj kada je n paran broj i slučaj kada je n neparan broj. Ako je n paran broj postojaće piramida koja ima $\frac{n}{2}$ bočnih pljosni i prema tome n ivica. Ako je n neparan broj veći od osam, postojaće piramida koja ima $\frac{n-3}{2}$ bočnih pljosni i prema tome $n-3$ ivica. Izvesna ravan seče ivice te piramide koje polaze iz istog temena osnove i razlaže istu na jedan tetraedar i jedan poliedar. Broj ivica tog poliedra za tri je veći od broja ivica pomenute piramide, stoga taj poliedar ima n ivica.

Zadatak 96: Ako je t broj temena, i broj ivica i p broj pljosni poliedarske površi ω nultog roda, dokazati da je

$$6p - 12 \geq 2i \geq 3p \geq i + 6$$

i

$$6t - 12 \geq 2i \geq 3t \geq i + 6.$$

Dokaz: Ako sa $p_3, p_4, \ldots$ obeležimo broj trostranih, četvorostranih, ... pljosni biće

$$p = p_3 + p_4 + \cdots \quad i \quad 2i = 3p_3 + 4p_4 + \cdots ,$$

pa je

$$2i \geq 3(p_3 + p_4 + \cdots),$$

tj. $2i \geq 3p$.
Ako sa $t_3, t_4, \ldots$ obeležimo broj temena u kojima se sustiču tri, četiri, ... ivica biće

$$t = t_3 + t_4 + \cdots \quad i \quad 2i = 3t_3 + 4t_4 + \cdots ,$$

pa je

$$2i \geq 3(t_3 + t_4 + \cdots),$$

tj $2i \geq 3t$.
Zamenjujući p iz Ojlerove teoreme u nejednakost $2i \geq 3p$ nalazimo da je

$$2i \geq 3(i - t + 2),$$

pa je

$$3t \geq i + 6 \quad i \quad 6t - 12 \geq 2i.$$

Zamenjujući t iz Ojlerove teoreme u nejednekost $2i \geq 3t$ nalazimo da je

$$2i \geq 3(i - p + 2),$$

pa je

$$3p \geq i + 6 \quad i \quad 6t - 12 \geq 2i.$$

Zadatak 97: Dokazati da ne postoji poliedarska površ nultog roda kojoj svaka pljosan ima više od pet stranica, zatim da ne postoji poliedarska površ nultog roda kod koje se u svakom temenu sustiče više od pet ivica.

Dokaz: Naprotiv, pretpostavimo da postoji poliedarska površ ω nultog roda kod koje svaka pljosan ima više od pet stranica. Ako sa $p_6, p_7, \ldots$ obeležimo broj šestrostranih, sedmostranih, ... pljosni biće

$$p = p_6 + p_7 + \cdots \quad i \quad 2i = 6p_6 + 7p_7 + \cdots .$$

Otuda je

$$2i \geq 6(p_6 + p_7 + \cdots),$$

tj. $2i \geq 6p$. Dobijena nejednakost protivrečna je sa nejednakosti $2i \leq 6t - 12$ iz prethodnog zadatka, stoga ne postoji poliedarska površ kod koje svaka pljosan ima više od pet stranica.
Drugi deo stava dokažimo analognim postupkom. Zato pretpostavimo da postoji poliedarska površ ω nultog roda kod kojeg se u svakom temenu sustiče više od pet ivica. Ako sa $t_6, t_7, \ldots$ obeležimo broj temena u kojima se sustiče šest, sedam, ... ivica biće

$$t = t_6 + t_7 + \cdots \quad i \quad 2i = 6t_6 + 7t_7 + \cdots .$$

Otuda je

$$2i \geq 6(t_6 + t_7 + \cdots),$$

tj. $2i \geq 6t$. Dobijena nejednakost protivrečna je sa nejednakosti $2i \leq 6t - 12$, stoga ne postoji poliedarska površ kod koje se u svakom temenu sustiče više od pet ivica.

Zadatak 98: Dokazati da kod poliedarske površi nultog roda bar jedna pljosan mora biti trostrana ili bar jedan njen rogalj mora biti triedar.

Dokaz: Naprotiv, pretpostavimo da poliedarska površ ω nultog roda nema trostranih pljosni, niti trostranih rogljeva. Ako sa p, i, t obeležimo broj pljosni, ivica, temena (rogljeva) površi ω, sa $p_4, p_5, \ldots$ broj četvorostranih, petostranih, ... pljosni i sa $t_4, t_5, \ldots$ broj četvorostranih, petostranih, ... rogljeva, biće

$$p = p_4 + p_5 + \cdots \quad i \quad 2i = 4p_4 + 5p_5 + \cdots ,$$

$$t = t_4 + t_5 + \cdots \quad i \quad 2i = 4t_4 + 5t_5 + \cdots .$$

Otuda je

$$2i \geq 4(p_4 + p_5 + \cdots) \quad i \quad 2i \geq 4(t_4 + t_5 + \cdots),$$

tj $2i \geq 4p$ i $2i \geq 4t$. Sabiranjem odgovarajućih strana dobijenih dveju nejednakosti nalazimo da je $t + p \leq i$. Ova nejednakost protivrečna je Ojlerovoj teoremi koja se odnosi na poliedarske površi nultog roda, prema tome ne postoji poliedarska površ nultog roda koja nema trostranih pljosni i trostranih rogljeva.

Zadatak 99: Dokazati da zbir broja trostranih pljosni i broja triedara poliedarske površi nultog roda ne može biti manji od osam.

Dokaz: Ako sa p, i, t obeležimo broj pljosni, ivica, temena (rogljeva) poliedarske površi ω nultog roda, sa $p_3, p_4, \ldots$ broj trostranih, četvorostranih, ... pljosni i sa $t_3, t_4, \ldots$ broj trostranih, četvorostranih, ... rogljeva, biće

$$p = p_3 + p_4 + p_5 + \cdots . \tag{1}$$

$$t = t_3 + t_4 + t_5 + \cdots . \tag{2}$$

$$2i = 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + \cdots . \tag{3}$$

$$2i = 3t_3 + 4t_4 + 5t_5 + \cdots . \tag{4}$$

Množenjem Ojlerovog obrasca $t+p = i+2$ sa 2 i zamenom obrazaca (1), (2), (3) nalazimo da je

$$2(t_3 + t_4 + \cdots) + 2(p_3 + p_4 + \cdots) = 3p_3 + 4p_4 + \cdots + 4, \tag{5}$$

tj. da je

$$2(t_3 + t_4 + \cdots) = 4 + p_3 + 2p_4 + 3p_5 + \cdots . \tag{6}$$

Isto tako, množenjem Ojlerovog obrasca $t + p = i + 2$ sa 2 i zamenom obrazca (1), (2), (4) nalazimo da je

$$2(t_3 + t_4 + \cdots) + 2(p_3 + p_4 + \cdots) = 3t_3 + 4t_4 + \cdots + 4,$$

tj. da je

$$2(p_3 + p_4 + \cdots) = 4 + t_3 + 2t_4 + 3t_5 + \cdots \tag{6}$$

Sabiranjem odgovarajućih strana jednakosti (5) i (6) dobijamo da je

$$t_3 + p_3 = 8 + (t_5 + p_5) + 2(t_6 + p_6) + \cdots ,$$

odakle neposredno sledi da je $t_3 + p_3 \geq 8$.

Zadatak 100: Dokazati da zbir četvorostrukog broja trostranih pljosni, dvostrukog broja četvorostranih pljosni i broja trostranih rogljeva poliedarske površi ω nultog roda ne može biti manji od dvadeset.

Dokaz: Ako obeležimo sa $p_3, p_4, \ldots$ broj trostranih, četvorostranih, ... pljosni i sa $t_3, t_4, \ldots$ broj trostranih, četvorostranih, ... rogljeva površi ω, prema obrascima (5) i (6) iz prethodnog zadatka, biće

$$2(t_3 + t_4 + \cdots) = 4 + p_3 + 2p_4 + 3p_5 + \cdots . \tag{1}$$

$$2(p_3 + p_4 + \cdots) = 4 + t_3 + 2t_4 + 3t_5 + \cdots . \tag{2}$$

Množenjem obeju strana obrasca (1) sa dva, a obrasca (2) sa tri, zatim sabiranjem dobijenih jednakosti nalazimo da je

$$4p_3 + 2p_4 + t_3 = 20 + 2t_4 + 5p_5 + \cdots + 2p_6 + 4p_7 + \cdots ,$$

otuda je $4p_3 + 2p_4 + t_3 \geq 20$.

Zadatak 101: Dokazati da poliedarska površ ω nultog roda koja nema trostranih i četvorostranih pljosni ima najmanje 20 trostranih rogljeva.

Dokaz: Ako sa p_3 i p_4 obeležimo broj trostranih i četvorostranih pljosni, a sa t_3 broj trostranih rogljeva površi ω, prema prethodnom zadatku, biće $4p_3+2p_4+t_3 \geq 20$. Kako je $p_3 = 0$ i $p_4 = 0$, biće $t_3 \geq 20$.

Zadatak 102: Dokazati da zbir četvorostrukog broja trostranih rogljeva, dvostrukog broja četvorostranih rogljeva i broja trostranih pljosni poliedarske površi ω nultog roda ne može biti manji od dvadeset.

Dokaz: Ako obeležimo sa p_3,p_4,... broj trostranih, četvorostranih,... pljosni, a sa t_3,t_4,... broj trostranih, četvorostranih,... rogljeva, prema obrascima (5) i (6) iz zadatka 99, biće

$$2(t_3 + t_4 + ...) = 4 + p_3 + 2p_4 + 3p_5 + \ldots \quad ,$$

$$2(p_3 + p_4 + ...) = 4 + t_3 + 2t_4 + 3t_5 + \ldots \quad .$$

Množenjem obeju strana prve od ovih jednakosti sa tri, a druge sa dva, zatim sabiranjem dobijenih jednakosti nalazimo da je

$$4t_3 + 2t_4 + p_3 = 20 + 2p_4 + 5p_5 + \cdots + 2t_6 + 4t_7 + \ldots \quad .$$

Otuda je $4t_3 + 2t_4 + p_3 \geqslant 20$.

Zadatak 103: Dokazati da poliedarska površ ω nultog roda koja nema trostranih i četvorostranih rogljeva ima najmanje 20 trostranih pljosni.

Dokaz: Ako obeležimo sa t_3 i t_4 broj trostranih i četvorostranih rogljeva, a sa p_3 broj trostranih pljosni površi ω, prema prethodnom zadatku, biće $4t_3 + 2t_4 + p_3 \geqslant 20$. Kako je $t_3 = 0$ i $t_4 = 0$, biće $p_3 \geqslant 20$.

Zadatak 104: Dokazati da zbir trostrukog broja trostranih pljosni, dvostrukog broja četvorostranih pljosni i broja petostranih pljosni jednostruko povezane poliedarske površi ω ne može biti manji od dvanaest.

Dokaz. Ako sa t, i, p obeležimo broj temena, ivica i pljosni površi ω, a sa p_3, p_4,... broj trostranih, četvorostranih,... pljosni površi ω, biće

$$p = p_3 + p_4 + \dots, \tag{1}$$

$$2i = 3p_3 + 4p_4 + \dots \quad . \tag{2}$$

Zamenom vrednosti za i i p iz ovih jednakosti u Ojlerov obrazac $t = i - p + 2$ nalazimo da je

$$t = \frac{1}{2}\,(3p_3 + 4p_4 + \dots) - (p_3 + p_4 + \dots) + 2 \dots \quad . \tag{3}$$

Prema zadatku 96. je $2i \geqslant 3t$, pa se zamenom i i t odgovarajućim vrednostima iz (2) i (3) dobija da je

$$3p_3 + 4p_4 + \dots \geqslant \frac{3}{2}\,(3p_3 + 4p_4 + \dots) - 3(p_3 + p_4 + \dots) + 6,$$

tj.

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 - p_7 - 2p_8 - 3p_3 - \dots \geqslant 12.$$

Otuda je $3p_3 + 2p_4 + p_3 \geqslant 12$.

Zadatak 105: Dokazati da jednostruko povezana poliedarska površ ω:

a) koja nema četvorostranih i petostranih pljosni ima bar četiri trostrane pljosni;

b) koja nema trostranih i petostranih pljosni ima bar šest četvorostranih pljosni;

c) koja nema trostranih i četvorostranih pljosni ima bar dvanaest petostranih pljosni.

Dokaz: Ako sa p_3, p_4, p_5 obeležimo broj trostranih, četvorostranih i petostranih pljosni površi ω, prema prethodnom zadatku, biće

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 \geqslant 12.$$

a) Ako je $p_4 = 0$ i $p_5 = 0$, biće $3p_3 \geqslant 12$, pa je $p_3 \geqslant 4$.

b) Ako je $p_3 = 0$ i $p_5 = 0$, biće $2p_4 \geqslant 12$, pa je $p_4 \geqslant 6$.

c) Ako je $p_3 = 0$ i $p_4 = 0$, biće $p_5 \geqslant 12$.

Zadatak 106: Dokazati da zbir trostrukog broja trostranih rogljeva, dvostrukog broja četvorostranih rogljeva i broja petostranih rogljeva jednostruko povezane poliedarske površi ω ne može biti manji od dvanaest.

Dokaz: Ako sa t, i, p obeležimo broj temena, ivica i pljosni površi ω, sa t_3,t_4,... broj trostranih, četvorostranih,... rogljeva površi ω, biće

$$t = t_3 + t_4 + t_5 + \dots \tag{1}$$

i

$$2i = 3t_3 + 4t_4 + 5t_5 + \dots \quad . \tag{2}$$

Zamenom vrednosti za i i t iz ovih jednakosti u Ojlerov obrazac $p = i - t + 2$ nalazimo da je

$$p = \frac{1}{2}\,(3t_3 + 4t_4 + \dots) - (t_3 + t_4 + \dots) + 2 \quad . \tag{3}$$

Prema zadatku 96. je $2i \geqslant 3p$, pa se zamenom i i p odgovarajućim vrednostima iz (2) i (3) dobija da je

$$(3t_3 + 4t_4 + \dots) \geqslant \frac{3}{2}\,(3t_3 + 4t_4 + \dots) - 3(t_3 + t_4 + \dots) + 6,$$

tj.

$$3t_3 + 2t_4 + t_5 - t_7 - 2t_8 - 3t_9 - \dots \geqslant 12.$$

Otuda je $3t_3 + 2t_4 + t_5 \geqslant 12$.

Zadatak 107: Dokazati da jednostruko povezana poliedarska površ ω:

a) koja nema četvorostranih i petostranih rogljeva ima bar četiri trostrana roglja;

b) koja nema trostranih i petostranih rogljeva ima bar šest četvorostranih rogljeva;

c) koja nema trostranih i četvorostranih rogljeva ima bar dvanaest petostranih rogljeva.

Dokaz: Ako sa t_3, t_4, t_5 obeležimo broj trostranih, četvorostranih i petostranih rogljeva površi ω, prema prethodnom zadatku, biće

$$3t_3 + 2t_4 + t_5 \geqslant 12.$$

a) Ako je $t_4 = 0$ i $t_5 = 0$, biće $3t_3 \geqslant 12$, pa je $t_3 \geqslant 4$.

b) Ako je $t_3 = 0$ i $t_5 = 0$, biće $2t_4 \geqslant 12$, pa je $t_4 \geqslant 6$.

c) Ako je $t_3 = 0$ i $t_4 = 0$, biće $t_6 \geqslant 12$.

Zadatak 108: Dokazati da je zbir S unutrašnjih uglova svih pljosni poliedarske površi ω nultog roda koja ima t temena, jednak dvostrukom zbiru unutrašnjih uglova prostog ravnog poligona koji takođe ima t temena, tj. da je $S = 4R(t-2)$, gde je R prav ugao.

Dokaz: Ako sa i i p obeležimo broj ivica i pljosni površi ω, sa p_3,p_4,... broj trostranih, četvorostranih,... pljosni, biće

$$S = 2R(3-2)p_3 + 2R(4-2)p_4 + 2R(5-2)p_5 + \dots,$$

tj.

$$S = 2R(3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + \dots) - 4R(p_3 + p_4 + p_5 + \dots).$$

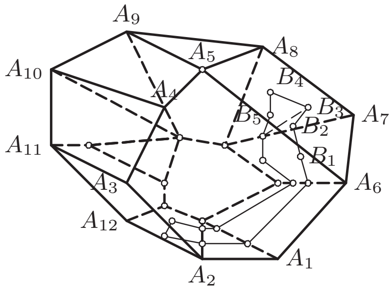
Zbir u prvoj zagradi jednak je dvostrukom broju ivica površi ω, a zbir u drugoj zagradi jednak je zbiru pljosni površi ω, pa je $S = 4iR - 4pR$, tj. $S = 4R(i-p)$. Prema Ojlerovoj teoremi za poliedarske površi nultog roda je $i - p = t - 2$, stoga je $S = 4(t-2)$.

Definicija: Defektom konveksnog n-tostranog roglja nazivamo razliku između zbira četiri prava ugla i zbira ivičnih uglova tog roglja. Ako obeležimo sa $def0$ defekt i sa S zbir ivičnih uglova konveksnog n-tostranog roglja $0a_1 \dots a_n$, a sa R prav ugao, biće $def0 = 4R - S$.

Zadatak 109: Na konveksnoj poliedarskoj površi ω sa temenima $A_1, ..., A_n$ konstruisan je prost m-tougao $B_1, ..., B_m$. Taj m-tougao razlaže površ ω na dve površi, neka je λ jedna od njih. Dokazati da je zbir S svih unutrašnjih uglova na rubu površi λ jednak zbiru unutrašnjih uglova prostog ravnog poligona koji ima m temena uvećanim za zbir defekata onih k rogljeva $A_1, ..., A_k$ površi ω koji se nalaze na površi λ, tj. da je

$$S = (m-2)2R + \sum_{\nu=1}^{k} def A_\nu$$

(Gaus-Boneova teorema za poliedarske površi).

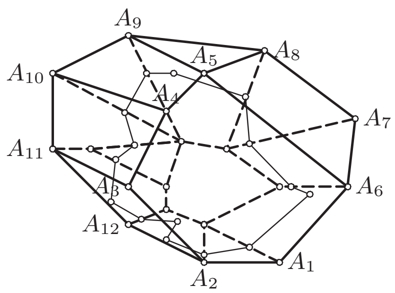


Slika 1 uz zadatak 109

Dokaz: Primenimo metod matematičke indukcije s obzirom na broj rogljeva površi ω koji se nalaze na površi λ. Najpre pretpostavimo da se ni jedno ni drugo teme površi ω ne nalazi na površi λ. U tom slucaju poligon $B_1, ...B_m$ pipada jednoj, dvema, ili više pljosni površi ω. Ako pripada jednoj pljosni površi ω, dokaz sledi neposredno. Ako pripada dvema ili više pljosni (vidi sliku), dijagonale tog m-tougla p koje se nalaze na ivicama površi ω razlažu površ λ na $l+1$ poligonskih površi $\lambda_1, ..., \lambda_{l+1}$, gde je l broj dijagonala površi λ koje se nalaze na ivicama površi ω. Ako sa $m_1, ..., m_{l+1}$ obeležimo broj stranica respektivno poligonskih površi $\lambda_1, ..., \lambda_{l+1}$, biće $m_1 + ... + m_{l+1} = m + 2l$. Zbir S svih unutrašnjih uglova na rubu površi λ jednak je zbiru unutrašnjih uglova svih l+1 poligonskih površi $\lambda_1, ..., \lambda_{l+1}$, pa je

$$\begin{aligned} S &= (m_1 - 2)2R + (m_2 - 2)2R + ... + (m_{l+1} - 2)2R \\ &= (m_1 + ... + m_{l+1})2R - (l+1)4R \\ &= (m + 2l)2R - (l+1)4R = (m-2)2R \end{aligned}$$

Pretpostavimo sad da je teorema istinita za slučaj kada površ λ sadrži $k - l$ temena površi ω. Dokažimo da je ona tačka i u slučaju kad površ λ sadrži k temena $A_1, ..., A_k$ površi ω. Neka rogalj A_k površi ω ima l ivica, dakle i l pljosni. Obeležimo sa q poligon na površi λ čija su temena $C_1, ..., C_i$ na ivicama roglja A_k. Taj poligon razlaže površ λ na dve površi λ_l i λ_l'; neka je λ_l ona od tih površi koja sadrži teme A_k.



Slika 2 uz zadatak 109

Spojimo jedno teme poligona p s jednim temenom poligona q dvema prostim poligonskim linijama koje se nalaze na površi λ_j', koje među sobom nemaju zajedničkih tačaka sem što imaju zajedničke krugove, koje nemaju s rubom površi λ_l' zajedničkih tačaka sem što su im krajevi na njenom rubu, i koje ne sadrže ni jedno teme a seku iste ivice površi ω. Iz tih pretostavki sledi da te dve poligonske linije određuju jedan poligon v koji ima, recimo, j stranica, i koji razlaže površ λ_1' na dve površi λ_2 i λ_3; naka je λ_2 ona od tih površi kojoj je rub r. Na taj način površ λ razložena je poligonima q i r na tri površi λ_1, λ_2 i λ_3. Prva od njih ima i stranica, druga j stranica, a treća $m + i + j$ stranica. Površ λ_3 sadrži $k - l$ temena površi ω. Da bi smo odredili zbir S unutrašnjih uglova na rubu površi λ, potrebno je od zbira unutrašnjih uglova na rubovima svih površi λ_1,

λ_2, λ_3 oduzeti $i + j - 2$ punih uglova. Ako obeležimo sa S_1, S_2, S_3 zbirove unutrašnjih uglova na rubovima površi λ_1, λ_2, λ_3 biće

$$\begin{aligned}
S_1 &= (i-2)2R + def A_k \\
S_2 &= (j-2)2R \\
S_3 &= (m+i+j-2)2R + def A_1 + ... + def A_{k-1}
\end{aligned}$$

Otuda je

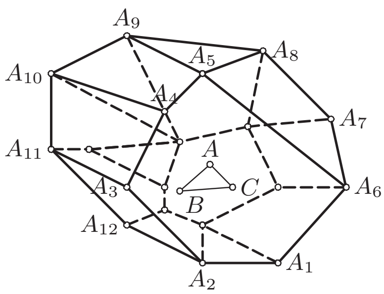
$$\begin{aligned}
S &= S_1 + S_2 + S_3 - (i+j-2)4R \\
&= (i-2)2R + (j-2)2R + (m+i+j-2)2R - (i+j-2)4R + def A_1 + \\
&\quad + ... + def A_k
\end{aligned}$$

i prema tome

$$S = (m-2)2R + def A_1 + ... + def A_k.$$

Zadatak 110: Dokazati da je zbir defekata svih rogljeva konveksne poliedarske površi s bilo kojim brojem temena jednak zbiru osam pravih uglova.

Dokaz: Prvi način. Neka su $A_1, ..., A_n$ temena konveksne poliedarske površi ω, a A, B, C temena proizvoljnog trougla koji se nalazi na jednoj pljosni površi ω.



Slika uz zadatak 110

Trougao ABC razlaže površ ω na dve površi ω_1 i ω_2, od kojih je jedna, npr. ω_1, trougaona površ (ABC). Ta trougaona prvrš ω_1 ne sadrži ni jedno teme površi ω, dok površ ω_2 sadrži sva njegova temena $A_1, ..., A_n$. Ako obeležimo sa S_1 zbir unutrašnjih uglova površi ω_1, a sa S_2 zbir unutrašnjih uglova na rubu površi ω_2, prema prethodnom zadatku, imamo da je

$$S_1 = 2R$$

i

$$S_2 = 2R + def A_1 + ... + def A_n$$

gde je R prav ugao. S obzirom da je zbir unutrašnjih uglova na rubovima obeju površi ω_1 i ω_2 jednak $3 \cdot 4R$, biće

$$S_1 + S_2 = 12R,$$

tj. da je

$$2R + 2R + def A_1 + ... + def A_n = 12R.$$

Otuda je

$$def A_1 + ... + def A_n = 8R.$$

Drugi način. Obeležimo sa S_ν za $\nu = 1, ..., n$ zbirove ivičnih uglova kod roglja A_ν konveksne poliedarske površi ω koja ima n temena $A_1, ..., A_n$. S obzirom da je poliedarska površ ω konveksna, svaki njen rogalj A je konveksan, pa je $S_\nu + def A_\nu = 4R$, gde je R prav ugao. Stoga je

$$\sum_{\nu=1}^{n} S_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} def A_\nu = 4nR,$$

tj.

$$\sum_{\nu=1}^{n} def A_\nu = 4nR - \sum_{\nu=1}^{n} S_\nu.$$

Prema poznatom stavu, zbir svih ivičnih uglova konveksne poliedarske površi koja ima n temena iznosi

$$\sum_{\nu=1}^{n} S_\nu = 4R(n-2).$$

Otuda je

$$\sum_{\nu=1}^{n} def A_\nu = 4nR - 4R(n-2) = 8R.$$

Definicija: Za poliedar kažemo da je topološki pravilan, ako:

a) svaka njegova pljosan ima isti broj stranica, i

b) svaki njegov rogalj ima isti broj ivica.

Zadatak 111: Dokazati da postoji samo pet vrsta topološki pravilnih poliedara.

Dokaz. Da bismo ispisali koje vrste topološki pravilnih poliedara postoje, analizirajmo postupno poliedre kod kojih su sve pljosni trougaone površi, zatim četvorougaone, itd. U tom cilju obeležimo sa t, i, p broj temena, ivica i pjlosni takvog poliedra. Ako su sve pljosni topološki pravilnog poliedra trougaone površi, biće

$$2i = 3p \tag{1}$$

a prema Ojlerovoj teoremi $t - i + p = 2$, pa je

$$p = 2t - 4 \tag{2}$$

1. Ako se u svakom temenu takvog poliedra sustiču po tri ivice, biće

   $$p = t \tag{3}$$

   Iz (1), (2) i (3) nalazimo da je $t = 4$, $i = 6$, $p = 4$. Takav topološki pravilan poliedar nazivamo tetraedar.

2. Ako se u svakom temenu takvog poliedra sustiču po četri ivice, biće

   $$4t = 3p \tag{4}$$

   Iz (1), (2) i (4) nalazimo da je $t = 6$, $i = 12$, $p = 8$. Takav topološki pravilan poliedar nazivamo oktaedar.

3. Ako se u svakom temenu takvog poliedra sustiču po pet ivica, biće

   $$5t = 3p \tag{5}$$

   Iz (1), (2) i (5) nalazimo da je $t = 12$, $i = 30$, $p = 20$. Takav topološki pravilan poliedar nazivamo ikosaedar.

Ne postoji topološki pravilan poliedar kome su sve pljosni trougaone površi, pri čemu se u svakom njegovom temenu sustiče više od pet ivica. Zaista, ako bi takav poliedar postojao, bilo bi $6t \leq 3p$, tj. $p \geq 2t$, što je protivrečno obrascu (2). Ako su sve pljosni topološki pravilnog poliedra četvorougaone površi, biće

$$2i = 4p \tag{6}$$

a prema Ojlerovoj teoremi $t - i + p = 2$, pa je

$$p = t - 2 \tag{7}$$

Pretpostavimo li da se u svakom temenu takvog poliedra sustiču po tri ivice, biće

$$3t = 4p \tag{8}$$

Iz (6), (7) i (8) nalazimo da je $t = 8$, $i = 12$, $p = 6$. Takav topološki pravilan poliedar nazivamo heksaedar.
Ne postoji topološki pravilan poliedar kome su sve pljosni četvorougaone površi, pri čemu se u svakom njegovom temenu sustiče više od tri ivice. Zaista, ako bi takav poliedar postojao, bilo bi $4t \leq 4p$, tj. $p \geq t$, što je protivrečno obrascu (7). Ako su sve pljosni topološki pravilnog poliedra petougaone površi, biće

$$2i = 5p \tag{9}$$

a prema Ojlerovoj teoremi $t-i+p=2$, pa je

$$3p = 2t - 4 \tag{10}$$

Pretpostavimo li da se u svakom temenu takvog poliedra sustiču po tri ivice, biće

$$3t = 5p \tag{11}$$

Iz (9), (10) i (11) nalazimo da je $t=20$, $i=30$, $p=12$. Takav topološki pravilan poliedar nazivamo dodekaedar.
Ne postoji topološki pravilan poliedar kome su sve pljosni petougaone površi, pri čemu se u svakom njegovom temenu sustice više od tri ivice. Zaista, ako bi takav poliedar postojao, bilo bi $4t \leq 5p$, tj. $p \geq \frac{4}{3}t$, što je protivrečno obrascu (10).
Najzad, dokažimo da ne postoji topološki pravilan poliedar kome su sve pljosni n-tougaone površi, gde je $n \geq 6$. Ako bi takav poliedar postojao, bilo bi $2i = np$, a prema Ojlerovoj teoremi $t-i+p=2$, pa je

$$t - \frac{n}{2}p + p = 2 \tag{12}$$

Kako se ni u jednom temenu poliedra ne može susticati manje od tri ivice, biće $3t \leq np$, pa je prema (12)

$$\frac{n}{3}p - \frac{n}{2}p + p \geq 2,$$

tj.

$$(1 - \frac{n}{6})p \geq 2.$$

Otuda je

$$1 - \frac{n}{6} > 0,$$

tj. $n < 6$, što je protivrečno pretpostavaci . Time je stav dokazan.

Napomena: Za razliku od topološki pravilnih poliedara postoje metrički pravilni poliedri kod kojih su

a) Sve pljosni pravilne,

b) Svi roglji pravilni.

Zadatak 112: Dokazati da postoji devet vrsta pravilnih poliedara, od kojih pet konveksnih i četiri konkavna.

Dokaz: Postojanje pet vrsta konveksnih pravilnih poliedara ne navodimo jer se isti nalaze u postojećem udžbeniku euklidske geometrije. Navodimo skraćeni dokaz postojanja četiri tipa konkavnih pravilnih poliedara.

1° Produžene susedne pljosni nekoj pljosni konveksnog pravilnog dodekaedra seku se u jednoj tački određujući pritom pravilan tetarni rogalj. Ako se ti rogljevi ignorišu za sve pljosni na taj poliedar koji ima 12 temena, 30 ivica i 12 pljosni. Temena tog poliedra pravilni zvezdasti petougli.

2° Produžene ne susedne i ne podudarne pljosni jednoj pljosni konveksnog pravilnog dodekaedra seku ravan te pljosni po pravama koje određuju konveksan pravilan petougao. Ako se za sve pljosni konstruišu ti petougli dobija se poliedar koji takođe ima 12 temena, 30 ivica i 12 pljosni. Njegove pljosni su konveksni pravilni tetraedri, a njegova temena vrhovi zvezdastih pravilnih rogljeva.

3° Produžene ne susedne i ne paralelne pljosni jednoj pljosni konveksnog pravilnog dodekaedra seku ravan te pljosni po pravama koje određuju zvezdasti pravilan petougao. Ako se za sve pljosni konstruišu takvi petougli nastaje poliedar koji ima 20 temena, 30 ivica i 12 pljosni. Temena od vrhova konveksnih pravilnih triedara, a pljosni su zvezdasti pravilni petougli.

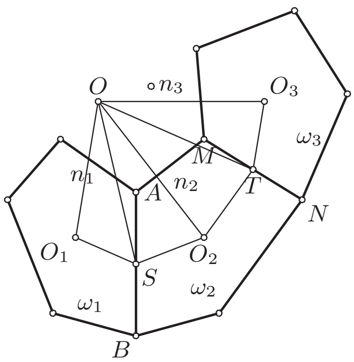
4° Produžene susedne pljosni jednoj pljosni i konveksnog pravilnog ikosaedra seku ravan pljosni koja je naspram pljosni i po pravama koje određuju jednaki granični trouglovi. Ako se za sve pljosni konstruišu takvi trouglovi nastaje poliedar koji ima 12 temena, 30 ivica i 20 pljosni. Njegove pljosni su pravilni trouglovi, a temena vrhovi zvezdastih pravilnih desetostranih rogljeva.

<u>Zadatak 113:</u> Dokazati da kod svakog pravilnog poliedra $\prod$ postoji sfera koja

a) sadrži sva njegova temena;

b) dodiruje sve njegove ivice;

c) dodiruje sve njegove pljosni.



Slika uz zadatak 113

<u>Dokaz:</u> Obeležimo sa O_1 i O_2 središta dveju susednih pljosni ω_1 i ω_2 bilo kojeg pravilnog poliedra Π, a sa n_1 i n_2 prave kroz O_1 i O_2 upravne na pljosnima ω_1 i ω_2. Tačke prave n_1 jednako su udaljene od temena površi ω_1, pa je prava n_1 presek simetralnih ravni stranica površi ω_1. Isto tako, tačke prave n_2 jednako su udaljene od temena površi ω_2, pa je prava n_2 presek simetralnih ravni stranica površi ω_2. Otuda sleduje da obe

prave n_1 i n_2 pripadaju simetralnoj ravni zajedničke stranice AB pljosni ω_1 i ω_2. S obzirom da su prave n_1 i n_2 u istoj ravni, a upravne na ravnima pljosni ω_1 i ω_2 koje se seku, i prave n_1 i n_2 se seku u nekoj tački O. Sad dokažimo da su prave određene tačkom O i središtima ostalih pljosni upravne na tim pljosnima. Obeležimo sa O_3 središte pljosni ω_3 koja je susedna bar sa jednom od pljosni ω_1 i ω_2, npr. pljosni ω_2. Ako je S središte zajedničke stranice AB pljosni ω_1 i ω_2, a T središte zajedničke stranice MN pljosni ω_2 i ω_3, biće uglovi O_1SO_2 i O_2TO_3 jednakih diedara koji odgovaraju ivicama AB i MN poliedra Π među sobom jednaki. S obzirom da je ugao OTO_2 deo ugla O_2TO_3 i

$$\angle OTO_2 = \angle OSO_2 = \frac{1}{2}\angle O_1SO_2 = \frac{1}{2}\angle O_2SO_3,$$

biće

$$\angle OTO_2 = \angle OTO_3.$$

Iz

$$OT = OT,\ TO_2 = TO_3\ i\ \angle OTO_2 = \angle OTO_3$$

sledi da je

$$\triangle OTO_2 \cong \triangle OTO_3,$$

pa je

$$OO_2 = OO_3 \quad i \quad \angle OO_2T = \angle OO_3T,$$

a iz

$$OM = MO,\ MO_2 = MO_3\ i\ OO_2 = OO_3$$

sledi da je

$$\triangle OMO_2 \cong \triangle OMO_3,$$

pa je

$$\angle OO_2M = \angle OO_3M.$$

Kako su uglovi OO_2T i OO_2M pravi, i njima jednaki uglovi OO_3T i OO_3M takođe su pravi. Otud sledi da je prava n_3 određena tačkama O i O_3 upravna u tački O_3 na dvema dužima O_3T i O_3M pljosni ω_3, pa je prava n_3 u tački O_3 upravna na pljosni ω_3. Istim postupkom dokazuje se da je prava određena tačkom O i središte najmanje jedne pljosni upravna na toj pljosni, itd. Otud zaključujemo da se prave kroz središte pljosni pravilnog poliedra Π upravne na tim pljosnima seku u jednoj tački O.

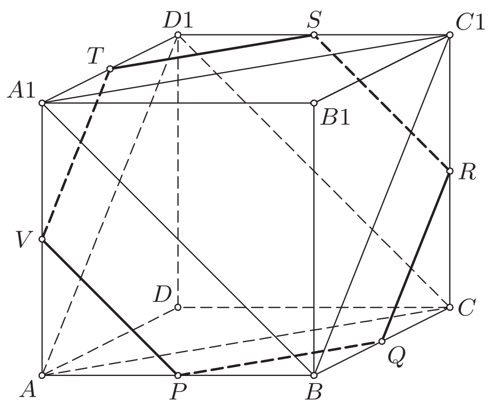
a) S obzirom da je tačka O na pravoj n_1 koja je u tački O_1 upravna na pljosni ω_1, ona je jednako udaljena od svih temena pljosni ω_1. Isto tako, tačka O je na pravoj n_2 koja je u tački O_2 upravna na pljosni ω_2 pa je tačka O jednako udaljena od svih temena pljosni ω_2. Po pretpostavci pljosni ω_1 i ω_2 su susedne, pa je tačka O jednako udaljena od svih temena obeju pljosni ω_1 i ω_2. Istim postupkom dokazuje se da je tačka jednako udaljena od svih temena susednih pljosni ω_2 i ω_3, itd. Otud sleduje da je tačka O jednako udaljena od temena svih pljosni poliedra Π, prema tome, postoji sfera λ kojoj je središte O, a koja sadrži sva temena poliedra Π. Sfera λ je opisana oko poliedra Π.

b) S obzirom da je tačka O na pravoj n_1 koja je u tački O_1 upravna na pljosni ω_1, tačka O je jednako udaljena od svih stranica pljosni ω_1. Isto tako, tačka O je na pravoj n_2 koja je u tački O_2 upravna na pljosni ω_2 pa je ona jednako udaljena od svih stranica pljosni ω_2. Po pretpostavci su pljosni ω_1 i ω_2 susedne, pa je tačka O jednako udaljena od svih stranica obeju pljosni ω_1 i ω_2. Istim postupkom dokazuje se da je tačka jednako udaljena od svih stranica susednih pljosni ω_2 i ω_3, itd. Otud dokazujemo da je tačka O jednako udaljena od svih ivica poliedra Π. Prema tome, postoji sfera λ_1 kojoj je središte O i koja dodiruje sve ivice poliedra Π. Sfera λ_1 zove se poluopisana sfera pravilnog poliedra Π.

c) Tačka O jednako je udaljena i od svih pljosni poliedra Π, prema tome, postoji sfera λ_2 kojoj je središte O a koja dodiruje sve pljosni poliedra Π. Ta sfera je upisana u poliedar Π.

Zadatak 114: Dokazati da se kocka može preseći sa ravni tako da presek bude pravilan šestougao.

Dokaz: Ravni ACD_1 i BA_1C_1 određene temenima kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (v.sliku) uporedne su među sobom, pa su središta P, Q, R, S, T, V, ivica AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1, A_1A tačke izvesne ravni Π. S obzirom da su duži PQ, QR, RS, ST, TV, VP preseci ravni Π s pljosnima kocke, šestougao $PQRSTV$ je presek ravni Π sa tom kockom. Stranice tog šestougla su srednje linije koje odgovaraju osnovicama podudarnih jednakokrakih trouglova BAC, CBC_1, C_1CD_1, $D_1C_1A_1$, A_1D_1A, AA_1B, prema tome, one su među sobom jednake.

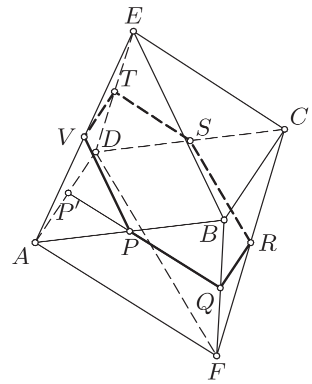


Slika uz zadatak 114

Unutrašnji uglovi šestougla $PQRSTV$ suplementni su unutrašnjim uglovima jednakostraničnog trougla BA_1C_1, dakle među sobom jednaki. Otuda sleduje da je šestougao $PQRSTV$ pravilan. Ravan Π odgovara naspramnim temenima D i B_1, ona sadrži središte dijagonale DB_1 i uporedna je na njoj. S obzirom da za svaki par naspramnih temena kocke postoji jedna takva ravan, postoje četiri koje seku kocku po pravilnim šestouglovima.

Zadatak 115: Dokazati da se pravilan oktaedar može preseći s ravni tako da presek bude pravilan šestougao.

Dokaz: Naspramne pljosni BCE i ADF pravilnog oktaedra $ABCDEF$ među sobom su uporedne, pa su središta P, Q, R, S, T, V ivica AB, BF, FC, CD, DE, EA tačke izvesne ravni π. S obzirom da su duži PQ, QR, RS, ST, TV, VP preseci ravni π s pljosnima ABF, BCF, CDF, SDE, DAE, ABE, šestougao $PQRSTV$ je presek ravni π s oktaedrom $ABCDEF$.



Slika uz zadatak 115

Stranice tog šestougla su srednje linije podudarnih jednakostraničnih trouglova, pa su među sobom jednake. Kraci spoljašnjeg ugla $\angle VPP\prime$ tog šestougla su istosmerni sa kracima ugla $\angle DEA$ pa je ugao

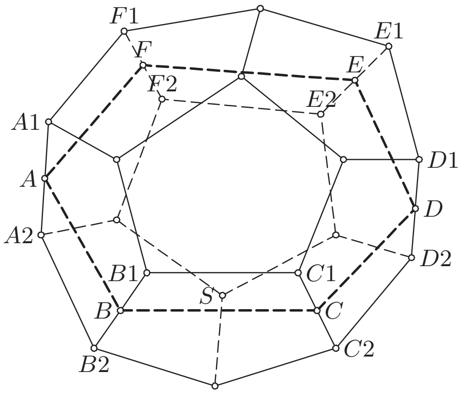
$$\angle VPP' = \angle DFA = \frac{2}{3} \cdot L,$$

gde je L prav ugao. Stoga je $\angle VPQ = \frac{4}{3} \cdot L$. Na isti način dokazuje se da su i ostali uglovi tog šestougla $PQRSTV$ jednaki uglu $\frac{4}{3} \cdot L$, pa su i svi unutrašnji uglovi tog šestougla među sobom jednaki. Otuda sledi da je šestougao $PQRSTV$ pravilan. Prema tome, ravan π seče pravilan oktaedar $ABCDEF$ po pravilnom šestouglu. S obzirom da za svaki par naspramnih pljosni oktaedra postoji jedna takva ravan, postoje četiri ravni koje seku pravilan oktaedar po pravilnim šestouglovima.

Zadatak 116: Dokazati da se pravilan dodekaedar može preseći s ravni tako da presek bude pravilan šestougao.

Dokaz: Neka su P_1 i P_2 dva naspramna temena pravilnog dodekaedra (videti sliku 116.). Tri petougaone pljosni tog dodekaedra koje se sustiču u temenu P_1 čine izvesnu otvorenu poliedarsku površ ω_1, one tri pljosni koje se sustiču u temenu P_2 čine izvesnu otvorenu poliedarsku površ ω_2, ostalih šest pljosni dodekaedra čine izvesnu otvorenu poliedarsku površ ω_3. Ivice površi ω_3 koje ne pripadaju rubu obeležavamo redom sa:

A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2, E_1E_2, F_1F_2, pri čemu su tačke A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 na rubu površi ω_1, a tačke A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2 na rubu površi ω_2.



Slika uz zadatak 116

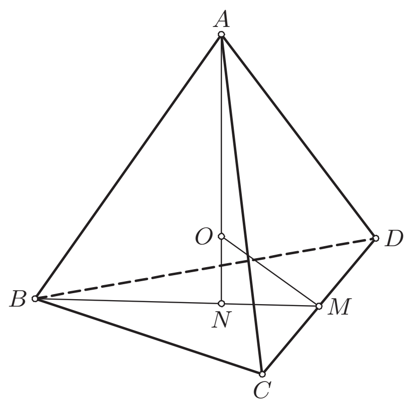
Dokažimo da su središta A, B, C, D, E, F tih ivica temena pravilnog šestougla, po kome njegova ravan seče dodekaedar. S obzirom da se prave A_1B_1 i C_1D_1 seku, a duži D_1E_1 i A_1F_1 uporedne s dužima A_1B_1 i S_1D_1, tačke A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 pripadaju izvesnoj ravni π_1. Duži AB, BC, CD, DE, DE, EF, FA su uporedne sa stranicama A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1, F_1A_1 šestougla $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ koji pripada ravni π_1. Stranice šestougla $ABCDEF$ su dijagonale pljosni pravilnog dodekaedra, prema tome, one su među sobom jednake. S obzirom da se prave A_1F_1 i B_1C_1 seku u nekoj tački S pri čemu je trougao SA_1B_1 jednakokrak, jednaki su uglovi $F_1A_1B_1$ i $A_1B_1C_1$, pa su i njima jednaki uglovi FAB i ABC takođe među sobom jednaki. Na isti način dokazuje se da su svi uglovi šestougla $ABCDEF$ među sobom jednaki. Stoga je šestougao $ABCDEF$ pravilan. Prema tome, ravan π seče dodekaedar po pravilnom šestouglu. S obzirom da se za svaki par naspramnih temena može konstruisati jedna takva ravan, postoji deset ravni koje seku pravilan dodekaedar po pravilnim šestouglovima.

Zadatak 117: Odrediti poluprečnik r_o opisane sfere, poluprečnik r_p poluupisane sfere i poluprečnik r_u upisane sfere svakog pravilnog poliedra kao funkcije njegove ivice d.

Dokaz:

a) Pravilan tetraedar. Središte O pravilnog tetraedra $ABCD$ je tačka visine AN tog tetraedra, a N tačka visine BM pljosni BCD pri čemu je

$$AO : ON = 3 : 1 \quad i \quad BN : NM = 2 : 1.$$

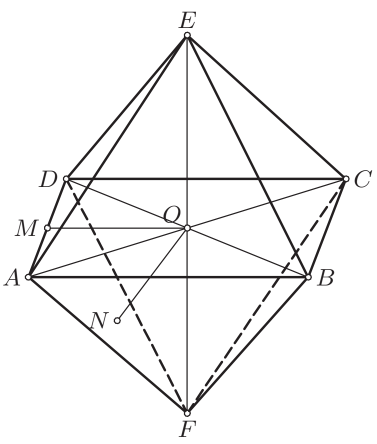


Slika 1 uz zadatak 117

Stoga je

$$r_o = OA = \frac{3}{4} \cdot AN = \frac{3}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{4};$$
$$r_p = OM = \sqrt{CC^2 - CM^2} = \sqrt{r_o^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{4};$$
$$r_u = ON = \frac{1}{4} \cdot AN = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

b) Pravilan oktaedar. Središte O pravilnog oktaedra $ABCDEF$ poklapa se s presekom dijagonala tog oktaedra. Ako obeležimo sa M i N podnožja upravnih iz tačke O na ivice AD i pljosni ADF, biće tačka M središte ivice AD a tačka N središte pljosni ADF.



Slika 2 uz zadatak 117

Stoga je

$$
\begin{aligned}
r_o &= OA = \frac{1}{2}\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{AB^2+BC^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2};\\
r_p &= OM = \frac{1}{2}\cdot AB = \frac{a}{2};\\
r_u &= ON = \sqrt{OF^2-FN^2} = \sqrt{r_o^2-\frac{4}{9}\cdot FM^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.
\end{aligned}
$$

c) Pravilan ikosaedar. Duž koja spaja bilo koja dva naspramna temena E i G pravilnog ikosaedra je prečnik sfere oko tog ikosaedra. Krajevi A, B, C, D, E ivica koje se sustiču u temenu F su temena pravilnog petougla $ABCDE$ (vidi sliku), čija je ravan upravna na dijagonali FG u središtu S tog petougla. Prema Euklidovom stavu, kod pravouglog trougla AFG je $AF^2 = FG{\cdot}FS$, tj. $a^2 = 2r_o{\cdot}FS$, gde je duž a jednaka ivici ikosaedra. S obzirom da je duž SA poluprečnik kruga opisanog oko pravilnog petougla $ABCDE$, imamo da je

$$AS = a\cdot\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{10}.$$

Najzad iz pravouglog trougla ASF nalazimo da je

$$FS = \sqrt{AF^2-AS^2} = a\cdot\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}},$$

pa je

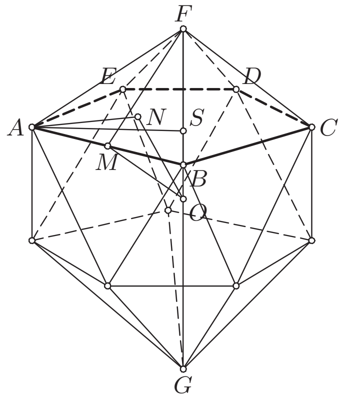
$$a^2 = 2r_o\cdot a\cdot\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

i prema tome

$$r_O = \frac{a}{4}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Ako obeležimo sa M i N podnožja upravnih iz tačke O na ivici AB i pljosni ABF, iz pravouglih trouglova OAM i OAN nalazimo da je :

$$
\begin{aligned}
r_p &= OM = \sqrt{OA^2-AM^2} = \sqrt{r_o^2-\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{4}\cdot\sqrt{6+2\sqrt{5}};\\
r_u &= ON = \sqrt{OA^2-AN^2} = \sqrt{r_o^2-\frac{4}{9}\cdot\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}.
\end{aligned}
$$



Slika 3 uz zadatak 117

Zadatak 118: Ako je $A_1, \ldots, A_n$ bilo koji skup tačaka u prostoru, T težište tog skupa tačaka, π proizvoljna ravan i ako su $A_1^{'}, \ldots, A_n^{'}$, $T^{'}$ uporedne projekcije tačaka $A_1, \ldots, A_n$,T na ravan π, dokazati da je

$$TT' = \frac{1}{n}(A_1A_1' + \cdots + A_nA_n').$$

Dokaz: Dokaz analogan dokazu stava...

Zadatak 119: Ako su $A_1, \ldots, A_n$ temena poliedra Π upisanog u sferu ω poluprečnika r, kome se težište poklapa sa središtem O te sfere i ako je P proizvoljna tačka sfere ω, dokazati da je

$$PA_1^2 + \cdots + PA_n^2 = 2nr^2.$$

Dokaz: Prema uopštenoj Lajbnicovoj teoremi, imamo da je

$$PA_1^2 + \cdots + PA_n^2 = OA_1^2 + \cdots + OA_n^2 + nOP^2 = nr^2 + nr^2 = 2nr^2.$$

Zadatak 120: Ako je Π pravilan poliedar sa temenima $A_1, \ldots, A_n$, r poluprečnik opisane sfere, ρ poluprečnik upisane (poluupisane) sfere i P proizvoljna tačka te upisane (poluupisane) sfere, dokazati da je

$$PA_1^2 + \cdots + PA_n^2 = n(r^2 + \rho^2).$$

Dokaz: S obzirom da se težište pravilnog poliedra poklapa sa središtem O opisane i središtem upisane (poluupisane) sfere, prema uopštenoj Lajbnicovoj teoremi, imamo da je

$$PA_1^2 + \cdots + PA_n^2 = OA_1^2 + \cdots + OA_n^2 + nOP^2 = n(r^2 + \rho^2).$$

Zadatak 121: Ako je T težište poliedra Π čija se temena $A_1, \ldots, A_n$ nalaze na nekoj sferi ω i ako je O središte i r poluprečnik sfere ω, a d duž određena tačkama O i T, dokazati da je

$$TA_1^2 + \cdots + TA_n^2 = n(r^2 - d^2).$$

Dokaz: Prema uopštenoj Lajbnicovoj teoremi, imamo da je

$$TA_1^2 + \cdots + TA_n^2 = OA_1^2 + \cdots + OA_n^2 - nOT^2 = n(r^2 - d^2).$$

Zadatak 122: Ako je T težište poliedra Π čija se temena $A_1, \ldots, A_n$ nalaze na nekoj sferi ω i ako su $B_1, \ldots, B_n$ tačke u kojima prave $A_1T, \ldots, A_nT$ seku sferu ω, dokazati da je

$$\frac{A_1T}{TB_1} + \cdots + \frac{A_nT}{TB_n} = n.$$

Dokaz: Ako obeležimo sa O i r središte i poluprečnik sfere ω, sa P i Q tačke u kojima prava OT seče k i d duž određena tačkama O i T, imamo da je

$$A_iT \cdot TB_i = PT \cdot TQ = (r + d)(r - d) = r^2 - d^2 \Rightarrow \frac{A_iT}{TB_i} = \frac{A_iT^2}{r^2 - d^2}.$$

Otuda, koristeći prethodni zadatak, nalazimo da je

$$\frac{A_1T}{TB_1} + \cdots + \frac{A_nT}{TB_n} = \frac{1}{r^2 - d^2}(A_1T^2 + \cdots + A_nT^2) = \frac{n(r^2 - d^2)}{r^2 - d^2} = n.$$

Zadatak 123: Ako su $A_1, \ldots, A_n$ i $B_1, \ldots, B_n$ temena dvaju poliedara koji su upisani u istu sferu ω i kojima se težišta poklapaju sa središtem sfere ω i ako je P proizvoljna tačka prostora, dokazati da je

$$PA_1^2 + \cdots + PA_n^2 = PB_1^2 + \cdots + PB_n^2.$$

Dokaz: Obeležimo sa O središte i sa r poluprečnik sfere ω. Prema Lajbnicovoj teoremi, imamo da je

$$PA_1^2 + \cdots + PA_n^2 = n(r^2 + OP^2),\ PB_1^2 + \cdots + PB_n^2 = n(r^2 + OP^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow PA_1^2 + \cdots + PA_n^2 = PB_1^2 + \cdots + PB_n^2.$$

Zadatak 124: Dokazati da je skup svih tačaka prostora kojima je zbir kvadrata rastojanja od n datih tačaka $A_1, \ldots, A_n$ jednak kvadratu date duži ℓ sfera kojoj se središte poklapa sa težištem T datog skupa tačaka i kojoj je poluprečnik $r = \sqrt{\frac{\ell^2 - d^2}{n}}$ gde je $d^2 = TA_1^2 + \cdots + TA_n^2$.

Dokaz: Vidi zadatak 121.

Zadatak 125: Odrediti u prostoru skup svih tačaka P takvih da je

$$mAP^2 + nBP^2 = \ell^2$$

gde su A i B date tačke, m i n dati koeficijenti i ℓ data duž.

Dokaz: Analizirajmo najpre slučaj kada je $m + n = 0$, tj. ako je

$$AP^2 - BP^2 = \frac{\ell^2}{m}.$$

Ako je Q podnožje normale iz P na pravoj AB, imamo da je

$$AP^2 - BP^2 = AQ^2 - BQ^2,$$

pa su sve tačke P koje imaju navedenu osobinu u ravni π koja je u tački Q upravna na pravoj AB. Obrnuto, ako je P' proizvoljna tačka u ravni π, imamo da je

$$AP'^2 - BP'^2 = AQ^2 - BQ^2,$$

prema tome, tačka P' pripada traženom skupu. Dakle, skup svih tačaka P prostora takvih da je

$$AP^2 - BP^2 = \frac{\ell^2}{m}$$

je ravan π koja je u tački Q upravna na pravoj AB.
Sad analizirajmo slučaj kada je $m + n \neq 0$. Ako obeležimo sa C tačku prave AB takvu da je $AB : CB = m : n$, biće $AC : CB : AB = n : m : (m + n)$. Primenom Stjuartove teoreme na kolinearne tačke A,B,C i na tačku P, nalazimo da je

$$CP^2 = \frac{m}{m+n}AP^2 + \frac{n}{m+n}BP^2 - \frac{2mn}{m+n}AB^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SP^2 = \frac{\ell^2}{m+n} - \frac{mn}{(m+n)^2}AB^2.$$

Obrnuto, ako je $P^{'}$ bilo koja tačka koja zadovoljava dobijenu jednakost, primenom Stjuartove teoreme, nalazimo da je

$$mAP^{'2} + nBP^{'2} = \ell^2.$$

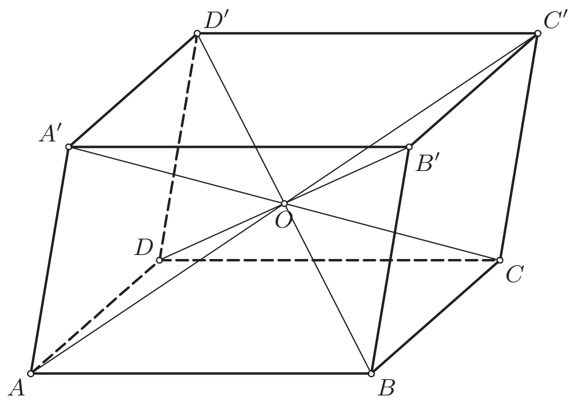
Otuda sledi da pri $m+n \neq 0$ i

$$\frac{\ell^2}{m+n} - \frac{mn}{(m+n)^2}AB^2 > 0.$$

Skup svih tačaka P prostora, predstavlja sferu kojoj je središte C, a poluprečnik

$$r^2 = \frac{\ell^2}{m+n} - \frac{mn}{(m+n)^2}AB^2.$$

Zadatak 126: Dokazati da je kod paralelopipeda zbir kvadrata ivica jednak zbiru kvadrata njegovih prostornih dijagonala.



Slika uz zadatak 126

Dokaz: Ako je $ABCDA^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ paralelopiped, četvorouglovi $ABC^{'}D^{'}$ i $A^{'}B^{'}CD$ biće paralelogrami, pa je

$$2(AB^2 + BC^{'2}) = AC^{'2} + BD^{'2}$$

i

$$2(A^{'}B^{'2} + B^{'}C^{'2}) = A^{'}C^2 + B^{'}D^2.$$

Sabiranjem odovarajućih strana ovih dveju jednakosti nalazimo da je

$$2(2AB^2 + BC^{'2} + B^{'}C^2) = AC^{'2} + A^{'}C^2 + BD^{'2} + B^{'}D^2.$$

Kako su duži BC' i $B'C$ dijagonale paralelograma $BCC'B'$, biće i

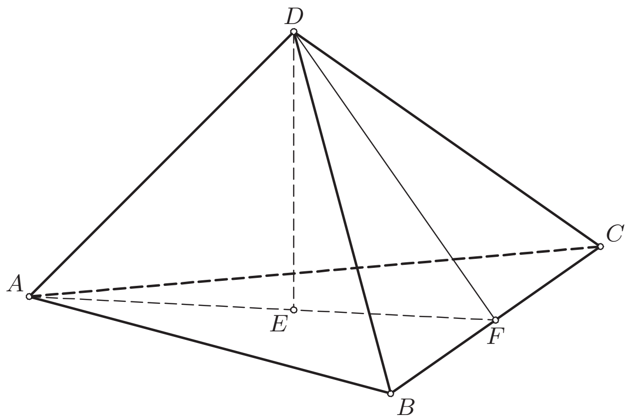
$$BC'^2 + B'C^2 = 2(BC^2 + BB'^2)$$

pa je

$$4(AB^2 + BC^2 + BB'^2) = AC'^2 + A'C^2 + BD'^2 + B'D^2.$$

Zadatak 127: Ako je tačka E podnožje visine iz temena D tetraedra $ABCD$ kod koga su svi ivični uglovi kod temena D pravi, dokazati da je

$$\frac{1}{AD^2} + \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{DE^2}.$$



Slika uz zadatak 127

Dokaz: Ravan ADE sadrži pravu DE upravnu na ravani ABC i pravu AD upravnu na ravni DBC, pa je ravan ADE upravna na obema ravnima ABC i DBC, dakle i na njihovoj presečnoj pravoj BC u nekoj tački F. Stoga je $AF \perp BC$ i $DF \perp BC$, pa su DE i DF visine koje odgovaraju hipotenuzama pravouglih trouglova ADF i BDC. Stoga je

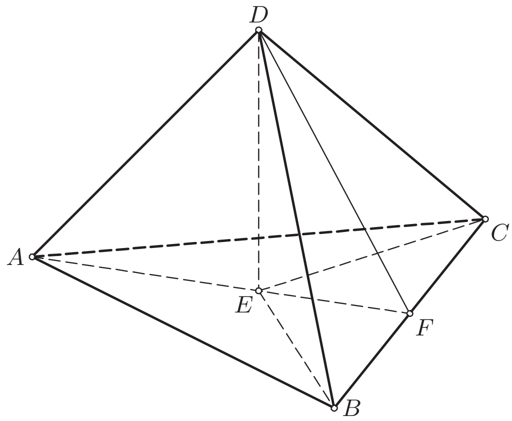
$$\frac{1}{AD^2} + \frac{1}{FD^2} = \frac{1}{DE^2} \quad i \quad \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{FD^2},$$

odakle sledi

$$\frac{1}{AD^2} + \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{DE^2}.$$

Zadatak 128: Ako su svi ivični uglovi kod temena D tetraedra $ABCD$ pravi, dokazati da je kvadrat površine pljosni ABC jednak zbiru kvadrata površina ostalih triju pljosni, tj. da je

$$S^2(ABC) = S^2(ABD) + S^2(BCD) + S^2(CAD).$$



Slika uz zadatak 128

Dokaz:

Prvi način: Ravan ADE sadrži pravu DE upravnu na ravni ABC i pravu AD na ravan DBC, pa je ravan ADE upravna na obema ravnima ABC i DBC, dakle i na njihovoj presečnoj pravoj BC u nekoj tački F. Stoga je AE, tj. $AF \perp BC$ i $DF \perp BC$. Trouglovi ABC i DBC imaju zajedničku osnovicu BC i nejednake visine AF i DF, pa je

$$S(ABC) : S(DBC) = AF : DF.$$

Isto tako, trouglovi DBC i EBC imaju zajedničku osnovicu BC i nejednake visine DF i EF, pa je

$$S(DEC) : S(EBC) = DF : EF.$$

Iz sličnih trouglova ADF i DEF nalazimo da je $AF : DF = DF : EF$. Otuda je i

$$S(ABC) : S(DBC) = S(DBC) : S(EBC)$$

i prema tome

$$S(ABC) \cdot S(EBC) = S^2(DBC).$$

Isto tako je i

$$S(ABC) \cdot S(EAC) = S^2(DAC)$$

i

$$S(ABC) \cdot S(EAB) = S^2(DAB).$$

Sabiranjem odgovarajućih strana dobijenih triju jednakosti nalazimo da je

$$S(ABC) \cdot [S(EBC) + S(EAC) + S(EAB)] = S^2(ABD) + S^2(BCD) + S^2(CAD).$$

S obzirom da je tačka E u trouglu ABC biće

$$S(EBC) + S(EAC) + S(EAB) = S(ABC),$$

pa je i

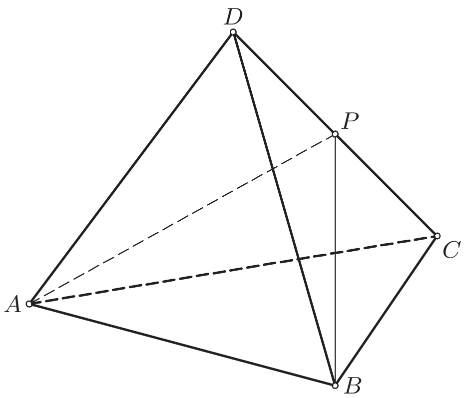
$$S^2(ABC) = S^2(ABD) + S^2(BCD) + S^2(CAD).$$

Drugi način: S obzirom da je AF visina trougla ABC, a uglovi kod temena D trougla ADF, ADB i ADC pravi, imamo da je

$$\begin{aligned}
S^2(ABC) &= \frac{1}{4} \cdot BC^2 \cdot AF^2 \\
&= \frac{1}{4} \cdot BC^2 \cdot (AD^2 + DF^2) \\
&= \frac{1}{4} \cdot BC^2 \cdot DF^2 + \frac{1}{4} \cdot AD^2 \cdot (BD^2 + CD^2) \\
&= \frac{1}{4} \cdot BC^2 \cdot DF^2 + \frac{1}{4} \cdot AD^2 \cdot BD^2 + \frac{1}{4} \cdot AD^2 \cdot CD^2 \\
&= S^2(ABD) + S^2(BCD) + S^2(CAD).
\end{aligned}$$

Zadatak 129: Ako je P tačka u kojoj simetralna ravan π diedra određenog pljosnima ABC i ABD seče ivicu CD, dokazati da je

$$\frac{S(ABC)}{S(ABD)} = \frac{S(PAC)}{S(PAD)} = \frac{S(PBC)}{S(PBD)} = \frac{PC}{PD}.$$



Slika uz zadatak 129

Dokaz: Ravan π razlaže tetraedar $ABCD$ na dva tetraedra $PABC$ i $PABD$ kod kojih su visine iz temena P, A, B prvoga jednake visinama iz temena P, A, B drugoga tetraedra pa je

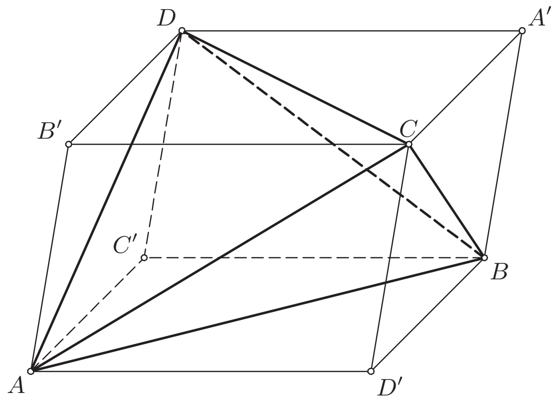
$$\frac{V(PABC)}{V(PABD)} = \frac{S(ABC)}{S(ABD)} = \frac{S(PAC)}{S(PAD)} = \frac{S(PBC)}{S(PBD)} = \frac{PC}{PD}.$$

Zadatak 130: Ravni od kojih svaka sadrži jednu ivicu tetraedra a uporedna je s naspramnom ivicom određuju paralelopiped. Ako je V zapremina pomenuntog tetraedra i V_1 zapremina nastalog paralelopipeda, dokazati da je

$$V = \frac{1}{3} \cdot V_1.$$

Dokaz: Ravni od kojih svaka sadrži jednu ivicu tetraedra $ABCD$ a uporedna je s naspramnom ivicom, određuju paralelopiped $AD'BC'B'CA'D$ kome su A i A', B i B', C i C', D i D' naspamna temena. Pri tome je

$$\begin{aligned} V(ABCD) = V(AD'BC'B'CA'D) - V(A'BCD) - \\ - V(AB'CD) - V(ABC'D) - V(ABCD'). \end{aligned}$$



Slika uz zadatak 130

S obzirom da je

$$\begin{aligned} V(A'BCD) = V(AB'CD) = V(ABC'D) = V(ABCD') = \\ = \frac{1}{6} \cdot V(AD'BC'B'CA'D), \end{aligned}$$

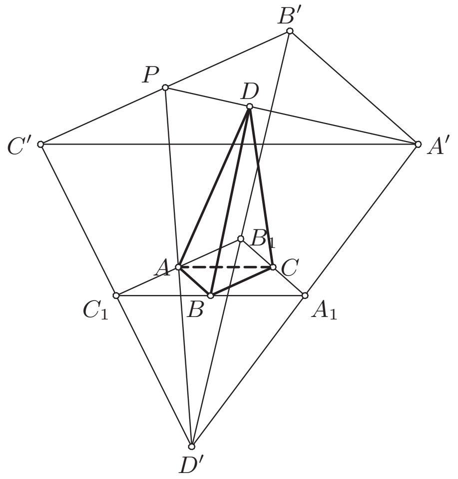
biće

$$V(ABCD) = \frac{2}{6} \cdot V(AD'BC'B'CA'D),$$

i prema tome $V = \frac{1}{3} \cdot V_1$.

Zadatak 131: Ravni od kojih svaka sadrži jedno teme a uporedna je s naspramnom pljosni tetraedra $ABCD$ određuju neki tetredar $A'B'C'D'$. Dokazati da je

$$V(ABCD) = \frac{1}{27} \cdot V(A'B'C'D').$$



Slika uz zadatak 131

Dokaz: Ravan ABC seče površ tetraedra $A'B'C'D'$ po trouglu $A_1B_1C_1$ čije stranice B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sadrže temena A, B, C, a uporedne su sa stranicama BC, CA, AB trougla ABC. Otuda sledi da je tačka A središte duži B_1C_1. No duži B_1C_1 i $B'C'$ su uporedne, pa je središte P duži $B'C'$ na pravoj $D'A$, i prema tome tačka A je na težišnoj liniji $D'P$ trougla $B'C'D'$. Analogno se dokazuje da je tačka A na još jednoj težišnoj liniji tog trougla pa je A težište trougla $B'C'D'$. Otuda je

$$D'P : DA = D'C : D'C_1 = 3 : 2,$$

i prema tome

$$S(A'B'C') : S(A_1B_1C_1) = D'C'^2 : D'C_1^2 = 9 : 4.$$

Kako je

$$S(A_1B_1C_1) = 4 \cdot S(ABC),$$

biće

$$S(ABC) = \frac{1}{9} \cdot S(A'B'C'). \tag{1}$$

Ako su DN i DN' visine tetraedara $ABCD$ i $A'B'C'D'$ biće

$$D'N' : DN = D'C' : C_1C' = 3 : 1,$$

pa i

$$DN = \frac{1}{3} \cdot D'N'. \tag{2}$$

Množenjem odgovarajućih strana jednakosti (1) i (2) nalazimo da je

$$V(ABCD) = \frac{1}{27} \cdot V(A'B'C'D').$$

Zadatak 132: Ako je V zapremina tetraedra $ABCD$, S površina paralelogramske površi kojoj su stranice uporedne i jednake s naspramnim ivicama AB i CD, a d normalno odstojanje pravih koje su određene s tim dvema ivicama AB i CD, dokazati da je

$$V = \frac{1}{6} \cdot S \cdot d$$

Dokaz: Obeležimo sa V_1 zapreminu paralelopipeda $AD'BC'B'CA'D$ koji je određen s ravnima od kojih svaka sadrži po jednu ivicu a uporedna je s naspramnom ivicom tetraedra $ABCD$ (vidi sliku). Prema zadatku 130., imamo da je $V = \frac{1}{3} \cdot V_1$. S obzirom da je odstojanje između uporednih ravni koje su određene naspramnim pljosnima $AD'BC'$ i $B'CA'D$ dobijenog paralelopipeda jednake normalnom odstojanju d između pravih koje su određene naspramnim ivicama AB i CD tetraedra $ABCD$, a površina paralelogramske površi $AD'BC'$ jednaka polovini površine paralelogramske površi kojoj su stranice uporedne i jednake ivicama AB i CD, biće i

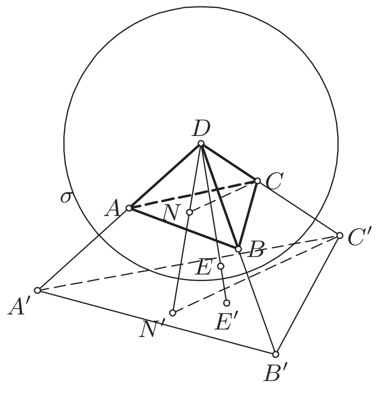
$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot S \cdot d.$$

Otuda je i

$$V = \frac{1}{6} \cdot S \cdot d.$$

Zadatak 133: Ako je V zapremina tetraedra $ABCD$, F površina trougaone površi kojoj su stranice jednake proizvodima naspramnih ivica tog tetraedra i r poluprečnik opisane sfere oko tog tetraedra, dokazati da je

$$V = \frac{1}{6r} F.$$



Slika uz zadatak 133

Dokaz: Označimo sa σ proizvoljnu sferu sa središtem D i poluprečnikom k, a sa A', B', C' tačke inverzije sa tačkama A, B, C u odnosu na sferu σ'. Sfera λ opisana oko tetraedra $ABCD$ sadrži središte D te inverzije, pa je njen inverzan lik ravan određena tačkama A', B', C'. Ako je DE prečnik sfere λ i E' tačka inverzna sa tačkom E u odnosu na sferu σ', imamo da je $DE \cdot DE' = k^2$, pa je

$$DE' = \frac{k^2}{2r}. \tag{1}$$

Pri tome je duž DE' visina tetraedra $A'B'C'D$, pa je

$$V(A'B'C'D') = \frac{DE'}{3} S(A'B'C').$$

S druge strane, ako sa CN i $C'N'$ obeležimo visine iz temena C i C' tetraedra $ABCD$ i $A'B'C'D$ imamo da je

$$\frac{V(A'B'C'D)}{V(ABCD)} = \frac{S(A'B'D) \cdot C'N'}{S(ABD) \cdot CN} = \frac{DA' \cdot DB' \cdot C'D}{DA \cdot DB \cdot DC}.$$

Otuda je

$$\frac{S(A'B'C') \cdot DE'}{3V} = \frac{DA' \cdot DB' \cdot C'D}{DA \cdot DB \cdot DC} \tag{2}$$

Ako sa a, b, c, a', b', c' obeležimo ivice BC, CA, AB, AD, BD, CD, imamo da je

$$DA' = \frac{k^2}{a'},\ DB' = \frac{k^2}{b'},\ DC' = \frac{k^2}{c'} \tag{3}$$

i

$$B'C' = \frac{k^2 \cdot BC}{DB \cdot DC} = \frac{k^2}{a'b'c'} aa',\ C'A' = \frac{k^2}{a'b'c'} bb',\ A'B' = \frac{k^2}{a'b'c'} cc'.$$

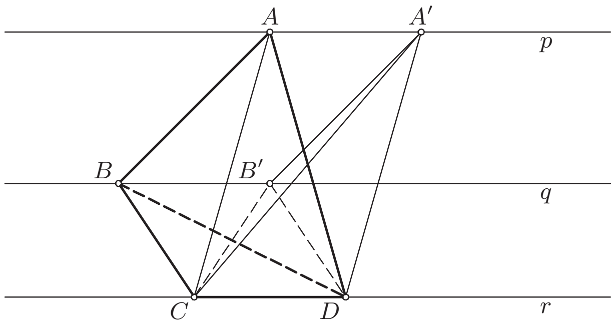
Iz poslednjih triju jednakosti sledi da je $\triangle A'B'C'$ sličan sa trouglom kome su stranice jednake proizvodima naspramnih ivica tetraedra $ABCD$, pri čemu je koeficijent sličnosti $\frac{k^2}{a'b'c'}$. Stoga je

$$S(A'B'C') = \frac{k^4}{a'^2 b'^2 c'^2} F \tag{4}$$

Iz jednakosti (1), (2), (3), (4) sledi da je $V = \frac{1}{6r} F$.

Zadatak 134: Ako su p, q, r tri međusobno uporedne prave koje ne pripadaju jednoj ravni, A i A' tačke prave p, B i B' tačke prave q, a C i D tačke prave r dokazati da je

$$V(ABCD) = V(A'B'CD).$$



Slika uz zadatak 134

Dokaz: Osnove (BCD) i $(B'CD)$ tetraedra $ABCD$ i $A'B'CD$ imaju zajedničku stranicu CD i jednake visine iz temena B i B', pa je

$$S(BCD) = S(B'CD).$$

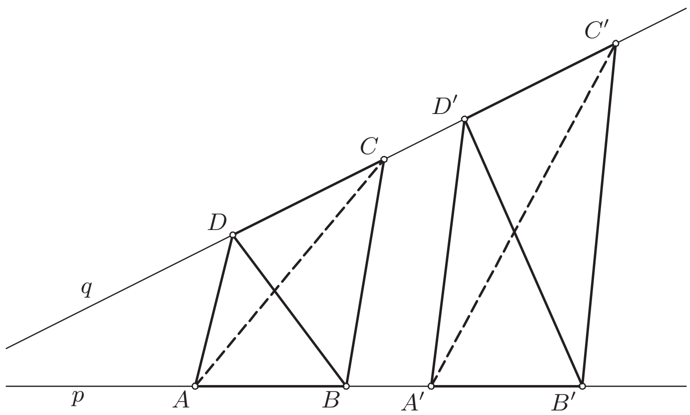
Tačke A i A' su na pravoj p koja je uporedna na ravni u kojoj se nalaze pljosni (BCD) i $(B'CD)$, pa su visine iz temena A i A' tetraedra $ABCD$ i $A'B'CD$ međusobno jednake. Otuda je

$$V(ABCD) = V(A'B'CD).$$

Zadatak 135: Ako su p i q dve mimoilazne prave A, B, A', B' tačke prave p i C, D, C', D' tačke prave q takve da je $AB = A'B'$ i $CD = C'D'$, dokazati da je

$$V(ABCD) = V(A'B'C'D').$$

(Štajnerova teorema).



Slika uz zadatak 135

Dokaz: Trouglovi ABC i $A'B'C$ imaju jednake stranice AB i $A'B'$ i njima odgovarajuće visine, pa je

$$S(ABC) = S(A'B'C).$$

Pri tome tetraedri $ABCD$ i $A'B'CD$ imaju jednake pljosni ABC i $A'B'C$ i zajedničku visinu iz temena D, pa je

$$V(ABCD) = V(A'B'CD).$$

Isto tako je

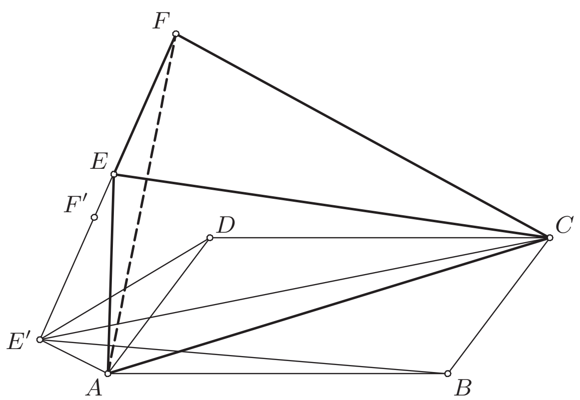
$$V(A'B'CD) = V(A'B'C'D'),$$

pa je

$$V(ABCD) = V(A'B'C'D').$$

Zadatak 136: Ako su E i F dve razne tačke izvan ravni paralelograma $ABCD$ dokazati da je

$$V(ACEF) = |V(ABEF) \pm V(ADEF)|.$$



Slika uz zadatak 136

Dokaz: Prava EF prodire ravan paralelograma $ABCD$ ili je uporedna sa tom ravni. Neka prava EF prodire ravan paralelograma $ABCD$ u nekoj tački E' i neka je F' jedna od tačaka prave EF takva da je $EF = E'F'$. S obzirom da je tačka E' u ravni paralelograma $ABCD$, imamo da je

$$S(ACE') = |S(ABE') \pm S(ADE')|,$$

pa je

$$V(ACE'F') = |V(ABE'F') \pm V(ADE'F')|.$$

Prema predhodnom zadatku je

$$V(ACE'F') = V(ACEF),\ V(ABE'F') = V(ABEF),$$

$$V(ADE'F') = V(ADEF),$$

pa je

$$V(ACEF) = |V(ABEF) \pm V(ADEF)|.$$

Ako je prava EF uporedna sa ravni paralelograma $ABCD$, obeležimo sa A', B', C', D' tačke takve da su duži AA', BB', CC', DD' jednake i istosmerne sa duži EF. Pri tome tačke A', B', C', D' pripadaju ravni paralelograma $ABCD$, a odstojanje između mimoilaznih pravih AC i EF, AB i EF, AD i EF jednaka odstojanju d prave EF od ravni paralelograma $ABCD$. Sada imamo da je

$$V(ACEF) = \frac{d}{6}S(ACC'A'),\ V(ABEF) = \frac{d}{6}S(ABB'A'),$$

$$V(ADEF) = \frac{d}{6}S(ADD'A').$$

Paralelogramske površi $ACC'A', ABB'A', ADD'A'$ imaju zajedničku osnovicu AA', a visina koja odgovara toj osnovici prve površi jednaka je zbiru ili razlici visina koje odgovaraju toj istoj osnovici drugih dveju površi, pa je

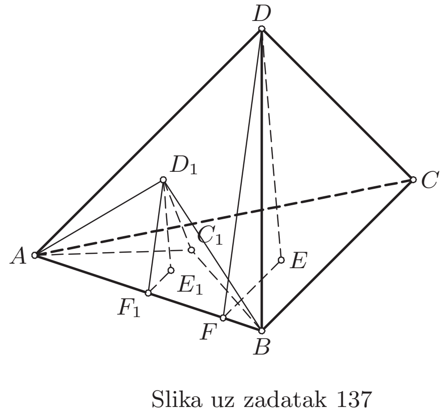
$$S(ACC'A') = |S(ABB'A') \pm S(ADD'A').$$

Otuda je

$$V(ACEF) = |V(ABEF) \pm V(ADEF)|.$$

Zadatak 137: Ako su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ dva tetraedra kod kojih su ivice AB i $A'B'$ međusobno jednake i diedri koji odgovaraju tim ivicama takođe jednaki, dokazati da je

$$\frac{V(ABCD)}{V(A'B'C'D')} = \frac{S(ABC) \cdot S(ABD)}{S(A'B'C') \cdot S(A'B'D')}.$$



Slika uz zadatak 137

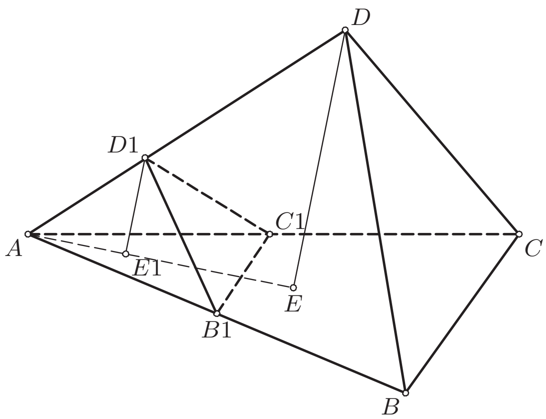
<u>Dokaz:</u> S obzirom da su kod tetraedra $ABCD$ i $A'B'C'D'$ ivice AB i $A'B'$ jednake i diedri koji odgovaraju tim ivicama takođe međusobno jednaki, postoje u pljosnima (AB, C) i (AB, D) diedra (C, AB, D) tačke C_1 i D_1 takve da su tetraedri $A'B'C'D'$ i ABC_1D_1 podudarni. Ako obeležimo sa DE i D_1E_1 visine iz temena D i D_1 tetraedra $ABCD$ i ABC_1D_1, a sa DF i D_1F_1 visine pljosni ABD i ABD_1, imamo da je

$$\begin{aligned}\frac{V(ABCD)}{V(A'B'C'D')} &= \frac{V(ABCD)}{V(ABC_1D_1)} = \frac{S(ABC)}{S(ABC_1)} \cdot \frac{DE}{D_1E_1} \\ &= \frac{S(ABC)}{S(ABC_1)} \cdot \frac{DE}{D_1F_1} = \frac{S(ABC)}{S(ABC_1)} \cdot \frac{S(ABD)}{S(ABD_1)} \\ &= \frac{S(ABC) \cdot S(ABD)}{S(A'B'C') \cdot S(A'B'D')}.\end{aligned}$$

<u>Zadatak 138:</u> Ako su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ dva tetraedra s podudarnim triedrima A i A', dokazati da je

$$\frac{V(ABCD)}{V(A'B'C'D')} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{A'B' \cdot A'C' \cdot A'D'}.$$

<u>Dokaz:</u> S obzirom da su triedri A i A' tetraedara $ABCD$ i $A'B'C'D'$ podudarni, na ivicama AB, AC, AD postoje tačke B_1, C_1, D_1, takve da su tetraedri $AB_1C_1D_1$ i $A'B'C'D'$ podudarni. Obeležimo sa DE i D_1E_1 visine iz temena D i D_1 tetraedara $ABCD$ i $AB_1C_1D_1$.



Slika uz zadatak 138

Tada je

$$\frac{V(ABCD)}{V(A'B'C'D')} = \frac{V(ABCD)}{V(AB_1C_1D_1)} = \frac{S(ABC)}{S(AB_1C_1)} \cdot \frac{DE}{D_1E_1} =$$

$$= \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB_1 \cdot AC_1 \cdot AD_1} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{A'B' \cdot A'C' \cdot A'D'}.$$

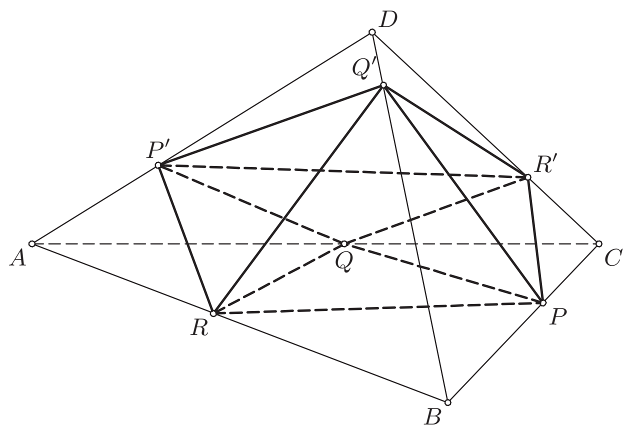
Zadatak 139: Ivice BC, CA, AB, AD, BD, CD tetraedra $ABCD$ podeljene su tačkama P, Q, R, P', Q', R' u datim odnosima. Odrediti odnose zapremina konveksnog poliedra, koji je određen datim tačkama i tetraedra $ABCD$.

Dokaz: Neka je

$$BP : BC = p, \quad CQ : CA = q, \quad AR : AB = r,$$

$$DP' : DA = p', \quad DQ' : DB = q', \quad DR' : DC = r'.$$

Obeležimo sa V zapreminu tetraedra $ABCD$ i sa V_1 zapreminu poliedra, koji je određen deonim tačkama P, Q, R,P', Q', R'.



Slika uz zadatak 139

Tada je

$$V_1 = V - V(AQRP') - V(BPRQ') - V(CPQR') - V(DP'Q'R').$$

Stavimo da je

$$p_1 = 1 - p = CP : CB, \quad q_1 = 1 - q = AQ : AC, \quad r_1 = 1 - r = BR : BA,$$

$$p_1' = 1 - p' = AP' : AD, \quad q_1' = 1 - q' = BQ' : BD, \quad r_1' = 1 - r' = CR' : CD.$$

Primenom zadatka 138. nalazimo da je

$$V(AQRP') = \frac{AQ}{AC} \cdot \frac{AR}{AB} \cdot \frac{AP'}{AD} \cdot V = q_1 \cdot r \cdot p_1' \cdot V,$$

$$V(BPRQ') = \frac{BP}{BC} \cdot \frac{BR}{BA} \cdot \frac{BQ'}{BD} \cdot V = p \cdot r_1 \cdot q_1' \cdot V,$$

$$V(CPQR') = \frac{CP}{CB} \cdot \frac{CQ}{CA} \cdot \frac{CR'}{CD} \cdot V = p_1 \cdot q \cdot r_1' \cdot V,$$

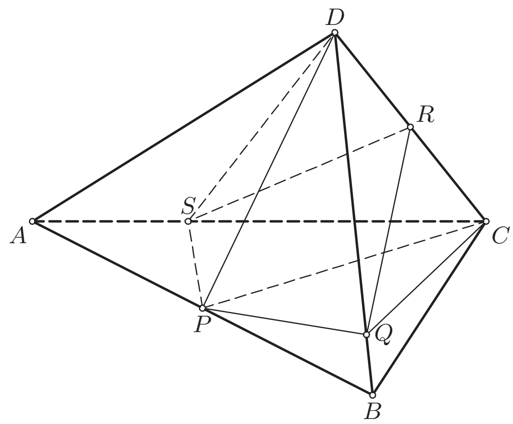
$$V(DP'Q'R') = \frac{DP'}{DA} \cdot \frac{DQ'}{DB} \cdot \frac{DR'}{DC} \cdot V = p' \cdot q' \cdot r' \cdot V,$$

pa je

$$V_1 = V \cdot (1 - r \cdot q_1 \cdot p_1' - p \cdot r_1 \cdot q_1' - p_1 \cdot q \cdot r_1' - p' \cdot q' \cdot r').$$

Zadatak 140: Dokazati da svaka ravan kroz središta bilo kojih dveju naspramnih ivica tetraedra razlaže taj tetraedar na dva jednaka poliedra.

Dokaz: Obeležimo sa π proizvoljnu ravan koja sadrži središta P i R naspramnih ivica AB i CD tetraedra $ABCD$. Ako je jedna od ivica AB i CD, npr. CD, u ravni π, tada je tetraedar $ABCD$ s ravni π razložen na dva tetraedra $APCD$ i $PBCD$ koji imaju jednaku osnovu i jednake visine, pa su im i zapremine međusobno jednake.



Slika uz zadatak 140

Ako nijedna od ivica AB i CD ne pripada ravni π, svaka od njih prodire tu ravan. Pri tom su tačke C i D s raznih strana od ravni π; neka su npr. tačke A i D s jedne, a B i C s druge strane ravni π. U tom slučaju, ivice BD i AC prodiru ravan π u tačkama Q i S, pa je tetraedar $ABCD$ s ravni π razložen na poliedre $PQRSAD$ i $PQRSBC$. Prvi od tih poliedara se sastoji iz piramide $PQRSD$ i tetraedra $APSD$, a drugi iz piramide $PQRSC$ i tetraedra $PQBC$. Piramide $PQRSC$ i $PQRSD$ imaju zajedničku osnovu i jednake visine, pa su im i zapremine jednake. S obzirom da tetraedri $APSD$ i $ABCD$ imaju zajednički triedar A, a tetraedri $BCPQ$ i $BCDA$ zajednički triedar B, prema zadatku 138, imamo da je

$$\frac{V(APSD)}{V(ABCD)} = \frac{AP \cdot AS \cdot AD}{AB \cdot AC \cdot AD} = \frac{AS}{2 \cdot AC}$$

$$\frac{V(BCPQ)}{V(ABCD)} = \frac{BC \cdot BP \cdot BQ}{BC \cdot BA \cdot BD} = \frac{BQ}{2 \cdot BD}.$$

Otuda je

$$\frac{V(APSD)}{V(BCPQ)} = \frac{AS \cdot BD}{AC \cdot BQ}.$$

S obzirom da su P, Q, R, S tačke u kojima ravan π seče ivice AB, BD, DC, CA prostornog četvorougla $ABCD$, prema Menelajevoj teoremi, imamo da je

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QD} \cdot \frac{DR}{RC} \cdot \frac{CS}{SA} = 1,$$

pa je

$$\frac{BQ}{QD} \cdot \frac{CS}{SA} = 1, \quad tj. \quad \frac{BQ}{QD} = \frac{AS}{SC},$$

i prema tome

$$\frac{BQ}{BD} = \frac{AS}{AC}.$$

Stoga je

$$V(APSD) = V(BCPQ),$$

i prema tome

$$V(PQRSAD) = V(PQRSBC).$$

Zadatak 141: Ako su P i R tačke naspramnih ivica AB i CD tetraedra $ABCD$ takve da je $AP : PB = m : n$, dokazati da svaka ravan kroz tačke P i R razlaže taj tetraedar na dva poliedra kojima je odnos zapremina takođe jednak $m : n$.

Dokaz: Proizvoljna ravan π kroz tačke P i R sadrži jednu od ivica AB i CD, ili ne sadrži nijednu od tih dveju ivica. Ako ravan π sadrži ivicu, npr. CD, ravan π razlaže tetraedar $ABCD$ na dva tetraedra $PCDA$ i $PCDB$ koji imaju zajedničku osnovu PCD, a visine srazmerne dužima AP i BP, pa je

$$V(PCDA) : V(PCDB) = m : n.$$

Ako nijedna od ivica AB i CD ne pripada ravni π, svaka od njih prodire tu ravan. Pri tome su tačke A i B, a isto tako i tačke C i D s raznih strana od ravni π; neka su npr. tačke A i D s jedne strane, a tačke B i C s druge strane od ravni π. U tom slučaju ivice BD i AC prodiru ravan π u tačkama, npr. Q i S, pa je tetraedar $ABCD$ razložen s ravni π na poliedre $PQRSAD$ i $PQRSBC$. Prvi od tih poliedara sastoji se iz piramide $PQRSD$ i tetraedra $APSD$, a drugi iz piramide $PQRSC$ i tetraedra $PQBC$. Piramide $PQRSD$ i $PQRSC$ imaju zajedničku osnovu i visine srazmerne dužima DR i RC, pa je

$$V(PQRSD) : V(PQRSC) = m : n.$$

Kako je

$$V(APDS) : V(APDC) = AS : AC,$$

$$V(PBCQ) : V(PBCD) = BQ : BD,$$

$$V(APDC) : V(PBCD) = m : n$$

i prema zadatku 140.

$$AS : AC = BQ : BD,$$

imamo da je

$$V(APDS) : V(BPCQ) = m : n.$$

Stoga je,

$$V(PQRSAD) : V(PQRSBC) = m : n.$$

Zadatak 142: Ako je S površina i V zapremina poliedra kome sve pljosni dodiruju neku sferu poluprečnika ρ, dokazati da je

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \rho.$$

Dokaz: Trougaone površi određene ivicama takvog poliedra i središta sfere upisane u taj poliedar razlažu isti na piramide kojima su osnovice pljosni poliedra i kome je zajednički vrh središte pomenute sfere. S toga ako sa $S_1,\ldots,S_n$ obeležimo površine pljosni datog poliedra, imamo da je

$$V = \frac{\rho}{3} \cdot (S_1 + \cdots + S_n) = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \rho.$$

Zadatak 143: Odrediti površine i zapremine pravilnih poliedara kao funkcije njihovih ivica.

Dokaz:

a) Pravilan tetraedar. Površ pravilnog tetraedra $ABCD$ sastoji se iz četiri podudarne pravilne trougaone površi. Ako obeležimo sa S površinu, sa V zapreminu, sa a ivicu i sa DE visinu tog tetraedra, imamo da je

$$S = 4 \cdot S(ABC) = 4 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \sqrt{3},$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S(ABC) \cdot DE = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{6}}{3} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}.$$

b) Pravilan oktaedar. Površ pravilnog oktaedra sastoji se iz osam podudarnih pravilnih trougaonih površi. Ako obeležimo sa S površinu, sa V zapreminu, sa a ivicu i sa EF dijagonalu pravilnog oktaedra $ABCDEF$, imamo da je

$$S = 8 \cdot S(ABE) = 8 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3},$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S(ABCD) \cdot EF = \frac{a^2}{3} \cdot a \cdot \sqrt{2} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}.$$

c) Pravilan ikosoedar. Površ pravilnog ikosoedra se sastoji iz dvadeset podudarnih pravilnih trougaonih površi. Ako obeležimo sa S površinu, sa V zapreminu, sa a ivicu i sa ρ poluprečnik upisane sfere, imamo da je

$$S = 20 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3},$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \rho = \frac{5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{7 + 3 \cdot \sqrt{5}}{6}} = \frac{5 \cdot a^3}{6} \cdot \sqrt{\frac{7 + 3 \cdot \sqrt{5}}{2}}.$$

d) Pravilan heksaedar. Površ pravilnog heksaedra (kocke) se sastoji iz šest podudarnih kvadratnih površi. Ako obeležimo sa S površinu i sa V zapreminu kocke ivice a, imamo da je

$$S = 6 \cdot a^2, \qquad V = a^3.$$

e) Pravilan dodekaedar. Površ pravilnog dodekaedra se sastoji iz dvanaest podudarnih pravilnih petougaonih površi. Ako obeležimo sa S površinu, sa V zapreminu, sa a ivicu i sa ρ poluprečnik upisane sfere pravilnog dodekaedra, imamo da je

$$S = 12 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{25 + 10 \cdot \sqrt{5}} = 3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{25 + 10 \cdot \sqrt{5}},$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \rho = a^2 \cdot \sqrt{25 + 10 \cdot \sqrt{5}} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{25 + 11 \cdot \sqrt{5}}{10}} = \frac{a^3}{4} \cdot \sqrt{10 \cdot (47 + 21 \cdot \sqrt{5})}.$$

Zadatak 144: Ako su S_A, S_B, S_C, S_D površine pljosni BCD, CDA, DAB, ABC i V zapremina tetraedra $ABCD$, a ρ poluprečnik upisane sfere, ρ_A poluprečnik spolja upisane sfere kojoj odgovara teme A i ρ_{AB} poluprečnik spolja upisane sfere koja odgovara ivici AB, dokazati da je:

a) $V = \frac{\rho}{3}(S_A + S_B + S_C + S_D)$;

b) $V = \frac{\rho_A}{3}(-S_A + S_B + S_C + S_D)$;

c) $V = \frac{\rho_{AB}}{3}(S_A + S_B - S_C - S_D)$.

Dokaz: Ako je O središte sfere upisane u tetraedar $ABCD$, O_A središte spolja upisane sfere koja odgovara temenu A i O_{AB} središte spolja upisane sfere koja odgovara ivici AB, imamo da je

a)

$$\begin{aligned} V &= V(BCDO) + V(CDAO) + V(DABO) + V(ABCO) \\ &= \frac{\rho}{3}(S_A + S_B + S_C + S_D); \end{aligned}$$

b)

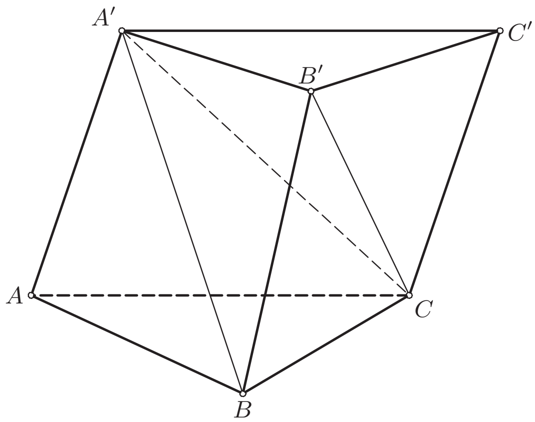
$$\begin{aligned} V &= V(ABCO_A) + V(ABDO_A) + V(ACDO_A) - V(BCDO_A) \\ &= \frac{\rho_A}{3}(-S_A + S_B + S_C + S_D); \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} V &= V(BCDO_{AB}) + V(ACDO_{AB}) - V(ABCO_{AB}) - V(ABDO_{AB}) \\ &= \frac{\rho_{AB}}{3}(S_A + S_B - S_C - S_D). \end{aligned}$$

Zadatak 145: Ako su ABC i $A'B'C'$ osnove zarubljene trostrane prizme, dokazati da je

$$V(ABCA'B'C') = V(ABCA') + V(ABCB') + V(ABCC').$$



Slika uz zadatak 145

Dokaz: Neka su AA', BB', CC' bočne ivice zarubljene prizme $ABCA'B'C'$. Ravni $A'BC$ i $A'B'C$ razlažu tu zarubljenu prizmu na tri tetraedra $ABCA'$, $BCA'B'$, $A'B'C'C$.

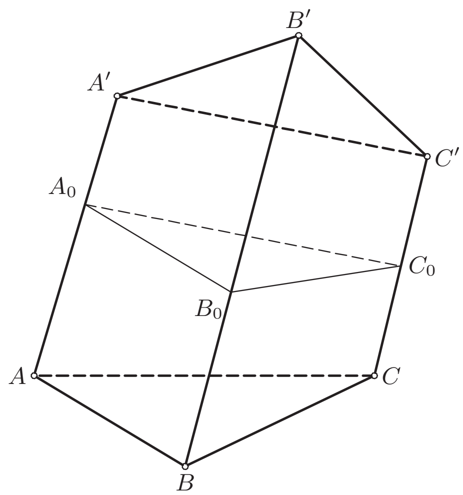
Tetraedri $BCA'B'$ i $ABCB'$ imaju zajedničku pljosan BCB' i jednake visine iz temena A' i A, pa su im zapremine među sobom jednake. Isto tako tetraedri $A'B'C'C$ i $AB'C'C$ imaju zajedničku pljosan $B'C'C$ i jednake visine iz temena A' i A, pa su im i zapremine jednake, i tetraedri $AB'C'C$ i $ABCC'$ imaju zajedničku pljosan $AC'C$ i jednake visine iz temena B' i B, te su im zapremine takođe jednake. Stoga je

$$V(ABCA'B'C') = V(ABCA') + V(ABCB') + V(ABCC').$$

Definicija: Poliedar ograničen nekom prizmatičnom površi i dvema neparalelnim ravnima naziva se zarubljena prizma. Pljosni zarubljene prizme koje su sadržane u pomenutim neparalelnim ravnima su osnove; ostale pljosni te zarubljene prizme su bočne.

Zadatak 146: Ako je S površina normalnog preseka zarubljene trostrane prizme $ABCA'B'C'$ kojoj su bočne ivice AA', BB', CC' dokazati da je

$$V(ABCA'B'C') = \frac{S}{3}(AA' + BB' + CC').$$



Slika uz zadatak 146

Dokaz: Prema prethodnom zadatku imamo da je

$$V(ABCA'B'C') = V(ABCA') + V(ABCB') + V(ABCC').$$

S obzirom da je zapremina tetraedra $ABCA'$ jednaka trećini zapremine prizme kojoj je osnovica (ABC), a bočna ivica AA', a zapremina ove prizme jadnaka proizvodu površi S njenog normalnog preseka i ivice AA', biće

$$V(ABCA') = \frac{S}{3}AA'.$$

Isto tako je

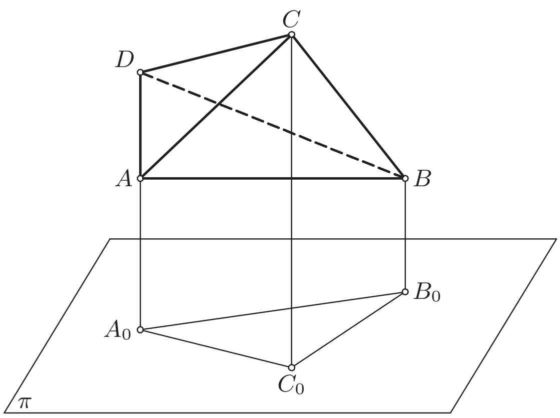
$$V(ABCB') = \frac{S}{3}BB',\ V(ABCC') = \frac{S}{3}CC',$$

pa je

$$V(ABCA'B'C') = \frac{S}{3}(AA' + BB' + CC').$$

<u>Zadatak 147:</u> Ako je l dužina bilo koje ivice, npr. AD tetraedra $ABCD$, a S površina upravne projekcije tog tetraedra na nekoj ravni π koja je upravna na ivicu AD, dokazati da je

$$V(ABCD) = \frac{1}{3}Sl.$$



Slika uz zadatak 147

<u>Dokaz:</u> Pretpostavimo da ravan π nema sa tetraedrom $ABCD$ zajedničkih tačaka. Ako su A_0, B_0, C_0 upravne projekcije tačaka A, B, C na ravan π i pri tome tačka A između tačaka A_0 i D, zapremina tetraedra $ABCD$ biće jednaka razlici zapremina zarubljenih prizmi $A_0B_0C_0DBC$ i $A_0B_0C_0ABC$, tj. biće

$$V(ABCD) = V(A_0B_0C_0DBC) - V(A_0B_0C_0ABC) =$$

$$= \frac{S}{3}(A_0D + B_0B + C_0C) - \frac{S}{3}(A_0A + B_0B + C_0C) = \frac{S}{3}AD = \frac{S}{3}l$$

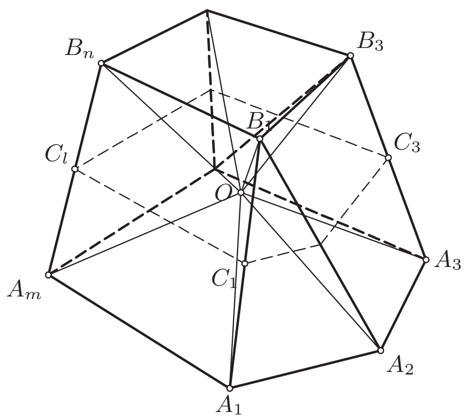
<u>Zadatak 148:</u> Ako su S_1 i S_2 površine osnova i S_3 površina srednjeg preseka bilo kojeg prizmatoida, a h visina i V njegova zapremina, dokazati da je

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S_3).$$

<u>Dokaz:</u> Obeležimo sa $(A_1 \dots A_m)$ i $(B_1 \dots B_n)$ osnove, sa $(C_1 \dots C_l)$ srednji presek bilo kojeg prizmatoida i sa O proizvoljnu tačku iz unutrašnjosti poligona $C_1 \dots C_l$. S obzirom da su S_1 i S_2 površine poligonskih površi $(A_1 \dots A_m)$ i $(B_1 \dots B_n)$, biće zapremine V_1 i V_2 piramida $OA_1 \dots A_m$ i $OB_1 \dots B_n$ određene obrascima $V_1 = \frac{h}{6}S_1$ i $V_2 = \frac{h}{6}S_2$. Odredimo

sad zapremine piramida kojima su osnove bočne pljosni prizmatoida, a tačka O zajednički vrh. Bočne pljosni prizmatoida su trougaone ili četvorougaone površi; svaku od tih četvorougaonih površi razložimo dijagonalom na dve trougaone površi. Ravan poligona $C_1 \ldots C_l$ seče svaku od tih trougaonih površi po srednjoj liniji, npr. trougaonu površ $(A_1A_2B_1)$ po srednjoj liniji C_1C_2. Pri tome je

$$V(A_1A_2B_1O) = 4V(C_1C_2B_1O) = \frac{4}{6}h(OC_1C_2).$$



Slika uz zadatak 148

Otuda sledi da je zbir V_3 zapremina svih tih piramida određen obrascem $V_3 = \frac{4}{6}hS_3$. Stoga je

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S_3).$$

Definicija: Poliedar kome su dve pljosni ω_1 i ω_2 poligonske površi sadržane u dvema uporednim ravnima, a ostale pljosni su trougaone i četvorougaone površi kojima se temena poklapaju sa temenima površi ω_1 i ω_2 naziva se prizmatoid. Pljosni ω_1 i ω_2 su osnove, a ostale pljosni su bočne pljosni tog prizmatoida. Normalno odstojanje između ravni koje su određene osnovama ω_1 i ω_2 je visina prizmatoida. Osnove prizmatoida mogu, ali i ne moraju imati jednak broj stranica. Prizma je specijalan prizmatoid.

Zadatak 149: Ako je S površina i V zapremina jednakostrane kupe, a S_1 površina i V_1 zapremina kugle upisane u toj kupi, dokazati da je

a) $S_1 : S = 4 : 9$;

b) $V_1 : V = 4 : 9$.

Dokaz: Ako obeležimo sa r poluprečnik osnove, sa h visinu i sa l izvodnicu jednakostrane kupe, a sa ρ poluprečnik kugle upisane u toj kupi, imamo da je

$$r = \rho\sqrt{3},\ h = 3\rho,\ l = 2r = 2\rho\sqrt{3}.$$

Otuda je

$$a)\ S_1 = 4\rho^2\pi \quad i \quad S = r\pi(r+l) = 9\rho^2\pi,$$

i prema tome $S_1 : S = 4 : 9$.

$$b)\ V_1 = \frac{4}{3}\rho^3\pi \quad i \quad V = \frac{r^2\pi}{3} = \frac{9}{3}\rho^3\pi,$$

i prema tome $V_1 : V = 4 : 9$.

Zadatak 150: Ako su V_a, V_b, V_c zapremine tela koja nastaju obrtanjem pravouglog trougla oko hipotenuze a i kateta b i c, dokazati da je

$$\frac{1}{V_a^2} = \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2}.$$

Dokaz: Tela koja nastaju obrtanjem pravouglog trougla oko njegovih stranica su kupe. Ako sa h obeležimo visinu koja odgovara hipotenuzi imamo da je

$$V_a^2 = \frac{\pi}{3}ah^2,\ V_b^2 = \frac{\pi}{3}bc^2,\ V_c^2 = \frac{\pi}{3}cb^2.$$

Koristeći jednakosti

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2} \quad i \quad bc = ah,$$

nalazimo da je

$$\frac{1}{V_a^2} = \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2}.$$

Zadatak 151: Ako je O proizvoljna unutrašnja tačka konveksnog poliedra $\prod$ s jednakim pljosnima, dokazati da je zbir odstojanja te tačke od ravni svih njegovih pljosni konstantan.

Dokaz: Ako sa N_1,...,N_n obeležimo podnožja upravnih kroz tačku O na ravnima svih pljosni ω_1,...,ω_n poliedra $\prod$, sa d_1,...,d_n dužine odsečaka ON_1,...,ON_n i sa S_1,...,S_n površine pljosni ω_1,...,ω_n, a sa S i V površinu i zapreminu poliedra $\prod$, biće

$$V = \frac{1}{3}(S_1d_1 + ... + S_nd_n).$$

S obzirom da je S_1=S_2=...=S_n, imamo da je

$$V = \frac{S}{3}(d_1 + d_2 + ... + d_n),$$

i prema tome

$$d_1 + ... + d_n = \frac{3V}{S}.$$

<u>Zadatak 152:</u> Ako su A, B, C, D tačke u kojima neka ravan π seče ivice roglja S, pravilnog oktaedra, dokazati da je

$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SC} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SD}.$$

<u>Dokaz:</u> Obeležimo sa M tačku u kojoj dijagonala iz temena S oktaedra prodire ravan π, a sa h odstojanje tačke M od polupravih SA, SB, SC, SD. Tačka M je presek simetrale ugla S sa hipotenuzom AC pravouglog trougla ASC, pa je

$$SA \cdot h + SC \cdot h = SA \cdot SC.$$

Otuda je

$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SC} = \frac{1}{h}.$$

Isto tako je

$$\frac{1}{SB} + \frac{1}{SD} = \frac{1}{h},$$

pa je

$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SC} = \frac{1}{SB} + \frac{1}{SD}.$$

<u>Zadatak 153:</u> Ako su A, B, C, D tačke u kojima neka ravan π seče ivice roglja S pravilnog oktaedra, M tačka u kojoj dijagonala iz temena S tog oktaedra prodire ravan π i h odstojanje tačke M od polupravih SA, SB, SC, SD, dokazati da je

$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SB} + \frac{1}{SC} + \frac{1}{SD} = \frac{2}{h}.$$

<u>Dokaz:</u> Pri dokazivanju prethodnog stava, dobili smo da je

$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SC} = \frac{1}{h} \quad i \quad \frac{1}{SB} + \frac{1}{SD} = \frac{1}{h},$$

pa je

$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SB} + \frac{1}{SC} + \frac{1}{SD} = \frac{2}{h}.$$

Zadatak 154: (Teorema Van Obela). Ako je $ABCD$ proizvoljan tetraedar i O tačka prostora takva da ravni OBC, OCA, OAB seku respektivno prave AD, BD, CD u tačkama A', B', C', a prava DO prodire ravan ABC u nekoj tački D', dokazati da je

$$\frac{DO}{OD'} = \frac{DA'}{A'A} + \frac{DB'}{B'B} + \frac{DC'}{C'C}.$$

Dokaz: Obeležimo sa A'', B'', C'' tačke u kojima prave kroz temena A, B, C, uporedne sa pravom DD', prodiru ravni OBC, OCA, OAB, a sa P, Q, R tačke u kojima prave AD', BD, CD' seku prave BC, CA, AB. Pri tome je

$$\frac{DO}{A''A} = \frac{DA'}{A'A}, \quad \frac{DO}{B''B} = \frac{DB'}{B'B}, \quad \frac{DO}{C''C} = \frac{DC'}{C'C}$$

i

$$\frac{OD'}{A''A} = \frac{D'P}{AP}, \quad \frac{OD'}{B''B} = \frac{D'Q}{BQ}, \quad \frac{OD'}{C''C} = \frac{D'R}{CR}.$$

Sabiranjem odgovarajućih strana prvih triju jednakosti, zatim ostalih triju jednakosti i deljenjem ostalih nalazimo da je

$$\frac{DO(\frac{1}{A''A} + \frac{1}{B''B} + \frac{1}{C''C})}{OD'(\frac{1}{A''A} + \frac{1}{B''B} + \frac{1}{C''C})} = \frac{\frac{DA'}{A'A} + \frac{DB'}{B'B} + \frac{DC'}{C'C}}{\frac{D'P}{AP} + \frac{D'Q}{BQ} + \frac{D'R}{DR}}$$

Dobija se da je

$$\frac{DO}{OD'} = \frac{DA'}{A'A} + \frac{DB'}{B'B} + \frac{DC'}{C'C}.$$

Zadatak 155: Ako su h_a, h_b, h_c, h_d dužine visina tetraedra $ABCD$ i ρ dužina poluprečnika lopte upisane u taj tetraedar, dokazati da je

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} = \frac{1}{\rho}.$$

Dokaz: Ako sa a, b, c, d obeležimo površine pljosni BCD, SDA, DAB, ABC i sa V zapreminu tetraedra $ABCD$, biće

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{3V}, \frac{1}{h_b} = \frac{b}{3V}, \frac{1}{h_c} = \frac{c}{3V}, \frac{1}{h_d} = \frac{d}{3V} \quad i \quad a + b + c + d = \frac{3V}{\rho},$$

pa je

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} = \frac{a+b+c+d}{3V} = \frac{1}{\rho}.$$

Zadatak 156: Ako je ρ poluprečnik sfere upisane u tetraedar $ABCD$ i ako su ρ_a, ρ_b, ρ_c, ρ_d poluprečnici spolja upisanih sfera tog tetraedra koje respektivno dodiruju pljosni BCD, CDA, DAB, ABC, dokazati da je

$$\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}+\frac{1}{\rho_d}=\frac{2}{\rho}.$$

Dokaz: Obeležimo sa V zapreminu tetraedra $ABCD$, a sa a, b, c, d površine njegovih pljosni BCD, CDA, DAB, ABC i sa S_a središte spolja upisane sfere tog tetraedra koja dodiruje pljosan BCD. Pri tome je

$$V=V(ACDS_a)+V(ABDS_a)+V(ABCS_a)-V(BCDS_a)=\frac{1}{3}(b+c+d-a)\rho_a,$$

tj.

$$\frac{1}{\rho_a}=\frac{1}{3V}(b+c+d-a).$$

Isto tako je

$$\frac{1}{\rho_b}=\frac{1}{3V}(c+d+a-b),\ \frac{1}{\rho_c}=\frac{1}{3V}(d+a+b-c),\ \frac{1}{\rho_d}=\frac{1}{3V}(a+b+c-d).$$

Sabiranjem odgovarajućih strana dobijenih jednakosti, nalazimo da je

$$\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}+\frac{1}{\rho_d}+\frac{2}{3V}(a+b+c+d)=\frac{2}{\rho}.$$

Zadatak 157: Ako su h_a, h_b, h_c, h_d visine tetraedra $ABCD$, a $\rho_a, \rho_b, \rho_c, \rho_d$ poluprečnici spolja upisanih sfera tog tetraedra koje respektivno dodiruju pljosni BCD, CDA, DAB, ABC dokazati da je

$$\frac{1}{\rho_a^2}+\frac{1}{\rho_b^2}+\frac{1}{\rho_c^2}+\frac{1}{\rho_d^2}=4(\frac{1}{\rho_a^2}+\frac{1}{\rho_b^2}+\frac{1}{\rho_c^2}+\frac{1}{\rho_d^2}).$$

Dokaz: Ako obeležimo sa V i S zapreminu i površinu tetraedra $ABCD$, a sa a, b, c, d površine njegovih pljosni BCD, CDA, DAB, ABC, biće

$$\frac{1}{\rho_a}=\frac{1}{3V}(b+c+d-a)=\frac{S-2a}{3V},\ \frac{1}{\rho_b}=\frac{S-2b}{3V},\ \frac{1}{\rho_c}=\frac{S-2c}{3V},\ \frac{1}{\rho_d}=\frac{S-2d}{3V},$$

pa je

$$\frac{1}{\rho_a^2}+\frac{1}{\rho_b^2}+\frac{1}{\rho_c^2}+\frac{1}{\rho_d^2}=\frac{1}{9V^2}[(S-2a)^2+(S-2b)^2+(S-2c)^2+(S-2d)^2]=$$
$$=\frac{4}{9V^2}(a^2+b^2+c^2+d^2) \qquad (1)$$

S druge strane imamo da je

$$\frac{1}{h_a}=\frac{a}{3V},\ \frac{1}{h_b}=\frac{b}{3V},\ \frac{1}{h_c}=\frac{c}{3V},\ \frac{1}{h_d}=\frac{d}{3V},$$

pa je

$$\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}+\frac{1}{h_d^2}=\frac{1}{9V^2}(a^2+b^2+c^2+d^2) \qquad (2)$$

Iz jednakosti (1) i (2) nalazimo da je

$$\frac{1}{\rho_a^2}+\frac{1}{\rho_b^2}+\frac{1}{\rho_c^2}+\frac{1}{\rho_d^2}=4(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}+\frac{1}{h_d^2}).$$

Zadatak 158: Ako su h_a, h_b, h_c, h_d dužine visina tetraedra $ABCD$ i k_a, k_b, k_c, k_d odstojanja proizvoljne tačke O koja se nalazi u tom tetraedru od ravni BCD,CDA, DAB,ABC, dokazati da je

$$\frac{k_a}{h_a}+\frac{k_b}{h_b}+\frac{k_c}{h_c}+\frac{k_d}{h_d}=1.$$

Dokaz: Obeležimo sa a,b,c,d površine pljosni BCD,CDA,DAB,ABC i sa V zapreminu tetraedra $ABCD$. Kako je tačka O u tetraedru $ABCD$, biće

$$ak_a+bk_b+ck_c+dk_d=3V.$$

Otuda i iz jednakosti

$$a=\frac{3V}{h_a},\quad b=\frac{3V}{h_b},\quad c=\frac{3V}{h_c},\quad d=\frac{3V}{h_d}$$

nalazimo da je

$$\frac{k_a}{h_a}+\frac{k_b}{h_b}+\frac{k_c}{h_c}+\frac{k_d}{h_d}=1.$$

Zadatak 159: Ako je O proizvoljna tačka koja se nalazi u tetraedru $ABCD$ i ako su A',B',C',D' tačke u kojima prave AO,BO,CO,DO prodiru respektivno pljosni BCD,CDA,DAB,ABC, dokazati da je

a) $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1;$

b) $\frac{AO}{AA'} + \frac{BO}{BB'} + \frac{CO}{CC'} + \frac{DO}{DD'} = 3.$

Dokaz:

a) Ako obeležimo sa h_a, h_b, h_c, h_d visine tetraedra $ABCD$ i sa k_a, k_b, k_c, k_d odstojanja tačke O od ravni BCD, CDA, DAB, ABC, biće

$$\frac{k_a}{h_a} = \frac{OA'}{AA'}, \quad \frac{k_b}{h_b} = \frac{OB'}{BB'}, \quad \frac{k_c}{h_c} = \frac{OC'}{CC'}, \quad \frac{k_d}{h_d} = \frac{OD'}{DD'}.$$

Prema zadatku 158. imamo da je

$$\frac{k_a}{h_a} + \frac{k_b}{h_b} + \frac{k_c}{h_c} + \frac{k_d}{h_d} = 1,$$

pa je

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1.$$

b) Kako je $AO = AA' - OA'$, $BO = BB' - OB'$, $CO = CC' - OC'$, $DO = DD' - OD'$, biće

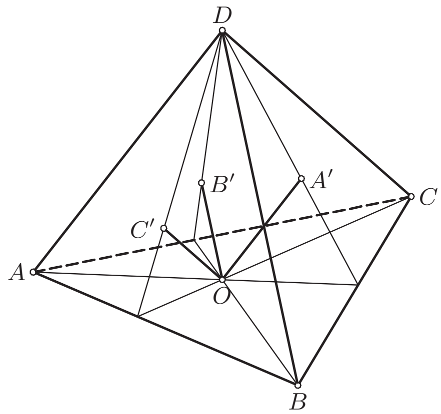
$$\begin{aligned} &\frac{AO}{AA'} + \frac{BO}{BB'} + \frac{CO}{CC'} + \frac{DO}{DD'} = \\ &= \frac{AA' - OA'}{AA'} + \frac{BB' - OB'}{BB'} + \frac{CC' - OC'}{CC'} + \frac{DD' - OD'}{DD'} = \\ &= 4 - \left(\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'}\right) = 4 - 1 = 3. \end{aligned}$$

Zadatak 160: Ako su A'', B'', C'', D'' tačke u kojima prave određene visinama AA', BB', CC', DD' tetraedra $ABCD$ prodiru sferu opisanu oko tog tetraedra, dokazati da je

$$\frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'} + \frac{DD''}{DD'} = 6.$$

Zadatak 161: Ako je O proizvoljna tačka pljosni ABC tetraedra $ABCD$ i ako su A', B', C' tačke u kojima prave kroz O uporedne s ivicama AD, BD, CD prodiru pljosni BCD, CAD, ABD, dokazati da je

$$\frac{OA'}{AD} + \frac{OB'}{BD} + \frac{OC'}{CD} = 1.$$



Slika uz zadatak 161

Dokaz: Trougaonim površinama OAD, OBD, OCD tetraedar $ABCD$ je razložen na tetraedre $OBCD$, $OACD$, $OABD$. Tetraedri $OBCD$ i $ABCD$ imaju zajedničku pljosan BCD kojoj odgovaraju visine OO_1 i AA_1 tih tetraedara, pa je

$$V(OBCD) : V(ABCD) = OO_1 : AA_1.$$

Ravan određena uporednim pravama AD i OA' po pravoj AO koja pripada ravni ABC i seče duž BC u nekoj tački P. Pri tome je $\triangle POO_1 \sim \triangle PAA_1$ i $\triangle POA' \sim \triangle PAD$, pa je

$$OO_1 : AA_1 = OP : AP \quad i \quad OA' : AD = OP : AP.$$

Iz ovih dveju proporcija sledi sledi da je

$$OO_1 : AA_1 = OA' : AD,$$

pa je

$$V(OBCD) : V(ABCD) = OA' : AD.$$

Isto tako je

$$V(OACD) : V(ABCD) = OB' : BD, \quad V(OABD) : V(ABCD) = OC' : CD.$$

Otuda je

$$\frac{OA'}{AD} + \frac{OB'}{BD} + \frac{OC'}{CD} = \frac{1}{V(ABCD)}\left[V(OBCD) + V(OACD) + V(OABD)\right] = 1$$

Zadatak162: Ako su A', B', C', D' tačke u kojima proizvoljna prava p kroz težiste T tetraedra $ABCD$ prodire ravni BCD, CDA, DAB, ABC dokazati da je

$a)$
$$\frac{1}{TA'} = \frac{1}{TB'} + \frac{1}{TC'} + \frac{1}{TD'},$$

ako je A' s jedne, a B', C', D' s druge strane od T;

b) $$\frac{1}{TA'}+\frac{1}{TB'}=\frac{1}{TC'}+\frac{1}{TD'},$$

ako su A' i B' s jedne, a C' i D' s druge strane od T.

Dokaz: Neka je Π proizvoljna ravan upravna na pravoj p i neka su A'', B'', C'', D'' upravne projekcije tačaka A, B, C, D na tu ravan. S obzirom da prava p prodire ravni svih pljosni tetraedra $ABCD$ i da je ravan Π upravna na pravoj p, nikoje dve od tačaka A'', B'', C'', D'' se ne poklapaju i nikoje tri ne pripadaju jednoj pravoj. Dakle, jedna od tih tačaka nalazi se u trouglu koji je određen ostalim trima tačkama, ili se pak nijedna od tih tačaka ne nalazi u trouglu koji je određen ostalim trima tačkama. Neka je npr. tačka A'' u trouglu $B''C''D''$. U tom slučaju biće na pravoj p tačke B', C', D' s jedne, a tačka A' s druge strane od tačke T. Sem toga je

$$S(B''C''D'')=S(A''B''C'')+S(A''C''D'')+S(A''D''B'').$$

S obzirom da su tetraedri $TBCD$, $TCDA$, $TDAB$, $TABC$ jednaki i da je

$$V(TBCD)=\frac{1}{3}S(B''C''D'')TA',$$

$$V(TCDA)=\frac{1}{3}S(C''D''A'')TB',$$

$$V(TDAB)=\frac{1}{3}S(D''A''B'')TC',$$

$$V(TABC)=\frac{1}{3}S(A''B''C'')TD',$$

biće

$$S(B''C''D'')TA'=S(C''D''A'')TB'=S(D''A''B'')TC'=S(A''B''C'')TD'.$$

Otuda je

$$\begin{aligned}\frac{S(B''C''D'')}{\frac{1}{TA'}}=\frac{S(C''D''A'')}{\frac{1}{TB'}}&=\frac{S(D''A''B'')}{\frac{1}{TC'}}=\frac{S(A''B''C'')}{\frac{1}{TD'}}\\&=\frac{S(C''D''A'')+S(D''A''B'')+S(A''B''C'')}{\frac{1}{TB'}+\frac{1}{TC'}+\frac{1}{TD'}}\end{aligned}$$

i prema tome

$$\frac{1}{TA'} = \frac{1}{TB'} + \frac{1}{TC'} + \frac{1}{TD'}.$$

Ako je tačka A'' izvan trougla $B''C''D''$, biće npr.

$$S(A''B''C'') = S(A''C''D'') = S(A''B''D'') + S(B''C''D'').$$

U tom slučaju su tačke A' i B' s jedne, a tačke C' i D'' s druge strane od tačke T. Pri tome je takođe

$$\frac{S(B''C''D'')}{\frac{1}{TA'}} = \frac{S(C''D''A'')}{\frac{1}{TB'}} = \frac{S(D''A''B'')}{\frac{1}{TC'}} = \frac{S(A''B''C'')}{\frac{1}{TD'}},$$

pa je

$$\frac{S(B''C''D'') + S(C''D''A'')}{\frac{1}{TA'} + \frac{1}{TB'}} = \frac{S(D''A''B'') + S(A''B''C'')}{\frac{1}{TC'} + \frac{1}{TD'}}.$$

Otuda je

$$\frac{1}{TA'} + \frac{1}{TB'} = \frac{1}{TC'} + \frac{1}{TD'}.$$

Zadatak 163: Ako je r poluprečnik osnove i h visina prave kružne kupe, a ρ poluprečnik sfere upisane u toj kupi, dokazati da je

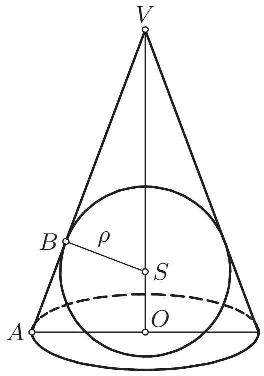
$$\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{2}{\rho^h}.$$

Dokaz: Ako obeležimo sa O središte osnove i sa V vrh prave kružne kupe, sa S središte sfere upisane u toj kupi i sa B tačku u kojoj proizvoljna izvodnica AV te kupe dodiruje upisanu sferu,imamo da je $\triangle VSB \sim \triangle VAO$, pa je

$$\frac{SB}{OA} = \frac{VB}{VO},$$

tj.

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\sqrt{(h-\rho)^2 - \rho^2}}{h} = \frac{\sqrt{h^2 - 2\rho h}}{h}.$$



Slika uz zadatak 163

Otuda je

$$\frac{\rho^2}{r^2} = 1 - \frac{2\rho}{h},$$

i prema tome

$$\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{2}{\rho^h}.$$

Zadatak 164: Dokazati da je kod svakog tetraedra $ABCD$

$$AD + BD + CD > \frac{1}{2}(AB + BC + CA).$$

Dokaz: Kod trouglova ABD, BCD,CAD je

$$AD + BD > AB, \quad BD + CD > BC, \quad CD + AD > CA,$$

pa je

$$AD + BD + CD > \frac{1}{2}(AB + BC + CA).$$

Zadatak 165: Ako je O proizvoljna tačka u tetraedru $ABCD$, dokazati da je

$$OA + OB + OC + OD > \frac{1}{3}(AD + BD + CD + AB + BC + CA).$$

Dokaz: Saglasno prethodnom zadatku, kod tetraedra $OABC$, $OACD$, $OADB$, $OBCD$ imamo da je

$$OA + OB + OC > \frac{1}{2}(AB + BC + CA),$$

$$OA + OC + OD > \frac{1}{2}(AC + CD + DA),$$

$$OA + OD + OB > \frac{1}{2}(AD + DB + BA),$$

$$OA+OB+OC>\frac{1}{2}(BC+CD+DB).$$

Sabiranjem odgovarajućih strana ovih nejednakosti nalazimo da je

$$OA+OB+OC+OD>\frac{1}{3}(AD+BD+CD+AB+BC+CA).$$

Zadatak 166: Ako su a, b, c ivice i d dijagonala pravouglog paralelepipeda, dokazati da je

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(a+b+c)\leq d<a+b+c.$$

Dokaz: S obzirom da je

$$d^2=a^2+b^2+c^2 \quad i \quad a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}(a+b+c)^2,$$

biće

$$d^2\geq\frac{1}{3}(a+b+c)^2,$$

i prema tome

$$d\geq\frac{\sqrt{3}}{3}(a+b+c).$$

Da bismo dokazali drugi deo ovog zadatka, obelezimo sa d_1 dijagonalu pljosni kojoj su ivice a i b. Pri tome je

$$d<d_1+c \quad i \quad d_1<a+b,$$

pa je

$$d<a+b+c.$$

Zadatak 167: Ako je O proizvoljna tačka iz unutrašnjosti tetraedra $ABCD$ i ako su A', B', C', D' tačke u kojima prave AO, BO, CO, DO prodiru respektivno pljosni BCD, CDA, DAB, ABC, dokazati da je

$a)$
$$\frac{AA'}{AO}+\frac{BB'}{BO}+\frac{CC'}{CO}+\frac{DD'}{DO}\geq\frac{16}{3};$$

$b)$
$$\frac{AA'}{OA'}+\frac{BB'}{OB'}+\frac{CC'}{OC'}+\frac{DD'}{OD'}\geq 16.$$

Dokaz:
a) Prema zadatku 159, imamo da je

$$\left(\frac{AO}{AA'}+\frac{BO}{BB'}+\frac{CO}{CC'}+\frac{DO}{DD'}\right)\left(\frac{AA'}{AO}+\frac{BB'}{BO}+\frac{CC'}{CO}+\frac{DD'}{DO}\right)\geq 16,$$

a prema zadatku 159(a), da je

$$\frac{AO}{AA'}+\frac{BO}{BB'}+\frac{CO}{CC'}+\frac{DO}{DD'}=3,$$

pa je

$$\frac{AA'}{AO}+\frac{BB'}{BO}+\frac{CC'}{CO}+\frac{DD'}{DO}\geq\frac{16}{3}.$$

b) Prema zadatku 159, imamo da je

$$\left(\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}\right)\left(\frac{AA'}{OA'}+\frac{BB'}{OB'}+\frac{CC'}{OC'}+\frac{DD'}{OD'}\right)\geq 16,$$

a prema zadatku 159(b), da je

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=1,$$

pa je

$$\frac{AA'}{OA'}+\frac{BB'}{OB'}+\frac{CC'}{OC'}+\frac{DD'}{OD'}\geq 16.$$

Zadatak 168: Ako je proizvoljna tačka iz unutrašnjosti tetraedra $ABCD$ i ako su A', B', C' tačke u kojima prave AO, BO, CO, DO prodiru respektivno pljosni BCD, CDA, DAB, ABC dokazati da je

a)
$$\frac{OA'}{AA'}\cdot\frac{OB'}{BB'}\cdot\frac{OC'}{CC'}\cdot\frac{OD'}{DD'}\leq\frac{1}{256};$$

b)
$$\frac{AO}{AA'}\cdot\frac{BO}{BB'}\cdot\frac{CO}{CC'}\cdot\frac{DO}{DD'}\leq\frac{81}{256}.$$

Dokaz:
a) Prema zadatku 159(a), imamo da je

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=1.$$

S obzirom da je zbir svih ovih razmera stalan, njihov proizvod biće maksimalan ako su te razmere među sobom jednake, tj. ako je

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{OB'}{BB'} = \frac{OC'}{CC'} = \frac{OD'}{DD'} = \frac{1}{4}.$$

Stoga je

$$\frac{OA'}{AA'} \cdot \frac{OB'}{BB'} \cdot \frac{OC'}{CC'} \cdot \frac{OD'}{DD'} \leq (\frac{1}{4})^4 = \frac{1}{256}.$$

b) Prema zadatku 159(b), imamo da je

$$\frac{AO}{AA'} + \frac{BO}{BB'} + \frac{CO}{CC'} + \frac{DO}{DD'} = 3.$$

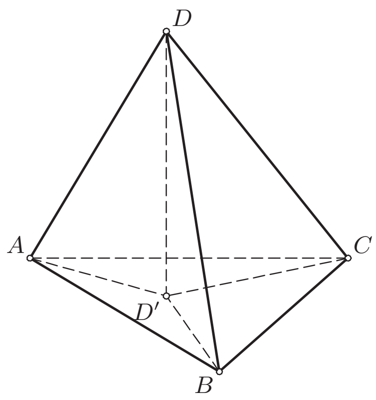
S obzirom da je zbir svih ovih razmera stalan, njihov proizvod biće maksimalan ako su te razmere među sobom jednake, tj. ako je

$$\frac{AO}{AA'} = \frac{BO}{BB'} = \frac{CO}{CC'} = \frac{DO}{DD'} = \frac{3}{4}.$$

Stoga je

$$\frac{AO}{AA'} \cdot \frac{BO}{BB'} \cdot \frac{CO}{CC'} \cdot \frac{DO}{DD'} \leq (\frac{3}{4})^4 = \frac{81}{256}.$$

Zadatak 169: Dokazati da je površina bilo koje pljosni tetraedra manja od zbira površina ostalih triju njegovih pljosni.



Slika uz zadatak 169

Dokaz: Upravna projekcija D' temena D na ravni ABC je u trouglu ABC, na njemu, ili izvan njega. Ako je tačka D' u trouglu ABC, imamo da je

$$S(ABC) = S(ABD') + S(BCD') + S(CAD') < S(ABD) + S(BCD) + S(CAD).$$

Ako je tačka D' na trouglu ABC, npr. na stranici BC, imamo da je

$$S(ABC) = S(ABD') + S(ACD') < S(ABD) + S(ACD) + S(BCD).$$

Ako je tačka D' izvan trougla ABC, npr. u uglu BAC, a sa obe strane od prave BC sa koje nije teme A, imamo da je

$$S(ABC) = S(ABD') + S(ACD') - S(BCD) < S(ABD') + S(ACD) <$$
$$< S(ABD) + S(ACD) < S(ABD) + S(ACD) + S(BCD).$$

Zadatak 170: Ako su a, b, c ivice i S površina pravouglog paralelopipeda, dokazati da je

$$S \leq \frac{2}{3}(a+b+c)^2.$$

Dokaz: S obzirom da je

$$S = 2(ab + bc + ca) = (a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

i

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2,$$

pa je

$$S \leq (a+b+c)^2 - \frac{1}{3}(a+b+c)^2,$$

i prema tome

$$S \leq \frac{2}{3}(a+b+c)^2.$$

Zadatak 171: Ako je S površina i V zapremina pravouglog paralelopipeda, dokazati da je

$$S^3 \geq 216V^2.$$

Dokaz: S obzirom da je

$$S = 2(ab + bc + ca) \quad i \quad V = abc,$$

prema nejednakosti za aritmetičku i geometrijsku sredinu, imamo da je

$$(ab + bc + ca)^3 \geq 27a^2b^2c^2,$$

pa je

$$S^3 \geq 216V^2.$$

<u>Zadatak 172:</u> Ako su r i h poluprečnik osnove i visina pravog kružnog valjka, a M površina omotača i V zapremina, dokazati da je

a) $M \leq \frac{\pi}{2}(r+h)^2$;

b) $V \leq \frac{4\pi}{27}(r+h)^3$.

<u>Dokaz:</u>
a) S obzirom da je $M = 2rh\pi$, a prema nejednakosti za geometrijsku i aritmetičku sredinu, imamo da je

$$rh \leq \frac{1}{4}(r+h)^2,$$

pa je

$$M \leq \frac{\pi}{2}(r+h)^2.$$

b) S obzirom da je $V = r^2\pi h$, a prema nejednakosti za geometrijsku i aritmetičku sredinu duži $\frac{r}{2}$, $\frac{r}{2}h$ imamo da je

$$r^2h \leq \frac{4}{27}(r+h)^3,$$

pa je

$$V \leq \frac{4\pi}{27}(r+h)^3.$$

<u>Zadatak 173:</u> Ako je V zapremina, h visina i r poluprečnik srednjeg kruga zarubljene prave kružne kupe, dokazati da je

$$r^2h\pi \leq V \leq \frac{4}{3}r^2h\pi.$$

<u>Dokaz:</u> Ako su r_1 i r_2 poluprečnici osnova zarubljene prave kružne kupe, imamo da je

$$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2).$$

Iz

$$r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2 = (r_1+r_2)^2 - r_1r_2,$$

$$r_1 + r_2 = 2r \quad i \quad r_1r_2 \leq \frac{1}{4}(r_1+r_2)^2$$

sledi da je

$$r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 \geq 3r^2,$$

pa je

$$r^2 h\pi \leq V \leq \frac{4}{3} r^2 h\pi.$$

Zadatak 174: Ako je r poluprečnik osnove, h visina, S površina i V zapremina bilo kojeg kružnog valjka, dokazati da je

$$S^3 \geq 54\pi V^2.$$

Dokaz: S obzirom da je

$$S = 2\pi(r^2 + rh) \quad i \quad V = \pi r^2 h,$$

biće

$$S = 2\pi(r^2 + \frac{V}{\pi r}) = 2\pi(r^2 + \frac{V}{2r\pi} + \frac{V}{2r\pi}).$$

Prema nejednakosti za geometrijsku i aritmetičku sredinu, imamo da je

$$(r^2 + \frac{V}{2r\pi} + \frac{V}{2r\pi})^3 \geq 27\frac{V^2}{4\pi^2},$$

pa je

$$S^3 \geq 54\pi V^2.$$

Zadatak 175: Ako je V zapremina, h visina i r poluprečnik srednjeg kruga loptičnog sloja, dokazati da je

$$\frac{h^3\pi}{6} + r^2 h\pi \leq V \leq \frac{h^3\pi}{6} + 2r^2 h\pi.$$

Dokaz: Ako su r_1 i r_2 poluprečnici krugova koji određuju loptin sloj, biće

$$V = \frac{h^3\pi}{6} + \frac{h\pi}{2}(r_1^2 + r_2^2).$$

S obzirom da je

$$\frac{(r_1 + r_2)^2}{2} \leq r_1^2 + r_2^2 \leq (r_1 + r_2)^2 \quad i \quad r_1 + r_2 = 2r,$$

biće

$$2r^2 \le r_1^2 + r_2^2 \le 4r^2,$$

pa je

$$\frac{h^3\pi}{6} + r^2h\pi \le V \le \frac{h^3\pi}{6} + 2r^2h\pi.$$

Zadatak 176: Ako su h_a, h_b, h_c, h_d visine tetraedra $ABCD$ i ρ poluprečnik lopte upisane u taj tetraedar, dokazati da je

$$h_ah_bh_ch_d \ge 256\rho^4.$$

Dokaz: Prema zadatku 155. imamo da je

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} = \frac{1}{\rho}.$$

S obzirom da je zbir ovih sabiraka stalan, njihov proizvod biće najveći ako je

$$\frac{1}{h_a} = \frac{1}{h_b} = \frac{1}{h_c} = \frac{1}{h_d} = \frac{1}{4\rho}.$$

Stoga je

$$\frac{1}{h_a} \cdot \frac{1}{h_b} \cdot \frac{1}{h_c} \cdot \frac{1}{h_d} \le \frac{1}{256\rho^4},$$

i prema tome $h_ah_bh_ch_d \ge 256\rho^4$.

Zadatak 177: Ako su h_a, h_b, h_c, h_d visine tetraedra $ABCD$ i ρ poluprečnik lopte upisane u taj tetraedar, dokazati da je

$$h_a + h_b + h_c + h_d \ge 16\rho.$$

Dokaz: Prema nejednakosti za aritmetičku i geometrijsku sredinu, imamo da je

$$h_a + h_b + h_c + h_d \ge 4\sqrt[4]{h_ah_bh_ch_d},$$

a prema prethodnom zadatku

$$h_ah_bh_ch_d \ge 256\rho^4,$$

pa je $h_a + h_b + h_c + h_d \ge 16\rho$.

Zadatak 178: Ako su h_a, h_b, h_c, h_d visine tetraedra $ABCD$, k_a, k_b, k_c, k_d odstojanja proizvoljne tačke O koja se nalazi u tetraedru $ABCD$ od ravni BCD, CDA, DAB, ABC, dokazati da je

$$min(h_a, h_b, h_c, h_d) \leq k_a + k_b + k_c + k_d \leq max(h_a, h_b, h_c, h_d).$$

Dokaz: Obeležimo sa a, b, c, d površine pljosni $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$ i sa V zapreminu tetraedra $ABCD$. S obzirom da je tačka O u tetraedru, biće

$$ak_a + bk_b + ck_c + dk_d = 3V.$$

Ako pretpostavimo da je površina a najveća, biće

$$ak_a + ak_b + ak_c + ak_d \geq 3V,$$

tj.

$$k_a + k_b + k_c + k_d \geq \frac{3V}{a},$$

i prema tome

$$k_a + k_b + k_c + k_d \geq h_a.$$

Stoga je

$$k_a + k_b + k_c + k_d \geq min(h_a, h_b, h_c, h_d).$$

Ako pretpostavimo da je površina a najmanja, biće

$$ak_a + ak_b + ak_c + ak_d \leq 3V,$$

tj.

$$k_a + k_b + k_c + k_d \leq \frac{3V}{a},$$

i prema tome

$$k_a + k_b + k_c + k_d \leq h_a.$$

Otuda je

$$min(h_a, h_b, h_c, h_d) \leq k_a + k_b + k_c + k_d \leq max(h_a, h_b, h_c.h_d).$$

Zadatak 179: Ako su h_a, h_b, h_c, h_d visine tetraedra $ABCD$ i ρ poluprečnik sfere upisane u taj tetraedar, dokazati da je

$$min(h_a, h_b, h_c, h_d) \leq 4\rho \leq max(h_a, h_b, h_c.h_d).$$

Dokaz: Ako obeležimo sa S središte sfere upisane u tetraedar $ABCD$, biće odstojanja k_a, k_b, k_c, k_d tačke S od pljosni BCD, CDA, DAB, ABC jednaka duži ρ, pa je prema prethodnom zadatku

$$min(h_a, h_b, h_c, h_d) \leq 4\rho \leq max(h_a, h_b, h_c.h_d)$$

Zadatak 180: Ako je d dijametar ograničenog prostornog lika ω, dokazati da postoji pravilan tetraedar ivice $a \leq \sqrt{6}d$ koji sadrži lik ω.

Dokaz: Obeležimo sa $ABCD$ bilo koji pravilan tetraedar koji je opisan oko lika ω , sa $A'B'C'D'$ njemu homotetičan tetraedar koji je takođe opisan oko lika ω i sa O proizvoljnu tačku koja se nalazi u svakom od ta dva tetraedra. Neka su P, Q, R, S upravne projekcije tačke O na pljosnima koje se nalaze naspram temena A, B, C, D tetraedra $ABCD$ a P', Q', R', S' upravne projekcije tačke O na pljosnima koje se nalaze naspram temena A', B', C', D' tetraedra $A'B'C'D'$. Prema poznatom stavu, imamo da je zbir duži OP, OQ, OR, OS jednak visini h tetraedra $ABCD$, a zbir duži OP', OQ', OR', OS' jednak visini h' tetraedra $A'B'C'D'$. S obzirom da su ravni određene odgovarajućim pljosnima tetraedra $ABCD$ i $A'B'C'D'$ uporedne među sobom, i da svaka od njih sadrži najmanje po jednu tačku datog skupa tačaka kome je i dijametar d, imamo da je

$$OP + OP' \leq d, \quad OQ + OQ' \leq d, \quad OR + OR' \leq d, \quad OS + OS' \leq d.$$

Sabiranjem odgovarajućih strana ovih jednakosti, nalazimo da je

$$OP + OQ + OR + OS + OP' + OQ' + OR' + OS' \leq 4d,$$

tj. da je $h + h' \leq 4d$. Stoga je jedna od visina h i h' tetraedara $ABCD$ i $A'B'C'D'$ manja ili jednaka $2d$, pa je i ivica odgovarajućeg tetraedra manja ili jednaka $\sqrt{6}d$.