Euklidean Geometry

Mića S. Stanković
University of Niš

ПРЕДГОВОР

Ова књига настала је из предавања која су више година уназад држана на Природно математичком факултету у Нишу на департману за математику из предмета *Геометрија* и *Основи геометрије*. Проширивањем и прилагођавањем тих предавања настојао сам да у овој књизи изложим материју која се у оквиру курса *Геометрија* предаје студентима и на другим универзитетима у Србији. Према томе она представља основни уџбеник за овај предмет. Основна идеја програма, а самим тим и овог курса састоји се у презентацији аксиоматске методе у геометрији којом се прилази установљавању и разматрању елементарних геометријских трансформација равни и простора. Овде није био циљ да се из наведеног система аксиома изведу сва тврђења која из њих проистичу, већ да се изведу непосредне теореме и укаже на битне карактеристике које проистичу из одговарајућих група аксиома.

Књига *Еуклидска геометрија* је посвећена пре свега разматрању проблематике еуклидске и апсолутне геометрије. Обрађена материја је подељена у четрнаест делова.

Први део је посвећен пре свега дедуктивној методи у геометрији. Такође, ту се дају основни историјски подаци о развоју геометрије.

Други део под називом *Геометрија поретка* обрађује основне геометријске појмове. Ту је извршена подела аксиома на групе. У овом делу, посебно су обрађене аксиоме инциденције (припадања) и поретка, које са својим последицама чине тзв. *геометрију поретка*.

У трећем делу су обрађени тополошки правилни полиедри и њихове особине.

Четврти и пети део односе се на подударност у геометрији.

Са посебном пажњом у књизи је обрађена проблематика изометријских трансформација апсолутне равни и апсолутног простора.

У осмом делу је обрађена непрекидност у геометрији, при чему се усваја Дедекиндова аксиома као аксиома непрекидности. Из ње се изводе и доказују Архимедов и Канторов став. Обрађене су и друге последице Дедекиндове аксиоме. Доказано је да је Дедекиндова аксиома еквивалентна Архимедовом и Канторовом ставу. Уводи се мерење геометријских ликова и фигура у апсолутном простору.

У деветом делу су обрађени еквиваленти петог Еуклидовог постулата. Тиме се завршава део књиге у коме се не користи појам паралелности. Тај део геометрије познат је под називом *Апсолутна геометрија*. Он представља заједнички део еуклидске и хиперболичке геометрије.

У десетом делу уводи се Плејферова аксиома паралелности и у наставку књиге се обрађују проблеми који су специфични за еуклидску геометрију.

У једанаестом делу обрађене су изометријске трансформације простора E^n $(n = 2, 3)$. Поред раније разматраних особина која су важиле у апсолутној геометрији, у Еуклидској геометрији обрађени су и неки специфични ставови који су директна последица аксиоме паралелности, нпр. то се односи на ставове о односу двеју правих, праве и равни или ставове о односу двеју равни, као и ставове који из њих проистичу. Такође, обухваћене су и неке специфичности које престају да буду везане за базисне праве.

У дванаестом делу обрађене су трансформације сличности које представљају уопштење изометријских трансформација. У овом делу обрађена је и проблематика везана за хомотетију и сличност геометријских ликова.

Геометрија круга и сфере обрађена је у тринаестом делу књиге.

У наставку, изложена је материја везана за инверзију и потенцију у односу на круг и сферу, а такође разложива и допунска једнакост геометријских ликова као и мерење фигура у еуклидској равни и простору.

Рецензентима, др Светиславу Минчићу и др Љубици Велимировић се овом приликом најсрдачније захваљујем за помоћ коју су ми пружили, својим примедбама и сугестијама, у припреми овог уџбеника. Захваљујем се и свима онима који су на било који начин допринели да ова књига угледа светлост дана у овом облику. Наравно бићу захвалан и свима онима који ће својим сугестијама, предлозима и примедбама допринети побољшању овог уџбеника у неком наредном издању.

Ниш, јуна 2014. године Аутор

САДРЖАЈ

Део 1

Увод

1.1 О дедуктивној методи

У изградњи било које ваљано засноване теорије није могуће доказати све ставове и дефинисати све појмове. Наиме, приликом увођења неког новог појма морамо користити неки појам за чије је увођење пак коришћен опет неки појам итд. Да бисмо избегли циклично дефинисање или бесконачни низ дефиниција морамо се у једном тренутку определити да нам неки појмови буду почетни и те појмове ћемо прихватити без дефинисања. Њих ћемо звати *основним* или *недефинисаним* појмовима, док ћемо све остале појмове чији је садржај добијен коришћењем основних појмова звати *дефинисаним* или *изведеним* појмовима. Исказе којима се одређује садржај изведених појмова називамо *дефиницијама*.

Takoђе, приликом утврђивања истинитости неког тврђења неопходно је позивање на друге ставове за које је такође потребно утврдити истинитост уз помоћнеких других тврђења и ставова итд. И овде, уколико желимо да избегнемо циркуларно доказивање, упадамо у бесконачну регресију. Ради тога процес доказивања морамо започети неким ставовима чија се истинитост претпоставља да важи без доказивања. Те почетне ставове зваћемо *аксиомама* или *основним ставовима теорије*. Остале ставове чију истинитост изводимо зваћемо *теоремама* или *изведеним ставовима*.

Једна од важних научних дисциплина која се може засновати у складу са наведеним принципима јесте логика. Свака друга научна теорија која се заснива на наведеним принципима обично је утемељена на већпостојећој логици. У том случају логика се претпоставља. На тај начин појмове логике употребљавамо у формулацијама аксиома, теорема и дефиниција без неког ближег одређења, а логичке ставове примењујемо без посебног доказивања. У изградњи неке математичке дисциплине понекад је поред логике потребно користити и неку другу већзасновану математичку дисциплину. Те научне дисциплине које заједно са логиком претходе заснивању неке математичке теорије називамо претпостављеним дисциплинама. За изградњу геометрије поред логике потребно је претпоставити теорију скупова, а такође и аритметику са теоријом реалних бројева.

Напред описана метода изградње неке математичке теорије назива се *дедуктивна* или *аксиоматска метода*, а на тај начин засноване дисциплине аксиоматским или дедуктивним теоријама.

Ако основне појмове неке дедуктивне теорије заменимо одговарајућим променљивим $x, y, z, \ldots$, онда аксиоме и теореме те теорије постају ваљане формуле $P(x, y, z, \ldots)$, $Q(x, y, z, \ldots)$, $\ldots$ које $x, y, z, \ldots$ садрже као слободне променљиве. У том случају за произвољно изабране објекте $X, Y, Z, \ldots$ можемо установити да ли задовољавају аксиоме, тј. да ли су формуле $P, Q, \ldots$ истините када променљиве $x, y, z, \ldots$ заменимо са $X, Y, Z, \ldots$. Тада за објекте $X, Y, Z, \ldots$ кажемо да представљају *модел* или *реализацију* дедуктивне теорије. У супротном, они нису модел посматране теорије. Приликом изградње неке математичке теорије у великој мери постоји слобода избора како основних појмова тако и система аксиома. За два аксиоматска система сматраћемо да су еквивалентна ако се сваки појам једног од њих може описати преко појмова оног другог и ако се свака аксиома једног може доказати као теорема у оном другом аксиоматском систему. Поред чисто теоријских разлога за избор једног а не неког другог аксиоматског система значајну улогу имају и неки практични, дидактички па у великој мери и естетски разлози.

Без обзира на постојање велике слободе у избору аксиома, то не значи и одсуство било каквих захтева у избору система аксиома неке дедуктивне теорије. Најпре, систем аксиома мора да буде *непротивуречан*, тј. да се из њега не могу истовремено дедуковати неки став и негација тог става. Непротивуречност је безуслован захтев било које дедуктивно засноване теорије, јер у супротном она не би имала смисла. Такође, систем аксиома мора да буде *потпун*. То значи да се од свака два противуречна става бар један може доказати. За став, чија се негација у датој теорији може доказати кажемо да се може оборити у датој теорији. То значи да је систем аксиома потпун ако се сваки став у датој дедуктивној теорији може или доказати или оборити. Потпуност и непротивуречност су особине које нису од истог значаја за дати систем аксиома. Наиме, ако је неки аксиоматски систем непротивуречан, он ће у истој мери бити логички вредан без обзира на то што није потпун. Недостатак непотпуног аксиоматског система јесте што се неки ставови код њега не могу нити доказати нити оборити. Код непотпуног система се додавањем неких аксиома могу доказати или оборити одговарајућа тврђења формулисана у тој теорији, за која раније није постојала таква могућност. Систем аксиома, а такође и систем појмова мора да буде *независан*. То значи да се ни једна од аксиома дате теорије не може доказати уз помоћнеких других аксиома те теорије и да се ни један од основних појмова не може дефинисати помоћу других основних појмова те теорије. С обзиром на то да инсистирање на чињеници да систем аксиома буде *минималан*, може имати за последицу да докази појединих тврђења могу бити гломазни и заморни, може се одустати од принципа минималности, што је уобичајено на пример у средњошколским курсевима.

1.2 Еуклидови Елементи и Пети постулат

Геометрија као наука је поникла из свакодневне праксе. Људи су од давнина били у ситуацију да морају да граде домове и зграде, да трасирају путеве да одређују границе својих поседа и њихове димензије. Такође, постојала је уметничка потреба за украшавањем кућа и одеће стварањем слика из живота и окружења. Све то је изискивало потребу за упознавањем просторних особина објеката на које су у окружењу наилазили. Не једном, те су законитости проверавање и потврђиване, током времена, како опажајно, тако и експериментима. Сазнања до којих се је долазило преношена су са генерације на генерацију најпре усмено а затим и писмено.

Неколико векова пре наше ере, културни народи су располагали подацима о просторним особинама предмета из окружења. Морамо напоменути да та знања нису била систематизована тј. била су формулисана у облику правила и рецепата. На формирање геометрије као науке велики утицај су имали старогрчки филозофи и мислиоци. Они су први формулисали основне ставове науке о законима правилног мишљења, тј. логике. Међу њима најистакнутији из тог времена био је *Аристотел*[1].

Реч геометрија изведена је од две грчке речи: геа($\gamma\acute{\eta}$) - земља и метрео ($\mu\varepsilon\tau\rho\grave{\varepsilon}\omega$) - мерити. Дакле у буквалном преводу сама реч геометрија значи мерење земље.

[1]Аристотел (384. п.н.е-322. п.н.е), старогрчки филозоф и беседник, Платонов ученик и једна од најутицајнијих личности у историји европске мисли.

Постављање аксиома геометрије и испитивање њихових узајамних односа јесте задатак који је још од давнина био предмет многобројних изврсних расправа математичке литературе. Овај задатак своди се на логичку анализу наших просторних опажаја.

Прве кораке у систематизацији геометрије начинио је *Хипократ са Хиоса*[2] у свом делу *Елементи* пре две и по хиљаде година. Нажалост, његово дело није сачувано. Након њега, *Леон* је под утицајем *Платона*[3] саставио нове Елементе око 370. године старе ере. Потпуније Елементе написао је *Теудије из Магнезије*, које је допунио *Хермотим из Колофона.* И ова дела су изгубљена током историје. Њихов значај за историју математике је у утицају који су извршила на *Еуклида* и његово научно стваралаштво. Далеко најчувеније и најчитаније дело из тог времена јесу *Елементи* које је *Еуклид*[4] написао око 300. године старе ере, а које се састоји од тринаест књига. Значај Еуклидових Елемената огледа се у томе што је више од два миленијума то дело било основ сваког образовања. Оно је било преведено на језике свих културних народа света. Захваљујући делу какво је Еуклидови елементи, геометрија је вековима доживљавана као савршенство, а сва остала систематизована знања равнала су се према њој и са њом упоређивала.

На основу превода Еуклидових Елемената који је урадио Антон Билимовић, у наставку ћемо изложити основне дефиниције, аксиоме и постулате из овог дела.

Основне дефиниције које је Еуклид увео у својим Елементима су:

1. *Тачка је оно што нема делова.*
2. *Линија је дужина без ширине.*
3. *Крајеви линије су тачке.*
4. *Права је линија она, која за тачке на њој подједнако лежи.*
5. *Површина је оно што има само дужину и ширину.*
6. *Крајеви површине су линије.*
7. *Раван је површина која за праве на њој подједнако лежи.*
8. *Угао у равни је узајамни нагиб двеју линија у равни које се секу и које не леже у истој правој.*

---

[2]Хипократ са Хиоса (470. пне-око 410. пне) старогрчки математичар, геометричар и астроном.

[3]Платон (427. пне-347. пне) старогрчки филозоф и беседник, Сократов уценик, Аристотелов уцитељ и оснивац Академије у Атини.

[4]Еуклид (330. пне-275. пне) грчки математичар из Атине. Живео је и радио у Александрији где је створио математичку школу. Написао је бројна дела, од којих нека нису сачувана и позната су само по наслову. Сачувана дела су: "Елементи" (геометрија као наука о простору) у 13 књига, "Дата" (о условима задавања неког математичког објекта), "Оптика" (с теоријом перспективе), и др.

9. *Ако су линије које образују угао праве, угао се зове праволинијски.*

10. *Ако права, која стоји на другој правој, образује са овом два суседна једнака угла, сваки од њих је прав, а подигнута права зове се нормала на оној на којој стоји.*

11. *Туп угао је онај који је већи од правог.*

12. *Оштар угао је онај који је мањи од правог.*

13. *Граница је оно што је крај ма чега.*

14. *Фигура је оно што је омеђено или једном или са више граница.*

15. *Круг је равна фигура омеђена таквом једном линијом, која се зове периферија, да су све праве повучене од једне тачке, која се налази у самој фигури, према тој линији међусобно једнаке.*

16. *Ова тачка зове се средиште круга.*

17. *Пречник круга је свака права што пролази кроз средиште круга а ограничена је са сваке стране периферијом круга. Он полови круг.*

18. *Полукруг је фигура ограничена пречником и њиме одвојеном периферијом круга. Средиште полукруга је исто као и средиште круга.*

19. *Праволинијске фигуре су оне које су ограничене правама; тростране су ограничене са три, четворостране са четири, многостране са више од четири праве.*

20. *Од тространих фигура једнакострани троугао има три једнаке стране, једнакокраки има само две једнаке стране, а разнострани има три неједнаке стране.*

21. *Даље, од тространих је правоугли троугао онај који има прав угао, тупоугли онај који има туп угао, а оштроугли онај који има три оштра угла.*

22. *Од четвоространих фигура квадрат је једнакостран и са правим угловима; правоугаоник је са правим угловима али није са једнаким странама; ромб је са једнаким странама али није са правим угловима; ромбоид је са једнаким наспрамним странама, али није једнакостран ни са правим угловима. Остале четворостране фигуре нека се зову трапези.*

23. *Паралелне су оне праве, које се налазе у истој равни и које се продужене у бескрајност на обе стране не секу једна са другом.*

У својим Елементима основне ставове геометрије Еуклид је поделио на *аксиоме* и *постулате.* У различитим преписима Елемената број постулата и аксиома није исти, али се обично прихвата да је он засновао геометрију на девет аксиома и пет постулата. И ми ћемо навести најпре постулате, као што је Еуклид то учинио у Елементима:

"Нека се претпостави:

1. *Да се може повући од сваке тачке ка свакој другој тачки права линија.*

2. *И да ограничена права може бити продужена у свом правцу непрекидно.*

3. *И да се може описати од сваког средишта сваким растојањем круг.*

4. *И да су сви прави углови једнаки међусобно.*

5. *И да ће се, ако једна права у пресеку са другим двема образује са исте стране два унутрашња угла чији је збир мањи од два права угла, те две праве бескрајно продужене, сећи и то са оне стране са које су ови углови мањи од два права угла.*"

Није тешко видети да постулати представљају неке геометријске истине. Интересантно је да је пети постулат због своје сложености изазивао пажњу математичара и нагонио их да покушавају да га изводе из осталих аксиома геометрије.

И аксиоме као и постулати представљају нека основна тврђења, али с том разликом што се не односе стриктно на геометријске објекте. Аксиоме су:

1. *Они који су једнаки истом једнаки су међусобно.*
2. *И ако се једнаким додају једнаки целине су једнаке.*
3. *И ако се од једнаких одузму једнаки остаци су једнаки.*
4. *И ако се неједнаким додају једнаки целине су неједнаке.*
5. *И удвостручени једнаки једнаки су међусобно.*
6. *И половине од једнаких једнаке су међусобно.*
7. *И они који се могу поклопити једнаки су међусобно.*
8. *И целина је већа од дела.*
9. *И две праве не ограничавају област.*

Само су седма и девета аксиома геометријског карактера. У неким преписима се седма аксиома јавља као шести постулат што показује да су преписивачи кроз векове давали себи одређену слободу.

У даљем излагању у Елементима Еуклид користи *пропозиције* - *теореме* ($\vartheta\varepsilon\omega\rho\tilde{\eta}\mu\alpha\tau\alpha$ - од глагола $\vartheta\varepsilon\omega\rho\tilde{\eta}\mu\omega$ - размишљам), које даље изводи уз помоћ пропозиција за које је већ установио да важе.

1.3 Настављачи Еуклидовог учења

Од античких времена развој геометрије је ишао у два правца. Са једне стране, систем аксиома је прошириван тако да би се могао доказати што већи број тврђења, док се је са друге стране упорно покушавало доказивање петог Еуклидовог постулата из списка постојећих аксиома.

Настављајући Еуклидов рад, на самом старту су антички математичари уочили да се не могу доказати или оборити сва тврђења која су у геометрији могла бити формулисана. Тако је *Архимед*[5] у свом делу *О сфери и цилиндру*, постојећи систем аксиома проширио са пет нових аксиома. И након Архимеда се је покушавало да се систем аксиома геометрије употпуни. Усавршавањем Еуклидовог дела поред Архимеда, бавили су се *Аполоније*[6], *Геминус, Никомах* (I век пре нове ере), *Папос* (III век нове ере), *Теон и Прокло* (V век нове ере). Током низа векова, без обзира на напоре који су чињени, нико није успео да суштински унапреди геометрију као науку у односу на оно што је било изнето у Еуклидовим елементима. Било је ту сјајних открића која су омогућила и решавање многих геометријских проблема. Ипак, суштинских промена у геометрији није било још из времена Еуклида и Архимеда.

Пропашћу грчке културе у Европи почиње мрачно доба средњег века. У то време центар светске цивилизације постаје арапски исток. Еуклидови Елементи су преведени на арапски језик. И арапски мислиоци су покушавали да докажу пети постулат. Арапски математичар *Насир-Едину* (1201-1274) је најпознатији из тог времена. Међутим ни његова интересантна и оригинална истраживања нису довела до доказа петог Еуклидовог постулата.

У доба ренесансе се у Европу враћа интересовање за геометрију. У петнаестом веку Еуклидови Елементи су преведени са арапског на латински језик, а у шеснаестом је пронађен и репродукован оригиналан текст на грчком језику.

Покушаји решавања проблема паралелних правих везаних за доказивање петог Еуклидовог постулата представљају један интересантан поглед на геометрију. Генерације и генерације настављача Еуклидовог учења су током векова биле опседнуте покушајима да докажу пети Еуклидов постулат коришћењем постојећег система аксиома. Разлог за то је чињеница да је Еуклид доказивао тврђења која су имала знатно простији облик од петог постулата. Покушаји доказивања Еуклидовог петог постулата ишли су најчешће индиректим поступком. Полазило се од негације петог

[5]Архимед (287. пне-212. пне) грчки математичар, физичар и астроном, из Сиракузе на Сицилији. Први је израчунао број π, пронашао закон полуге, закон потиска (Архимедов закон, Архимедова вага) и др.

[6]Аполоније из Пергама (262. пне-190. пне) антички хеленски математичар и астроном, познати научник александријског Музеона кога су из поштовања звали Велики геометар.

постулата или неког његовог еквивалентног тврђења. Покушаји су ишли у смеру да се коришћењем постојећих аксиома на тај начин дође до два противречна тврђења. На тај начин је добијен читав низ тврђења еквивалентних петом Еуклидовом постулату, али до доказа петог Еуклидовог постулата се није дошло. Многи математичари су били у заблуди да су доказали пети Еуклидов постулат не примећујући да су у доказу начинили грешку тако што су искористили неки од његових еквивалената.

Посебно су интересантни радови италијанског математичара *И. Сакерија* (1667-1733), који је покушао да полазећи од тврећења супротног петом постулату, изгради геометријску теорију различиту од Еуклидове. Сакери је био убеђен да ће у таквој теорији доћи до противуречности, чиме би била доказана ваљаност петог постулата. Међутим Сакеријеве наде нису се испуниле, противуречност до које је дошао била је привидна а питање постојања такве противуречности остало је отворено. Велики утицај на касње генерације математичара из тог времена имали су радови француског математичара *Лежандра* (1752-1833) који је доказао читав низ интересантних ставова који су у вези са петим постулатом, као што су на пример:

1) Збир унутрашњих углова троугла не може бити већи од два права угла.

2) Ако је у неком троуглу збир унутрашњих углова једнак два права угла, онда је збир унутрашњих углова у сваком троуглу једнак два права угла.

Преостало му је да докаже да збир унутрашњих углова троугла не може бити мањи од два права угла. Међутим и његов доказ је садржао грешку јер је користио недоказана тврђења.

Након великог броја покушаја да се изведе доказ петог постулата, проблем је разрешен тек у деветнаестом веку. Доказано је да пети Еуклидов постулат не зависи од осталих аксиома геометрије. То је био први значајан резултат који је знатно унапредио поглед на геометрију још од времена Еуклида. Пре свега, кроз рад *Николаја Ивановича Лобачевског*[7] и *Јаноша Бољаја*[8] први пут је изражена мисао да пети Еуклидов постулат не зависи од осталих аксиома геометрије и да се самим тим не може

[7]Николај Иванович Лобачевски (1792-1856) руски математичар, поставио темеље нееуклидске геометрије. За живота, Лобачевски је као и Коперник, био непознат и непризнат чак и у својој домовини. Али тек када је након Гаусове смрти објављено да је он прихватао идеје и достигнућа Лобачевског, тада је математичка јавност први пут чула за име великог руског математичара.

[8]Јанош Бољаи (1802-1860) мађарски математичар.

извести његов доказ[9].

У почетку су први радови оснивача нееуклидске геометрије дочекани са неверицом и ругањем. Резултати Лобачевског и Бољаја постали су сасвим јасни тек крајем деветнаестог века са коначним формирањем логичког погледа на геометрију. Тада је геометрија први пут логички коректно била утемељена. Шта више, дошло се до закључка да осим Еуклидове геометрије постоји и геометрија битно различита од ње. Ту новооткривену геометрију данас називамо *геометријом Лобачевског-Бољаја* или *хиперболичком геометријом.*

Може нам се учинити чудним да се у математици изучавају две теорије, еуклидска геометрија и геометрија Лобачевског које су у супротности једна са другом. За модерну математику је међутим од највеће важности да су обе одређене системима аксиома који су непротивречни и потпуни. На питање: која од те две геометрије важи, нема смисла тражити одговор у оквиру математике. Наиме, то би се сводило на питање које аксиоме важе, али њих прихватамо без доказа. Наравно, питање може гласити каква је геометрија простора у физичком смислу и како њу можемо што боље описати аксиомама. Ради одговора на то питање потребна је физичка интерпретација основних геометријских појмова. Нпр. праву је најприродније интерпретирати као светлосни зрак. У том смислу показује се да физички простор није еуклидски. Он није одређен ни геометријом Лобачевског. Појавом Ајнштајнове[10] теорије релативности почетком XX века, показало се да је у космичком простору погодније користити нееуклидску геометрију са променљивом закривљеношћу. Тако можемо рећи, да се геометрија васионе локално мења, у зависности од близине неке масе и њене количине.

Немачки математичар *Бернард Риман*[11] у свом раду *О хипотезама које леже у основи геометрије* долази до још једне нееуклидске геометрије која је данас позната под називом *Риманова геомерија у ужем смислу* или *елиптичка геометрија.* Откриће нееуклидске геометрије, имало је утицаја на заснивање било које дедуктивне теорије. Дошло се до сазнања да основна геометријска тврђења, односно аксиоме и постулати, важе не само на скупу тачака правих и равни схваћених у класичном

[9] Постоје индикације да је на ту помисао први дошао један од највећих математичара тог времена К.Ф. Гаус (1777-1855). Међутим Гаус никада није ништа о томе објавио.

[10] А. Ајнштајн (1879-1955), немачки физичар

[11] Георг Фридрих Бернард Риман (1826-1866), немачки математичар који је дао значајан допринос развоју математичке анализе и диференцијалне геометрије, чиме је уједно утро пут и за каснији развој Опште теорије релативности.

Еуклидовом смислу већ на скупу тачака правих и равни схваћених у много ширем смислу. Дошло је до проширивања и апстракције геометријских појмова у скоро свим геометријским тврђењима. Дајући тако апстрахованим појмовима конкретна значења долази се до модела на којима се може извести реализација Еуклидове геометрије, геометрије Лобачевског или Риманове геометрије. Интересантни су модели које су сачинили *Еуђенио Белтрами*[12], *Феликс Клајн*[13] и *Анри Поенкаре*[14].

Дошло је до нових стремљења и подстицаја у аксиоматском заснивању геометрије, што је довело до суптилније анализе основних геометријских појмова и тврђења. Тако су *Рихард Дедекинд*[15] 1872. и *Георг Кантор* 1873. године, независно један од другог, на различите начине развили учење о непрекидности. Они су отклонили један знатан недостатак аксиоматике Еуклида увођењем аксиома непрекидности. Немачки математичар *Мориц Паш* 1882. уводи аксиоме поредка у свом делу *Предавања из новије геометрије* и на тај начин отклања још један од недостатака Еуклидове аксиоматике.

Настављајући рад италијанских математичара *Ђузепе Пеана*, *Ђузепе Веронезеа* и *Мариа Пиериа* с краја XIX века, тек је немачки математичар *Давид Хилберт*[16] засновао геометрију на непротивуречном, потпуном, и независном систему аксиома у свом делу *Основе геометрије* из 1899. го-

[12]Еуђенио Белтрами (1835-1900) италијански математичар.

[13]Феликс Кристијан Клајн (1849-1925) немачки математичар, познат по своме раду на теорији група, теорији функција, нееуклидској геометрији и на повезивању геометрије са теоријом група.

[14]Жил Анри Поенкаре (1854-1912) француски математичар и теоријски физичар.

[15]Јулијус Вилхелм Рихард Дедекинд (18311916) немачки математичар. Дедекинд је у свом делу Природа и значење бројева, из 1888. године понудио аксиоматски приступ природним бројевима. Касније, дефинисао је ирационалне бројеве помоћу Дедекиндовог пресека.

[16]Давид Хилберт (1862-1943) немачки математичар. Дао је важан допринос у неколико грана математике. Хилберт је 1888. уопштио једну важну Жорданову теорему на системе вишег реда. Године 1899. објавио је своје чувено дело Основе геометрије у коме је ту тему, коначно, поставио на строге аксиоматске основе. Он је такође показао да је геометрија једнако конзистентна као аритметика реалних бројева. Године 1900. Хилберт је поставио део од 23 проблема као изазов математичарима 20. века. Решења или некакав напредак је направљен у око три четвртине њих.

Касније се Хилберт посветио раду на теоријској физици и основама математике. Развијао је математички формализам што га је, заједно са Паулом Бернајсом, довело до дела Основе математике. Други радови Хилберта укључују његов доказ Варинговог проблема, тј. претпоставке коју је поставио Варинг 1770. године, а прво потпуно решење је 1909. пронашао Хилберт. Такође, његов велики допринос је у развоју тзв. Хилбертовог простора, а такође и у проучавању интегралних једначина и алгебарске теорије бројева.

дине. За разлику од Еуклида, Хилберт не покушава да описује основне геометријске појмове: тачке, праве, равни, већ их посредно одређује преко аксиома. За разлику од Еуклидове аксиоматике која се односила на конкретне геометријске објекте који су имали потпуно одређено значење, Хилбертова аксиоматика односи се на геометријске објекте који могу да имају разноврсна значења. То је и разлог што се каже да је Еуклидова аксиоматика садржајног, а Хилбертова полуформалног карактера.

Хилберт у Основама геометрије уводи двадесет аксиома које разврстава у пет група на следећи начин:

I *Аксиоме везе (припадања, инциденције)* (осам аксиома),

II *Аксиоме поретка* (четири аксиоме),

III *Аксиоме подударности* (пет аксиома),

IV *Аксиоме непрекидности* (две аксиоме),

V *Аксиоме паралелности* (једна аксиома).

И данас, када је прошло више од сто година значај Хилбертових Основа геометрије огледа се у томе, што је створен предуслов за изражавања као што су *потпуност*, *независност* и *непротивуречност* система аксиома.

У овој књизи користићемо нешто модификован Хилбертов систем аксиома, тј. аксиоме геометрије биће разврстане на следећи начин:

I *Аксиоме инциденције* (девет аксиома),

II *Аксиоме поретка* (шест аксиома),

III *Аксиоме подударности* (седам аксиома),

IV *Аксиоме непрекидности* (једна аксиома),

V *Аксиоме паралелности* (једна аксиома).

У зависности од тога да ли смо препоставили да важи Еуклидова или аксиома паралелности Лобачевског, добијамо еуклидску или геометрију Лобачевског.

Може нам се учинити чудним да се у математици изучавају те две теорије, које су у супротности једна са другом. За модерну математику је међутим од највеће важности да су обе одређене системима аксиома који су непротивречни и потпуни. На питање: која од те две геометрије важи, нема смисла тражити одговор у оквиру математике. Наиме, то би се сводило на питање које аксиоме важе, али њих прихватамо без доказа. Наравно, питање може гласити каква је геометрија простора у физичком смислу и како њу можемо што боље описати аксиомама. Ради одговора на то питање потребна је физичка интерпретација основних геометријских појмова. Нпр. праву је најприродније интерпретирати као светлосни зрак. У том смислу показује се да физички простор није еуклидски.

Он није одређен ни геометријом Лобачевског. Појавом Ајнштајнове[17] теорије релативности почетком XX века, показало се да је у космичком простору погодније користити нееуклидску геометрију са промењљивом закривљеношћу. Тако можемо рећи, да се геометрија васионе локално мења, у зависности од близине неке масе и њене количине.

Потребно је на крају истаћи да развој геометрије овим никако није завршен. Напротив, насупрот уобичајеној представи, геометрија и математика уопште се у последњих сто година развијају у још брже него раније. И дан данас су многи математички проблеми остали нерешени и још увек отворени за решавање. То важи и за проблеме из геометрије, а посебно за нееуклидске геометрије.

[17] А. Ајнштајн (1879-1955), немачки физичар

Део 2

Геометрија поретка

2.1 Основни појмови и групе аксиома у геометрији

Као што смо видели у уводу, још је Еуклид у својим Елементима покушао да уведе дефиниције појмова као што су тачка права и раван. То и нису неке строге дефиниције, већобјашњења тих елементарних геометријских појмова. И много касније, математичари као нпр. Лежандр[1] и Пеано[2], покушавали су да дају дефиниције основних геометријских појмова. Тек је Хилберт у својим Основама геометрије *тачке, праве* и *равни* сврстао у појмове који се *не дефинишу*, тј. представљају основне, односно полазне појмове у геометрији.

У заснивању геометрије полазимо од произвољног скупа S, двеју класа C_l и C_π подскупова скупа S и двеју релација $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ над скупом S, од којих је прва троелементна, а друга четвороелементна.

Скуп S називамо *простором* а његове елементе тачкама које обележавамо великим словима латинице $A, B, C, \ldots$

Елементе класе C_l називамо *правама* и обележавамо их малим словима латинице $a, b, c, \ldots$

Елементе класе C_π називамо *равнима* и обележавамо их малим грчким словима $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$

Троелементну релацију $\mathcal{B}$ називамо релацијом *између*. Употребљени

[1] Адријен-Мари Лежандр (1752-1833) француски математичар.

[2] Ђузепе Пеано (1858-1932) италијански математичар и логичар. Разјаснио је поставке математичке логике и увео аксиоме природних бројева (тзв. Пеанове аксиоме, или Пеанови постулати). Признат је и по открићу криве која испуњава простор, тзв. Пеанове криве, из 1890.

симбол $\mathcal{B}$ је прво слово енглеске речи *between* (између). Том релацијом изражавамо чињеницу према којој се једна тачка C налази између тачака A и B, и то симболички обележавамо $\mathcal{B}(A, C, B)$.

Четвороелементну релацију $\mathcal{C}$ над скупом S називамо релацијом *подударности.* Употребљени симбол $\mathcal{C}$ је прво слово латинске речи *congruentia*, што значи подударност. Ако је на пример уређен пар тачака (A, B) подударан са уређеним паром тачака (C, D), писаћемо $\mathcal{C}(A, B; C, D)$ или $(A, B) \cong (C, D)$.

Сваки непразан скуп тачака простора S називамо *геометријским ликом, геометријским објектом* или *геометријском фигуром.* Према томе, основне појмове у геометрији сачињавају три врсте објеката, то су *тачке, праве и равни* и две релације $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. Претпостављамо да основни геометријски појмови имају извесне особине, које не доказујемо, већих усвајамо без доказа. Те особине су исказане тврђењима која зовемо основним геометријским тврђењима или *аксиомама геометрије.* Према природи тих особина, аксиоме геометрије разврставамо у пет група и то су:

I *Аксиоме инциденције* (девет аксиома),

II *Аксиоме поретка* (шест аксиома),

III *Аксиоме подударности* (седам аксиома),

IV *Аксиоме непрекидности* (једна аксиома),

V *Аксиоме паралелности* (једна аксиома).

Аксиоматика прве четири групе сачињава аксиоматику *апсолутне геометрије.* Аксиоматика прве четири групе сачињава аксиоматику *апсолутне геометрије.* Ово је апсолутна геометрија у смислу Бољаија и Лобачевског.[3] До увођења аксиоме паралелности простор S ћемо означавати са S^3 а одговарајућу раван S^2.

Геометрија која је заснована на прве две групе аксиомадовољно је сложена да се може издвојити у једну целину. Ту геометрију која се бави међусобним скуповним односима тачака, правих и равни, као и релацијом поретка на правој називамо *геометрија поретка.*

[3]Интересантно је напоменути да је још Еуклид у својим Елементима дуго избегавао да у доказима користи пети постулат. На тај начин је добио читав низ тврђења за чије доказивање није био потребан пети постулат, па се Еуклид може сматрати утемељивачем и апсолутне геометрије.

2.2 Аксиоме инциденције

Аксиоматика инциденције обухвата аксиоме засноване на основним релацијама *припада* и *садржи се* ($\in$, $\subset$) прихваћеним из теорије скупова које једним именом називамо *релацијама инциденције* (*везе, припадања*).

Дефиниција 2.2.1. *За три или више тачака $A, B, C, \ldots$ каже се да су колинеарне ако постоји права која их садржи; у противном су неколинеарне. Аналогно, за четири или више тачака $A, B, C, D, \ldots$ каже се да су компланарне ако постоји раван која их садржи, у противном су некомпланарне.*

Групу аксиома инциденције чине следећих девет аксиома:

$\mathbf{I_1}$ *Свака права садржи најмање две тачке A и B.*

$\mathbf{I_2}$ *Постоји најмање једна права која садржи две тачке A и B.*

$\mathbf{I_3}$ *Постоји највише једна права која садржи две разне тачке A и B.*

$\mathbf{I_4}$ *Свака раван садржи најмање три неколинеарне тачке A, B и C.*

$\mathbf{I_5}$ *Постоји најмање једна раван која садржи три неколинеарне тачке A, B и C.*

$\mathbf{I_6}$ *Постоји највише једна раван која садржи три неколинеарне тачке A, B и C.*

$\mathbf{I_7}$ *Ако две разне тачке A и B неке праве p припадају некој равни π, тада све тачке праве p припадају равни π.*

$\mathbf{I_8}$ *Ако две равни α и β имају једну заједничку тачку A, онда оне имају најмање још једну заједничку тачку B.*

$\mathbf{I_9}$ *Постоје четири некомпланарне тачке A, B, C и D.*

Прве четири аксиоме односе се на геометрију равни док се осталих пет аксиома односи на геометрију простора. То је и разлог што прве четири аксиоме називамо планиметријским, а осталих пет аксома стереометријским аксиомама инциденције. У литератури се аксиоме инциденције називају још и аксиомама везе. Код неких аутора ова група аксиома сатоји се од осам аксиома, причему су друга и трећа аксиома спојене у једну.

2.3 Последице аксиома инциденције

Од последица аксиома инциденције поменућемо следеће:

Теорема 2.3.1. *Ако су A, B, C три неколинеарне тачке тада су сваке две од њих међусобно разне.*

Доказ. Ово тврђење се лако доказује свођењем на противуречност. □

Теорема 2.3.2. *Ако су A, B, C, D четири некомпланарне тачке тада су сваке две од њих међусобно разне.*

Доказ. Аналогно доказу претходне теореме. □

Последица 2.3.1. *Постоје три неколинеарне тачке.*

Теорема 2.3.3. *Две разне праве могу да имају највише једну заједничку тачку.*

Доказ. Нека праве p и q имају две разне заједничке тачке A и B. На основу аксиоме I_3 следи да се праве p и q поклапају. □

Теорема 2.3.4. *Постоји једна и само једна права p која садржи две разне тачке A и B.*

Доказ. Следи из аксиома I_2 и I_3. □

Теорема 2.3.5. *Постоји једна и само једна раван која садржи три неколинеарне тачке A, B, C.*

Доказ. Следи из аксиома I_5 и I_6. □

Теорема 2.3.6. *Постоји једна и само једна раван која садржи дату праву p и дату тачку A изван ње.*

Доказ. Према аксиоми I_1 права p садржи бар две разне тачке B и C. Тачке A, B и C су неколинеарне, јер би у супротном тачка A припадала правој p што је исказом теореме искључено. Дакле, неколинеарне тачке A, B и C, на основу претходне теореме, одређују тачно једну раван α. Тачке B и C праве p припадају равни α одакле на основу аксиоме I_7 следи да све тачке праве p припадају равни α. Према томе, тачка A и права p припадају равни α. Треба још доказати јединственост такве равни. Ако нека раван β садржи тачку A и праву p, тада она садржи неколинеарне тачке A, B и C. На основу Теореме 2.3.6. следи да се равни α и β поклапају. □

Теорема 2.3.7. *Постоји тачно једна раван која садржи две праве p и q које се секу у једној тачки.*

Доказ. Нека је A пресечна тачка правих p и q. Тада, према аксиоми I_1 на правама p и q постоје тачке B и C редом различите од тачке A. Тачке A, B и C одређују тачно једну раван α. Тачке A и B праве p припадају равни α одакле следи да све тачке праве p припадају равни α. На исти начин тачке A и C праве q припадају равни α одакле следи да све тачке праве q припадају равни α. Треба још доказати јединственост такве равни. Ако нека раван β садржи праве p и q, тада она садржи неколинеарне тачке A, B и C, одакле на основу Теореме 2.3.6. следи да се равни α и β поклапају. □

Теорема 2.3.8. *Ако две равни имају заједничку тачку, тада је њихов пресек права.*

Доказ. Нека равни α и β имају заједничку тачку A. Тада према аксиоми I_8 равни α и β имају бар још једну заједничку тачку B. На основу аксиома I_2 и I_3 тачке A и B одређују праву $p = AB$, чије све тачке према аксиоми I_7 припадају равнима α и β па самим тим и њиховом пресеку. Докажимо још да ван праве p равни α и β немају других заједничких тачака. Заиста, ако би ван праве p постојала заједничка тачка P равни α и β ван праве p, онда на основу Теореме 2.3.6. постоји јединствена раван која садржи тачку P и праву p. То није могуће, јер су α и β по претпоставци различите равни. Дакле, пресек равни α и β је права p. □

Дефиниција 2.3.1. Заједничку праву двеју разних равни зваћемо пресечном правом тих равни.

Теорема 2.3.9. *Ако права p не припада равни π, онда права p може са равни π имати највише једну заједничку тачку.*

Доказ. Ако би права p имала две заједничке тачке са равни π онда би према аксиоми I_7 све тачке праве p припадале равни π што је у супротности са условом теореме. □

Дефиниција 2.3.2. Две праве које не припадају једној равни су *мимоилазне*.

Следећа теорема оправдава увођење појма мимоилазних правих.

Теорема 2.3.10. *Постоје мимоилазне праве.*

Доказ. Према аксиоми I_9 постоје четири некомпланарне тачке A, B, C и D. Праве $p = AB$ и $q = CD$ су мимоилазне јер би у супротном тачке A, B, C и D биле компланарне, што је у супротности са начином на који смо их изабрали. □

2.4 Аксиоме поретка

Еуклид у својим Елементима поредак тачака на правој није нигде специјално издвојио. Разлог за то је био што је поредак на правој интуитивно био веома јасан. Упоређивањем растојања тачака вршен је и поредак на правој. Први који је увидео неопходност аксиома поретка за доказивање неких простијих ставова о поретку тачака на правој, и строго увођење релације *између*, био је немачки математичар Гаус.[4] Тек је М. Паш[5] увео појам распореда тачака без појма мерења дужи. Касније су његов систем аксиома употпунили Пеано у свом делу *Начела геометрије* и Хилберт у *Основама геометрије.* Потпун опис релације између, као једне од основних релација у геометрији, Хилберт је дао другом групом аксиома.

Ова група аксиома описује *релацију између* која је већ уведена као основни појам. Групу аксиома поретка чине следећих шест аксиома:

II_1 *Ако су A, B, C три колинеарне тачке такве да је $\mathcal{B}(A,B,C)$,*[6] *тада су тачке A, B, C међусобно различите.*

II_2 *Ако су A, B, C три колинеарне тачке такве да је $\mathcal{B}(A,B,C)$ тада је $\mathcal{B}(C,B,A)$.*

II_3 *Ако су A, B, C три колинеарне тачке такве да је $\mathcal{B}(A,B,C)$ тада није $\mathcal{B}(A,C,B)$.*

II_4 *Ако су A, B две разне тачке неке праве p, тада на правој p постоји тачка C таква да је $\mathcal{B}(A,B,C)$.*

II_5 *Ако су A, B, C три разне колинеарне тачке, тада важи најмање једна од релација $\mathcal{B}(A,B,C)$, $\mathcal{B}(A,C,B)$, $\mathcal{B}(C,A,B)$.*

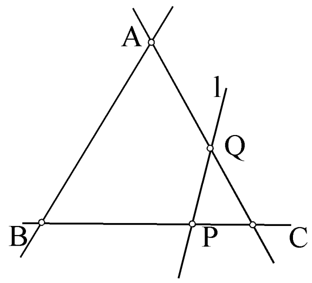
---

[4] К.Ф. Гаус (1777-1855).

[5] Мориц Паш (1843-1930) немачки математичар. У својим *Предавањима о новијој геометрији* из 1882. он је аксиоматски увео распоред тачака на правој без појма мерења.

[6] Ознаку $\mathcal{B}$ за троелементну релацију између први су увели у својим *Основима геометрије* из 1955. године *К. Борсук* и *В. Шмиелова* као почетно слово енглеске речи between, што значи између.

II_6 *Ако су A, B, C три неколинеарне тачке равни π и права l припада равни π, не садржи тачку A и сече праву BC у тачки P таквој да је $\mathcal{B}(B, P, C)$, тада права l сече праву AC у тачки Q која је између тачака A и C или праву AB у тачки R која је између тачака A и B* (*Слика* 2.1).



Слика 2.1.

Аксиома II_6 назива се *Пашова аксиома.* Првих пет аксиома поретка односе се на геометрију праве, па је то разлог што их називамо линеарним аксиомама. Пашова аксиома се очигледно односи на геометрију равни. Напоменимо да није могуће увести у потпуности поредак на правој без примене Пашове аксиоме поретка. Уколико бисмо избацили Пашову аксиому, у циљу изграђивања геометрије поретка на правој уз помоћ само линеарних аксиома, морали бисмо да додамо нове аксиоме. То су теореме 2.5.3., 2.5.5. и 2.5.6., које ћемо доказати као последице Пашове аксиоме.

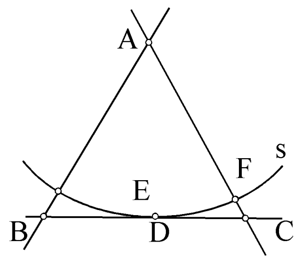
2.5 Последице аксиома поретка

Теорема 2.5.1. *Ако су A, B, C три разне колинеарне тачке тада важи једна и само једна од релација $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(A, C, B)$, $\mathcal{B}(C, A, B)$.*

Доказ. Према Аксиоми II_5 важи бар једна од наведених трију релација јер су по претпоставци A, B, C три разне колинеарне тачке. Без губитка оштости доказа претпоставимо да важи $\mathcal{B}(A, B, C)$. Треба показати да не важе релације $\mathcal{B}(A, C, B)$ и $\mathcal{B}(C, A, B)$. Према Аксиоми II_3 из $\mathcal{B}(A, B, C)$ следи да није $\mathcal{B}(A, C, B)$. Из $\mathcal{B}(A, B, C)$ према Аксиоми II_2 важи $\mathcal{B}(C, B, A)$, а одавде на основу Аксиоме II_3 следи да није $\mathcal{B}(C, A, B)$. $\square$

У Пашовој аксиоми се предпоставља да права l сече бар једну од правих AC и AB у тачкама Q или R таквим да је $\mathcal{B}(C,Q,A)$ или $\mathcal{B}(A,R,B)$. Следећом теоремом установљавамо да права l која задовољава услове Пашове аксиоме сече тачно једну од двеју правих AC и AB.

Теорема 2.5.2. *Ако су A,B,C три неколинеарне тачке, а D,E,F тачке правих BC, CA, AB таквих да је $\mathcal{B}(B,D,C)$, $\mathcal{B}(C,E,A)$, $\mathcal{B}(A,F,B)$, тада тачке D,E,F не припадају једној правој.*



Слика 2.2.

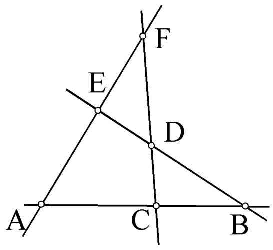
Доказ. Како је $\mathcal{B}(C,E,A)$ и $\mathcal{B}(A,F,B)$ тачке E и F су различите од тачке A. Будући да су AB и AC различите међу собом са заједничком тачком A, тачке E и F су различите међу собом. Такође ће бити тачке F и D а такође D и E различите међу собом те су тачке D, E, F различите међу собом (Слика 2.2).

Претпоставимо да су тачке D, E и F колинеарне тј. да припадају некој правој s. Како су D,E,F три разне колинеарне тачке, тада према претходној теореми важи тачно једна од релација

$$\mathcal{B}(D,E,F), \quad \mathcal{B}(D,F,E), \quad \mathcal{B}(E,D,F).$$

Нека је на пример $\mathcal{B}(F,D,E)$. При томе су A,F,E три разне неколинеарне тачке. Права BC је у равни одређеној тачкама A,F,E, не садржи тачку A и сече праве FE, EA, AF редом у тачкама B,C,D таквим да је $\mathcal{B}(F,D,E)$, $\mathcal{B}(C,E,A)$ и $\mathcal{B}(A,F,B)$ што је према Пашовој аксиоми немогуће. Следи да не може бити $\mathcal{B}(F,D,E)$. Слично се доказује да није $\mathcal{B}(F,E,D)$ и да није $\mathcal{B}(E,F,D)$ па тачке D,E,F не припадају једној правој. $\square$

Теорема 2.5.3. *Ако су A и B две разне тачке тада на правој AB постоји тачка C таква да је $\mathcal{B}(A,C,B)$.*

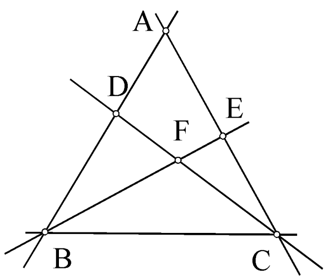


Слика 2.3.

Доказ. Нека је D било која тачка која не припада правој AB. Егзистенција те тачке следи из аксиоме I_9. Како је тачка D ван праве AB, тачке B и D су различите међу собом те на правој BD постоји према Аксиоми II_4 тачка E (Слика 2.3) таква да је $\mathcal{B}(B, D, E)$, E је ван праве AB па мора бити различита од A. Стога према Аксиоми II_4 на правој AE постоји тачка F таква да је $\mathcal{B}(A, E, F)$.

Применом претходне теореме на тачке A, B, E које су три неколинеарне тачке, и праву DF у равни одређеној тим тачкама која не садржи тачку A и сече праву BE у тачки D таквој да је $\mathcal{B}(B, D, E)$ закључујемо да права DF мора да сече или праву AE у тачки која је између тачака A и E или праву AB у тачки која је између тачака A и B. Лако се доказује да је први случај немогућ. Дакле, права FD сече праву AB у некој тачки C таквој да је $\mathcal{B}(A, C, B)$. □

Теорема 2.5.4. *Ако су A, B, C три неколинеарне тачке, D, E редом тачке правих AB, AC такве да је $\mathcal{B}(A, D, B)$, $\mathcal{B}(A, E, C)$ тада се праве BE и CD секу у некој тачки F таквој да је $\mathcal{B}(B, F, E)$ и $\mathcal{B}(C, F, D)$.*

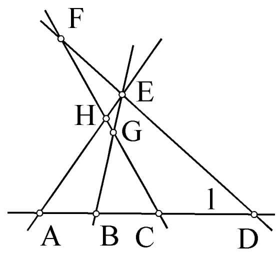


Слика 2.4.

Доказ. Теорема се доказује коришћењем претходне теореме, чињенице да $A \notin DE$ јер је $D \neq E$, $E \neq A$ и коришћењем Пашове аксиоме (Слика 2.4) за тачке D, A, C и праву BE. □

Теорема 2.5.5. *Ако су A, B, C, D четири колинеарне тачке такве да је*
$\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(B, C, D)$ тада је $\mathcal{B}(A, C, D)$ и $\mathcal{B}(A, B, D)$.

Доказ. Нека је l права којој припадају тачке A, B, C и D и нека је E произвољна тачка (Слика 2.5) ван праве l и F тачка таква да је $\mathcal{B}(D, E, F)$. Како је $\mathcal{B}(D, E, F)$ и $\mathcal{B}(B, C, D)$, то применом Пашове аксиоме на тачке B, D, E и праву CF следи да права CF сече BE у тачки G таквој да је $\mathcal{B}(B, G, E)$. Такође из $\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(B, G, E)$ применом Пашове аксиоме на тачке A, B, E и праву CF следи да права CF сече праву AE у тачки H таквој да је $\mathcal{B}(A, H, E)$. Сада права CF сече AE у тачки H тако да је $\mathcal{B}(A, H, E)$ а праву DE у тачки у тачки F тако да је $\mathcal{B}(D, E, F)$, то на основу Пашове аксиоме примењене на тачке A, D и праву CF следи $\mathcal{B}(A, C, D)$. Сада из $\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(B, C, D)$ на основу аксиоме II_2 следи да је $\mathcal{B}(C, B, A)$ и $\mathcal{B}(D, C, B)$, одакле на основу доказаног дела следи $\mathcal{B}(D, B, A)$, одакле је $\mathcal{B}(A, B, D)$. □



Слика 2.5.

Теорема 2.5.6. *Ако су A, B, C и D четири колинеарне тачке такве да је $\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(A, C, D)$, тада је $\mathcal{B}(B, C, D)$ и $\mathcal{B}(A, B, D)$.*

Доказ. Нека је E тачка ван праве l одређене тачкама A, B, C и D и F тачка таква да је $\mathcal{B}(D, E, F)$. Применимо Пашову аксиому на тачке A, D, E и праву CF. Тада из $\mathcal{B}(A, C, D)$ и $\mathcal{B}(D, E, F)$ следи да права CF сече праву AE у тачки H таквој да је $\mathcal{B}(A, H, E)$. Аналогно, из $\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(A, H, E)$, применом Пашове аксиоме на тачке A, B, E и праву CF, закључујемо да права CF сече праву BE у тачки G таквој да је $\mathcal{B}(B, G, E)$. Поновном применом Пашове аксиоме на тачке D, E, B и праву CF из $\mathcal{B}(B, G, E)$ и $\mathcal{B}(D, E, F)$ следи $\mathcal{B}(B, C, D)$, чиме је доказана прва релација. Сада из $\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(B, C, D)$ на основу Теореме 2.5.5. следи и $\mathcal{B}(A, B, D)$ $\square$

Теорема 2.5.7. *Ако су A, B, C, D четири колинеарне тачке такве да је $C \neq D$, $\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(A, B, D)$ тада је $\mathcal{B}(B, C, D)$ и $\mathcal{B}(A, C, D)$ или $\mathcal{B}(B, D, C)$ и $\mathcal{B}(A, D, C)$.*

Доказ. Тачке A, C и D су три неколинеарне тачке. Тада према Теореми 2.5.1. важи тачно једна од релација $\mathcal{B}(A, C, D)$, $\mathcal{B}(C, D, A)$, $\mathcal{B}(D, A, C)$. Ако би важила релација $\mathcal{B}(A, C, D)$, тада на основу Теореме 2.5.6. важи и $\mathcal{B}(B, C, D)$, чиме је прва релација доказана. Ако би било $\mathcal{B}(C, D, A)$ тада би важило и $\mathcal{B}(A, D, C)$, а како је још $\mathcal{B}(A, B, D)$, према Теореми 2.5.6. следи $\mathcal{B}(B, D, C)$, тј важи и друга релација. Ако би важила релација $\mathcal{B}(D, A, C)$ тада би из $\mathcal{B}(A, B, D)$, тј. $\mathcal{B}(D, B, A)$ следило $\mathcal{B}(B, A, C)$, што противуречи претпоставци теореме да је $\mathcal{B}(A, B, C)$. $\square$

Релација $\mathcal{B}$ узета је као релација "између" и она је троелементна. Међутим, она се може уопштити, те можемо дефинисати n-тоелементну релацију "између".

Дефиниција 2.5.1. Коначан скуп колинеарних тачака

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \; n > 3,$$

је *линеарно уређен* ако за свако $1 \leq i < j < k \leq n$ важе релације $\mathcal{B}(A_i, A_j, A_k)$. То означавамо $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Са овако уведеном релацијом $\mathcal{B}$ у могућности смо да говоримо о линеарном поретку тачака на једној правој. Теореме 2.5.5., 2.5.6. и 2.5.7. можемо формулисати редом на следећи начин:

Теорема 2.5.8. *Ако су A, B, C, D четири колинеарне тачке такве да је*
$\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(B, C, D)$ тада је $\mathcal{B}(A, B, C, D)$.

Теорема 2.5.9. *ако су A, B, C и D четири колинеарне тачке такве да је $\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(A, C, D)$, тада је $\mathcal{B}(A, B, C, D)$.*

Теорема 2.5.10. *Ако су A, B, C, D четири колинеарне тачке такве да је $C \neq D$, $\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(A, B, D)$ тада је $\mathcal{B}(A, B, C, D)$ или $\mathcal{B}(A, B, D, C)$.*

Ако коначно много пута применимо Теорему 2.5.8. добијамо:

Теорема 2.5.11. *Ако је* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *коначан скуп од* n *колинеарних тачака таквих да за свако* $i = 1, 2, \ldots, n-1$ *важи релација* $\mathcal{B}(A_{i-1}, A_i, A_{i+1})$ *тада важи релација* $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

2.6 Појам и особине дужи

Еуклид је, прихвативши начин на који је Платон разумевао геометријске појмове, усвојио дефиниције основних геометријских објеката и изложио их на почетку прве књиге *Елементи.* Појам дужи није посебно разматран, јер у геометрији Старог века права није била неограничена, већ се према другом постулату могла продужавати неограничено, те је према томе могла бити и бескрајна. На тај начин схваћена права, имала је истовремено и функцију праве и функцију дужи.

Према Теореми 2.5.3., између било које две разне тачке A и B праве l постоји нека тачка C. Индуктивним поступком закључујемо да између било које две разне тачке A и B постоји неограничено много тачака праве AB. Ова чињеница нам омогућава да уведемо појам дужи.

Дефиниција 2.6.1. Нека су A и B две разне тачке неке праве l. *Отвореном дужи* (AB) називамо скуп свих тачака X праве l које се налазе између тачака A и B тј.

$$(AB) = \{X | X \in l \ \ \& \ \ \mathcal{B}(A, X, B)\}.$$

Дефиниција 2.6.2. *Затвореном дужи* $[AB]$ називамо унију

$$[AB] = (AB) \cup \{A, B\}.$$

Није тешко утврдити да важи следеће тврђење:

Теорема 2.6.1. *Свака тачка* $C \in (AB)$ *разлаже скуп свих осталих тачака те дужи на две отворене дужи* (AC) *и* (CB).

Теорема 2.6.2. *За три разне колинеарне тачке* A, B, C *важи*

$$(AB) \cap (BC) = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{B}(A, B, C).$$

Доказ. Нека је $\mathcal{B}(A,B,C)$. Тада, на основу претходне теореме директно следи да је $AB \cap BC = \emptyset$.

Обратно, нека је $AB \cap BC = \emptyset$ и претпоставимо да није $\mathcal{B}(A,B,C)$. Тада је или $\mathcal{B}(A,C,B)$ или $\mathcal{B}(B,A,C)$, што на основу претходне теореме значи да је $AC \subset AB$ или $AB \subset BC$ а то је у контрадикцији са претпоставком $AB \cap BC = \emptyset$. Дакле мора бити $\mathcal{B}(A,B,C)$. $\square$

На основу претходне теореме директно следи тврђење:

Теорема 2.6.3. *Ако су A, B, C три разне колинеарне тачке тада је*

$$(AB) \cap (AC) \cap (BC) = \emptyset.$$

Применом коначно много пута Теореме 2.6.1. доказује се следеће тврђење

Теорема 2.6.4. *Ако је $\mathcal{B}(A_1, A_2, \cdots, A_n)$, тада тачка X која је различита од свих тачака $A_1, A_2, \cdots, A_n$, припада дужи A_1A_n ако и само ако припада тачно једној од отворених дужи*

$$(A_iA_{i+1}), \quad i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}.$$

Другим речима, ако је $\mathcal{B}(A_1, A_2, \cdots, A_n)$, онда је (A_iA_{i+1}), $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$, коначан низ дисјунктних дужи које припадају некој правој. Може се доказати да важи и обратно, тј. да важи следеће тврдјење

Теорема 2.6.5. *Ако је (A_iA_{i+1}), $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$, $n \geq 3$, коначан низ дисјунктних дужи које припадају некој правој, тада је $\mathcal{B}(A_1, A_2, \cdots, A_n)$.*

Доказ. Тврђење доказујемо математичком индукцијом. За $n = 3$ тврдјење следи на основу Теореме 2.6.1.

Претпоставимо да тврђење важи за сваки природан број n такав да је $3 \leq n \leq m$ и докажимо да важи за $n = m+1$.

Посматрајмо коначан низ дисјунктних дужи

$$(A_iA_{i+1}),\ i \in \{1, 2, \cdots, m\}.$$

Према индукцијској претпоставци важи

$$\mathcal{B}(A_1, A_2, \cdots, A_m) \text{ i } \mathcal{B}(A_2, A_3, \cdots, A_{m+1}),$$

а одавде следи $\mathcal{B}(A_1, A_i, A_m)$, $\mathcal{B}(A_i, A_m, A_{m+1})$ za $i \in \{2, \cdots, m-1\}$, тј. $\mathcal{B}(A_1, A_i, A_{m+1})$ za $i \in \{2, \cdots, m\}$. Прма томе, добија се да важи $\mathcal{B}(A_1, A_2, \cdots, A_{m+1})$. $\square$

Теорема 2.6.6. *Сваки коначан скуп колинеарних тачака*

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\},\ n \geq 3,$$

може се линеарно уредити на тачно два начина.

Доказ. За $n = 3$ тврђење је задовољено на основу Теореме 2.5.1. Претпоставимо да тврђење важи за свако $n \in \{3, \cdots, m\}$ и докажимо да важи за $n = m + 1$.

Најпре ћемо се позабавити питањем броја начина на које се скуп

$$A = \{A_1, A_2, \cdots, A_{m+1}\}$$

може уредити. Означимо са $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_{m+1}$ пермутацију индекса $1, 2, \cdots, m + 1$. Тада следи

$$\{A_{p_1}, A_{p_{m+1}}\} = \{A_1, A_{m+1}\}$$

јер су A_1 и A_{m+1}једине две тачке скупа $\mathcal{A}$ које нису између неких других двеју тачака скупа $\mathcal{A}$. Не умањујући општост доказа можемо предпоставити да је $p_1 = 1$ и $p_{m+1} = m + 1$. С обзиром на то да је тачка A_2 једина са особином да између тачака A_1 и A_2 нема других тачака скупа $\mathcal{A}$, то ће бити $p_2 = 2$. Понављајући овај поступак коначан број пута закључујено да је $p_i = i,\ i \in \{2, \cdots, m\}$. То значи да се скуп $\mathcal{A}$ може уредити на на нула или два начина. Према томе довољно је доказати егзистенцију једног таквог уређења.

Нека је X произвољна тачка скупа $\mathcal{A}$ и нека је $\mathcal{D} = \mathcal{A}\backslash\{X\}$. Скуп $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \cdots, D_m\}$ има m елемената па се према индукцијској претпоставци може линеарно уредити. Нека је $\mathcal{B}(D_1, D_2, \cdots, D_m)$. Тада је или (i) $\mathcal{B}(X, D_1, D_m)$ или (ii) $\mathcal{B}(D_1, D_m, X)$ или (iii) $\mathcal{B}(D_m, X, D_1)$. Размотримо понаособ сваку од поменуте три могућности.

(i) Нека је $\mathcal{B}(X, D_1, D_m)$. Тада на основу Теореме 2.6.2. важи $(XD_1) \cap (D_1D_m) = \emptyset$. Одавде и на основу Теореме 2.6.4. следи да су дужи (XD_1), (D_1D_2), $\cdots$, $(D_{m-1}D_m)$ дисјунктне. Дакле, задовољени су сви услови Теореме 2.6.5., па је $\mathcal{B}(X, D_1, D_2, \cdots, D_m)$.

(ii) Ако је $\mathcal{B}(D_1, D_m, X)$, онда је $\mathcal{B}(X, D_1, D_m)$, па према доказаном делу (i) важи $\mathcal{B}(X, D_m, D_{m-1}, \cdots, D_1)$.

(iii) Нека је сада $\mathcal{B}(D_m, X, D_1)$ тј. $\mathcal{B}(D_1, X, D_m)$. Тада, према Теореми 2.6.4. тачка X припада тачно једној од дужи (D_i, D_{i+1}), $i \in \{1, 2, \cdots, m-1\}$. Нека је то дуж (D_j, D_{j+1}). Тада, на основу теорема 2.6.1. и 2.6.4. следи $\mathcal{B}(D_1, D_2, \cdots, D_j, X, D_{j+1}, \cdots, D_m)$. $\square$

Теорема 2.6.7. *Ако је дат скуп $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ од n дужи неке праве l, од којих сваке две имају бар једну заједничку тачку, доказати да свих n дужи тог скупа има бар једну заједничку тачку.*

Доказ. Применићемо принцип математичке индукције.

1) За $n = 2$ тврђење важи тривијално, по претпоставци теореме.

2) Нека је $n = 3$. Означимо са a_1, a_2, a_3 поменуте дужи а са S_1, S_2, S_3 тачке такве да је

$$S_1 \in a_2 \cap a_3, \quad S_2 \in a_1 \cap a_3, \quad S_3 \in a_1 \cap a_2.$$

Тачке S_1, S_2, S_3 су колинеарне. Могу наступити следећи случајеви:

(а) Тачке S_1 и S_2 се поклапају, тј. $S_1 \equiv S_2 \equiv S$. Значи $S \equiv S_1 \in a_2 \cap a_3$, $S \equiv S_2 \in a_1 \cap a_3$ одакле следи да $S \in a_1 \cap a_2 \cap a_3$.

(б) Тачке S_1, S_2, S_3 се не поклапају. Због колинеарности важи један од следећих распореда: $\mathcal{B}(S_1, S_2, S_3)$, $\mathcal{B}(S_2, S_1, S_3)$, $\mathcal{B}(S_1, S_3, S_2)$.

Нека важи распоред тачака $\mathcal{B}(S_1, S_2, S_3)$. Тада $S_2 \in S_1S_3$. Даље, по претпоставци је $S_1 \in a_2 \cap a_3$, $S_3 \in a_1 \cap a_2$ одакле следи $S_1, S_3 \in a_2$, па је $S_1S_3 \subset a_2$, јер је дуж конвексан лик. Сада имамо: $S_1S_3 \subset a_2$ и $S_2 \in S_1S_3$ па је $S_2 \in a_2$, како је још$S_2 \in a_1 \cap a_3$ следи да $S_2 \in a_1 \cap a_2 \cap a_3$, тј. $\bigcap_{i=1}^{3} a_i \neq \emptyset$.

3) Нека тврђење важи за $n = k$. Докажимо да важи за $n = k + 1$.

Нека је $\{a_1, a_2, ...a_k\}$ скуп дужи неке праве l од којих сваке две имају бар једну заједничку тачку и нека је

$$\bigcap_{i=1}^{k} a_i \neq \emptyset.$$

Посматрајмо скуп дужи $\{a_1, a_2, ...a_k, a_{k+1}\}$ праве l од којих сваке две имају бар једну заједничку тачку. Докажимо да је тада

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} a_i \neq \emptyset.$$

Нека је $b = a_k \cap a_{k+1} \neq \emptyset$. Посматрајмо скуп

$$\{a_1, a_2, ...a_{k-1}, b\}. \tag{2.1}$$

Све дужи скупа (2.1) припадају истој правој. Покажимо да сваке две од њих имају непразан пресек. Како је

$$\{a_1, a_2, ...a_{k-1}\} \subset \{a_1, a_2, ...a_k, a_{k+1}\},$$

било које две дужи из овог скупа од $k+1$ дужи имају непразан пресек, то и било које две дужи из скупа од $k-1$ дужи имају непразан пресек. Покажимо да је $a_j \cap b \neq \emptyset$ за $j = \overline{1, k-1}$. Имамо да је $a_j \cap b = a_j \cap a_k \cap a_{k+1}$ за $j \in \{1, k-1\}$. Како је $\{a_j, a_k, a_{k+1}\} \subset \{a_1, a_2, ...a_k, a_{k+1}\}$ за $j \in \{1, k-1\}$ и за скуп $\{a_j, a_k, a_{k+1}\}$ важи да сваке две дужи имају непразан пресек и све су на истој правој па на основу доказаног тврђења за $n = 3$ следи $a_j \cap a_k \cap a_{k+1} \neq \emptyset$ за $j \in \{1, k-1\}$. Дакле, показали смо да је $a_j \cap b \neq \emptyset$ за $j \in \{1, k-1\}$. Значи, за скуп (2.1) испуњени су сви услови теореме, тј. све дужи овог скупа припадају истој правој и било које две имају непразан пресек, и како се скуп (2.1) састоји од k елемената то се може применити индукцијска хипотеза. Значи биће $\bigcap_{i=1}^{k-1} a_i \cap b \neq \emptyset$ тј. $\bigcap_{i=1}^{k-1} a_i \cap a_k \cap a_{k+1} \neq \emptyset$, одакле следи да је

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} a_i \neq \emptyset$$

што је требало показати. □

Напомена: Уколико је $a_k \cap a_{k+1}$ тачка, посматрамо је као дуж чији се почетак и крај поклапају, тада се по претпоставци та тачка налази у свим дужима скупа $\{a_1, a_2, ...a_{k-1}\}$, па и у њиховом пресеку. □

2.7 Конвексност геометријских ликова

Дефиниција 2.7.1. Геометријски лик ω је *конвексан* ако за произвољне две тачке A и B лика ω све тачке дужи AB припада лику ω.

На основу изложеног, није тешко закључити да је дуж конвексан геометријски лик.

Теорема 2.7.1. *Пресек n конвексних ликова је конвексан лик.*

Доказ. Нека су $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ конвексни ликови, и нека је $\omega = \bigcap_{i}^{n} \omega_i$. Показаћемо да је ω конвексан. Нека су тачке $A, B \in \omega$. Како тачке A и B припадају пресеку ω, то тачке A и B припадају сваком од n конвексних ликова ω_i. Следи да дуж AB припада сваком од n конвексних ликова ω_i по дефиницији. Како дуж AB припада сваком од n конвексних ликова, онда AB прирада и пресеку ω. Дакле, ω је конвексан лик. □

Напомена: Није тешко показати да претходна теорема важи и за произвољну фамилију $\mathcal{F}$ конвексних геометријских ликова.

Теорема 2.7.2. *Ако су дате четири конвексне површи једне равни, од којих сваке три имају бар по једну заједничку тачку, доказати да све четири имају бар једну заједничку тачку.*

Доказ. Нека су $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ дате конвексне површи, и нека су S_1, S_2, S_3, S_4 тачке које по претпоставци постоје и за које важи:

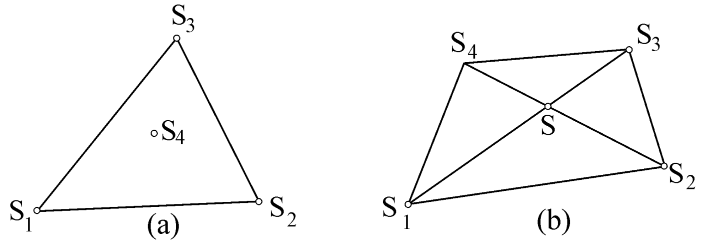
$$S_1 \in \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4,\ S_2 \in \omega_1 \cap \omega_3 \cap \omega_4,\ S_3 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_4,\ S_4 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3.$$

Покажимо да постоји тачка S таква да је $S \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4$. С обзиром да све површи $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ припадају једној равни то су тачке S_1, S_2, S_3, S_4 компланарне. Размотримо све њихове могуће положаје.

(i) Бар две тачке се поклапају. Нека је на пример $S_1 \equiv S_2 = S$ тада је $S \equiv S_1 \in \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4$, $S \equiv S_2 \in \omega_1 \cap \omega_3 \cap \omega_4$, одавде следи $S \equiv S_1 \equiv S_2 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4$.

(ii) Никоје две се не поклапају, али су бар три колинеарне. Нека су на пример тачке S_1, S_2, S_3 колинеарне. Тада су могући следећи распореди: $\mathcal{B}(S_1, S_2, S_3)$, $\mathcal{B}(S_1, S_3, S_2)$, $\mathcal{B}(S_2, S_1, S_3)$. Без ограничења општости можемо претпоставити да важи $\mathcal{B}(S_1, S_2, S_3)$, и нека је $S_2 \equiv S$. Тада имамо $S \equiv S_2 \in S_1S_3$ и $S_1 \in \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4$, $S_3 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_4$, одакле следи да $S_1, S_3 \in \omega_2$, тј. $S_1S_3 \subset \omega_2$. Како $S \in S_1S_3$, $S_1S_3 \subset \omega_2$, онда $S \in \omega_2$ и $S \equiv S_2 \in \omega_1 \cap \omega_3 \cap \omega_4$ одакле следи да $S \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4$.

(iii) Никоје три тачке нису колинеарне и три образују троугао коме припада четврта тачка (Слика 2.6 (a)). Без ограничења општости претпоставимо даје S_4 унутрашња тачка троугаоне површи $S_1S_2S_3$.



Слика 2.6.

Како $S_1 \in \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4$, $S_2 \in \omega_1 \cap \omega_3 \cap \omega_4$, $S_3 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_4$ следи $S_1, S_2, S_3 \in \omega_4$, где је ω_4 конвексан лик. Како $S_4 \in \triangle S_1S_2S_3$ и $\triangle S_1S_2S_3 \subset \omega_4$ онда $S_4 \in \omega_4$ и $S_4 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3$, одакле следи $S_4 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4$.

(iv) Не важи (i) и (ii) и не постоји троугао са унутрашњом тачком. Посматрајмо конвексан четвороугао $S_1S_2S_3S_4$ и нека је $S = S_1S_3 \cap S_2S_4$, унутрашња тачка дужи S_1S_3 и S_2S_4, па важи распоред тачака $\mathcal{B}(S_1, S, S_3)$ и $\mathcal{B}(S_2, S, S_4)$ (Слика 2.6 (b)). Тачка $S \in S_1S_3$, $S_1 \in \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4$ и $S_3 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_4$ одакле следи да $S_1S_3 \subset \omega_2 \cap \omega_4$. Како $S \in S_1S_3$, онда

$$S \in \omega_2 \cap \omega_4. \tag{2.2}$$

Тачка $S \in S_2S_4$, $S_2 \in \omega_1 \cap \omega_3 \cap \omega_4$ и $S_4 \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3$ одакле следи да $S_2S_4 \subset \omega_1 \cap \omega_3$. Како $S \in S_2S_4$, онда

$$S \in \omega_1 \cap \omega_3. \tag{2.3}$$

Из (2.2) и (2.3) произилази да $S \in \omega_1 \cap \omega_2 \cap \omega_3 \cap \omega_4.$, тј.

$$\bigcup_{i=1}^{4} \omega_i \neq \emptyset,$$

што је и требало доказати. □

Теорема 2.7.3. (Хелијева теорема) *Ако су $\omega_1, \omega_2 ..., \omega_n$, $n > 4$ конвексни ликови једне равни, такви да свака три од њих имају једну заједничку тачку, доказати да сви поменути ликови имају бар једну заједничку тачку.*

Доказ. Доказ спроводимо индукцијом по n.

(1) За $n = 4$ теорема је задовољена на основу Теореме 2.7.2.

(2) Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$ тј. да је

$$\bigcap_{i=1}^{k} \omega_i \neq \emptyset.$$

(3) Докажимо да тврђење важи за $n = k + 1$. Означимо са $\omega = \omega_k \cap \omega_{k+1}$. По претпоставци теореме је $\omega \neq \emptyset$. Из скупа геометријских ликова $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, \omega_{k+1}\}$ добили смо скуп

$$\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{k-1}, \omega\}. \tag{2.4}$$

Показаћемо да свака три лика из овог скупа имају непразан пресек. Како је $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{k-1}\} \subset \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_k, \omega_{k+1}\}$, то свака три лика од $k-1$ ликова имају непразан пресек. Нека су $\omega_i, \omega_j \in \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{k-1}\}$ за $i, j \in \{1, k-1\}$, $i \neq j$ произвољни елементи. Тада је на основу Теореме 2.7.2. $\omega_i \cap \omega_j \cap \omega = \omega_i \cap \omega_j \cap \omega_k \cap \omega_{k+1} \neq \emptyset$ за $i, j \in \{1, k-1\}$, $i \neq j$. Како су задовољени сви услови теореме за скуп (2.4), то на основу индукцијске хипотезе важи: $\bigcap\limits_{i=1}^{k-1} \omega_i \cap \omega \neq \emptyset$, тј. $\bigcap\limits_{i=1}^{k-1} \omega_i \cap \omega_k \cap \omega_{k+1} \neq \emptyset$ одакле следи да је

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} \omega_i \neq \emptyset,$$

што је требало показати. □

2.8 Полигони

Дефиниција 2.8.1. Нека је дат уређен скуп од $n+1$ тачака

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}\}.$$

Скуп који се састоји од n отворених дужи A_1A_2, A_2A_3, $\cdots$, A_nA_{n+1} и тачака скупа $\mathcal{A}$ називамо је *полигоналном линијом* и обележавамо је са $A_1A_2 \cdots A_n$.

Тачке скупа $\mathcal{A}$ називамо *теменима*, а дужи A_1A_2, A_2A_3, $\cdots$, A_nA_{n+1} *ивицама* или *страницама* полигоналне линије без обзира на то да ли су оне отворене или затворене. За посматрану полигоналну линију кажемо да *спаја* или повезује тачке A_1 и A_{n+1}. Узастопне тачке у низу $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$ називамо *суседним теменима полигоналне линије*, а њене ивице са заједничким теменом зваћемо *суседним теменима ивицама* полигоналне линије.

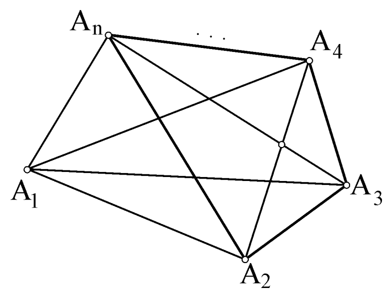
Уколико се тачке A_1 и A_{n+1} посматране полигоналне линије поклапају, чија никоја три узастопна темена нису колинеарна, онда се та полигонална линија назива *затворена Полигонална линија*, *полигон* или *многоугао*.

Уколико полигон има три, четири, пет, ... темена звћемо га редом *троугао*, *четвороугао*, *петоугао* ... Уопште, полигон $A_1A_2 \cdots A_n$ који има n страница и n темена зовемо *n-тоугао*.

За полигон кажемо да је *прост* уколико само његове суседне ивице имају заједничких тачака. У супротном, полигон је *сложен*.

Теорема 2.8.1. *Број пресечних тачака свих дијагонала конвексног полигона $A_1A_2...A_n$, код кога се никоје три и више дијагонала не секу у једној тачки је*

$$l_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$



Слика 2.7.

Доказ. Свакој пресечној тачки дијагонала придружен је један четвороугао и обратно (Слика 2.7.), што значи да постоји бијекција између скупа пресечних тачака дијагонала и скупа свих четвороуглова које чине тачке $A_1, A_2, ..., A_n$. Од n тачака $A_1, A_2, ..., A_n$ могу се формирати

$$l_n = \binom{n}{4} = \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

четвороуглова, па ће бити

$$l_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

□

2.9 Разлагање геометријских ликова

Дефиниција 2.9.1. Тачке A и B геометријског лика Φ су *повезиве* тачке лика Φ ако постоји полигонална линија или дуж која их спаја тако да све тачке полигоналне линије тј. дужи припадају лику Φ.

Дефиниција 2.9.2. Геометријски лик Φ је *повезан* ако су сваке две тачке тог лика повезиве.

Дефиниција 2.9.3. Повезан геометријски лик називамо *облашћу.*

Из дефиниције непосредно следи да је сваки конвексан лик повезан лик.

Дефиниција 2.9.4. Ако геометријски ликови $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n$ припадају геометријском лику Φ и ако је релација повезаности парова тачака дефинисана на скупу $\Phi \backslash (\Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \cdots \cup \Phi_n)$ релација еквиваленције која скуп свих тачака $\Phi \backslash (\Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \cdots \cup \Phi_n)$ разлаже на $m > 1$ класа еквиваленције $\Phi'_1, \Phi'_2, \cdots, \Phi_m$ - кажемо да геометријски ликови $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n$ *разлажу* лик Φ на ликове $\Phi'_1, \Phi'_2, \cdots, \Phi_m$.

2.10 Полуправа и њене особине

Појам полуправе, из истог разлога као и дуж, није нашао своје место у Еуклидовим Елементима јер се према другом постулату права могла бескрајно продужавати у свом правцу.

Дефиниција 2.10.1. Нека су O, A, B три разне тачке праве l. Ако није задовољена релација $\mathcal{B}(A, O, B)$ тада су тачке A и B *са исте стране тачке* O (ознака: $A, B \ddot{-} O$). Ако је за тачке O, A, B задовољена релација $\mathcal{B}(A, O, B)$ тада су тачке A и B са разних страна тачке O (ознака: $A, B \div O$)

Теорема 2.10.1. *Релација* $\ddot{-} O$ *је релација еквиваленције.*

Доказ. Рефлексивност и симетричност непосредно следе из дефиниције. Доказаћемо транзитивност. Нека су O, A, B, C четири тачке праве l такве да је $A, B \ddot{-} O$ и $B, C \ddot{-} O$. Треба показати да је $A, C \ddot{-} O$. Претпоставимо да је $A, C \div O$. Из $A, B \ddot{-} O$ следи $\mathcal{B}(O, A, B)$ или $\mathcal{B}(O, B, A)$. Ако сваку од ових релација упоредимо са $\mathcal{B}(A, O, C)$ добијамо $\mathcal{B}(B, O, C)$ одакле следи $B, C \div O$ што је супротно претпоставци. □

Дефиниција 2.10.2. Скуп свих тачака неке праве l које се налазе са исте стране дате тачке O називамо *отвореном полуправом.* Унију овог скупа и тачке O називамо *затвореном полуправом*, а тачку O зваћемо *теменом*, *почетком* или *крајем полуправе.*

Теорема 2.10.2. (Основна теорема о разбијању праве) *Свака тачка O неке праве l разлаже скуп осталих тачака праве l на две отворене полуправе праве l.*

Доказ. На правој l према аксиоми I_1. осим тачке O постоји бар још једна тачка, означимо је са A. Према аксиоми II_4. на правој OA постоји тачка A' таква да је $\mathcal{B}(A,O,A')$. Ако обележимо са P,Q било које две тачке праве l које се налазе са оне стране тачке O са које је и тачка A, тада ће P,Q бити са исте стране тачке O због транзитивности релације $\ddot{-}\,O$.

На тај начин скуп свих тачака које се налазе са исте стране са које се налази тачка A производи неку отворену полуправу a. На потпуно исти начин констатујемо да скуп свих тачака које се налазе са исте стране тачке O са које је тачка A' производи полуправу a'. Показаћемо да је тачком O скуп свих тачака праве l разложен на полуправе a и a', тј показаћемо да:

(i) Полуправе a и a' немају заједничких тачака, тј. $a \cap a' = \emptyset$,

(ii) Свака тачка S праве l припада некој од полуправих a и a'.

(i) Нека полуправе a и a' имају заједничку тачку R. Како $R \in a$ то је $A,R \ddot{-}\, O$. Међутим $R \in a'$ па $R,A' \ddot{-}\, O$. На основу транзитивности релације $\ddot{-}\, O$ следи да $A,A' \ddot{-}\, O$ што је немогуће јер смо претпоставили да је $\mathcal{B}(A,O,A')$. Значи заиста је $a \cap a' = \emptyset$.

(ii) Претпоставимо да нека тачка S не припада ни једној од полуправих a и a', тј. $S \notin a \cup a'$. У том случају имамо $A,S \div O$ и $A',S \div O$, односно $\mathcal{B}(A,O,S)$ и $\mathcal{B}(A',O,S)$. Одавде следи да није $\mathcal{B}(A,O,A')$ што је супротно претпоставци да је $\mathcal{B}(A,O,A')$. Значи свака тачка S праве l припада некој од полуправих a или a'. □

Теорема 2.10.3. *Скуп од n тачака неке праве l разлаже ту праву на $n-1$ отворених дужи и две отворене полуправе.*

Доказ. Нека је на правој l дато n тачака. Према Теореми 2.6.6. можемо их означити са $A_1, A_2, \cdots, A_n$ тако да важи $\mathcal{B}(A_1, A_2, \cdots, A_n)$. Тачке $A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}$ разлажу дуж A_1A_n на $n-1$ дужи, одакле коришћењем претходне теореме следи да је права l тачкама $A_1, A_2, \cdots, A_n$ раложена на $n-1$ дужи и две полуправе. □

2.11 Оријентација праве

Дефиниција 2.11.1. Нека су a и b две полуправе исте праве l. Ако при томе једна од наведених полуправих садржи другу полуправу кажемо да су полуправе a и b *истог смера* (*истосмерне*). Ово означавамо $a \rightrightarrows b$. У супротном полуправе a и b су *супротног смера* (*супротносмерне*). То означавамо $a \rightleftarrows b$.

Дефиниција 2.11.2. За две дужи AB и CD (отворене или затворене) кажемо да су *истосмерне* ако су полуправе AB и CD истосмерне. У противном су дужи AB и CD *супротносмерне.*

За релацију истосмерности важе следеће особине:

Теорема 2.11.1. *Релација истосмерности дефинисана на скупу полуправих (дужи) једне исте праве је релација еквиваленције.*

Доказ. Рефлексивност и симетричност следе непосредно из дефиниције. Докажимо транзитивност. Нека су a, b, c три плуправе неке праве l такве да је $a \rightrightarrows b$ и $b \rightrightarrows c$. Показаћемо да је $a \rightrightarrows c$. Из $a \rightrightarrows b$ следи $a \subset b$ или $b \subset a$, а из $b \rightrightarrows c$ следи $b \subset c$ или $c \subset b$. Размотримо све могућности:

1) из $a \subset b$ и $b \subset c$ следи $a \subset c$ тј. $a \rightrightarrows c$,
2) из $a \subset b$ и $c \subset b$ следи $a \subset c$ или $c \subset a$ тј. $a \rightrightarrows c$,
3) из $b \subset a$ и $b \subset c$ следи $a \subset c$ или $c \subset a$ тј. $a \rightrightarrows c$,
4) из $b \subset a$ и $c \subset b$ следи $c \subset a$ тј. $a \rightrightarrows c$. □

Теорема 2.11.2. *Скуп L свих полуправих неке праве l може се разложити на два подскупа L_1 и L_2 који задовољавају следеће услове:*
1) $L_1, L_2 \neq \emptyset$,
2) $L_1 \cap L_2 = \emptyset$,
3) *за свако $p, q \in L_1$ или $p, q \in L_2$ имамо да је $p \rightrightarrows q$,*
4) *за свако $p \in L_1$ и свако $q \in L_2$ важи $p \rightleftarrows q$.*

Доказ. Нека је $A \in l$ произвољна тачка. Према раније доказаној теореми она разлаже l на две полуправе a и a'. Сагласно дефиницији полуправе a и a' су супротносмерне. Означимо са L_1 скуп полуправих праве l који се састоји од полуправе a и свих полуправих праве l истосмерних са a, а са L_2 скуп који се састоји од полуправе a' и свих полуправих праве l које су истосмерне са a'. Докажимо да овако конструисани скупови L_1 и L_2 задовољавају услове теореме.

1) С обзиром да је $a \in L_1$, $a' \in L_2$ то су $L_1, L_2 \neq \emptyset$,

2) Докажимо да свака полуправа праве l припада једном и само једном од скупова L_1 и L_2. Обележимо са b било коју полуправу из L. Ако је $b \equiv a$ или $b \equiv a'$ тврђење је доказано.

Нека је $b \neq a$, $b \neq a'$ и нека је B крај полуправе b, а b' полуправа комплементарна са b.

Тада разликујемо четири могућности:

(1) $A \in b$ и $B \in a \Rightarrow a' \subset b \Rightarrow b \in L_2$,
(2) $A \in b$ и $B \in a' \Rightarrow a \subset b \Rightarrow b \in L_1$,

(3) $A \in b'$ и $B \in a \Rightarrow a' \subset b' \Rightarrow b \subset a \Rightarrow b \in L_1$,

(4) $A \in b'$ и $B \in a' \Rightarrow a \subset b' \Rightarrow b \subset a' \Rightarrow b \in L_2$.

Према томе, полуправа b припада једном од скупова L_1 и L_2 тј. $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

3) се доказује непосредно јер је релација $\rightrightarrows$ транзитивна.

4) се доказује индиректно користећи услов 3). $\square$

Дефиниција 2.11.3. Сваки од подскупова L_1 и L_2 на које је према доказаној теореми разложен скуп L свих полуправих праве l називамо *оријентацијом* или *смером* на правој l.

Из саме дефиниције и претходне теореме непосредно закључујемо да на једној правој постоје два и само два смера. Уобичајено је да се они сматрају супротним што указује на могућност да један зовемо позитивним а други негативним.

Појам оријентације омогућује да геометрију поретка на правој изградимо на потпуно нов начин увођењем двеју помоћних релација "пре" и "после", које се иначе користе у теорији бројева.

Дефиниција 2.11.4. Нека су A и B две разне тачке неке оријентисане праве l и a и b њима одговарајуће полуправе из оријентације која је утврђена на правој l. Ако је при томе $b \subset a$ тада кажемо да је на оријентисаној правој l *тачка* A *пре тачке* B и означавамо $A \prec B$. У супротном, ако је $a \subset b$ кажемо да је на оријентисаној правој l *тачка* A *после тачке* B и пишемо $A \succ B$.

Теорема 2.11.3. *Релација $\prec$ је релација потпуног поретка тачака на оријентисаној правој l.*

Другим речима она је на том скупу конективна тј. дефинисана за сваке две тачке, антисиметрична је и транзитивна.

Теорија бројева и геометрија на правој су захваљујући овоме еквивалентне.

Такође важи:

Теорема 2.11.4. *За сваке три тачке A, B, C оријентисане праве l важи*

$$\mathcal{B}(A, B, C) \Leftrightarrow A \prec B \prec C \vee A \succ B \succ C.$$

2.12 Дефиниција и особине полуравни

И у овом случају уводимо две помоћне релације: "са исте стране праве" и "са разних страна праве".

Дефиниција 2.12.1. Нека су A и B две разне тачке неке равни π, p права која припада тој равни и $A, B \notin p$. Ако је при томе $(AB) \cap p = \emptyset$ тада кажемо да су A и B *са исте стране праве* p и означавамо $A, B \ddot{-}\, p$. У противном кажемо да су тачке A и B *са разних страна праве* p и то означавамо $A, B \div p$.

Теорема 2.12.1. *Релација* $\ddot{-}\, p$ *је релација еквиваленције.*

Доказ. Особине рефлексивности и симетрије следе непосредно из дефиниције релације $\ddot{-}\, p$. Докажимо транзитивност. Означимо са A, B, C три разне тачке равни π и са p праву у равни π која не садржи ни једну од тачака A, B, C, при чему је $A, B \ddot{-}\, p$ и $B, C \ddot{-}\, p$. Показаћемо да је $A, C \ddot{-}\, p$.

Разликујемо следеће случајеве:

1) Тачке A, B, C припадају једној правој s. Права s сече праву p или са њом нема заједничких тачака. Ако је $s \cap p = \{O\}$ тада су $A, B \ddot{-}\, O$ и $B, C \ddot{-}\, O$ па је и $A, C \ddot{-}\, O$. Одатле следи $A, C \ddot{-}\, p$. Ако је пак $s \cap p = \emptyset$ тада дуж (AC) нема заједничких тачака са правом p па је и у овом случају $A, C \ddot{-}\, p$.

2) Тачке A, B, C нису колинеарне. Из $A, B \ddot{-}\, p$ следи $(AB) \cap p = \emptyset$. Такође из $B, C \ddot{-}\, p$ следи $(BC) \cap p = \emptyset$. Права p припада равни ABC. Она не може сећи (AC) између тачака A и C јер би према Пашовом ставу морала сећи још дуж (AB) или дуж (BC) што је у супротности са претпоставком. □

Дефиниција 2.12.2. Скуп свих тачака неке равни π које се налазе са једне исте стране праве $p \subset \pi$ називамо *отвореном полуравни.* Скуп који се састоји од тачака отворене полуравни и тачака праве p називамо *затвореном полуравни.* Праву p у оба случаја називамо границом или међом. Ако је p граница и A било која тачка неке полуравни тада ову полураван уколико је отворена симболички означавамо (p, A), а ако је затворена $[p, A)$.

Теорема 2.12.2. *Свака права p равни π разлаже скуп осталих тачака те равни на две отворене полуравни.*

Доказ. У равни π постоје тачке X, O и Y такве да $O \in p$ и $\mathcal{B}(X, O, Y)$. То значи $X, Y \div p$, па је број класа еквиваленције релације $\ddot{-}$ већи од један. Докажимо да број класа еквиваленције релације $\ddot{-}\, p$ не може бити већи од два. Ако би број класа еквиваленције био већи од два, онда би постојала тачка Z таква да је $X, Z \div p$ и $Y, Z \div p$. За три разне тачке X, Y и Z могу наступити два случаја:

(i) Тачке X, Y и Z су неколинеарне. У том случају би права p секла сваку од дужи XY, YZ и ZX, што је у супротности са Теоремом 2.5.2.

(ii) Тачке X, Y и Z су колинеарне. Тада добијамо контрадикцију са Теоремом 2.6.1.

Према томе, број класа еквиваленције релације $\ddot{-}\, p$ је два. □

Теорема 2.12.3. *Ако су A и B са разнх страна неке праве p, онда свака полигонална линија која повезује тачке A и B сече праву p.*

Доказ. Ако нека полигонална линија која повезује тачке A и B не би секла праву p тада би сва њена темена, па према томе и све њене тачке, била са исте стране праве p а то је у супротности са Теоремом 2.12.1. □

На основу теорема 2.12.1. и 2.12.3. и дефиниције повезаности парова тачака следи да је релација са исте стране праве p у равни π релација повезивости дефинисана на геометријском лику $\pi \backslash \{p\}$ па према томе права p разлаже скуп осталих тачака равни π на две отворене полуравни. Тиме је теорема 2.12.2. доказана на још један начин.

Дефиниција 2.12.3. За отворене полуравни из Теореме 2.12.2. кажемо да су *комплементне.*

За полураван (pA), комплементну полураван означавамо са $(pA)^c$.

Није тешко доказати да важи следеће тврђење

Теорема 2.12.4. *Полураван је конвексан геометријски лик.*

Теорема 2.12.5. *Праве a и b равни π, које се секу у тачки O, разлажу ту раван на четири отворене области.*

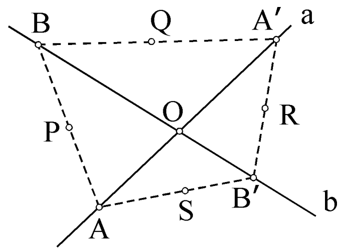
Доказ. Означимо са A и A' тачке праве a такве да је $\mathcal{B}(A,O,A')$, а са B и B' тачке праве b тако да је $\mathcal{B}(B,O,B')$. Нека су P,Q,R,S тачке равни π за које важи

$$\mathcal{B}(A,P,B),\ \mathcal{B}(B,Q,A'),\ \mathcal{B}(A',R,B'),\ \mathcal{B}(A,S,B').$$

Тада ће пресеци

$$(aB)\cap(bA),\ (aB)\cap(bA'),\ (aB')\cap(bA'),\ (Ab')\cap(bA)$$

садржати редом тачке P, Q, R и S, тј. посматрани пресеци су непразни



Слика 2.8.

скупови. Према Теореми 2.12.4. полуравни су конвексни геометријски ликови, одакле према Теореми 2.7.1. следи да је сваки од посматраних пресека конвексан геометријски лик. Дакле посматрани пресеци представљају области. Произвољне две тачке X и Y из двеју различитих области (од укупно четири уочених) нису повезиве тачке геометријског лика $\pi\backslash\{a,b\}$ јер су тачке X и Y са разних страна бар једне од правих a и b. $\square$

Нека су $a_1, a_2, \cdots, a_n$ међусобно различите праве равни π. Тада свака од њих разлаже раван π на две отворене полуравни. Пресек коначног броја полуравни је конвексан лик, дакле област. Претпоставимо да има укупно k таквих конвексних области. Претпоставимо да има укупно k таквих области и означимо их са $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k$. Нека је X тачка равни π која не припада ни једној од правих $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Тада тачка X припада тачно једној од полуравни са границаом a_i, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. То значда тачка X припада тачно једној од области $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k$. Штавише, области $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k$ су класе еквиваленције релације повезаности парова тачака дефинисане на геометријском лику $\pi\backslash\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. То следи из чињенице да произвољне две тачке X и Y из двеју различитих области $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k$ нису повезиве тачке геометијског лика $\pi\backslash\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, јер су тачке X и Y са разних страна бар једне од правих $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Значи праве $a_1, a_2, \cdots, a_n$ разлажу раван π на области $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k$.

Теорема 2.12.6. *Коначан скуп правих $a_1, a_2, \cdots, a_n$ равни π од којих се сваке две секу, а било које три или више не пролазе кроз исту тачку, разлаже раван π на*

$$\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

области од којих је свака пресек n полуравни којима су границе праве задатог скупа.

Доказ. За $n = 2$ раван π је на основу Теореме 2.12.5. подељена на четири области.

Претпоставимо да $n - 1$ правих разлаже раван π на

$$\frac{1}{2}[(n-1)^2 + (n-1) + 2]$$

конвексних области и докажимо да n правих разлаже раван π на

$$\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

конвексних области. Праве из индукцијске претпоставке, којих има $n - 1$ ће сећи n-ту праву у $n - 1$ тачака, које је на основу Теореме 2.10.3. разлажу на $n - 1$ дужи и две полуправе. Означимо са ω једну од области на које на које $n-1$ права разлаже раван π. Ако n та права има заједничких тачака са ω, онда област ω има тачака са обе стране те праве. Ако n-та права нема заједничких тачака са ω, онда су све тачке области ω са исте стране те праве.Како n-та права има заједничких тачака са n поменутих оласти, свака од дужи и полуправих на које $n - 1$ тачака n-те праве разлажу ту праву припадаће некој од тих области. Штавише свака од тих области ће имати тачака са разних страна n-те праве, а ни једна од других области неће, па ће укупан број области од којих је свака пресек n полуравни којима су границе задате праве, бити

$$\frac{1}{2}[(n-1)^2 + (n-1) + 2] + n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2),$$

а то је и требало доказати. □

2.13 Угаона линија и угао

Дефиниција 2.13.1. Скуп који се састоји од једне тачке O и тачака двеју разних полуправих p и q које имају заједнички крај O, називамо *угаоном линијом* и означавамо је $\measuredangle pq$.

Полуправе p и q су *краци* а тачка O *теме угаоне линије.*

Дефиницији појма угла претходи увођење две помоћне релације: "са исте стране угаоне линије" и " са разних страна угаоне линије".

Дефиниција 2.13.2. Нека је $\measuredangle pq$ угаона линија неке равни π и A, B тачке равни π које не припадају угаоној линији $\measuredangle pq$. Ако постоји полигонална линија L која спаја тачке A и B, припада равни π и са угаоном линијом $\measuredangle pq$ нема заједничких тачака тада кажемо да су тачке A и B *са исте стране угаоне линије* $\measuredangle pq$ и означавамо $A, B \mathrel{\ddot{-}} \measuredangle pq$. Уколико ово није задовољено тада су тачке A и B *са разних страна угаоне линије* $\measuredangle pq$ што означавамо $A, B \div \measuredangle pq$.

Теорема 2.13.1. *Релација* $\ddot{-}\measuredangle pq$ *је релација еквиваленције.*

Доказ. Рефлексивност и симетричност следе непосредно из дефиниције. Докажимо транзитивност. Нека су A, B, C три тачке равни π и $\measuredangle pq$ угаона линија у тој равни таква да је $A, B \mathrel{\ddot{-}} \measuredangle pq$ и $B, C \mathrel{\ddot{-}} \measuredangle pq$. Докажимо да је $A, C \mathrel{\ddot{-}} \measuredangle pq$. Како је $A, B \mathrel{\ddot{-}} \measuredangle pq$ то постоји полигонална линија $L_1 \subset \pi$ која спаја тачке A и B и $L_1 \cap \measuredangle pq = \emptyset$. Из $B, C \mathrel{\ddot{-}} \measuredangle pq$ следи да постоји полигонална линија $L_2 \subset \pi$ која спаја тачке B и C и $L_2 \cap \measuredangle pq = \emptyset$. Полигонална линија $L = L_1 \cup L_2$ спаја тачке A и C, припада равни π и $L \cap \measuredangle pq = \emptyset$ одакле следи $A, C \mathrel{\ddot{-}} \measuredangle pq$. □

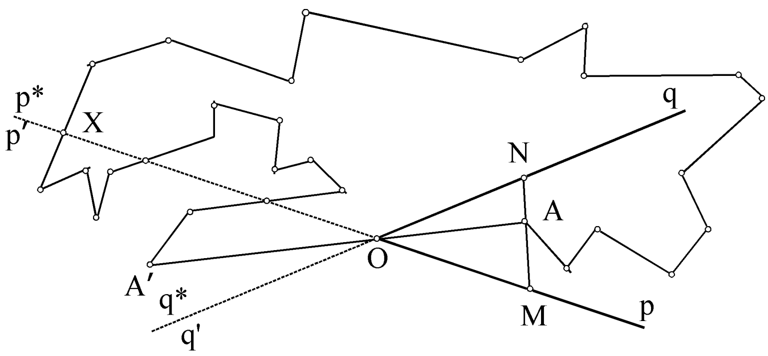
Дефиниција 2.13.3. Нека је $\measuredangle pq$ угаона линија неке равни π. Скуп тачака равни π које се налазе са исте стране угаоне линије $\measuredangle pq$ зовемо *отвореним углом* и обележавамо га $\measuredangle pq$. Унију угаоне линије $\measuredangle pq$ и отвореног угла $\measuredangle pq$ називамо *затвореним углом* и обележавамо га $[\measuredangle pq]$. Угаону линију $\measuredangle pq$ зовемо границом или међом угла $\measuredangle pq$, полуправе p и q крацима а тачку O теменом сваког од тих углова.

У посебном случају када су полуправе p и q комплементне релација повезаности дефинисана на геометријском лику $\pi \backslash \{p, q\}$ разлаже тај лик на две класе еквиваленције. Доказаћемо да то тврђење вази и када полуправе p и q нису комплементне.

Теорема 2.13.2. *Свака угаона линија неке равни π разлаже скуп осталих тачака те равни на два отворена угла.*

Доказ. Нека је $\measuredangle pq$ произвољна угаона линија равни π. Ако би полуправе p и q биле колинеарне тј. ако би образовале једну праву, тада би доказ био завршен јер би оне разложиле раван на две полуравни.

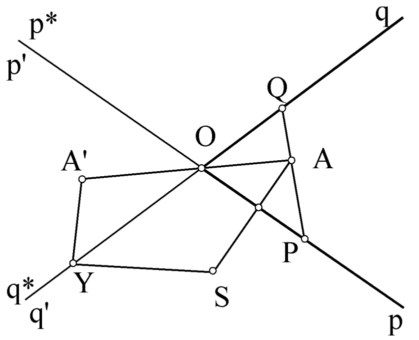
Претпоставимо да полуправе p и q (Слика 2.9) нису на једној правој. Нека су M и N тачке полуправих p и q респективно и нека је A тачка дужи (MN) таква да је $\mathcal{B}(M, A, N)$. Тада су O и A две разне тачке, те на правој OA постоји тачка A' таква да важи релација $\mathcal{B}(A, O, A')$. Докажимо да су тачке $A, A' \div \measuredangle pq$. Доказ изводимо индиректно. Претпоставимо да је $A, A' \ddot{-} \measuredangle pq$. Тада постоји полигонална линија L која спаја тачке A и A', цела припада равни π и $L \cap \measuredangle pq = \emptyset$. Нека је p' полуправа комплементарна са p и q' полуправа комплементарна са q, p^* права која садржи p и q^* права која садржи q. Како су $A, A' \in AA'$ и $A, A' \div O$, где $O \in p^*$ то је $A, A' \div p^*$ па свака полигонална линија која спаја A и A' сече праву p^*, па и полигонална линија L.



Слика 2.9.

Нека је X она тачка на полигоналној линији L која припада p^*, при чему тачка X разлаже полигоналну линију L на два дела од којих онај који одговара тачки A са правом p^* нема других заједничких тачака, тј. нека је на линији L почев од тачке A ка тачки A', X прва заједничка тачка те линије са правом p^*. Овај део линије L означимо са L'. Како је X тачка линије L' на правој p^* то значи да X припада p' јер је $L' \cap \measuredangle pq = \emptyset$. Сада из $M \in p$ и $X \in p'$ следи $M, X \div O$ а одавде $M, X \div q^*$. Свака тачка полигоналне линије осим X ће бити са оне стране праве p^* са које није A'. Поред тога је $A, N \ddot{-} p^*$ јер је $\mathcal{B}(N, A, M)$, па је свака тачка отворене полуправе q са исте стране праве p^* са које је A, а свака тачка полуправе q' је са оне стране праве p^* са које је A'. Следи да L' не сече q', а не сече ни q јер полигонална линија L по претпоставци не сече q. Значи L' и q^* немају заједничких тачака, па је $A, X \ddot{-} q^*$.

Међутим $X, M \div q^*$ па је $A, M \div q^*$, што је у супротности $\mathcal{B}(N, A, M)$. Према томе $A, A' \div \measuredangle pq$, па је број класа еквиваленције релације $\ddot{-}$ већи од један. Обележимо са ω класу еквиваленције (угао) којој припада тачка A а са ω' класу еквиваленције (угао) којој припада тачка A'. Доказаћемо да угаона линија $\measuredangle pq$ разлаже скуп свих осталих тачака равни π на отворене углове ω и ω'.



Слика 2.10.

То значи да требамо доказати:

(1) $\omega \cap \omega' = \emptyset$,

(2) $\omega \cup \omega' \cup \measuredangle pq = \pi$.

Оба тврђења доказујемо индиректно.

(1) Нека је $\omega \cap \omega' \neq \emptyset$. То значи да постоји тачка $R \in \omega \cap \omega'$. Из $R \in \omega$ следи $A, R \ddot{-} \measuredangle pq$. Из $R \in \omega'$ следи $A', R \ddot{-} \measuredangle pq$. Због транзитивности релације $\ddot{-}$ следи $A, A' \ddot{-} \measuredangle pq$, што је немогуће јер смо установили да важи $A, A' \div \measuredangle pq$.

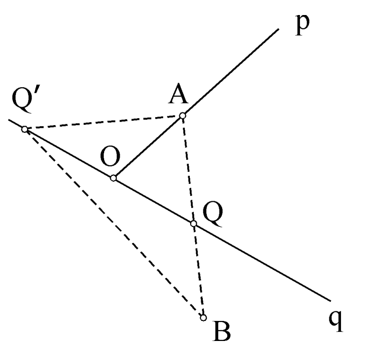
(2) Нека $S \notin \omega \cup \omega' \cup \measuredangle pq$. Тада $S \in AA'$ или $S \notin AA'$. Ако $S \in AA'$ тврђење следи непосредно узимајући у обзир поредак тачака у односу на тачку O. Ако $S \notin AA'$ (Слика 2.10) онда дуж AS сече или полуправу p или полуправу q. Нека дуж AS сече полуправу p. Тада су $A, S \div p^*$ и $A, A' \div p^*$ одакле следи $A', S \ddot{-} p^*$. Нека је Y произвољна тачка полуправе q'. Тада је $Y, A' \ddot{-} p^*$, одакле следи $Y, S \ddot{-} p^*$. Ако је $S \equiv Y$ онда $A'S$

нема заједничких тачака ни са p ни са q, па је $A', S \ddot{-} p^*$. Ако је $S \neq Y$ онда полигонална линија $A'Y \cup YS$ не сече праву p^*, а праву q^* сече у тачки $Y \in q'$. Тачке $A', S \notin q^*$ па је $A'Y \cap q \neq \emptyset$ и $YS \cap q \neq \emptyset$, па је $A', S \ddot{-} \measuredangle pq$ што је у супротности са претпоставком да $S \notin \omega'$. Дакле ω и ω' су једини углови на које је угаоном линијом $\measuredangle pq$ разложена раван π.□

Ако су краци неког угла комплементне полуправе, тај угао ћемо звати *опруженим.* Углови који имају заједнички један крак и немају других заједничких тачака називају се *суседни.* Суседне углове чији су не заједнички краци компланарни зваћемо *напоредним.* Конвексне углове $\measuredangle pq$ и $\measuredangle p'q'$ чији су краци p, p' и q, q', комплементне полуправе, називамо *унакрсним.*

Теоремом 2.13.2. је доказано да скуп који се састоји од тачака двеју полуправих са заједничким теменом разлаже раван којој припада на два угла. Пре него што формулишемо и докажемо општије тврђење, формулисаћемо и доказати две наредне теореме:

Теорема 2.13.3. *Нека је у равни π дата угаона линија $\measuredangle pq$. Ако је A произвољна тачка угаоне линије $\measuredangle pq$, и B произвољна тачка равни π таква да $B \notin \measuredangle pq$, тада постоји полигонална линија L која повезује тачке A и B, и чија свака тачка сем тачке A, припада оном од комплементарних углова на које је угаоном линијом разложена раван π а којему припада тачка B.*

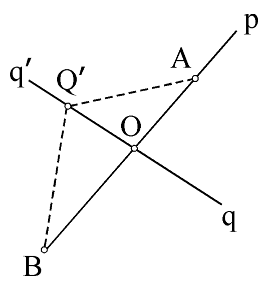


Слика 2.11.

Доказ. Означимо са α и α' комплементарне углове на које је раван π разложена угаоном линијом $\measuredangle pq$. Ако се тачка A поклапа са теменом O угаоне линије $\measuredangle pq$, тада отворена дуж (AB) нема заједничких тачака са угаоном линијом $\measuredangle pq$ и свака тачка дужи (AB) припада оном од углова α и α' коме припада тачка B.

Ако тачка A припада једном од кракова p и q, на пример краку p и ако дуж (AB) нема заједничких тачака са угаоном линијом $\measuredangle pq$, доказ теореме је завршен.

Ако дуж (AB) сече крак крак q у тачки Q (Слика 2.11) тада постоји тачка Q' таква да је $\mathcal{B}(Q, O, Q')$. Дуж (AQ') нема заједничких тачака са краком p јер $A \in P$, а не сече ни крак q јер су све тачке те дужи са оне стране праве p^* која је одређена краком p са које није ни једна тачка отворене полуправе q. Означимо са q^* праву одређену краком q. Важи $A, B \div q^*$. Такође, затворена дуж $[Q'B]$ нема заједничких тачака са краком p а једина заједничка тачка са правом q^* је Q'. То значи да полигонална линија $AQ'B$ повезује тачке A и B а са угаоном линијом $\measuredangle pq$ нема заједничких тачака сем тачке A. Дакле, све тачке полигоналне линије $AQ'B$, сем тачке A, су са исте стране $\measuredangle pq$ са које је и тачка B.



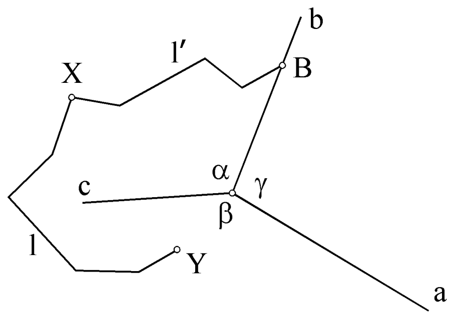
Слика 2.12.

Нека дуж AB садржи теме O угаоне линије $\measuredangle pq$. Означимо са Q' произвољну тачку полуправе q' комплементарне са Q. Тада полигонална линија $AQ'B$ повезује тачке A и B а са угаоном линијом $\measuredangle pq$ сем тачке A нема других заједничких тачака. □

Теорема 2.13.4. *Ако полуправа c са теменом O припада углу $\measuredangle ab$ са теменом O, онда полуправа c разлаже тај угао на два угла.*

Доказ. Ознажимо са γ' угао $\measuredangle ab$ коме припада полуправа c а са γ угао комплементаран углу γ'. Означимо затим са α угао $\measuredangle bc$ коме не припада полуправа a, а са β угао $\measuredangle ac$ коме не припада полуправа b. Најпре ћемо доказати да су углови α, β и γ дисјунктни. Претпоставимо да тачка X припада једном од њих рецимо углу α и докажимо да у том случају тачка X не припада ни једном од преостала два угла β и γ.

Ако би тачка X припадала једном од углова β и γ рецимо углу β тада би за сваку тачку Y тог угла постојала полигонална линија l која спаја тачке X и Y и цела припада углу $\measuredangle ac$. На основу претходне теореме постоји полигонална линија l' која повезује тачку X са произвољном тачком B полуправе b, таква да све тачке полигоналне линије l', осим тачке B, припадају углу α. Тада полигонална линија $l \cup l'$ повезује тачке Y и B и не сече угаону линију $\measuredangle ac$, што је у супротности са претпоставком да полуправа b не припада углу β.



Слика 2.13.

Докажимо сада да свака тачка Z која не припада угловима α и β мора да припада углу γ. Означимо са Z' произвољну тачку угла γ. Требамо доказати да је $Z, Z' \ddot{-} \measuredangle ab$. Ако отворена дуж ZZ' не сече угаону линију $\measuredangle ab$, тада су тачке Z и Z' са исте стране угаоне линије $\measuredangle ab$.

Претпоставимо да отворена дуж (ZZ') сече једну од полуправих a или b. Нека је на пример A пресечна тачка дужи (ZZ') и полуправе a. Ако дуж (ZZ') сече и полуправу b у некој тачки B, тада постоји тачка Y таква да је $\mathcal{B}(A, Y, B)$. У том случају је задовољено

$$Z', Y \div \measuredangle ab \quad \text{i} \quad Y, Z \div \measuredangle ab.$$

Заиста, ако нека дуж, на пример (YZ) сече само један крак угаоне линије $\measuredangle ab$, рецимо крак b, тада су $Y, Z \div \measuredangle ab$, јер би у супротном постојала полигонална линија l која спаја тачке Y и Z, а са угаоном линијом $\measuredangle ab$ нема заједничких тачака, па с обзиром на то да су Y, Z са разних страна праве b^* одређене краком b, полигонална линија l би секла полуправу комплементну полуправој b. Тада би као и доказу Теореме 2.13.2. постојала полигонална линија l' која припада полигоналној линији l, чији би крајеви били са разних страна праве која садржи крак a, а све њене тачке са оне стране праве b^* са које је тачка Z, па би l а самим тим и l

секла полуправу a. Дакле, из $Z', Y \div \measuredangle ab$ i $Y, Z \div \measuredangle ab$ следи $Z, Z' \ddot{-} \measuredangle ab$. Претпоставимо да (ZZ') не сече полуправу b, већ само полуправу a. Ако та дуж не би секла ни полуправу c, тада би било $Z, Z' \div \measuredangle ca$, п а с обзиром на то да је да је Z' ван угла β, тачка Z би припадала углу β.

Ако би пак дуж (ZZ') секла полуправу c у тачки C, тада би постојала тачка Y за коју важи $\mathcal{B}(Z', C, Y, A, Z)$ или $\mathcal{B}(Z', A, Y, C, Z)$. У првом случају би дуж (ZZ') секла b, што је у супротности са претпоставком. У другом случају би тачка Y била ван угла α, а дуж (YZ) би секла полуправу c али не и полуправу b, одакле следи $Y, Z \div \measuredangle bc$, тј. тачка Z би припадала углу α. □

Применом претходне теореме уз помоћ математичке индукције доказује се следеће тврђење:

Теорема 2.13.5. *Скуп који се састоји од n разних полуправих неке равни π, са заједничким теменом O, разлаже раван π на n углова.*

2.14 Оријентација равни

Да бисмо увели оријентацију равни, пре тога треба увести појам истосмерних углова. При томе разликујемо два случаја:

(1) када углови имају заједничко теме,

(2) када углови немају заједничко теме.

Дефиниција 2.14.1. За угао $\sphericalangle ab$ чији краци a и b чине уређен пар полуправих кажемо да је *оријентисан*. Крак a је почетни или први а крак b крајњи или други крак тог оријентисаног угла.

Дефиниција 2.14.2. Два оријентисана угла $\sphericalangle ab$ и $\sphericalangle cd$ који припадају истој равни π и имају заједничко теме O називају се *истосмерним* (ознака: $\sphericalangle ab \rightrightarrows \sphericalangle cd$) ако је задовољен један од следећих услова:
(1) ако је $a = c$ или $b = d$ један од углова $\sphericalangle ab$ и $\sphericalangle cd$ садржи други.
(2) ако је $a \neq c$ и $b \neq d$ један од углова $\sphericalangle ab$ и $\sphericalangle cd$ према услову (1) задовољава релације $\sphericalangle ab \rightrightarrows \sphericalangle ad$ и $\sphericalangle ad \rightrightarrows \sphericalangle cd$. Ако поменути углови $\sphericalangle ab$ и $\sphericalangle cd$ нису истосмерни онда кажемо да су *супротносмерни* (ознака $\sphericalangle ab \rightleftarrows \sphericalangle cd$).

За оријентисане углове користићемо ознаку $\sphericalangle ab$ а за неоријентисане ознаку $\measuredangle ab$.

Дефиниција 2.14.3. Два оријентисана угла $\sphericalangle ab$ и $\sphericalangle cd$ неке равни π са разним теменима O и S називамо *истосмерним* и симболички обележавамо $\sphericalangle ab \rightrightarrows \sphericalangle cd$ ако постоје оријентисани углови $\sphericalangle pq$ и $\sphericalangle rs$ са теменима редом у тачкама O и S тако да је за полуправе p, q, r, s: $p \rightrightarrows r$ и $q \rightrightarrows s$ при чему је $\sphericalangle ab \rightrightarrows \sphericalangle pq$ и $\sphericalangle rs \rightrightarrows \sphericalangle cd$.

Теорема 2.14.1. *Релација истосмерности дефинисана на скупу углова једне равни је релација еквиваленције.*

Поступак доказивања ове теореме аналоган је поступку доказивања одговарајуће теореме за истосмерне праве, с тим што ће бити размaтрано више могућности него за праву. Ово настаје због тога што треба разликовати случајеве када углови имају:

(1) заједничко теме, (2) различита темена.

Једна од последица релације истосмерности углова је и могућност разлагања свих углова на класе истосмерних углова.

Теорема 2.14.2. *Скуп свих оријентисаних углова K неке равни π може се разложити на два подскупа K_1 и K_2 при чему су задовољени услови:*
(1) *Подскупови K_1 и K_2 нису празни, тј. $K_1, K_2 \neq \emptyset$,*
(2) *Подскупови K_1 и K_2 су дисјунктни, тј. $K_1 \cap K_2 = \emptyset$,*
(3) *Свака два угла из истог подскупа су истосмерна.*
(4) *Свака два угла из разних подскупова су супротносмерна.*

Доказ ове теореме врши се аналогно доказу одговарајуће теореме у случају оријентације праве.

Дефиниција 2.14.4. Сваки од два подскупа K_1 и K_2 поменута у претходној теореми називамо *оријентацијом* или *смером* у разматраној равни π. Оријентације K_1 и K_2 називамо *супротним* међу собом. Раван у којој је задата једна оријентација називамо *оријентисаном.*

У апсолутној геометрији појам оријентације није трансмисибилан, тј. могуће је говорити само о оријентацији на једној али не и о оријентацији која би била заједничка за више правих (што је случај нпр. у погледу оријентације паралелних правих у Еуклидској геометрији).

Такође, може се говорити само о оријентацији једне исте равни јер појам оријентације углова у различитим равнима не може бити дефинисан. У Еуклидској геометрији захваљујући дефинисању појма паралелности могуће је дефинисати оријентације на шире класе: класу паралелних правих односно класу паралелних равни, док се у геометрији Лобачевског (хиперболичкој геометрији) такве оријентације не могу изводити што значи да појам оријентације у Еуклидској геометрији представља трансмисибилан а у Апсолутној геометрији и хиперболичкој геометрији нетрансмисибилан појам.

2.15 Полупростори и разлагање простора помоћу равни

Дефиницији појма полупростора претходи увођење помоћних релација "са исте стране равни" и "са разних страна равни". Користићемо ознаке $A, B \stackrel{\cdot\cdot}{-} \pi$ и $A, B \div \pi$.

Дефиниција 2.15.1. Нека су A, B две тачке које не припадају равни π. Ако је притом $(AB) \cap \pi = \emptyset$ тада кажемо да су тачке A и B *са исте стране равни* π. У супротном, ако је $(AB) \cap \pi \neq \emptyset$ тада кажемо да су тачке A и B *са разних страна равни* π.

Теорема 2.15.1. *Релација "са исте стране равни" је релација еквиваленције.*

Доказ ове теореме врши се аналогно доказу одговарајуће теореме о релацији "са исте стране праве" у равни.

Релација "са исте стране равни" омогућује дефинисање појма полупростора.

Дефиниција 2.15.2. Скуп свих тачака које се налазе са исте стране равни π називамо *отвореним полупростором.* Скуп који се састоји од тачака равни π и тачака полупростора називамо *затвореним полупростором* при чему је раван π граница или међа полупростора.

Није тешко констатовати да је полупростор једнозначно одређен међом тј. равни π и једном тачком ван међе. Ако је раван π међа и тачка A не припада равни π онда отворени полупростор одређен на овај начин означавамо (π, A). Одговарајући затворени полупростор означавамо $[\pi, A)$.

Теорема 2.15.2. (Основна теорема о разлагању простора) *Свака раван π простора S^3 разлаже скуп свих осталих тачака тог простора на два отворена полупростора.*

Доказ ове теореме се врши аналогно доказу теореме о разлагању равни на отворене полуравни.

Теорема 2.15.3. *Отворен и затворен полупростор су конвексни скупови тачака.*

Напомена. Особина разлагања праве, равни или простора је индивидуално својство регулисано аксиоматиком. За разлику од Апсолутне геометрије у Пројективној геометрији једна тачка не врши разлагање праве, односно једна раван не врши разлагање простора, већдве тачке разлажу праву на два пројективна одсечка. У Апсолутној геометрији тачка разлаже праву, а једна раван разлаже простор. Две равни које се секу разлажу простор на четири дела. Три равни које се секи разлажу простор на максимално осам делова, а четири равни на максимално петнаест делова.

2.16 Диедарска површ и диедар

Дефиниција 2.16.1. Скуп тачака двеју полуравни α и β које имају заједничку границу s и тачака праве s називамо *диедарска површ* а означавамо је $\alpha\beta$.

Дефиниција 2.16.2. Нека су A и B две тачке које не припадају диедарској површи $\alpha\beta$. Ако постоји полигонална линија која спаја тачке A и B и која са диедарском површи $\alpha\beta$ нема заједничких тачака, тада кажемо да су тачке A, B *са исте стране диедарске површи* $\alpha\beta$, а ако таква линија не постоји тада су тачке A и B *са различитих страна диедарске површи* $\alpha\beta$. Као и у свим претходним случајевима користићемо исте ознаке релација са исте стране и са разних страна диедарске површи.

Теорема 2.16.1. *Релација* $\ddot{-}\,\alpha\beta$ *је релација еквиваленције.*

Ова теорема доказује се аналогно одговарајућој теореми везаној за угао.

Дефиниција 2.16.3. Скуп свих тачака простора које се налазе са исте стране диедарске површи $\alpha\beta$ називамо *отвореним диедром*. Ако тачкама диедарске површи $\alpha\beta$ додамо отворен диедар, добијамо *затворен диедар.* У оба случаја диедарска површје граница или међа диедра, полуравни α и β називамо пљоснима тог диедра а заједничку границу s ивицом диедра.

Теорема 2.16.2. *Свака диедарска површ простора разлаже скуп осталих тачака простора на два отворена диедра.*

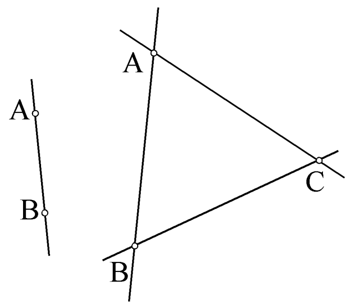
Ова теорема доказује се аналогно одговарајућој теореми везаној за угао.

Напоменимо да за сваку теорему доказану за углове, можемо формулисати и доказати одговарајућу теорему за диедре.

2.17 Пеанови ставови о идентификацији правих, равни и простора са извесним скуповима тачака

Теорема 2.17.1. *Ако су A и B две разне тачке неке праве l тада је права l идентична са скупом l' који се састоји од тачака A и B и свих тачака X које задовољавају неку од трију релација: $\mathcal{B}(A,X,B)$, $\mathcal{B}(X,A,B)$, $\mathcal{B}(A,B,X)$.*

Доказ. Следи директно из Аксиоме II_1 и Теореме 2.5.1. □

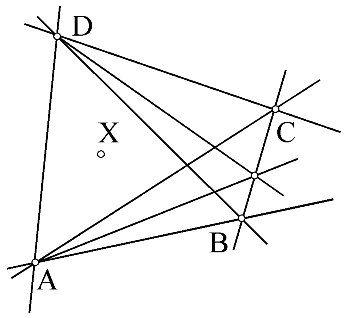


Слика 2.14.

Такође није тешко доказати и следеће теореме

Теорема 2.17.2. *Ако су A, B, C три неколинеарне тачке неке равни π тада је раван π идентична са скупом π' свих тачака X које задовољавају бар једну од релација: $X \in l(B,C)$, $X \in l(C,A)$, $X \in l(A,B)$, $\mathcal{B}(B,AX,C)$, $\mathcal{B}(C,BX,A)$, $\mathcal{B}(A,CX,B)$* (Слика 2.14).

Напомена. Ознака $l(B,C)$ означава праву одређену тачкама B и C а ознака $\mathcal{B}(B,AX,C)$ значи да су тачке B и C са разних страна праве AX.



Слика 2.15.

Теорема 2.17.3. *Ако су A, B, C, D четири некомпланарне тачке, тада је скуп S свих тачака простора идентичан са скупом S' свих тачака X које задовољавају бар једну од релација: $X \in \pi(B, C, D)$, $X \in \pi(C, D, A)$, $X \in \pi(D, A, B)$, $X \in \pi(A, B, C)$, $\mathcal{B}(B, ADX, C)$, $\mathcal{B}(C, BDX, A)$, $\mathcal{B}(A, CDX, B)$, $\mathcal{B}(A, BCX, D)$, $\mathcal{B}(B, CAX, D)$, $\mathcal{B}(C, ABX, D)$* (Слика 2.15).

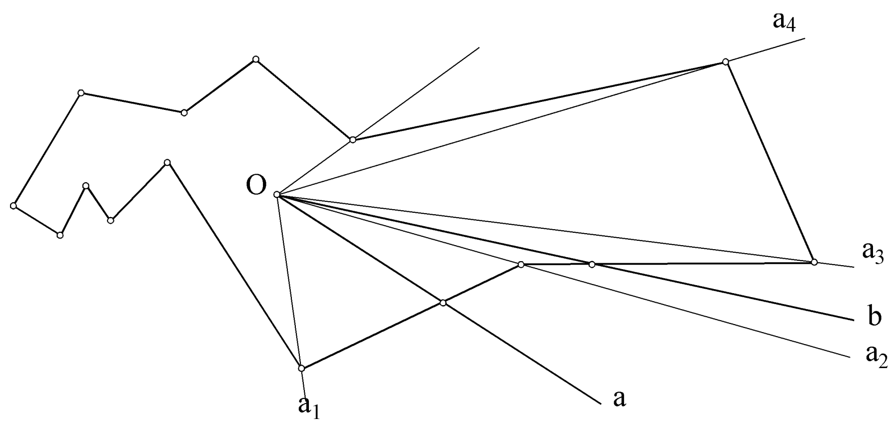
Напомена. Ознака $X \in \pi(B, C, D)$ значи да тачка X припада равни одређеној тачкама B, C, D а ознака $\mathcal{B}(B, ADX, C)$ значи да се тачке B и C налазе са разних страна равни $\pi(A, D, X)$.

2.18 Једноструко повезане полигонске површи

Дефиницију полигонске површи извешћемо уз претходно увођење помоћних релација: "тачка у простом равном полигону" и "тачка ван простог равног полигона".

Теорема 2.18.1. *Нека је дат прост раван полигон p и нека је O тачка у његовој равни која није на полигону p и a, b пар полуправих у равни тог полигона, које имају за крај тачку O и које не садрже ни једно теме полигона p. Ако при томе полуправа a има са полигоном p непаран број заједничких тачака тада и полуправа b има непаран број заједничких тачака са полигоном p. Ако полуправа a има са полигоном p нула или паран број заједничких тачака тада и полуправа b има са полигоном p нула или паран заједничких тачака.*

Доказ. Означимо са $k(a)$ број пресечних тачака полуправе a са полигоном p а са $k(b)$ број пресечних тачака полуправе b са полигоном p. Да би доказали теорему довољно је доказати да је разлика $k(a) - k(b)$ нула или паран број, тј. да је $k(a) \equiv k(b)\,(mod\ 2)$.



Слика 2.16.

Конструишимо све полуправе (Слика 2.16) које полазе из тачке O и садрже респективно темена полигона p. Неке од тих полуправих могу се и поклопити. У том случају такве полуправе сматраћемо једном полуправом. Ако полигон p има n темена онда онда је укупан број полуправих са почетком у тачки O једнак m при чему је $m \leqslant n$. Означимо са $a_1, a_2, \ldots, a_m$ те полуправе при чему је уведен такав поредак да је $a_2 \subset \measuredangle(a_1, a_3)$, $a_3 \subset \measuredangle(a_2, a_4), \ldots$

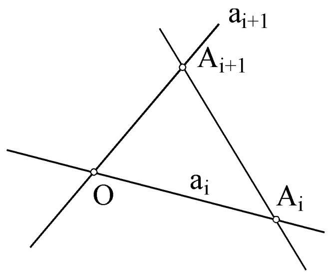
Наиме, ових m полуправих разлажу раван π на m отворених углова, при томе између сваке две узастопне полуправе нема темена, већсамо страница полигона p.

Нека је при томе a_1 полуправа, таква да је $a \subset \measuredangle(a_1, a_2)$. У том случају може се догодити да је и $b \subset \measuredangle(a_1, a_2)$ или је b у неком другом од углова (Слика 2.17) $\measuredangle(a_i, a_{i+1})$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$.

Ако је полуправа $b \subset \measuredangle(a_1, a_2)$ у коме је и полупра a непосредно следи да ако a сече неку страницу полигона p, тада и b сече ту страницу полигона p и обрнуто. У том случају је $k(a) = k(b)$ тј. $k(a) - k(b) = 0$.

Ако полуправа b није у углу $\measuredangle(a_1, a_2)$ већнапример у углу $\measuredangle(a_2, a_3)$, могу наступити следећи случајеви:

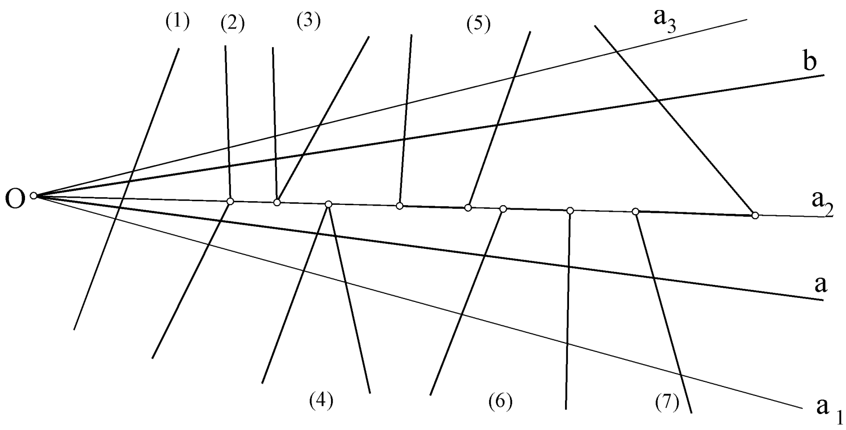
(1) Нека страница полигона (Слика 2.18) сече сва три крака a_1, a_2, a_3. Тада она сече обе полуправе a и b.



Слика 2.17.

(2) Нека једна страница (Слика 2.18) има за крај тачку која је на a_2 а њој суседна страница полази из те тачке и налази се са друге стране праве одређене са a_2. Тада a сече ту страницу а b сече њој суседну па је за тај случај $k(a) = k(b)$, тј. $k(a) - k(b) = 0$.

(3) Нека обе суседне странице полигона (Слика 2.18) имају за крај тачку на полуправој a_2 и нека се обе налазе са исте стране полуправе a_2 нпр. тамо где је полуправа a. Тада оне обе секу a и не секу b. Аналогно у случају (4) оне обе секу b а не секу a. И у случају (3) и (4) разлика је паран број.



Слика 2.18.

(5) Једна од страница полигона (Слика 2.18) може припадати полуправој a_2. У том случају могу наступити ситуације (5), (6) и (7). У свим овим случајевима је $k(a) - k(b)$ паран број или нула. Ако се b не налази у $\measuredangle(a_2, a_3)$ него у неком од следећих углова, тада се доказ изводи

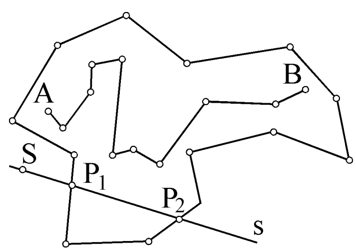
индукцијом и закључује да је $k(a) - k(b)$ паран број или нула. Одавде закључујемо да ако је $k(a)$ непаран број тада је и $k(b)$ непаран број, а ако је $k(a)$ паран број или нула тада је и $k(b)$ паран број или нула. $\square$

Дефиниција 2.18.1. Нека је p прост раван полигон и O тачка у његовој равни која не припада полигону p. Ако постоји полуправа a која се налази у равни полигона p, не садржи ни једно његово теме и има са p непаран број заједничких тачака, тада кажемо да је тачка O *унутар полигона* p. Ако таква полуправа не постоји кажемо да је тачка O *изван полигона* p.

Дефиниција 2.18.2. Нека је p прост раван полигон. Скуп тачака равни тог полигона које се налазе у том полигону називамо *отвореном полигонском површи.* Темена и странице полигона називамо теменима и страницама полигонске површи. Отворену полигонску површ означавамо са (p). Скуп свих тачака отворене полигонске површи (p) и тачака које се налазе на полигону p називамо *затвореном полигонском површи* и означавамо је са $[p]$. Полигон p је граница или руб полигонске површи.

Није тешко установити да се било које две тачке полигонске површи могу спојити полигоналном линијом која цела припада унутрашњости разматране полигонске површи.

Теорема 2.18.2. *Свака права s у равни простог равног полигона p која не садржи ни једно теме тог полигона, има са тим полигоном паран број заједничких тачака.*



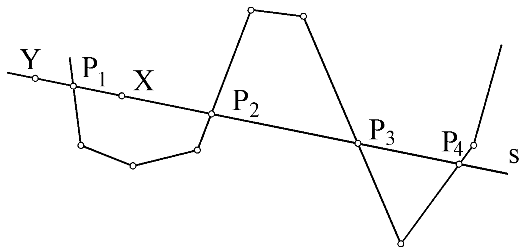
Слика 2.19.

Доказ. Нека је S произвољна тачка праве s (Слика 2.19) која не припада полигону p. Према раније наведеној теореми о разлагању праве тачка S

разлаже праву s на две полуправе s_1 и s_2. Према доказаној теореми, ако полуправа s_1 има са полигоном p непаран број заједничких тачака, тада исто важи и за полуправу s_2, а ако полуправа s_1 има паран број заједничких тачака са полигоном p или их нема тада и полуправа s_2 има са полигоном p паран број заједничких тачака или их нема. Будући да су s_1 и s_2 дисјунктни скупови тачака, укупан број пресечних тачака праве s и полигона p износи $k(s_1) + k(s_2)$, па $k(s)$ мора бити паран. $\square$

Теорема 2.18.3. (Жорданова теорема - основна теорема о разлагању равни неким простим равним полигоном): *Сваки прост раван полигон неке равни π разлаже скуп осталих тачака те равни на два подскупа, од којих је један отворена полигонска површ, а други представља спољашњост полигонске површи.*

Доказ. Нека је p прост раван полигон и нека је s произвољна права која има са полигоном p заједничких тачака и не садржи ни једно теме полигона p. Према претходној теореми права s има са полигоном p паран број пресечних тачака (Слика 2.20) које можемо означити $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ при чему је $\mathcal{B}(P_1, P_2, \ldots, P_{2n})$. Нека је X произвољна тачка између P_1 и P_2 а Y тачка праве s која је иза P_1 у односу на P_2, тј. важи $\mathcal{B}(Y, P_1, X, P_2)$.



Слика 2.20.

Тада X разлаже праву s на две полуправе. Било коју од њих, рецимо ону која садржи $P_2, P_3, \ldots, P_{2n}$ обележимо са s_1. Тачка Y ралаже праву s на две полуправе. Нека је s_2 она од њих која садржи тачке $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$. Како тачка X не припада полигону p и припада оној полуправој која са полигоном p има непаран број заједњичких тачака, тачка X је унутар полигона p. Како је тачка Y у равни полигона p и постоји полуправа s_2 са почетком у Y која са полигоном p има паран број заједничких тачака, тачка Y је ван полигона p. Из овога следи да унутрашњост и спољашњост полигона p нусу празни скупови. Да би смо показали да полигон

p разлаже скуп свих осталих тачака његове равни на унутрашњост и спољашњост полигона p довољно је установити следећа два својства:

(1) унутрашњост и спољашњост полигона p немају заједничких тачака,

(2) свака тачка равни тог полигона која не припада том полигону припада или спољашњости или унутрашњости тог полигона.

(1) Први случај доказује се индиректно. Ако би у унутрашњости и спољашњости постојала нека заједничка тачка M, тада би тачка M као унутрашња тачка представљала крај неке полуправе a која са полигоном p има непаран број заједничких тачака. С друге стране тачка M као спољашња тачка полигона била би крај неке полуправе b која би са полигоном p имала паран број или нула заједничких тачака. У том случају из тачке M равни полигона p постоје две полуправе које не садрже ни једно теме полигона p при чему једна од њих има са полигоном p непаран а друга паран број или нула заједничких тачака што је немогуће.

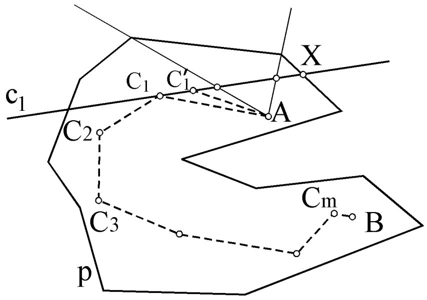
(2) Друго својство доказује се непосредно. Ако би M била тачка равни полигона p која не припада полигону p и ако је a полуправа која се налази у равни тог полигона и не садржи ни једно теме тог полигона тада полуправа a са полигоном p или има непаран број заједничких тачака или нула заједничких тачака те је тачка M или на полигону или ван полигона или унутар полигона чиме је теорема доказана. $\square$

Две следеће теореме дају одговор на питање јесу ли унутрашњост у спољашњост простог равног полигона области или не.

Теорема 2.18.4. *Нека су у равни π дати прост полигон p и две разне тачке A и B које не припадају полигону p. Ако у равни π постоји полигонална линија која повезује тачке A и B а са полигоном p нема заједничких тачака, тада су тачке A и B обе унутар или обе изван полигона p.*

Доказ. Нека је $l = AC_1C_2 \cdots C_mB$ полигонална линија равни π која са полигоном p нема заједничких тачака (Слика 2.21). Довољно је да докажемо да су тачке A и C_1 обе унутр или обе ван полигона p. Тада би свака два суседна темена полигоналне линије l била оба унутар или оба ван полигона p, а то значи да би и тачке A и B биле обе унутар ули обе ван полигона p.

Ако полуправа $[AC_1)$ не садржи ни једно теме полигона p, тада ни полуправа са теменом C_1 која припада полуправој $[AC_1)$ не садржи ни једно од темена полигона p. Те две поменуте полуправе ће сећи полигон p у истим тачкама јер дуж (AC_1) са полигоном p нема заједничких



Слика 2.21.

тачака. Дакле, у овом случају су тачке A и B истовремено унутар или ван полигона p.

Ако полуправа $[AC_1)$ садржи неко од темена полигона p, тада с обзиром на то да је број темена полигона p коначан, постоји права c_1 која садржи тачку C_1 и не садржи ни једно теме полигона p. С обзиром на то да се скуп који се састоји из тачке C_1 и пресечних тачака праве c_1 и полигона p може линеарно уредити, означимо са X тачку тог скупа са особином да између тачака X и C_1 нема других тачака тог скупа. Тада, на дужи XC_1 можемо уочити тачку C_1' са особином да полуправа $[AC_1')$ не садржи ни једно теме полигона p, а дуж (AC_1') нема заједничких тачака са полигоном p. Заиста, полуправе са заједничким почетком у тачки A, које садрже темена полигона p секу дуж (XC_1) у коначан број тачака. Означимо са C_1' произвољну тачку дужи (XC_1) различиту од њих, тако да између тачака C_1 и C_1' нема ни једне од поменутих тачака. Дуж (AC_1') нема заједничких тачака са страницама полигона p па су тачке A и C_1' обе унутар или обе ван полигона p. Такође ни дуж $(C_1'C_1)$ нема заједничких тачака са полигоном p, па су и тачке C_1' и C_1 обе унутар или обе ван полигона p. Одавде следи да су тачке A и C_1 обе унутар или обе ван полигона p. □

Као што смо видели раније полигони се могу поделити на просте и сложене. У складу са овим можемо и дијагонале полигона поделити на просте и сложене.

Дефиниција 2.18.3. Кажемо да је дијагонала полигона *проста*, ако са тим полигоном нема заједничких тачака. У противном је дијагонала полигона *сложена*. Проста дијагонала може бити унутрашња или спољашња.

Дефиниција 2.18.4. Проста дијагонала полигона p је *унутрашња* ако су све њене тачке сем крајњих унутар тог полигона. Проста дијагонала полигона је *спољашња* ако су све њене тачке изван полигона p осим њених крајњих тачака.

Такође важе и следећа тврђења кја наводимо без доказа.

Теорема 2.18.5. *Унутрашњост и спољашњост простог равног полигона p су повезани геометријски ликови.*

Теорема 2.18.6. *Свака полигонска површ која има више од три темена има бар једну унутрашњу дијагоналу.*

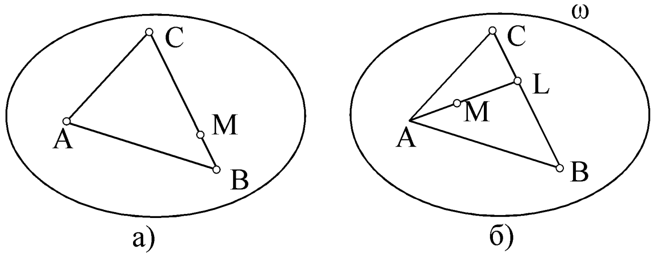
Теорема 2.18.7. *Ако је p прост раван полигон и l полигонална линија чији се крајеви налазе на том полигону а све остале тачке у том полигону p тада ова полигонална линија l разлаже полигонску површ ограничену полигоном p на две полигонске површи.*

Дефиниција 2.18.5. *Разлагање полигонске површи на троугаоне површи назива се триангулација полигонске површи.*

Теорема 2.18.8. *Свака полигонска површ може се унутрашњим дијагоналама разложити на троугаоне површи.*

Теорема 2.18.9. *Троугаона површ је конвексан геометријски лик.*

Теорема 2.18.10. *Ако сва темена неке троугаоне површи ΔABC припадају конвексном лику ω, тада све тачке троугаоне површи ΔABC припадају лику ω.*



Слика 2.22.

Доказ. Уочимо произвољну тачку M троугаоне површи ΔABC. Довољно је показати да $M \in \omega$.

Разликујемо два случаја: (i) Тачка M припада некој од страница AB, BC или AC троугаоне површи, (ii) Тачка M не припада ни једној од страница AB, BC и AC троугаоне површи.

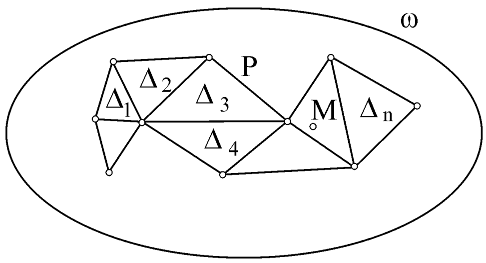
Размотримо понаособ сваку од ове две могућности:

(i) Нека тачка $M \in BC$ (Слика 2.22.а)). Важи $B, C \in \omega$ и ω је конвексан лик, одакле следи $BC \subset \omega$ а одавде $M \in \omega$. Аналогно се разматрају и случајеви када $M \in AC$ и $M \in AB$

(ii) Нека је M унутрашња тачка троугаоне површи ΔABC (Слика 2.22.б)). Права AM сече страницу BC у некој тачки L. Тачка L припада дужи BC, па због конвексности припада и лику ω. Сада, $A, L \in \omega$, одакле према доказаном делу теореме (i) следи $AL \subset \omega$, а како је још $M \in AL$ следи $M \in \omega$.

Дакле, $\Delta ABC \subset \omega$. □

Теорема 2.18.11. *Ако сва темена неке не неопходно конвексне, просте, равне полигоналне површи P припадају конвексном геометријском лику ω, тада све тачке те полигоналне површи припадају лику ω.*



Слика 2.23.

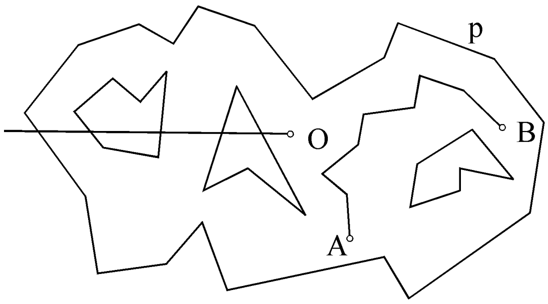
Доказ. Нека је P проста полигонална површ таква да сва њена темена припадају конвексној површи ω (Слика 2.23). Површ P се може представити у облику уније троугаоних површи Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (Теорема 2.18.8.), тј.

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i.$$

Нека је M произвољна тачка површи P. Тада постоји троугаона површ $\triangle_i$, $i \in \{1, ..., n\}$ таква да $M \in \triangle_i$, $\triangle_i \subset \omega$ на основу Теореме 2.18.10., одакле следи $M \in \omega$. Дакле, због произвољности тачке M следи $P \subset \omega$. $\square$

2.19 Вишеструко повезане полигонске површи

Сем полигонских површи које смо до сада разматрали, а то су биле једноструко повезане полигонске површи, у геометрији се разматрају и вишеструко повезане полигонске површи.



Слика 2.24.

Дефиниција 2.19.1. Нека је дат прост раван полигон p и нека је $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ коначан скуп полигона (Слика 2.24) који се налазе у полигону p, који међу собом немају заједничких тачака, а сваки од њих се налази изван осталих. Полигонску површ која се добија када се од отворене полигонске површи p одузму затворене полигонске површи $[p_1], [p_2], \ldots, [p_k]$ називамо $(k+1)-$*повезаном отвореном полигонском површи* и обележавамо је са

$$(p; p_1, p_2, \cdots, p_k).$$

Ако се овом скупу тачака додају тачке полигона p_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, и тачке полигона p добијамо *затворену* $(k+1)-$*повезану површ* коју означавамо са

$$[p; p_1, p_2, \cdots, p_k].$$

Површи уведене претходном дефиницијом зваћемо и *вишеструко повезаним полигонским површима.* Јасно, обична полигонска површ је 1-повезана.

Темена и ивице полигона из којих се састоји руб површи $(p; p_1, p_2, \cdots, p_k)$ зовемо *теменима и ивицама те* $(k+1)$*-повезане полигонске површи.* Дужи које спајају темена површи $(p; p_1, p_2, \cdots, p_k)$, а нису њене ивице, називамо *дијагоналама те површи.*

Није тешко доказати следеће теореме:

Теорема 2.19.1. *Ако је тачка* O *унутар* $(k+1)-$*повезане отворене полигонске површи и ако је* a *полуправа која има за крај тачку* O *и не садржи ни једно теме полигона* p, p_1, p_2 $\cdots$, p_k, *онда полуправа* a *има са рубом те површи непаран број заједничких тачака.*

Теорема 2.19.2. *Ма које две тачке у простој* $(k+1)$*-повезаној полигонској површи увек се могу спојити једном полигоналном линијом која припада тој полигонској површи.*

Теорема 2.19.3. *Ма које две тачке изван* $(k+1)-$*повезане полигонске површи могу се спојити полигоналном линијом* l*, таквом да нема заједничких тачака са полигоном* p*, тј.* $l \cap p = \emptyset$*, или је број пресечних тачака паран.*

Теорема 2.19.4. *Ако су* P *и* Q *две тачке у равни* $(k+1)-$*повезане полигонске пврши и* P *унутар а* Q *ван ње, онда свака полигонална линија која спаја тачке* P *и* Q *а припада равни тог полигона има непаран број заједничких тачака са рубом те полигонске површи а ако садржи део странице онда има бесконачно много заједничких тачака.*

Из дефиниције вишеструко повезаних полигонских површи непосредно следи да затворена $k+1$-повезана полигонска површ $[p; p_1, p_2, \cdots, p_k]$ разлаже раван којој припада на полигонске површи (p_1), (p_2), $\cdots$, (p_k) и спољашњост полигона $[p]$. На исти начин као за полигонске површи и у овом случају се могу доказати следеча тврђења:

Теорема 2.19.5. *Ако у равни* $(k+1)$*-повезане полигонске површи* $(p; p_1, p_2, \cdots, p_k)$ *постоји полигонална линија* l *која повезује тачке* A *и* B *које не припадају њеном рубу, тада ако тачке* A *и* B *нису тачке спољашњости полигона* p*, припадају тачно једном од ликова*

$$(p; p_1, p_2, \cdots, p_k).$$

Теорема 2.19.6. *Свака $(k+1)$-повезана полигонска површ је повезан геометријски лик.*

Теорема 2.19.7. *Свака $(k+1)$-повезана полигонска површ са више од три темена има бар једну унутрашњу дијагоналу.*

Теорема 2.19.8. *Постоји триангулација сваке $(k+1)$-повезане полигонске површи њеним унутрашњим дијагоналама.*

2.20 Рогљасте површи и рогљеви

Дефиниција 2.20.1. Ако је $a_1, a_2, \dots, a_n\, (n \geq 3)$ коначан низ међу собом различитих полуправих са заједничким почетком у тачки O, од којих никоје три узастопне нису компланарне, онда скуп који се састоји од тачке O, свих полуправих $a_1, a_2, \dots, a_n$ и свих отворених углова $\measuredangle(a_1, a_2)$, $\measuredangle(a_2, a_3)$, $\dots$, $\measuredangle(a_{n-1}, a_n)$ називамо *отвореном рогљастом површи.* Тачку O називамо врхом или теменом, полуправе $a_1, a_2, \dots, a_n$ ивицама а углове $\measuredangle(a_1, a_2)$, $\measuredangle(a_2, a_3)$, $\dots$, $\measuredangle(a_{n-1}, a_n)$ ивичним угловима или пљоснима те рогљасте површи. Ивице a_1 и a_n називамо *крајњим* а остале *унутрашњим* ивицама. Ако наведеном скупу тачака додамо и тачке угла $\measuredangle(a_n, a_1)$ добијамо *затворену рогљасту површ* коју називамо краће *рогљаста површ.*

Рогљаста површ може да буде проста и сложена.

Дефиниција 2.20.2. Рогљаста површ је *проста* ако никоје две пљосни немају заједничких тачака сем што имају заједничко теме и што суседне пљосни имају заједничке ивице. У противном рогљаста површ је *сложена.*

Разликујемо и једностране и вишестране рогљасте површи.

Дефиниција 2.20.3. Рогљаста површ је *једнострана* ако постоји раван која садржи њено теме док се све остале тачке те површи налазе са исте стране те равни. Ако таква раван не постоји рогљасту површ називамо *вишестраном.*

Дефиниција 2.20.4. Две тачке су *са исте стране просте рогљасте површи* ако постоји полигонална линија у простору која спаја те две тачке и нема са рогљастом површи заједничких тачака. У противном су *са разних страна рогљасте површи.* Поменуте релације означавамо као и у претходним случајевима.

Дефиниција 2.20.5. Скуп свих тачака које су са исте стране просте рогљасте површи називамо *рогаљ*.

Аналогно одговарајућим теоремама из претходних случајева доказује се и следећа основна теорема

Теорема 2.20.1. (Жорданова теорема) *Свака проста затворена рогљаста површ простора разлаже скуп осталих тачака простора на два отворена подскупа.*

Сваки од два поменута подскупа представља рогаљ. Саму рогљасту површ називамо границом или међом сваког од тих рогљева.

Дефиниција 2.20.6. Нека је дата просторна фигура Φ и нека раван π. Раван π је *раван ослонца фигуре* Φ ако има са њом заједничких тачака, при чему су све остале тачке фигуре Φ са исте стране равни π.

Лако се доказује следећа теорема

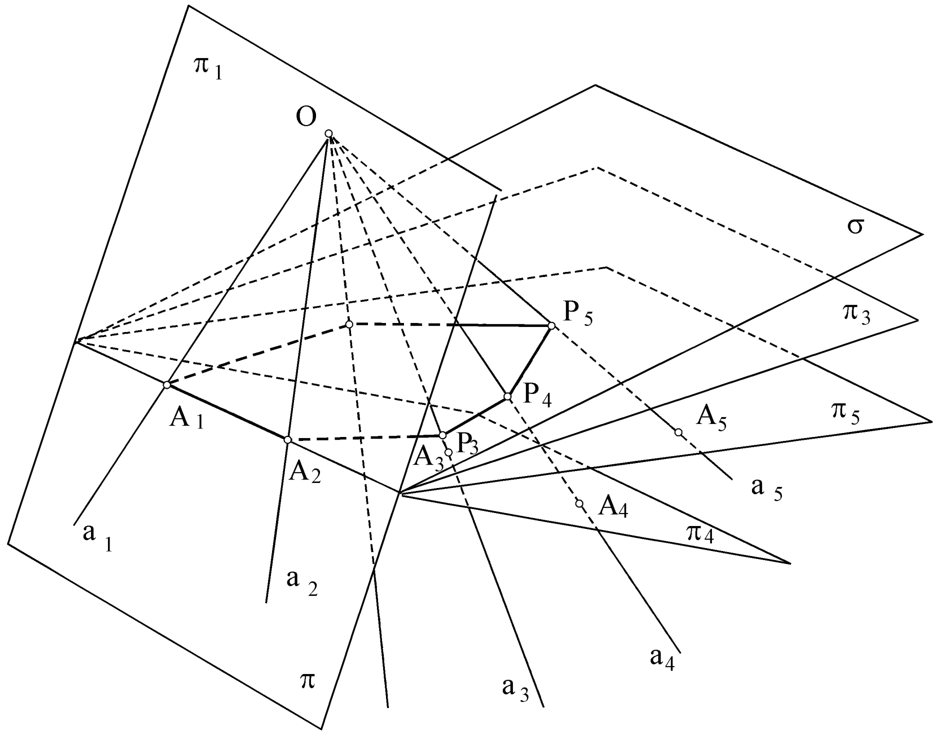
Теорема 2.20.2. *Ако је код неког n-тостраног рогља раван одређена било којом пљосни тог рогља раван ослонца тог рогља, тада је тај рогаљ конвексан.*

Дефиниција 2.20.7. Рогљаста површ је *конвексна* ако представља границу неког конвексног рогља.

Напомена. Конвексност $(n-1)$-димензионе фигуре у n димензионом простору се дефинише на тај начин што се посматра конвексност n-димензионе фигуре чију међу представља разматрана $(n-1)$-димензиона фигура.

Теорема 2.20.3. *Сваки конвексан рогаљ може се пресећи извесном равни тако да пресек буде конвексна полигонална површ.*

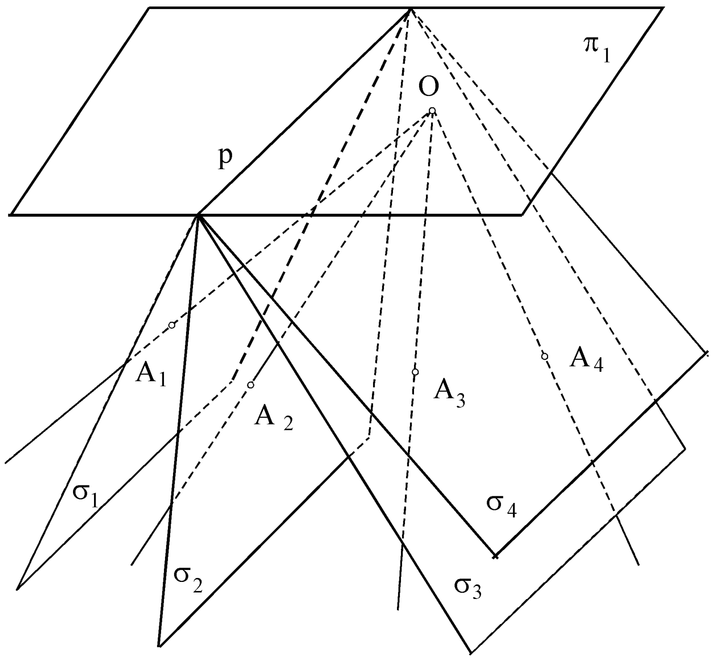
Доказ. Нека је $Oa_1a_2\dots a_n$ (Слика 2.25) конвексан рогаљ. Докажимо да постоји раван σ која га сече по конвексној полигоналној површи. Нека су A_1 и A_2 било које две тачке на ивицама a_1 и a_2. Права $l(A_1,A_2)$ разлаже раван пљосни (a_1,a_2) на две полуравни. Означимо са π раван те пљосни а са π_1 полураван којој је руб права $l(A_1,A_2)$ и која садржи тачку O. Нека су затим $A_3,A_4,\dots,A_n$ произвољне тачке редом ивица $a_3,\dots,a_n$.



Слика 2.25.

Означимо са $\pi_3, \ldots, \pi_n$ полуравни које имају за границу праву $l(A_1, A_2)$ и садрже редом тачке $A_3, A_4 \ldots, A_n$. Полуравни $\pi_3, \pi_4, \ldots, \pi_n$ налазе се са исте стране равни π јер је рогаљ конвексан, те са полуравни π_1 заклапају конвексне диедре. Обележимо те диедре са $\Phi_3, \Phi_4, \ldots, \Phi_n$. Сви ови диедри имају заједничку пљосан π_1 и налазе се са исте стране равни π па у том скупу диедара постоји диедар који је садржан у свим осталим диедрима тог скупа. Нека је то диедар Φ_k. Нека је M произвољна тачка унутар диедра Φ_k и нека је σ раван која садржи тачку M и праву $l(A_1, A_2)$. Тачке $A_3, A_4, \ldots, A_n$ налазе се са оне стране равни σ са које није тачка O, те полуправе које садрже дужи OA_3, OA_4,$\ldots$,OA_n тј. ивице a_3, $a_4, \ldots, a_n$ продиру раван σ у тачкама P_3, $P_4 \ldots P_n$. На тај начин раван σ сече пљосни (a_1, a_2), (a_2, a_3),$\ldots$,(a_n, a_1) по дужима A_1A_2, A_2P_3, P_3P_4,$\ldots$,P_nA_1, а цео рогаљ $O_{a_1a_2\ldots a_n}$ по полигонској површи $A_1A_2P_3P_4 \ldots P_n$. Како је рогаљ $O_{a_1a_2\ldots a_n}$ конвексан и раван σ конвексан лик то је и њихов пресек, тј. полигонска површ $A_1A_2P_3 \ldots P_n$ конвексан геометријски лик. □

Теорема 2.20.4. *Ако је дата једнострана, конвексна рогљаста површ, тада постоји раван која сече све ивице те рогљасте површи.*



Слика 2.26.

Доказ. Постоји раван π која садржи тачку O (Слика 2.26) а све остале тачке те рогљсте површи налазе се са исте стране равни π. Уочимо произвољну праву p у равни π и произвољне тачке A_1, A_2,…,A_n на ивицама рогљасте површи. Обележимо са π_1 полураван којој је међа права p и која садржи тачку O. Означимо са σ_1, σ_2,…,σ_n полуравни са заједничком границом p које садрже редом тачке A_1, A_2,…,A_n. Све те тачке су са исте стране равни π, те полуравни σ_1, σ_2,…,σ_n са полуравни π_1 захватају конвексне диедре Φ_1, $\Phi_2 \ldots, \Phi_n$. Остатак теореме доказује се аналогно претходној теореми. □

Део 3

Геометрија полиедара

3.1 Полиедарске површи. Полиедри

Да бисмо дефинисали појам полиедарске површи потребно је најпре дефинисати појам ланца полигонских површи.

Дефиниција 3.1.1. Дат је низ полигонских површи $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, при чему су сваке две узастопне површи ω_1, ω_2; ω_2, ω_3; $\ldots$; ω_{n-1}, ω_n суседне полигонске површи тј. имају једну заједничку страницу. У том случају овакав низ полигонских површи образује *ланац полигонских површи.* За полигонске површи ω_1, ω_n кажемо да су везане ланцем полигонских површи $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{n-1}$, ако $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ формирају ланац полигонских површи.

Дефиниција 3.1.2. Скуп полигонских површи $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ је *једноструко повезан*, ако се сваке две полигонске површи из тог скупа могу повезати ланцем полигонских површи који је састављен из полигонских површи тог скупа.

Дефиниција 3.1.3. Повезан скуп полигонских површи називамо *полиедарском површи*, ако су задовољени следећи услови:
(1) Свака дуж на страници неке од полигонских површи датог скупа може да припада рубу још само једне полигонске површи из тог скупа.
(2) Сваке две суседне полигонске површи из тог скупа припадају двема разним равнима.

Дефиниција 3.1.4. Скуп свих тачака полиедарске површи ω, које се налазе на границиама њених пљосни и које припадају граници само једне полигонске површи из тог скупа, називамо *рубом* те површи.

Дефиниција 3.1.5. Полиедарску површ која има руб називамо *отвореном полиедарском површи*, а полиедарску површ која нема руб, *затвореном полиедарском површи.* Полигонске површи од којих је састављена једна полиедарска површ називамо пљоснима полиедарске површи. Странице тих полигонских површи називамо ивицама полиедарске површи, а темена тих полигонских површи теменима полиедарске површи.

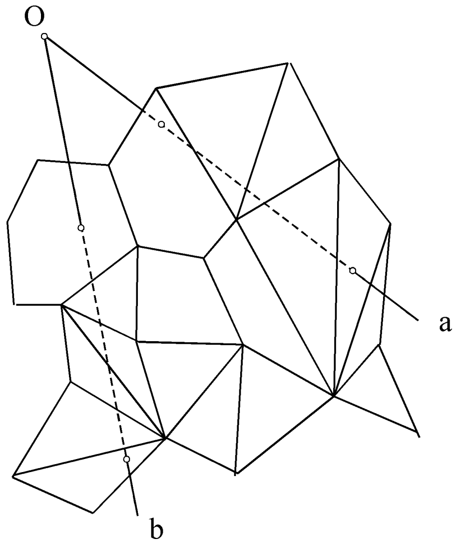
Полиедарске површи могу бити просте и сложене.

Дефиниција 3.1.6. Ако никоје две пљосни полиедарске површи немају заједничких тачака сем што суседне имају заједничку ивицу и пљосни које се сустичу у истом темену имају заједничко то теме, полиедарску површ називамо *простом полиедарском површи.* У противном називамо је *сложеном полиедарском површи.*

Теорема 3.1.1. *Нека је ω проста затворена полиедарска површ, O тачка која не припада тој површи и a и b пар полуправих које имају заједнички крај O, не секу ни једну ивицу нити садрже неко теме полиедарске површи ω. Тада, ако полуправа a има непаран број заједничких тачака са полиедарском површи ω, тада и полуправа b има са површи ω непаран број заједничких тачака. Иначе, ако полуправа a има са полиедарском површи ω нула или паран број заједничких тачака, тада и полуправа b има са полиедарском површи ω нула или паран број заједничких тачака.*

Доказ. Означимо са π раван одређену полуправама a и b. Ако су a и b на једној правој p онда означимо са π произвољну раван која садржи праву p (Слика 3.1). Могу наступити два случаја:

(1) Раван π не садржи ни једно теме полиедарске површи ω. Тада раван π сече површ ω по коначном броју полигона. Означимо их са $p_1, \ldots, p_s$. Они немају заједничких тачака међусобом јер раван π не садржи ни једно теме полиедарске површи ω. При томе се тачка O налази у извесном броју полигона, рецимо $p_1, \ldots, p_m$ и ван полигона $p_{m+1} \ldots, p_s$. Означимо са $k(a)$ укупан број пресечних тачака полуправе a са полигонима $p_1, \ldots, p_s$ тј. са полигоналном површи ω а са $k(b)$ укупан број пресечних тачака полуправе b са полигонима $p_1, \ldots, p_s$, тј. са површи ω. Како



Слика 3.1.

је тачка O у полигонима $p_1, \dots, p_m$ полуправе a и b имају са тим полигонима непаран број заједничких тачака те ће $k(a)$ и $k(b)$ бити истовремено непарни или истовремено парни у зависности од тога да ли је m паран или непаран број.

Како је тачка O изван сваког од полигона $p_{m+1}, \dots, p_s$, полуправе a и b имају са сваким од њих по нула или паран број заједничких тачака, па ће укупан број пресечних тачака полуправих a и b са полигонима $p_{m+1}, \dots, p_s$ бити нула или паран.

Према томе бројеви $k(a)$ и $k(b)$ биће истовремено или оба непарна или оба парна или нуле. Према томе важи $k(a) \equiv k(b)\,(mod\ 2)$.

(2) Раван π садржи неко теме површи ω. Тада постоји полуправа c са крајем у тачки O таква да равни одређене полуправама a, c и b, c не садрже ни једно теме површи ω. Према доказаном делу (1) имамо $k(c) \equiv k(a)\,(mod\ 2)$ и $k(c) \equiv k(b)\,(mod\ 2)$ одакле је $k(a) \equiv k(b)\,(mod\ 2)$. □

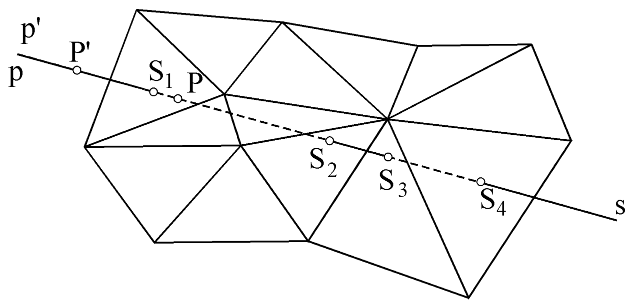
Ова теорема омогућује дефинисање појма полиедра.

Дефиниција 3.1.7. Нека је ω проста затворена полигонална површи O тачка простора која не припада тој површи. Ако при томе постоји полуправа a са крајем у тачки O која не садржи ни једно теме површи ω и не сече ни једну њену ивицу а има са површи ω непаран број заједничких тачака, кажемо да је тачка O *унутар површи* ω. У супротном, ако таква полуправа не постоји, тачка O је *изван површи* ω.

Дефиниција 3.1.8. Нека је ω проста затворена полиедарска површ. Скуп свих тачака простора које се налазе унутар површи ω називамо *унутрашњост* или *отворени полиедар* а означавамо га (ω). Скуп свих тачака отвореног полиедра (ω) и тачака површи ω називамо *затвореним* једноструко повезаним полиедром и означавамо га $[\omega]$. Површ ω представља границу или међу сваког од полиедара (ω) и $[\omega]$.

Теорема 3.1.2. *Свака права која не садржи ни једно теме и не сече ни једну ивицу просте затворене полиедарске површи ω има са том полиедарском површи нула или паран број заједничких тачака.*

Доказ. Нека је s права која не садржи ни једно теме полиедарске површи ω и нека је S тачка праве s која није на површи ω. Према познатој теореми тачка S разлаже скуп свих осталих тачака праве S на две полуправе s_1 и s_2. Сагласно претходној теореми ако полуправа s_1 има са површи ω непаран број заједничких тачака то исто важи и за полуправу s_2. Иначе, ако полуправа s_1 има са површи ω нула или паран број заједничких тачака исто важи и за полуправу s_2. Како су s_1 и s_2 дисјунктне биће $k(s) = k(s_1) + k(s_2)$. Како је $k(s_1) \equiv k(s_2)\ (mod\, 2)$ то $k(s)$ мора бити паран број или нула. □



Слика 3.2.

Теорема 3.1.3. (Жорданова теорема о полиедрима) *Свака проста затворена полиедарска површ ω разлаже скуп осталих тачака простора на два подскупа од којих је један унутрашњост а други спољашњост површи ω.*

Доказ. Нека је s права (Слика 3.2) која има са површи ω заједничких тачака, не садржи ни једно теме и не сече ни једну ивицу. Према претходној теореми права s има са површи ω паран број заједничких тачака. Означимо их $S_1, S_2, \ldots, S_{2k}$ тако да важи$\mathcal{B}(S_1, S_2, \ldots, S_{2k})$. Нека је P произвољна тачка таква да је $\mathcal{B}(S_1, P, S_2)$ а P' тачка таква да је $\mathcal{B}(P', S_1, P)$. Тачком P права s разложена је на две полуправе. Нека је p она од њих која садржи тачку S_1. У том случају полуправа p има са површи ω само једну заједничку тачку S_1 те је тачка P унутар површи ω. Тачка P' такође разлаже праву s на две полуправе. Нека је p' она од њих која припада полуправој p. На основу реченог полуправа p' нема заједничких тачака са површи ω, па је тачка P' изван површи ω. Овим је показано да унутрашњост (ω) и спољашњост $(\overline{\omega})$ површи ω нису празни скупови тачака. Да би смо доказали да површ ω разлаже скуп свих осталих тачака простора на скупове (ω) и $(\overline{\omega})$ довољно је установити следеће:

(1) $(\omega) \cap (\overline{\omega}) = \emptyset$,

(2) $\omega \cup (\omega) \cup (\overline{\omega}) = S^3$.

(1) Доказ изводимо индиректним путем. Нека је $O \in (\omega) \cap (\overline{\omega})$ и нека је a произвољна полуправа са почетком у тачки O која не садржи ни једно теме и не сече ни једну ивицу површи ω. Како је тачка O унутар површи ω тј $O \in (\omega)$ то полуправа a има са површи ω непаран број заједничких тачака. С друге стране $O \in (\overline{\omega})$ тј. припада спољашњости површи ω па полуправа a и површ ω имају нула или паран број заједничких тачака, што је немогуће па је $(\omega) \cap (\overline{\omega}) = \emptyset$.

(2) Доказ изводимо непосредно. Ако је O произвољна тачка простора која не припада површи ω и a произвољна полуправа са крајем у тачки O која не садржи ни једно теме површи ω и не сече ни једну ивицу те површи тада полуправа a има са површи ω или непаран број заједничких тачака или нула или паран број заједничких тачака, тј. $O \in (\omega)$ или $O \in (\overline{\omega})$. $\square$

3.2 Тополошке особине полиедара

У геометрији полиедара могу се разликовати две врсте особина полиедара и то тополошке и метричке. Тополошке особине се могу извести из аксиома инциденције и поретка док се метричка својства могу посматрати тек после увођења аксиома подударности. Приликом проучавања тополошких особина полиедара уводе се помоћне релације и то:

(1) релација инцидентности темена, ивица и пљосни полиедара,

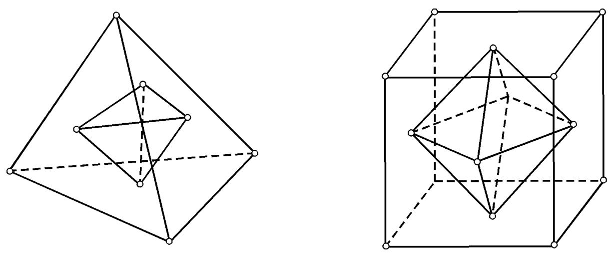
(2) релација изоморфности и

(3) релација дуалности два полиедра.

Дефиниција 3.2.1. Код неког полиедра су *инцидентни*:
(1) једно теме и једна ивица ако се то теме поклапа са једним крајем ивице,
(2) једно теме и једна пљосан ако се то теме поклапа са једним теменом те пљосни,
(3) једна ивица и једна пљосан ако се та ивица поклапа са једном страницом те пљосни.

Дефиниција 3.2.2. Два полиедра F и F' називамо *изоморфним* ако између темена, ивица и пљосни полиедра F и темена, ивица и пљосни полиедра F' постоји таква бијекција у којој инцидентним теменима, ивицама и пљоснима полиедра F одговарају респективно инцидентна темена, ивице и пљосни полиедра F'. Такву бијекцију називамо *изоморфизмом полиедара.*

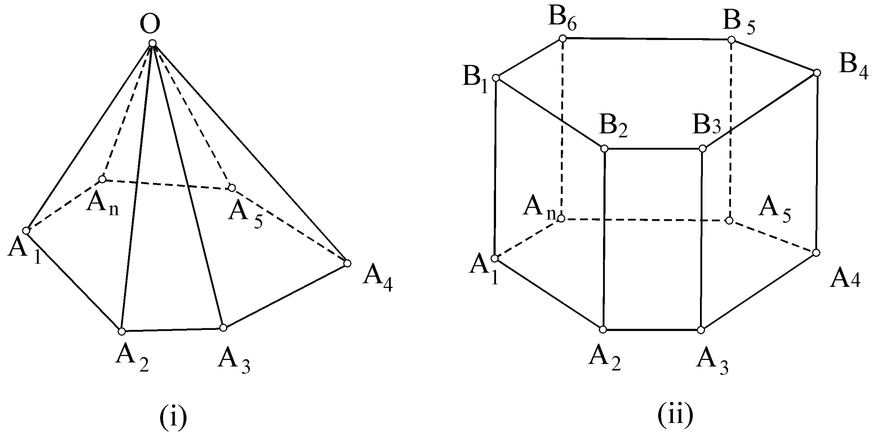
Непосредно можемо закључити да је релација изоморфности полиедара релација еквиваленције. Стога се скуп свих полиедара простора S^3 може разврстати у класе еквиваленције које су састављене од узајамно изоморфних полиедара простора S^3. Таквих класа еквиваленције има бесконачно много. Особине које су заједничке за све полиедре из исте класе, називамо тополошким особинама произвољног полиедра из разматране класе. Значи, било који полиедар из неке класе може послужити као представник своје класе у погледу тополошких особина. Осим тога проучавање тополошких особина у оквиру једне класе полиедара омогућава упознавање тополошких особина полиедара из дуалне класе.



Слика 3.3.

Дефиниција 3.2.3. Два полиедра F и F' називамо *дуалним* (Слика 3.3) ако између темена, ивица и пљосни полиедра F и пљосни, ивица и темена полиедра F' постоји бијективан однос у коме инцидентним теменима, ивицама и пљоснима полиедра F одговарају редом инцидентне пљосни, ивице и темена полиедра F'.

Непосредно из дефиниције закључујемо да је релација дуалности полиедара антирефлексивна, симетрична и нетранзитивна.

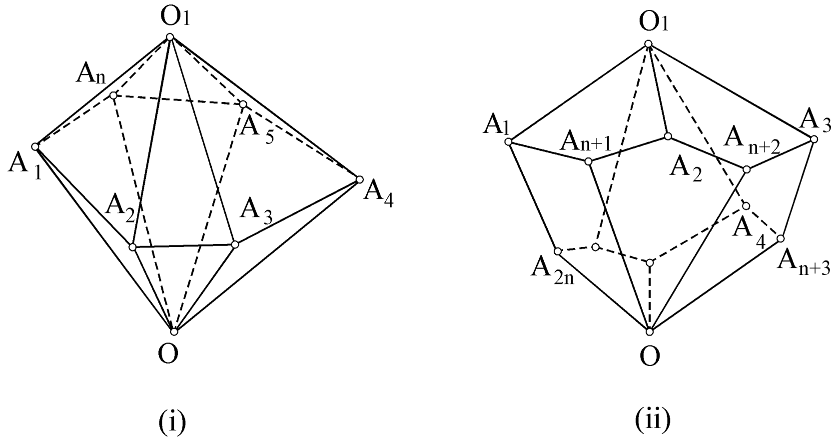


Слика 3.4. (i) n-тострана пирамида има укупно $n+1$ теме, $2n$ ивица и $n+1$ пљосни; (ii) n-тострана комбинаторна призма има укупно $2n$ темена, $3n$ ивица и $n+2$ пљосни.

Дефиниција 3.2.4. *Тополошком n-тостраном пирамидом* називамо полиедар ограничен са $n+1$ пљосни од којих је једна n-тострана а све остале троугаоне (Слика 3.4 (i)). Поменута n-тоугаона пљосан је основа, а све остале бочне стране пирамиде. Ивице на рубу основе су основне ивице а све остале су бочне ивице. Темена основе су основна а преостало теме је врх пирамиде.

Дефиниција 3.2.5. *Тополошком или комбинаторном n-тостраном призмом* (Слика 3.4 (ii)) називамо полиедар ограничен са $n+2$ пљосни, од којих су две n-тостране $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$, а свака од осталих n пљосни је четвороугаона. n-тостране пљосни су основне пљосни или основе а астале су бочне.

Дефиниција 3.2.6. *Тополошком n-тостраном бипирамидом* (Слика 3.5 (i)) називамо полиедар ограничен са $2n$ троугаоних пљосни које

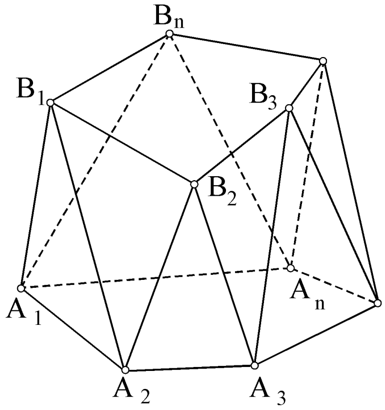


Слика 3.5. (i) n-тострана бипирамида има $n+2$ темена, $3n$ ивица и $2n$ пљосни. Лако је уочити да су n-тострана бипирамида и n-тострана комбинаторна призма полиедри дуални међу собом; (ii) n-тострана антибипирамида има $2n+2$ темена, $4n$ ивица и $2n$ пљосни.

чине унију бочних пљосни двеју пирамида са заједничком основом $A_1A_2\dots A_n$. Темена $A_1, A_2, \dots, A_n$ називамо основним а преостала два темена O и O_1 су врхови те бипирамиде. Странице полигона $A_1A_2\dots A_n$ су основне ивице док су остале ивице бочне.

Дефиниција 3.2.7. *Тополошком n-тостраном антибипирамидом* називамо полиедар ограничен са $2n$ четвороуглова, од којих n има заједничко теме O а осталих n заједничко теме O_1 (Слика 3.5 (ii)). Темена O и O_1 представљају врхове, а остала темена су основна темена антибипирамиде. Ивице које спајају основна темена називамо основним, а остале бочним ивицама.

Дефиниција 3.2.8. *Тополошком* или *комбинаторном антипризмом* (Слика 3.6) називамо полиедар ограничен са $2n+2$ пљосни од којих су две n-тоугаоне $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$, а остале пљосни су троугаоне и распоређене су тако да се у сваком темену поменутих n-тоугаоних пљосни сустичу још по три троугаоне пљосни. Пљосни $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ су основне а остале пљосни су бочне. Ивице које се налазе на рубовима основних пљосни су основне а остале су бочне.



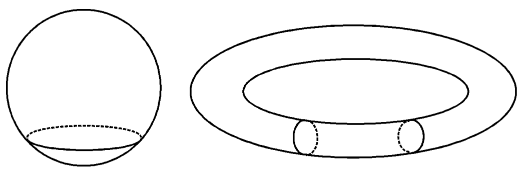
Слика 3.6. n-тострана комбинаторна антипризма има укупно $2n$ темена, $4n$ ивица и $2n+2$ пљосни. n-тострана антибипирамида и n-тострана комбинаторна антипризма представљају међу собом дуалне полиедре.

3.3 Тополошки правилни полиедри

Дефиниција 3.3.1. Прост полигон, раван или простoран, коме су странице ивице неког полиедра тј. полиедарске површи називамо *повратном линијом* или *повратним полигоном* те полиедарске површи.

Повратна линија може, али не мора, да разлаже површ дотичног полиедра на два дела.

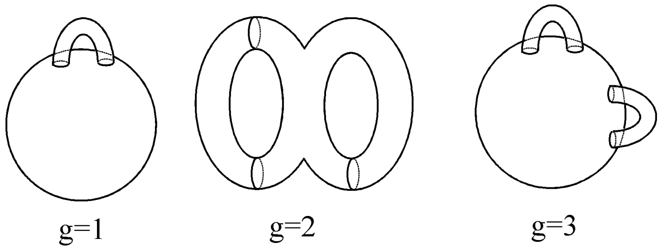
Дефиниција 3.3.2. Максималан број повратних линија неке полиедарске површи које међу собом немају заједничких тачака и које не разлажу ту полиедарску површ на два или више делова називамо *родом* те полиедарске површи.



Слика 3.7.

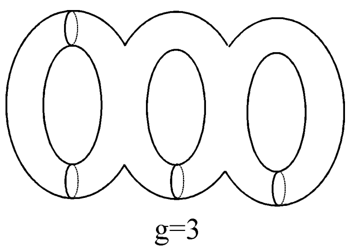
Дефиниција 3.3.3. Две површи су *хомеоморфне* ако између њих постоји бијективно и биконтинуално (непрекидно у оба смера) пресликавање.

Сфера има за повратну линију неки круг (Слика 3.7) и он разлаже површ сфере на два дела. Значи сфера је површ нултог рода, тј. $g = 0$. Торус такође има за повратну линију неки круг али тај пресек не разлаже торус на два дела. Ако конструишемо било који други повратни пресек без заједничких тачака са првим, онда ће површ сфере са та два повратна пресека бити разложена на два дела. Значи торус може имати највише једну (Слика 3.7) повратну линију која га не разлаже па је торус површ првог рода, тј. за торус је $g = 1$. Генерисање површи произвољног рода n можемо извршити (Слика 3.8, 3.9) "слепљивањем" n торуса или конструкцијом сфере са n ручки.



Слика 3.8.

За сваку овако добијену површ може се конструисати хомеоморфна полиедарска површ. То значи да полиедарске површи могу бити произвољног рода $g = 1, 2, \ldots$ Посебно су интересантне полиедарске површи нултог рода тј. полиедарске површи хомеоморфне са сфером.



Слика 3.9.

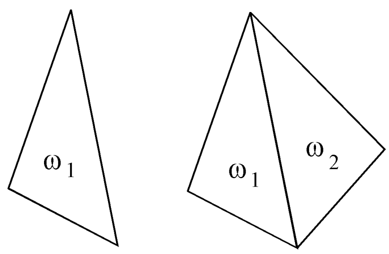
Теорема 3.3.1. (Ојлерова теорема за полиедарске површи нултог рода) *Укупан број темена t и пљосни p било које полиедарске површи нултог рода за два је већи од броја његових ивица, тј.*

$$t + p = i + 2$$

Дефиниција 3.3.4. *Карактеристиком полиедарске површи ω* која има t темена, i ивица и p пљосни зовемо број $z(\omega) = t + p - i$.

Према томе претходна теорема се може преформулусати у

Теорема 3.3.2. *Карактеристика произвољне полиедарске површи ω нултог рода је $z(\omega) = 2$.*

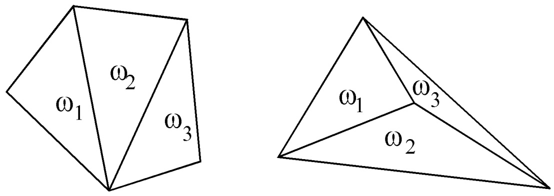


Слика 3.10.

Доказ. Није тешко установити следеће: ако било коју пљосан површи ω разложимо неком унутрашњом дијагоналом на две површи и ако те добијене површи сматрамо пљоснима полиедарске површи ω, карактеристика те површи се не мења. Заиста, доцртавањем једне дијагонале број ивица се повећава за један и број страна се повећава такође за један, док број темена остаје непромењен. Значи и карактеристика $z(\omega)$ остаје непромењена. Ова особина омогућава триангулацију полиедарске површи ω тј. разлагање свих пљосни које нису троугаоне унутрашњим дијагоналама на троугаоне површи и сматрајући добијене дијагонале ивицама, а добијене троугаоне површи пљоснима нове површи, карактеристика $z(\omega)$ остаје непромењена. Претпоставимо да смо све пљосни полиедарске површи разложили на троуглове и означимо те троуглове редом са $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Конструишимо површ ω' која се подудара са површи ω полазећи од прве од наведених површи ω_1 и додајући јој редом суседне површи. На тај начин добијамо низ полиедарских првши $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. За прву површ $\sigma_1 = \omega_1$ је $z(\sigma_1) = z(\omega_1) = 1$.

Додавањем површи ω_2 (Слика 3.10) добијамо површ σ_2. Значи $\sigma_2 = \omega_1 \cup \omega_2$ па се t повећало за 1, i повећало за 2 а p повећало за 1 па карактеристика остаје непромењена, тј. $z(\sigma_2) = 1$.

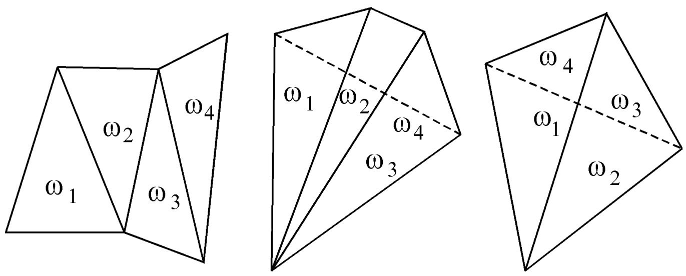
Површи σ_2 додајмо површ ω_3. Ово можемо учинити на два начина (Слика 3.11).



Слика 3.11.

У првом случају се t повећава за 1, i повећава за 2 и p повећава за 1 па је $z(\sigma_3) = z(\sigma_2) = 1$. У другом сучају t остаје непромењено, i се повећава за 1 и p се повећава за 1, па и у овом случају карактеристика остаје непромењена, тј. $z(\sigma_3) = 1$.

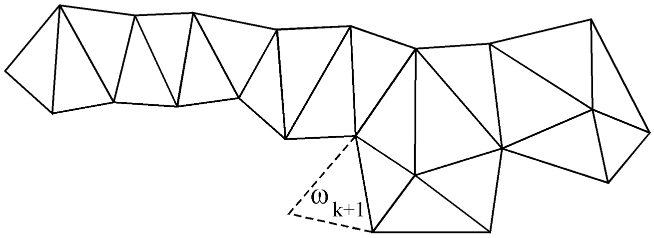
Површи σ_3 додајмо површ ω_4. Ово се може извести на три начина (Слика 3.12):



Слика 3.12.

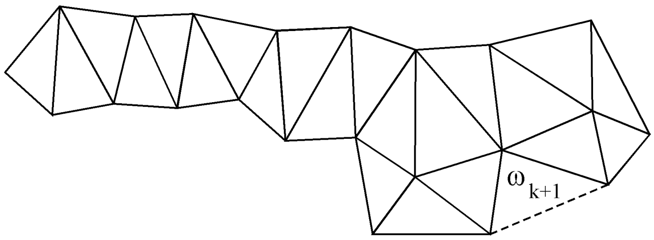
У првом случају се t повећава за један, i се повећава за два и p се повећава за један па је $z(\sigma_4) = 1$. У другом случају се t није изменило, а i и p се повећавају за један па је $z(\sigma_4) = 1$. У трећем случају t и i се нису изменили а p се повећало за један па је $z(\sigma_4) = 2$. У овом случају додавањем ω_4 затворили смо тетраедар. На тај начин теорема је доказана ако смо затворили тетраедар за $n = 4$. Претпоставимо да нисмо затворили полиедарску површ. Настављајући поступак добија се нека површ σ_k при чему је одређено $z(\sigma_k)$. Размотримо случај када површи

σ_k додајемо површ ω_{k+1} при чему се добија површ σ_{k+1}. Могу наступити четири случаја.



Слика 3.13.

(1) У првом случају t се повећало за један, i се повећало за два и p се повећало за један (Слика 3.13) па је $z(\sigma_{k+1}) = z(\sigma_k)$.



Слика 3.14.

(2) У другом случају t остаје исто, i се повећало за један и p се повећало за један (Слика 3.14) па је $z(\sigma_{k+1}) = z(\sigma_k)$.

(3) У трећем случају i се повећало за два, t остаје исто, p се повећало за један (Слика 3.15) па имамо $z(\sigma_{k+1}) = z(\sigma_k) - 1$.

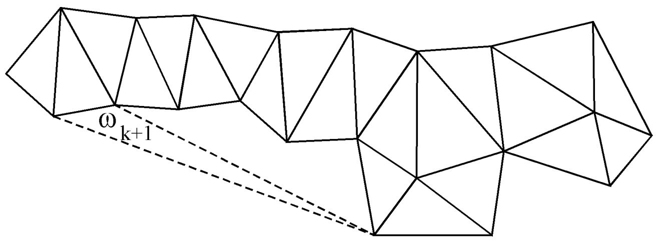
(4) У четвртом случају t остаје исто, i остаје исто а p се повећало за један (Слика 3.16). Тада је $z(\sigma_{k+1}) = z(\sigma_k) + 1$.

Из ове четири могућности закључујемо:

(i) када се додавањем површи ω_{k+1} број полигона на рубу добијене површи не мења тј. у прва два случаја карактеристика површи се не мења.

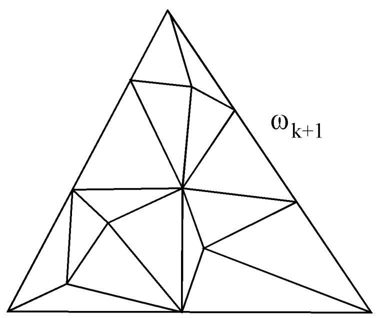
(ii) Када се додавањем површи ω_{k+1} број полигона на рубу полиедарске површи повећава за један карактреристика се смањује за једам и обратно, ако се број полигона на рубу смањује за један онда се карактеристика повећава за један.

Настављајући овај поступак, пре него што додамо површ ω_n имаћемо полиедарску површ σ_{n-1}, код које је број полигона из којих се састоји њен руб једнак један. Тада на основу изложеног можемо закључити да је карактеристика површи σ_{n-1} једнака један. Додавањем последњег полигона ω_n нестаје и тај један полигон на рубу па је као у случају (4) $z(\sigma_n) = z(\sigma_{n-1}) + 1$, тј. $z(\omega) = 2$. □



Слика 3.15.

Напомена. У доказу се нигде експлицитно не користи да је површ ω нултог рода те би се могло поверовати да исто тврђење важи и за површ и које нису нултог рода. Међутим при додавању површи ω_{k+1} у случају (3) увели смо претпоставку да теме површи ω_{k+1} мора бити на рубу истог полигона где је страница троугаоне површи. То теме не може бити на рубу неког другог полигона те површи јер је површ ω нултог рода.



Слика 3.16.

Дефиниција 3.3.5. Полиедар Φ простора S^3 је *тополошки правилан* ако:

(1) све пљосни полиедра имају једнак број страница,

(2) у сваком темену полиедра сустиче се једнак број ивица.

За означавање тополошки правилних полиедара користићемо ознаку $\{p, q\}$ при чему p означава број ивица пљосни полиедра а q број ивица полиедра које се сустичу у истом темену.

Теорема 3.3.3. *Постоји пет и само пет различитих врста тополошки правилних полиедара.*

Доказ. Нека је Φ полиедар са t темена, i ивица и p пљосни. Нека је даље m број страна сваке пљосни а n број ивица које се сустичу у једном темену полиедра Φ. Према Ојлеровој теореми је

$$t + p - i = 2.$$

Свака ивица полиедра је заједничка страница двеју суседних пљосни полиедра па важи $mp = 2i$, тј $p = \frac{2i}{m}$. Даље свака ивица полиедра спаја два разна темена тог полиедра па је $nt = 2i$, тј $t = \frac{2i}{n}$. Ако вредности за p и t заменимо у Ојлерову формулу добијамо

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{i} + \frac{1}{2}.$$

Одавде закључујемо да мора бити $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$. Одавде следи да је бар један од бројева $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$ већи од $\frac{1}{4}$. Значи бар један од бројева m и n ће бити једнак 3, тј. бар један је мањи од 4. Бројеви m и n не могу бити мањи од три јер означавају број страница и број ивица полиедра. Према томе једина решења неједначине $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ су уређени парови $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$. То значи да постоји тачно пет различитих врста тополошки правилних полиедара.

(1) Ако је $m = 3$, $n = 3$ тада је $t = 4$, $i = 6$, $p = 4$. Такав полиедар назива се *тетраедар* (Слика 3.17 а).

(2) Ако је $m = 3$, $n = 4$ тада је $t = 6$, $i = 12$, $p = 8$. Такав полиедар назива се *октаедар* (Слика 3.17 б).

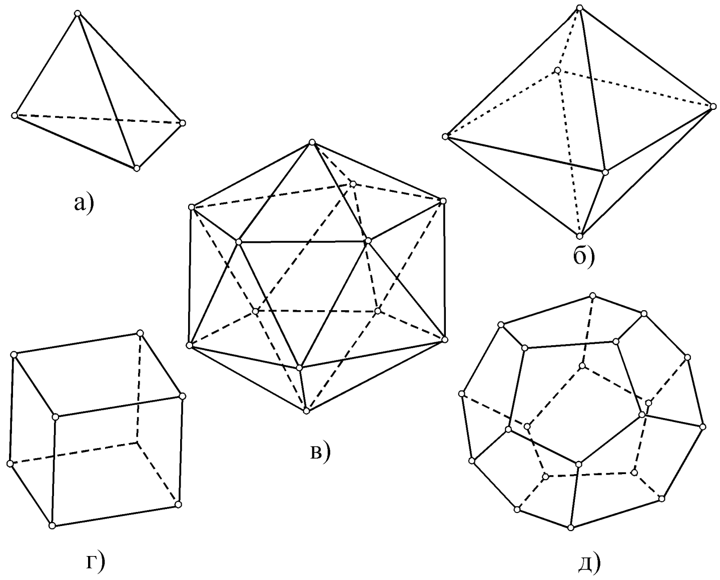
(3) Ако је $m = 3$, $n = 5$ тада је $t = 12$, $i = 30$, $p = 20$. Такав полиедар назива се *икосаедар* (Слика 3.17 в).

(4) Ако је $m = 4$, $n = 3$ тада је $t = 8$, $i = 12$, $p = 6$. Такав полиедар назива се *хексаедар* (Слика 3.17 г).

(5) Ако је $m = 5$, $n = 3$ тада је $t = 12$, $i = 30$, $p = 12$. Такав полиедар назива се *додекаедар* (Слика 3.17 д).

Бројеви t, i, p одређени су из релација $t + p = i + 2$, $mp = 2i$, $nt = 2i$. $\square$

Под полиедром дуалним датом полиедру можемо сматрати полиедар коме су теменима претходног додељене пљосни дуалног а свакој пљосни



Слика 3.17. Тополошки правилни полиедри: а) Тетраедар; б) Октаедар; в) Икосаедар; г) Хексаедар; д) Додекаедар

дуалног теме претходног. На тај начин дуалан полиедру $\{p, q\}$ биће полиедар $\{q, p\}$. Према томе, тетраедар је дуалан сам себи; октаедар и хексадар су дуални а такође икосаедар и додекаедар.

Део 4

Подударност

Још је Еуклид у својим Елементима претпоставио да су два геометријска лика подударна ако се кретањем могу довести до поклапања. На тај начин је појам кретања постао основни појам а појам поплударности дефинисан.

Пеано у свом делу Начела геометрије из 1889. године је појам кретања прихватио као један од основних појмова геометрије. Насупрот њему, М. Пашу Новијој геометрији из 1882. године, Веронезе у Елементима геометрије из 1891. године а затим и Хилберт у Основама геометрије из 1899. пошли су од подударности као једног од недефинисаних појмова, а увели су је одговарајућим аксиомама подударности. Док Паш и Веронезе усвајају само подударност дужи као основну релацију а подударност углова дефинишу, Хилберт и подударност дужи и подударност углова уводи аксиомама. Ми ћемо овде аксиомама увести подударност парова тачака уместо подударности дужи и углова.[1]

4.1 Аксиоме подударности и њихове прве последице

Релацију подударности парова тачака простора S^3 (коју означавамо: $(A, B) \cong (C, D)$ или $\mathcal{C}(A, B; C, D)$) карактерише следећа група аксиома:

III₁ *За сваке две тачке* $A, B \in S^3$ *је* $(A, A) \cong (B, B)$.

III₂ *За сваке две тачке* $A, B \in S^3$ *је* $(A, B) \cong (B, A)$.

[1] То је начин на који је уведена подударност у Основама геометрије Борсука и Шмиелове.

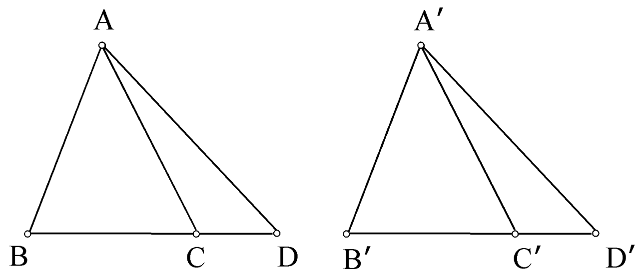
III$_3$ *Ако су $A, B, C, D, E, F \in S^3$ такве да је $(A, B) \cong (C, D)$ и $(A, B) \cong (E, F)$ тада је $(C, D) \cong (E, F)$.*

III$_4$ *Ако су C и C' тачке отворених дужи (AB) и $(A'B')$ редом, такве да је $(A, C) \cong (A', C')$ и $(B, C) \cong (B', C')$, тада је $(A, B) \cong (A', B')$.*

III$_5$ *Ако су A и B две разне тачке и ако је A' крај неке полуправе p, тада на полуправој p постоји тачка B' таква да је $(A, B) \cong (A', B')$.*

III$_6$ *Ако су A, B, C три неколинеарне тачке и A', B' две разне тачке руба неке полуравни π' такве да је $(A', B') \cong (A, B)$, тада у полуравни π' постоји тачно једна тачка C' таква да је $(A, C) \cong (A', C')$ и $(B, C) \cong (B', C')$.*

III$_7$ *Ако су A, B, C и A', B', C' две тројке неколинеарних тачака и D и D' (Слика 4.1) тачке полуправих BC и $B'C'$ такве да је $(A, B) \cong (A', B')$, $(B, C) \cong (B', C')$, $(C, A) \cong (C', A')$ и $(B, D) \cong (B', D')$ тада је $(A, D) \cong (A', D')$.*



Слика 4.1.

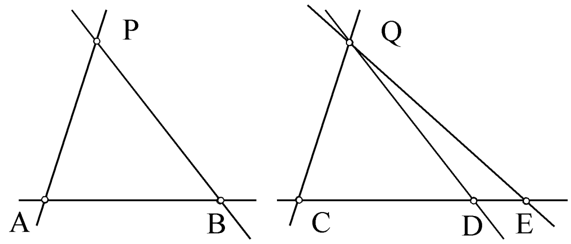
Теорема 4.1.1. *Релација подударности парова тачака је релација еквиваленције.*

Доказ. (i) *Рефлексивност.* Нека су A и B две разне тачке. Према Аксиоми III$_2$ имамо да је $(B, A) \cong (A, B)$ и $(B, A) \cong (A, B)$ одакле је према Аксиоми III$_3$ $(A, B) \cong (A, B)$, тј. релација подударности парова тачака је рефлексивна.

(ii) *Симетричност.* Нека је $(A, B) \cong (C, D)$. Како је још $(A, B) \cong (A, B)$ према Аксиоми III$_3$ следи да је $(C, D) \cong (A, B)$, тј. релација је симетрична.

(iii) *Транзитивност.* Нека је $(A, B) \cong (C, D)$ и $(C, D) \cong (E, F)$. Тада је $(C, D) \cong (A, B)$ и $(C, D) \cong (E, F)$, одакле према Аксиоми III_3 следи $(A, B) \cong (E, F)$, тј. релација подударности парова тачака је и транзитивна релација. □

Теорема 4.1.2. *Ако су A и B две разне тачке и C крај неке полуправе p тада на полуправој p постоји јединствена тачка D таква да је $(A, B) \cong (C, D)$.*

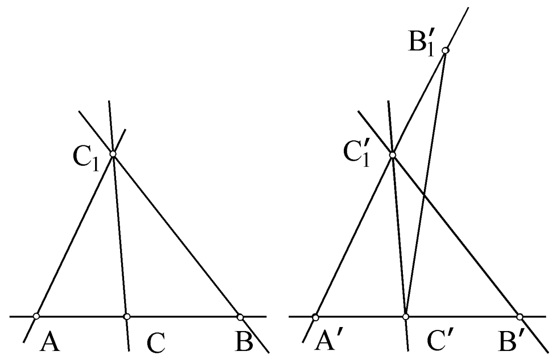


Слика 4.2.

Доказ. Егзистенцију тачке D омогућава Аксиома III_5 . Према томе довољно је доказати јединственост. Претпоставимо да на полуправој p постоји још једна тачка E, различита од D, таква да је $(A, B) \cong (C, E)$. Нека је P (Слика 4.2) произвољна тачка која не припада правој AB. Тада на основу Аксиоме III_6 у једној од полуравни са рубом CD постоји јединствена тачка Q таква да је $(A, P) \cong (C, Q)$ и $(B, P) \cong (D, Q)$, па на основу Аксиоме III_7 имамо $(B, P) \cong (E, Q)$. Дакле, A, B, P су три неколинеарне тачке а C и Q тачке на рубу полуравни (CQD) такве да је $(A, B) \cong (C, D)$, $(B, P) \cong (D, Q)$ и $(A, B) \cong (C, E)$, $(B, P) \cong (E, Q)$, што је у супротности са Аксиомом III_6 . □

Теорема 4.1.3. (Основна теорема о подударности парова тачака) *Ако су A, B, C три разне тачке неке праве l и A', B' тачке неке праве l' такве да је $(A, B) \cong (A', B')$ тада постоји једна и само једна тачка C' таква да је $(A, C) \cong (A', C')$ и $(B, C) \cong (B', C')$, при томе тачка C' припада правој l'. Осим тога, поретку тачака A, B, C на правој l одговара аналоган паредак тачака A', B', C' на правој l'.*

Доказ. Нека важи распоред тачака $\mathcal{B}(A, C, B)$. Показаћемо најпре егзистенцију тачке C'. На полуправој $A'B'$ пошто је тачке C' и B'' такве да је $(A, C) \cong (A', C')$ и $(B, C) \cong (B'', C')$. Према Аксиоми III_4 следи да је $(A, B) \cong (A', B'')$. Применом претходне теореме следи да је $B'' \equiv B'$. Према томе, доказали смо да постоји тачка C' таква да је $\mathcal{B}(A', C', B')$, $(A, C) \cong (A', C')$ и $(B, C) \cong (B', C')$. Докажимо сада јединственост тачке C'. Нека је C_1' (Слика 4.3) тачка која задовољава исте услове као и тачка C'. Ако је тачка C_1' на правој l' тада на основу претходне теореме следи да је $\mathcal{B}(C_1', A', C')$ а како је још $\mathcal{B}(A', C', B')$, тачке C' и C_1' би припадале истој полуправој $B'A'$ при чему је $(B, C) \cong (B', C')$ и $(B, C) \cong (B', C_1')$, што је поново у супротности са претходном теоремом.



Слика 4.3.

Нека је сада тачка C_1' ван праве l'. Тада према Аксиоми III_6 у једној од полуравни чији је руб права l постоји тачка C_1 таква да је $(A, C_1) \cong (A', C_1')$ и $(B, C_1) \cong (B', C_1')$. Применом Аксиоме III_7 закључујемо $(C_1, C) \cong (C_1', C')$. Ако је $B_1' \in A'C_1'$ таква да је $\mathcal{B}(A', C_1', B_1')$ и $(C', B') \cong (C_1', B_1')$ онда према аксиоми III_7 имамо $(C', B_1') \cong (C_1', B')$. У том случају биће тачке B, C, C_1 неколинеарне а тачке C' и C_1' на рубу неке полуравни π која садржи тачке B' и B_1' при чему је $(C, C_1) \cong (C', C_1')$. У том случају би у полуравни π постојале две разне тачке B' и B_1' такве да је $(C, B) \cong (C', B')$ и $(C_1, B) \cong (C_1', B')$, $(C, B) \cong (C_1', B_1')$ и $(C_1, B) \cong (C', B_1')$, што је према Аксиоми III_6 немогуће. Случајеви $\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(B, A, C)$ разматрају се аналогно. $\square$

У односу на релацију подударности парова тачака можемо да уведемо и нешто шире дефинисану релацију која ће се односити на уређене тројке, четворке, ..., n-торке тачака. Чињеницу да је $(A, B) \cong (A', B')$, $(B, C) \cong (B', C')$ и $(A, C) \cong (A', C')$ означаваћемо $(A, B, C) \cong (A', B', C')$. Аналогно томе можемо дефинисати релацију подударности уређених n-торки:

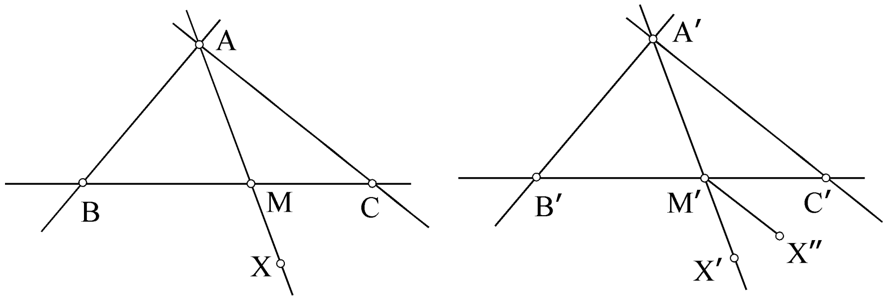
$$(A_1, A_2, \ldots, A_n) \cong (A_1', A_2', \ldots, A_n')$$

ако за свако $i, j \in \{1, \dots, n\}$ важи $(A_i, A_j) \cong (A'_i, A'_j)$.

Из претходне дефиниције и Теореме 4.1.1. непосредно следи да је релација подударности коначних скупова тачака, релација еквиваленције. Стога се може рећи да су скупови $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ и $(A'_1, A'_2, \dots, A'_n)$ међусобно подударни.

Ако је $\mathcal{A}$ коначан скуп колинеарних тачака и ако су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ међусобно подударни скупови тачака, тада су, на основу основне теореме о подударности парова тачака, тачке скупа $\mathcal{A}'$ такође колинеарне. Штавише, будући да се тачке скупа $\mathcal{A}$ могу означити са $A_1, A_2, \dots, A_n$ тако да је $\mathcal{B}(A_1, A_2, \dots, A_n)$, скуп $\mathcal{A}'$ ће се састојати из тачака $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ таквих да је $\mathcal{B}(A'_1, A'_2, \dots, A'_n)$.

Теорема 4.1.4. *Ако су A, B, C три неколинеарне тачке неке равни π и A', B', C' тачке равни π' такве да је $(A, B, C) \cong (A', B', C')$, тада за сваку тачку X равни π постоји јединствена тачка X' таква да је $(A, B, C, X) \cong (A', B', C', X')$. Штавише, тачка X' припада равни π' и са исте је стране сваке од правих $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ са које су, редом, тачке C', A', B' ако и само ако је тачка X са исте стране сваке од правих AB, BC, CA са које су, редом, тачке C, A, B.*



Слика 4.4.

Доказ. Ако тачка X припада некој од правих AB, BC, CA тврђење следи из основне теореме о подударности парова тачака и аксиоме III_7 (Слика 4.4). Стога претпоставимо да је X тачка равни π која не припада ни једној од тих трију правих. На основу другог Пеановог става тачка X припада равни ABC ако и само ако припада скупу тачака правих које садрже: тачку A и неку тачку дужи BC или тачку B и неку тачку дужи CA или тачку C и неку тачку дужи AB. Претпоставимо да X припада правој која садржи тачку A и тачку M дужи BC. Како X не припада ни једној од правих AB, BC, CA тачка M ће се разликовати и од B и од C. Тада, на основу основне теореме о подударности парова тачака, постоји јединствена тачка M' таква да је $(B, C, M) \cong (B', C', M')$, и јединствена тачка X' таква да је $(A, M, X) \cong (A', M', X')$. При томе, на основу исте теореме, M' припада дужи $B'C'$ и поретку тачака A, M, X на правој AM одговара поредак, редом, тачака A', M', X' на правој $A'M'$. Из те чињенице и из аксиоме III_7 следи да је $(B, X) \cong (B', X')$ и $(C, X) \cong (C', X')$, па је, дакле, $(A, B, C, X) \cong (A', B', C', X')$. Штавише, тачке A' и X' ће бити са исте стране праве $B'C'$ ако и само ако су тачке A и X са исте стране праве BC. Докажимо да је тачка X' јединствена.

Ако је X'' тачка простора S таква да је

$$(A, B, C, X) \cong (A', B', C', X''),$$

тада су тачке X'', B', C' неколинеарне јер су X, B, C неколинеарне па, на основу аксиоме III_7, налазимо да је $(X, M) \cong (X'', M')$ и $(A, M, X) \cong (A', M', X'')$. Стога су тачке A', M', X'' колинеарне и $X' = X''$.

Истоветно се расуђује ако X припада правој која садржи тачку B и неку тачку дужи CA, или тачку C и неку тачку дужи AB, па је тиме теорема доказана. □

Слично претходној теореми, применом трећег Пеановог става, доказује се и следеће тврђење.

Теорема 4.1.5. *Ако су A, B, C, D четири некомпланарне тачке и A', B', C', D' тачке простора* S *такве да је $(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D')$, тада за сваку тачку X простора* S *постоји јединствена тачка X' таква да је $(A, B, C, D, X) \cong (A', B', C', D', X')$. Штавише, тачка X' је са исте стране сваке од равни $A'B'C'$, $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$ са које су, редом, тачке D', A', B', C' ако и само ако је тачка X са исте стране сваке од равни ABC, BCD, CDA, DAB са које су, редом, тачке D, A, B, C.*

4.2 Изометријске трансформације простора $\mathbf{S}^{\mathbf{n}}$ $(\mathbf{n} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$

Дефиниција 4.2.1. Бијективно пресликавање $\mathcal{I} : S^n \to S^n$ називамо *изометријском трансформацијом* простора S^n $(n = 1, 2, 3)$ ако за произвољне две тачке A и B простора S^n важи

$$(A, B) \cong (\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B)).$$

На основу дефиниције, домен и кодомен изометријских трансформација могу бити апсолутна права, раван и простор. На пример у случају изометрије равни, захтев да је таква трансформација бијективна гарантује да се цела раван слика на целу раван, а не неки њен део.

Међу изометријама најједноставнији је пример трансформације која сваку тачку оставља на свом месту:

Дефиниција 4.2.2. Пресликавање $\varepsilon : S^n \to S^n$ $(n = 1, 2, 3)$ које сваку тачку A пресликава у саму себе тј. $(\forall A \in S^n)$ $\varepsilon(A) = A$ назива се *коинциденција.*

Коинциденција је дакле трансформација код које свака тачка "мирује". Иако је интуитивно јасно, потребно је доказати да је такво пресликавање заиста изометрија.

Теорема 4.2.1. *Идентично пресликавање (коинциденција, јединично пресликавање)* $\varepsilon : S^n \to S^n$ $(n = 1, 2, 3)$ *је изометријска трансформација.*

Доказ следи директно из рефлексивности релације подударности парова тачака и чињенице да је коинциденција бијективно пресликавање.

Теорема 4.2.2. *Производ било које две изометријске трансформацаје простора* S^n *је изометријска трансформација простора* S^n.

Доказ. Нека је $\mathcal{I}_1 : S^n \to S^n$ $(n = 1, 2, 3)$ изометријска трансформација која тачке $A, B \in S^n$ пресликава редом у тачке $A_1, B_1 \in S^n$, при чему је $(A, B) \cong (A_1, B_1)$ и нека је $\mathcal{I}_2 : S^n \to S^n$ изометријска трансформација која тачке $A_1, B_1 \in S^n$ пресликава редом у тачке $A_2, B_2 \in S^n$, при чему је $(A_1, B_1) \cong (A_2, B_2)$. У трансформацији $\mathcal{I} = \mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_1$ тачкама $A, B \in S^n$ одговарају редом тачке $A_2, B_2 \in S^n$, при чему је $(A, B) \cong (A_2, B_2)$. Како је још производ две бијекције такође бијекција, следи да је производ две изометријске трансформације простора S^n такође изометријска трансформација простора S^n. $\square$

Теорема 4.2.3. *Инверзна трансформација изометријске трансформације простора S^n је такође изометријска трансформација тог простора.*

Доказ. Нека је $\mathcal{I}$ изометријска трансформација простора S^n која тачке $A, B \in S^n$ пресликава редом у тачке $A_1, B_1 \in S^n$, при чему је $(A, B) \cong (A_1, B_1)$. У инверзној трансформацији $\mathcal{I}^{-1}$ простора S^n тачкама A_1 и B_1 $\in S^n$ одговарају тачке A и $B \in S^n$ при чему је $(A_1, B_1) \cong (A, B)$, а како је још инверзно пресликавање бијективног пресликавања бијективно следи да је инверзна трансформација изометријске трансформације $\mathcal{I}$ такође изометријска трансформација. □

Теорема 4.2.4. (Основна теорема о изометријским трансформацијама) *Скуп свих изометријских трансформација простора S^n представља групу.*

Доказ. Будући да су изометријске трансформације простора S^n елементи групе свих бијективних трансформација простора S^n на основу Теорема 4.2.1., 4.2.2. и 4.2.3. следи да скуп свих изометријских трансформација простора S^n чини подгрупу групе свих пресликавања простора S^n, тј. скуп изометријских трансформација простора S^n представља групу у односу на операцију слагања пресликавања. □

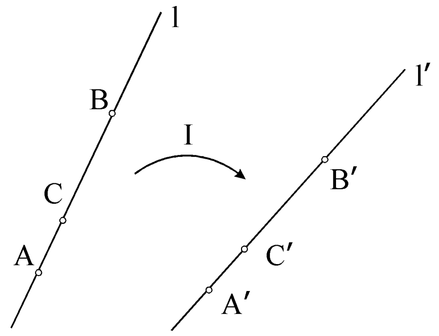
Дефиниција 4.2.3. Групу установљену претходном теоремом називамо *групом изометријских трансформација простора* S^n и симболички је означавамо $G(\mathcal{I})$.

Сада ћемо доказати очекивано својство, да се колинеарне тачке изометријом пресликавају у колинеарне тачке, тј. да изометријске трансформације "чувају" колинеарност. Доказаћемо и општије тврђење: да изометрије чувају релацију распореда тачака.

Теорема 4.2.5. *Ако изометрија простора S^n пресликава неке три тачке A, B, C у тачке A', B', C' и ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$, тада је $\mathcal{B}(A', B', C')$.*

Доказ. Нека се три тачке A, B, C изометријом $\mathcal{I}$ пресликавају редом у тачке A', B', C' и нека је $\mathcal{B}(A, B, C)$. На основу дефиниције изометрије је тада: $(A, C) \cong (A', C')$, $(A, B) \cong (A', B')$, $(B, C) \cong (B', C')$. Али сада на основу Основне теореме о подударности парова тачака, како је $(A, C) \cong (A', C')$, постоји јединствена тачка B'' таква да је $(A, B) \cong (A', B'')$ и $(B, C) \cong (B'', C')$, при чему је $\mathcal{B}(A', B'', C')$. На основу претходног, мора бити $B' = B''$, па је заиста $\mathcal{B}(A', B', C')$. □

Теорема 4.2.6. *Ако су A и B две разне тачке неке праве l, A' и B' тачке неке праве l' такве да је $(A, B) \cong (A', B')$ тада постоји једно и само једно изометријско пресликавање $\mathcal{I} : l \to l'$ тако да тачкама A и B респективно одговарају тачке A' и B'.*



Слика 4.5.

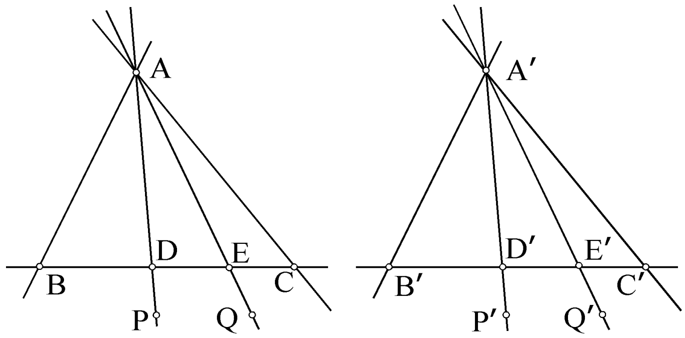
Доказ. Ако је C произвољна тачка праве l (Слика 4.5.) у складу са једном од раније доказаних теорема постоји тачно једна тачка C' таква да је $(A, C) \cong (A', C')$ и $(B, C) \cong (B', C')$. Штавише према тој теореми тачка C' припада правој l'. Осим тога, поретку тачака A, B, C на правој l одговара аналогни поредак тачака A', B', C' на правој l'. На тај начин постоји пресликавање $\mathcal{I}$ које преводи тачке праве l на тачке праве l'. На потпуно исти начин констатује се да је свака тачка $C' \in l'$ слика неке тачке C са праве l. Према томе, постоји бијективна функција $\mathcal{I} : l \to l'$ у којој тачкама A и B одговарају тачке A' и B', а свакој тачки C праве l одговара тачка C' таква да је $(A, C) \cong (A', C')$ и $(B, C) \cong (B', C')$. Треба показати да је $\mathcal{I}$ изометрија. Обележимо са D било коју тачку на правој l а са $D' = \mathcal{I}(D)$. У том случају поретку тачака A, B, C, D на правој l одговара аналоган поредак тачака A', B', C', D' на правој l'. Штавише $(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D')$ одакле је и $(C, D) \cong (C', D')$ па је пресликавање $\mathcal{I}$ изометрија. $\square$

Дефиниција 4.2.4. Тачка A је *фиксна* или *инваријантна* тачка неке изометрије $\mathcal{I} : S^n \to S^n$; $(n = 1, 2, 3)$, ако је $\mathcal{I}(A) = A$.

Последица 4.2.1. *Свака изометријска трансформација праве која има две разне инваријантне тачке представља коинциденцију, тј. идентичко пресликавање.*

У исказу ове последице тврди се да изометрија праве која није коинциденција не може имати више од једне фиксне тачке. Интуитивно је сада јасно да на правој, осим коинциденције, постоје само две врсте изометрија. Оне које имају тачно једну фиксну тачку представљале би централне симетрије на правој, где би центар симетрије био та фиксна тачка. Оне које немају фиксну тачку биле би транслације на правој.

Теорема 4.2.7. *Ако су A, B, C три неколинеарне тачке неке равни π и A', B', C' три неколинеарне тачке неке равни π' такве да је $(A, B, C) \cong (A', B', C')$ тада постоји једно и само једно изометријско пресликавање $\mathcal{I} : \pi \to \pi'$ које преводи тачке A, B, C респективно у тачке A', B', C'.*



Слика 4.6.

Доказ. Применом претходне теореме закључујемо да из неколинеарности тачака A, B, C следи неколинеарност тачака A', B', C'. Ако је P (Слика 4.6) произвољна тачка равни π, тада тачка P припада некој од правих које садрже тачку A и неку тачку дужи BC или тачку C и неку тачку дужи AB или тачку B и неку тачку дужи AC. Не умањујући општост доказа претпоставимо да је задовољен први случај, тј. да је P тачка која припада правој која садржи тачку A и неку тачку дужи BC, нпр. тачку D. Аналогни поступак можемо применити на ΔADC и тачку Q која лежи на правој која садржи тачку A и неку тачку E дужи DC. Посматрајмо троугао $\Delta A'B'C'$ и одговарајуће тачке D',E', P', Q' које респективно одговарају у изометрији $\mathcal{I}$ тачкама D, E, P, Q. Примењујући на поменуте троуглове ΔABC и ΔADC и њима одговарајуће троуглове $\Delta A'B'C'$ и $\Delta A'D'C'$ аксиоме подударности, тј. Аксиому III_7 непосредно можемо закључити јединственост изометријске трансформације $\mathcal{I}$. $\square$

Последица 4.2.2. *Свака изометријска трансформација равни* π *која има три неколинеарне инваријантне тачке представља коинциденцију.*

Теорема 4.2.8. *Ако су* A, B, C, D *и* A', B', C', D' *две четворке некомпланарних тачака простора* S^3 *такве да је* $(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D')$ *тада постоји јединствена изометријска трансформација* $\mathcal{I} : S^3 \to S^3$ *која преводи тачке* A, B, C *и* D *респективно у тачке* A', B', C', D'.

Доказ ове теореме аналоган је доказу претходних теорема.

Последица 4.2.3. *Свака изометријска трансформација простора* S^3 *која има четири некомпланарне инваријантне тачке представља коинциденцију.*

4.3 Подударност геометријских ликова

Дефиниција 4.3.1. Кажемо да је геометријски лик Φ простора S^n *подударан* лику Φ' простора S^n ако постоји изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора S^n таква да је $\mathcal{I}(\Phi) = \Phi'$. Релацију подударности ликова Φ и Φ' симболички означавамо $\Phi \cong \Phi'$.

Теорема 4.3.1. *Релација подударности геометријских ликова простора* S^n *је релација еквиваленције.*

Доказ. (i) *Рефлксивност.* Како је идентична тарнсформација ε простора S^n изометријска трансформација при чему сваком лику Φ простора S^n одговара тај исти лик Φ, тј. $\varepsilon(\Phi) = \Phi$ следи да је $\Phi \cong \Phi'$.

(ii) *Симетричност.* Нека су дати ликови Φ и Φ' простора S^n, при чему је $\Phi \cong \Phi'$. Одатле следи да постоји изометријска трансформација $\mathcal{I}$ таква да је $\mathcal{I}(\Phi) = \Phi'$. У том случају постоји и инверзна трансформација $\mathcal{I}^{-1}$ која лик Φ' преводи у лик Φ па закључујемо да је $\Phi' \cong \Phi$.

(iii) *Транзитивност.* Нека је $\Phi \cong \Phi'$ и $\Phi' \cong \Phi''$ при чему су Φ, Φ', и Φ'' ликови простора S^n. Тада постоји изометријска трансфоррнација $\mathcal{I}_1$ таква да је $\mathcal{I}_1(\Phi) = \Phi'$ и трансформација $\mathcal{I}_2$ таква да је $\mathcal{I}_2(\Phi') = \Phi''$. Композиција $\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_1$ преводи лик Φ у лик Φ'', а пошто је композиција изометријских трансформација такође изометријска трансформација закључујемо да је $\Phi \cong \Phi'$. $\square$

Из чињенице да је релација подударности ликова релација еквиваленције закључујемо да ће њено дејство на скупу геометријских ликова простора S^n довести до партиције овог скупа на одговарајуће класе еквиваленцује, па тако можемо анализирати подскупове међусобом подударних ликова простора S^n. Лако закључујемо да правој одговара права, равни раван, n-димензионом простору n-димензиони простор. За разматрање подударности осталих геометријских објеката као основа геометријске теорије подударности служиће две основне релације и то:

(i) релација подударности дужи и
(ii) релација подударности углова.

4.4 Подударност дужи

Теорема 4.4.1. *Ако су A, B и A', B' два пара разних тачака таквих да је $(A,B) \cong (A',B')$ тада је $(AB) \cong (A'B')$.*

Доказ. Обележимо са l праву одређену тачкама A и B и са l' праву одређену тачкама A' и B'. Из $(A,B) \cong (A',B')$ следи да постоји изометријска трансформација $\mathcal{I} : l \to l'$ таква да је $\mathcal{I}(l) = l'$, $\mathcal{I}(A) = A'$, $\mathcal{I}(B) = B'$. Штавише, према раније доказаној теореми свакој тачки $X \in l$, таквој да је $\mathcal{B}(A,X,B)$, одговараће тачка $X' \in l'$ таква да је $\mathcal{B}(A',X',B')$, тј. из $X \in (AB)$ следи $\mathcal{I}(X) \in (A'B')$. Аналогним поступком установљује се да ће свака тачка $X' \in (A'B')$ бити слика неке тачке $X \in (AB)$, те закључујемо да у изометријској трансформацији $\mathcal{I}$ отвореној дужи (AB) одговара отворена дуж $(A'B')$. □

Аналогна теорема важи за затворене, полуотворене и полузатворене дужи.

Теорема 4.4.2. *У изометријској трансформацији*

$$\mathcal{I} : S^n \to S^n, \ \ (n = 1, 2, 3)$$

дужи одговара дуж.

Доказ. Нека су A и B две разне тачке простора S^n, а A' и B' њима одговарајуће тачке у изометрији $\mathcal{I}$. Ако је $X \in (AB)$ и $X' = \mathcal{I}(X)$, тада је $X' \in (A'B')$. Заиста, применом основне теореме о подударности парова тачака, из релација

$$(A,X) \cong (A',X'), \ (B,X) \cong (B',X'), \ \mathcal{B}(A,X,B)$$

следи да је $\mathcal{B}(A', X', B')$, па је $X' \in (A'B')$. Стога је $\mathcal{I}(AB) \subset (A'B')$. Истим поступком доказује се да је и $(A'B') \subset \mathcal{I}(AB)$. Према томе, следи $\mathcal{I}(AB) = (A'B')$, а то је и требало доказати □

Дефиниција 4.4.1. Тачку O називамо *средиштем дужи* AB ако су задовољени следећи услови:

(i) $O \in (AB)$, (ii) $(OA) \cong (OB)$.

Теорема 4.4.3. (О егзистенцији и јединствености средишта дужи) *Свака дуж има једно и само једно средиште.*

Доказ. Нека је AB произвољна дуж. Докажимо да она поседује јединствено средиште. Нека је C било која тачка ван праве AB. Тачке A, B и C су неколинеарне, те постоји раван π која их садржи. Према Аксиоми III_6 у равни π, са оне стране праве AB са које није тачка C постоји јединствена тачка D таква да је $(A, C) \cong (B, D)$ и $(B, C) \cong (A, D)$. Но како је поред тога $(A, B) \cong (B, A)$, из неколинеарности тачака A, B, C следи да постоји јединствена изометрија $\mathcal{I}$ равни π која преводи тачке A, B, C респективно у тачке B, A, D, тј. $\mathcal{I}(A) = B$, $\mathcal{I}(B) = A$, $\mathcal{I}(C) = D$. У тој изометријској трансформацији равни π правама AB и CD одговарају респективно праве BA и DC, тј. исте праве. Према томе, тачка O, пресек ових правих се помоћу изометрије $\mathcal{I}$ пресликава у саму себе, тј. $\mathcal{I}(O) = O$. Да би доказали да је O средиште дужи AB треба још показати да важи услов (ii) из дефиниције. Из $\mathcal{I}(O) = O$ и $\mathcal{I}(A) = B$ следи да је $(O, A) \cong (O, B)$ чиме је доказан услов (ii). Докажимо још да O припада отвореној дужи (AB). С обзиром да је тачка O пресек правих AB и CD она припада правој AB. Тачка O не може бити истоветна са тачком A јер је $\mathcal{I}(O) = O$, $\mathcal{I}(A) = B$ и $A \neq B$. Аналогно се показује да тачка O не може бити истоветна са тачком B. Тачка O не може бити ни на продужетку дужи AB јер ако би нпр. било $\mathcal{B}(O, A, B)$ тада би на полуправој OA постојале две различите тачке A и B такве да је $(OA) \cong (OB)$ што је немогуће. Одатле је $\mathcal{B}(A, O, B)$ и $O \in (AB)$ па је тачка O средиште дужи AB.

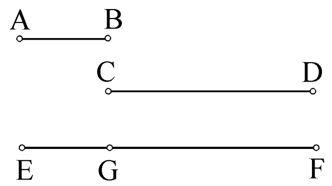
Докажимо још јединственост. Нека осим тачке O дуж AB има још једно средиште, нпр. тачку O'. Тада би у изометрији $\mathcal{I}$ било $\mathcal{I}(O) = O$ и $\mathcal{I}(O') = O'$, односно изометрија $\mathcal{I}$ која делује на праву AB тј. у простору S^1 имала би две инваријантне тачке O и O' па би према томе морала да буде идентична трансформација праве AB. Међутим ова трансформација преводи тачку A у тачку B, тј. $\mathcal{I}(A) = B$ и $A \neq B$. Одатле следи да $\mathcal{I}$ није идентична трансформација што представља контрадикцију. Дакле дуж AB има јединствено средиште. □

Међу појмовима који се изводе из релације подударности дужи налазе се и поредбене релације над скупом дужи које изражавамо речима ”мања од” и ”већа од”.

Дефиниција 4.4.2. Ако су AB и CD две дужи и ако унутар дужи CD постоји тачка E таква да је $AB \cong CE$, тада кажемо да је дуж AB *мања* од дужи CD и то симболички обележавамо са

$$AB < CD,$$

или да је дуж CD *већа* од дужи AB и симболички обележавамо са $CD > AB$.



Слика 4.7.

Дефиниција 4.4.3. Дуж је EF једнака *збиру двеју дужи* AB и CD и симболички се обележава са

$$EF = AB + CD,$$

ако на дужи EF постоји тачка G таква да је $AB \cong EG$ и $CD \cong GF$ (Слика 4.7). Тада је дуж AB једнака разлици дужи EF и CD и то означавамо $AB = EF - CD$.

Дефиниција 4.4.4. Дуж CD једнака *производу дужи* AB *и природног броја* k, и симболички обележава са $CD = kAB$, ако је

$$CD = \underbrace{AB + AB + \ldots + AB}_{k \text{ пута}}$$

Дефиниција производа дужи са било којим позитивним бројем нешто је сложенија, те је овде нећемо наводити. Напомињемо само да је она у тесној вези са мерењем дужи.

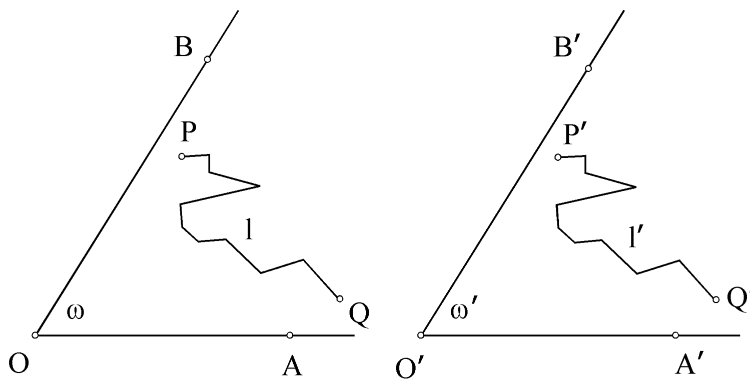
Сви закони бројева важе и овде. Посебно важи закон трихотомије, тј. за сваке две дужи AB и CD важи једна и само једна од релација:
(i) $AB \cong CD$, (ii) AB већа од CD, (iii) AB мања од CD.

4.5 Подударност углова

Говорити о класи подударних углова има смисла тек после установљавања следеће теореме:

Теорема 4.5.1. *У изометријској трансформацији углу одговара угао.*

Доказ. Нека је у некој равни π дат угао ω са крацима OA и OB и нека му у некој изометрији $\mathcal{I} : \pi \to \pi'$ одговара неки лик ω' . Докажимо да је лик ω' такође угао.



Слика 4.8.

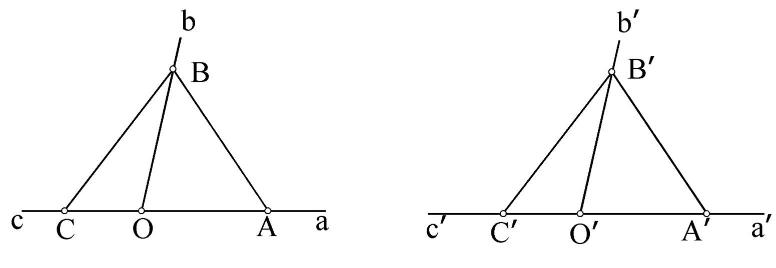
Будући да у изометрији $\mathcal{I}$ полуправама OA и OB одговарају полуправе $O'A'$ и $O'B'$, угаоној линији $\measuredangle AOB$ одговара угаона линија $\measuredangle A'O'B'$. Треба још показати да ће у изометрији $\mathcal{I}$ унутрашњим тачкама угла ω одговарати унутрашње тачке неког угла ω' одређеног угаоном линијом $\measuredangle A'O'B'$. У том циљу обележимо са P и Q било које две тачке које припадају унутрашњости угла ω (Слика 4.8.). У складу са дефиницијом појма угла, постоји полигонална линија l у равни π која спаја тачке P и Q и која са угаоном линијом $\measuredangle AOB$ нема заједничких тачака. Како у изометрији $\mathcal{I}$ дужима одговарају дужи, полигоналној линији l одговара полигонална линија l' која спаја тачке P' и Q' и налази се у равни π'. Како угаона линија $\measuredangle AOB$ нема заједничких тачака са полигоналном линијом l биће и $\measuredangle A'O'B' \cap l' = \emptyset$. Одатле следи да су тачке P' и Q' са исте стране угаоне линије $\measuredangle A'O'B'$, тј. да свим унутрашњим тачкама угла ω одговарају у изометрији $\mathcal{I}$ тачке које се налазе са исте стране угаоне линије $\measuredangle A'O'B'$ односно угао ω' . Истим поступком доказује се да свака тачка P' угла ω' представља слику неке тачке P угла ω, чиме је теорема доказана. □

Теорема 4.5.2. *Да би два угла $\measuredangle ab$ и $\measuredangle a'b'$ са теменима O и O' била подударна, потребно је и довољно да на крацима a, b и a', b' постоје респективно тачке A, B, A', B' такве да је $(OA) \cong (O'A')$, $(OB) \cong (O'B')$ и $(AB) \cong (A'B')$.*

Доказ. У случају када су углови опружени доказ је непосредан. Нека сада углови $\measuredangle ab$ и $\measuredangle a'b'$ нису опружени. Ако су они подударни тада постоји изометрија која пресликава један на други. Тада се том изометријом произвољне тачке $A \in a$, $B \in b$ пресликавају у тачке $A' \in a'$, $B' \in b'$ при чему је $(O, A, B) \cong (O', A', B')$, тј. $(OA) \cong (O'A')$, $(OB) \cong (O'B')$ и $(AB) \cong (A'B')$.

Обратно, нека је $(OA) \cong (O'A')$, $(OB) \cong (O'B')$ и $(AB) \cong (A'B')$. Тада је $(O, A, B) \cong (O', A', B')$, при чему су O, A, B и O', A', B' две тројке неколинерних тачака, одакле следи да постоји јединствена изометрија равни која тачке O, A, B преводи редом у тачке O', A', B'. Та изометрија угао $\measuredangle ab$ пресликава на угао $\measuredangle a'b'$, одакле следи $\measuredangle ab \cong \measuredangle a'b'$. □

Теорема 4.5.3. *Напоредни углови подударних углова су подударни.*



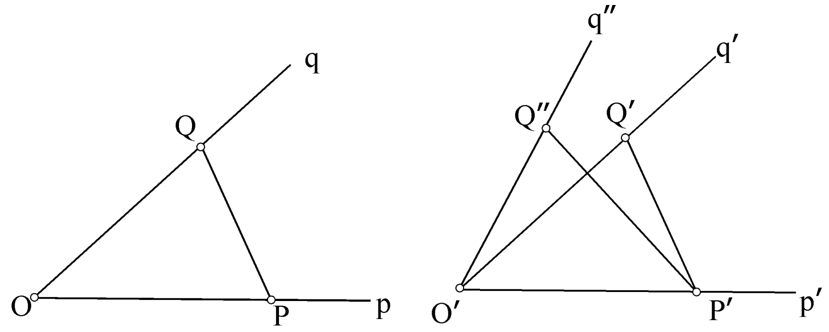
Слика 4.9.

Доказ. Нека су $\measuredangle ab$ и $\measuredangle a'b'$ неопружени, конвексни подударни углови и нека су $\measuredangle bc$ и $\measuredangle b'c'$ њихови напоредни углови (Слика 4.9). Нека су O, O' темена а A, B, A', B' редом тачке полуправих a, b, a', b', такве да је $OA \cong O'A'$ и $OB \cong O'B'$. Тада је на основу претходне теореме $AB \cong A'B'$. Нека су C и C' тачке полуправих c и c' редом такве да је $OC \cong O'C'$. Тада на основу Аксиоме III_7 следи да је $BC \cong B'C'$, па на основу претходне теореме следи $\measuredangle bc \cong \measuredangle b'c'$. □

Теорема 4.5.4. *Унакрсни углови су међусобом подударни.*

Доказ. Како унакрсни углови имају исте напоредне углове, то на основу претходне теореме следи доказ тврђења. □

Теорема 4.5.5. *Ако је $\measuredangle pq$ задати угао и p' произвољна полуправа, тада у свакој затвореној полуравни чија је граница права која садржи полуправу p' постоји јединствена полуправа q' таква да су углови $\measuredangle pq$ и $\measuredangle p'q'$ међусобно подударни.*



Слика 4.10.

Доказ. Ако је угао $\measuredangle pq$ опружен доказ се изводи непосредно . Ако није, претпоставимо да су P и Q тачке полуправих p и q, O теме угла $\measuredangle pq$, O' почетак полуправе p', а P' тачка полуправе p' таква да је $OP \cong O'P'$ (Слика 4.10). Тада у задатој полуравни чија је граница права која садржи p' постоји јединствена тачка Q' таква да је $(O, P, Q) \cong (O', P', Q')$. Ако са q' означимо полуправу $O'Q'$, углови $\measuredangle pq$ и $\measuredangle p'q'$ ће бити подударни на основу Теореме 4.5.2.

Ако би осим q' у задатој полуравни постојала и полуправа q'' која задовољава услове теореме, тада би на тој полуправој постојала јединствена тачка Q'' таква да је $OQ \cong O'Q''$, па би, на основу Теореме 4.5.2., тројке (O, P, Q) и (O', P', Q'') биле подударне што је према Аксиоми III_6, немогуће. □

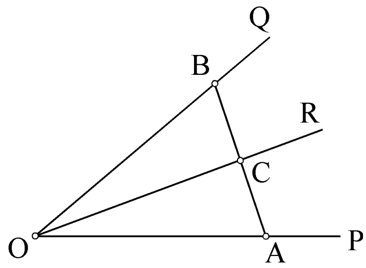
Релација подударности углова омогућује да установимо низ нових појмова који се односе на углове; од тих појмова наводимо најпре појам располовнице или бисектрисе угла.

Дефиниција 4.5.1. *Располовницом* (*симетралом, бисектрисом*) *угла* $\measuredangle POQ$ називамо полуправу OR која припада том углу и која га разлаже на два подударна угла.

Напомена. Под појмом симетрале угла најчешће подразумевамо не само наведену полуправу већи целу праву која садржи ову полуправу док ћемо ову полуправу најчешће називати располовницом или бисектрисом.

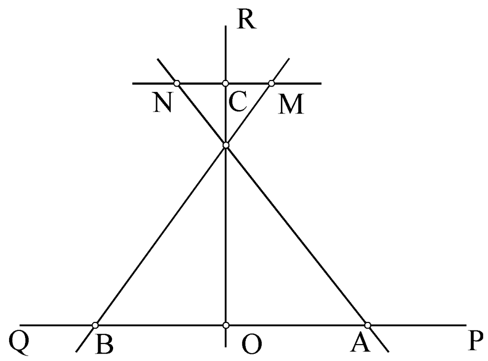
Теорема 4.5.6. *Сваки угао има једну и само једну бисектрису.*

Доказ. Приликом доказа ове теореме разликоваћемо два случаја и то: (i) Угао $\measuredangle POQ$ није опружен, (ii) Угао $\measuredangle POQ$ је опружен.



Слика 4.11.

(i) Нека су A, B редом тачке са кракова OP, OQ такве да је $(O, A) \cong (O, B)$ (Слика 4.11). При томе су A, O, B три неколинеарне тачке такве да је $(O, A) \cong (O, B)$, $(O, B) \cong (O, A)$ (због симетричности) и $(A, B) \cong (B, A)$ па постоји изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни π у којој се налази тај угао и која преводи тачке O, A, B респективно у тачке O, B, A тј. $\mathcal{I}(O) = O$, $\mathcal{I}(A) = B$, $\mathcal{I}(B) = A$. У складу са последњим двема релацијама средиште дужи AB, тачка C је инваријанта трансформације $\mathcal{I}$, тј. $\mathcal{I}(C) = C$. У том случају изометрија $\mathcal{I}$ равни π поседује две инваријантне тачке O и C те је свака тачка праве OC инваријантна. Тачка O разлаже праву OC на две полуправе од којих је једна у углу $\measuredangle POQ$ а друга ван њега. Нека је полуправа OC у том углу. Обележимо је са OR и покажимо да је OR бисектриса угла $\measuredangle POQ$. Из претпоставке непосредно следи да OR припада углу $\measuredangle POQ$. Како је $\mathcal{I}(\measuredangle POR) \cong \measuredangle QOR$, полуправа OR разлаже угао $\measuredangle POQ$ на два подударна угла, па одатле следи да је OR располовница угла $\measuredangle POQ$. Јединственост се показује индиректним поступком.



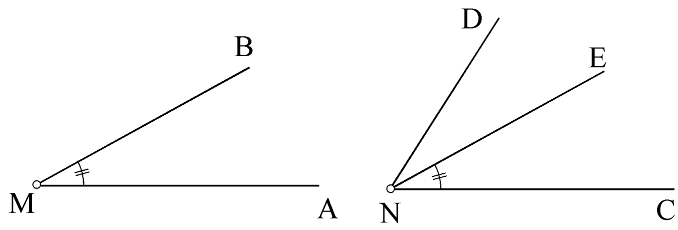
Слика 4.12.

(ii) Нека је сада $\measuredangle POQ$ опружен. Нека су A, B тачке полуправих OP и OQ (Слика 4.12) такве да је $(O, A) \cong (O, B)$. Нека је M било која тачка угла $\measuredangle POQ$ која није на правој PQ. У складу са Аксиомом III_6 у тој полуравни постоји јединствена тачка N таква да је $(AM) \cong (BN)$ и $(BM) \cong (AN)$. Сем тога је $(A, B) \cong (B, A)$ те постоји јединствена изометрија $\mathcal{I}$ равни π у којој се налази тај угао која преводи тачке A, B, M редом у тачке B, A, N, тј. $\mathcal{I}(A) = B$, $\mathcal{I}(B) = A$, $\mathcal{I}(M) = N$.

Како у тој трансформацији тачки A одговара тачка B, тачки B одговара тачка A, то средишту O дужи AB одговара та иста тачка, тј. $\mathcal{I}(O) = O$. Како је у овој изометријској трансформацији $\mathcal{I}(M) = N$ и $\mathcal{I}(N) = M$, средишту C дужи MN одговара та иста тачка C, тј. $\mathcal{I}(C) = C$. У том случају у изометријској трансформацији $\mathcal{I}$ равни π тачкама O и C те равни одговарају те исте тачке те је свака тачка праве OC инваријанта трансформације $\mathcal{I}$. Тачка O разлаже праву OC на две полуправе од којих једна припада углу $\measuredangle POQ$ а друга је ван њега. Нека је нпр. OC у углу $\measuredangle POQ$. Означимо је са OR. Из претпоставке непосредно следи да полуправа OR припада углу $\measuredangle POQ$ и како у изометрији $\mathcal{I}$ углу $\measuredangle POR$ одговара угао $\measuredangle QOR$ полуправа OR разлаже $\measuredangle POQ$ на два подударна угла. Одатле следи да је OR бисектриса угла $\measuredangle POQ$ чиме је доказана егзистенција. Јединственост се доказује индиректним поступком. $\square$

Напомена. Изометријске трансформације омогућују да се осим до сада посматране релације подударности дефинишу и друге релације на скупу углова, као нпр. ”мањи од” и већи од”.

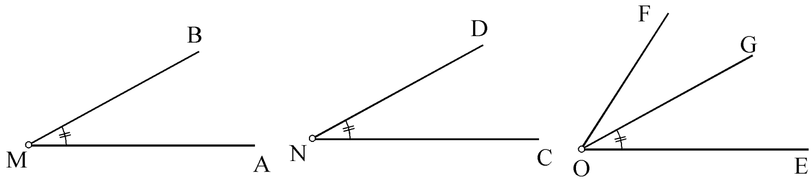
Дефиниција 4.5.2. Ако су $\measuredangle AMB$ и $\measuredangle CND$ два угла и ако унутар



Слика 4.13.

угла $\measuredangle CND$ постоји полуправа NE таква да је $\measuredangle AMB \cong \measuredangle CNE$, тада кажемо да је $\measuredangle AMB$ *мањи* од $\measuredangle CND$ и симболички обележавамо са $\measuredangle AMB < \measuredangle CND$, или да је $\measuredangle CND$ *већи* од $\measuredangle AMB$ и симболички обележавамо са $\measuredangle CND > \measuredangle AMB$ (Слика 4.13).

Осим наведених релација на скупу свих углова могу се дефинисати и операције "сабирање углова" и "множење угла бројем".



Слика 4.14.

Дефиниција 4.5.3. Угао $\measuredangle EOF$ једнак *збиру двају углова* $\measuredangle AMB$ и $\measuredangle CND$, и симболички обележава са

$$\measuredangle EOF = \measuredangle AMB + \measuredangle CND,$$

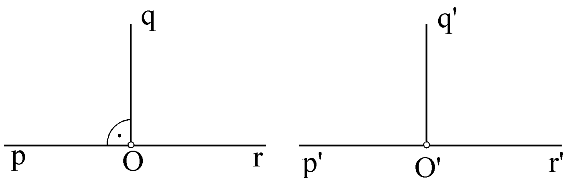
ако унутар угла $\measuredangle EOF$ постоји полуправа OG која разлаже тај угао на два угла $\measuredangle EOG$ и $\measuredangle GOF$ таква да је $\measuredangle AMB \cong \measuredangle EOG$ и $\measuredangle CND \cong \measuredangle GOF$ (Слика 4.14). Угао $\measuredangle CND$ је једнак *производу угла* $\measuredangle AMB$ *и природног броја* k, и симболички обележава са $\measuredangle CND = k \cdot \measuredangle AMB$, ако је

$$\measuredangle CND = \underbrace{\measuredangle AMB + \measuredangle AMB + \ldots + \measuredangle AMB}_{k \text{ пута}}$$

4.6 Прав угао

Дефиниција 4.6.1. Неки угао је *прав, оштар* или *туп* у зависности од тога да ли је једнак, већи или мањи од свог напоредног угла.

Егзистенција правог угла следи из чињенице да сваки угао, па и опружен угао има јединствену бисектрису.

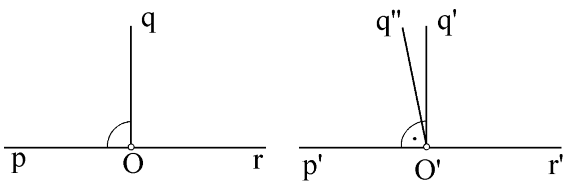


Слика 4.15.

Теорема 4.6.1. *Угао подударан правом углу је прав.*

Доказ. Нека је $\measuredangle pOq$ прав и $\measuredangle p'O'q' \cong \measuredangle pOq$. Обележимо са r и r' полуправе комплементне редом са полуправама p и p' (Слика 4.15). Углови $\measuredangle pOq$ и $\measuredangle p'O'q'$ су подударни па су и њихови напоредни углови $\measuredangle qOr$ и $\measuredangle q'O'r'$ подударни. При томе је $\measuredangle p'O'q' \cong \measuredangle pOq$, $\measuredangle pOq \cong \measuredangle qOr$ и $\measuredangle qOr \cong \measuredangle q'O'r'$ одакле је због транзитивности релације подударности углова $\measuredangle p'O'q' \cong \measuredangle q'O'r'$ па је $\measuredangle p'O'q'$ прав угао. □

Теорема 4.6.2. *Свака два права угла су међу собом подударна.*



Слика 4.16.

Доказ. Нека су p, q, p', q' краци правих углова $\measuredangle pOq$ и $\measuredangle p'O'q'$ (Слика 4.16) а r и r' полуправе комплементне редом са полуправама p и p'. Претпоставимо да прави углови $\measuredangle pOq$ и $\measuredangle p'O'q'$ нису подударни. Нека је угао $\measuredangle p'O'q'$ већи од угла $\measuredangle pOq$. Тада унутар угла $\measuredangle p'O'q'$ постоји полуправа

q'' таква да је $\measuredangle p'O'q'' \cong \measuredangle pOq$. Како је угао $\measuredangle pOq$ прав, то је и њему подударан угао $\measuredangle p'O'q''$ прав.

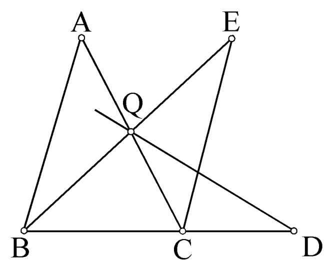
Сада су углови $\measuredangle p'O'q'$ и $\measuredangle p'O'q''$ прави, па је сваки од њих једнак свом напоредном углу тј. $\measuredangle p'O'q' \cong \measuredangle q'O'r'$ и $\measuredangle p'O'q'' \cong \measuredangle q''O'r'$. У том случају би опружен угао $\measuredangle p'O'r'$ имао две бисектрисе q' и q'', што је немогуће. Према томе не важи $\measuredangle p'O'q' > \measuredangle pOq$. Аналогно се показује да није $\measuredangle p'O'q' < \measuredangle pOq$. Дакле мора бити $\measuredangle p'O'q' \cong \measuredangle pOq$. □

Дефиниција 4.6.2. Троугао коме је један угао прав зваћемо *правоуглим*. Ивицу наспрам правог угла зваћемо *хипотенузом* а преостале две ивице *катетама*.

4.7 Ставови о подударности троуглова

У претходном излагању установили смо да је геометријски лик подударан троуглу - троугао а троугаоној површи - троугаона површ. Такође, троугао ΔABC је подударан троуглу $\Delta A'B'C'$ ако и само ако су уређене тројке тачака (A, B, C) и (A', B', C') међусобно подударне. То означавамо $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. На основу досада реченог, у могућности смо да докажемо још нека тврђења везана за троуглове

Теорема 4.7.1. *Спољашњи угао троугла је већи од било ког унутрашњег несуседног угла.*



Слика 4.17.

Доказ. Посматрајмо ΔABC и нека је D (Слика 4.17) тачка праве BC таква да је $\mathcal{B}(B, C, D)$. Доказаћемо да је $\measuredangle BAC < \measuredangle ACD$. Означимо са Q средиште дужи AC, а са E тачку полуправе BQ такву да је $\mathcal{B}(B, Q, E)$ и $BQ \cong QE$. Углови $\measuredangle AQB$ и $\measuredangle CQE$ су унакрсни па су као такви и подударни. Како је још $QA \cong QC$ и $QB \cong QE$ то је $(A, Q, B) \cong (C, Q, E)$. Одавде је $\measuredangle BAQ \cong \measuredangle ECQ$.

Права DQ сече страницу BE троугла ΔBCE у тачки Q, не сече страницу BC јер важи $\mathcal{B}(B, C, D)$, па према Пашовом ставу мора сећи страницу CE. Тачке D и Q су са разних страна праве CE, јер је $B, D \div CE$ и $B, Q \ddot{-} CE$. Према томе полуправа CE припада унутрашњости угла $\measuredangle ACD$ па је $\measuredangle ACE < \measuredangle ACD$. С друге стране је $\measuredangle ACE \cong \measuredangle BAC$ одакле следи $\measuredangle BAC < \measuredangle ACD$. □

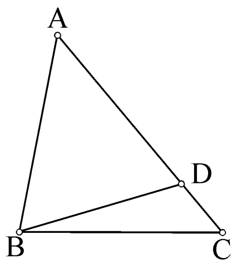
Из ове теореме следи једна важна последица

Последица 4.7.1. *Највише један унутрашњи угао троугла може бити прав или туп.*

Теорема 4.7.2. *Наспрам једнаких страница троугла су једнаки углови и обратно наспрам једнаких углова троугла су једнаке странице.*

Доказ. Нека је ΔABC произвољан тругао. Тада важи: уређене тројке (A, B, C) и (A, C, B) су подударне ако и само ако су углови $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ACB$ међусобно подударни. □

Теорема 4.7.3. *Наспрам веће странице у троуглу лежи већи угао, и обратно наспрам већег угла у троуглу је већа страница.*

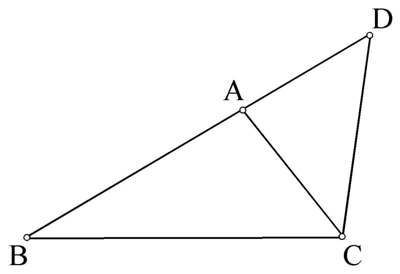


Слика 4.18.

Доказ. Нека је у троуглу ΔABC (Слика 4.18) задовољено $AC > AB$. Тада на дужи AC постоји тачка D таква да је $AD \cong AB$ и $\mathcal{B}(A, D, C)$. Тада је полуправа BD унутар угла $\measuredangle ABC$ троугла ΔABC па је $\measuredangle ABC > \measuredangle ABD$. Троугао ΔABD је једнакокраки па је $\measuredangle ABD \cong \measuredangle ADB$. У троуглу ΔBCD угао $\measuredangle ADB$ је спољашњи несуседни за угао $\measuredangle BCD$ па је $\measuredangle ADB > \measuredangle ACB$. Према томе имамо $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$.

Обратно, нека је $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$. Тада не може бити $AB \cong AC$ јер бисмо имали $\measuredangle ABC \cong \measuredangle ACB$. Такође не може бити $AC < AB$ јер би према доказаном делу било $\measuredangle ABC < \measuredangle ACB$. Дакле мора бити $AC > AB$. $\square$

Теорема 4.7.4. *Збир две странице троугла је већи од треће странице тог троугла, а разлика две странице троугла, је мања од треће странице тог троугла.*



Слика 4.19.

Доказ. Нека је ΔABC произвољан троугао. Означимо са D (Слика 4.19) тачку полуправе BA тако даје $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $AD \cong AC$. Тада је $\measuredangle BCD > \measuredangle BCA$ и $\measuredangle ACD \cong \measuredangle BDC$, па је у троуглу ΔBCD задовољено $\measuredangle BCD > \measuredangle BDC$ тј. $BD > BC$ а самим тим и $AB + AC > BC$. У другом делу претпоставимо да је $AC > AB$. Тада је према доказаном $AC < AB + BC$, одакле је $AC - AB < BC$ $\square$

Теорема 4.7.5. (Први став о подударности троуглова) *Два троугла су подударна ако и само ако су две странице и њима захваћен угао првог троугла подударни одговарајућим страницама и углу другог троугла.*

Доказ непосредно следи на основу Теореме 4.5.2.

Теорема 4.7.6. (Други став о подударности троуглова) *Два троугла су подударна ако и само ако су једна страница и на њој налегли углови првог троугла подударни одговарајућој страници и угловима другог троугла.*

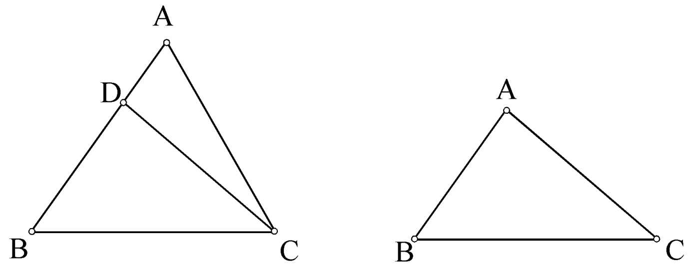
Доказ. Нека су ΔABC и $\Delta A'B'C'$ два троугла таква да је $BC \cong B'C'$, $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$ и $\measuredangle C \cong \measuredangle C'$. Ако би било $AB > A'B'$, тада на дужи AB

постоји тачка D (Слика 4.20) таква даје $DB \cong A'B'$. Троуглови ΔDBC и $\Delta A'B'C'$ су подударни према првом ставу о подударности троуглова, па је и $\measuredangle DCB \cong \measuredangle A'C'B'$. С друге стране је $\measuredangle A'C'B' \cong \measuredangle ACB$ одакле следи да је $\measuredangle DCB \cong \measuredangle ACB$, што је немогуће. Аналогно и претпоставка да је $AB < A'B'$ доводи до контрадикције. Дакле мора бити $AB \cong A'B'$ па су троуглови ΔABC и $\Delta A'B'C'$ подударни према првом ставу о подударности троуглова. $\square$

Теорема 4.7.7. (Трећи став о подударности троуглова) *Два троугла су подударна ако и само ако су све странице првог троугла подударне одговарајућим страницама другог троугла.*

Доказ и овог става непосредно следи на основу Теореме 4.5.2.

Теорема 4.7.8. (Четврти став о подударности троуглова) *Два троугла су подударна ако и само ако су две странице и угао наспрам једне од њих првог троугла подударни одговарајуцим страницама и углу другог троугла, док су углови наспрам, других двеју подударних страница оба оштра, оба парва или оба тупа.*



Слика 4.20.

Доказ. Нека су ΔABC и $\Delta A'B'C'$ два троугла таква да је $BC \cong B'C'$, $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$, $\measuredangle C \cong \measuredangle C'$ а углови $\measuredangle A$ и $\measuredangle A'$ оба оштра оба права или оба тупа. Тада за странице AB и $A'B'$ важи тачно једна од могућности:

(i) $AB > A'B'$, (ii) $AB < A'B'$ и (iii) $AB \cong A'B'$.

(i) Ако је $AB > A'B'$ тада на дужи AB постоји тачка D таква да је $DB \cong A'B'$ (Слика 4.20). Тада су подударни троуглови ΔDBC и $\Delta A'B'C'$ па је и $CD \cong C'A'$. Како је још $C'A' \cong CA$ имамо да је $CD \cong CA$ па из троугла ΔACD имамо $\measuredangle CDA \cong \measuredangle CAD$. Значи углови $\measuredangle CDA$ и $\measuredangle CDB$ ће бити истовремено оба оштра, оба права или оба тупа. Они су напоредни и једнаки па не могу истовремено бити оштри или тупи. Такође не могу бити оба права јер би тада троугао ΔACD имао два унутрашња права угла. Дакле не може бити $AB > A'B'$.

(ii) Аналогно и претпоставка $AB < A'B'$ доводи до контрадикције.

(iii) Значи мора бити $AB \cong A'B'$ па су троуглови ΔABC и $\Delta A'B'C'$ подударни на основу неког од претходних ставова о подударности. □

Теорема 4.7.9. (Пети став о подударности троуглова) *Два троугла су подударна ако и само ако су једна страница, на њој налегли угао и угао наспрам ње првог троугла подударни одговарајућој страници и угловима другог троугла.*

Доказ. Нека су ΔABC и $\Delta A'B'C'$ два троугла таква да је $BC \cong B'C'$ $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$ и $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$. Тада за странице AB и $A'B'$ може важити тачно једна од релација:

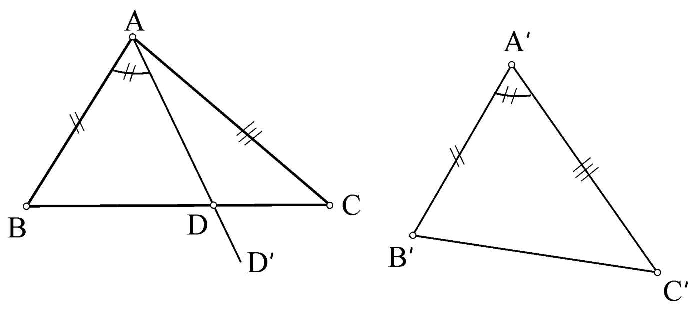
(i) $AB > A'B'$, (ii) $AB < A'B'$ и (iii) $AB \cong A'B'$.

(i) Ако је $AB > A'B'$ онда на дужи AB постоји тачка D таква да је $DB \cong A'B'$. У том случају су троуглови ΔDBC и $\Delta A'B'C'$ подударни према првом ставу о подударности троуглова. Одатле следи да је $\measuredangle BDC$ једнак углу $\measuredangle A'$ и како је још $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$ имамо да је $\measuredangle DBC \cong \measuredangle A$ сто је немогуће јер је $\measuredangle DBC$ спољашњи несуседни углу $\measuredangle A$ у троуглу ΔACD.

(ii) Претпоставка $AB < A'B'$ аналогно доводи до контрадикције.

(iii) Значи мора бити $AB \cong A'B'$, па су троуглови ΔABC и $\Delta A'B'C'$ подударни према првом ставу о подударности троуглова. □

Теорема 4.7.10. *Ако су дата два троугла ΔABC и $\Delta A'B'C'$, код којих је $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\measuredangle A > \measuredangle A'$, тада је $BC > B'C'$.*

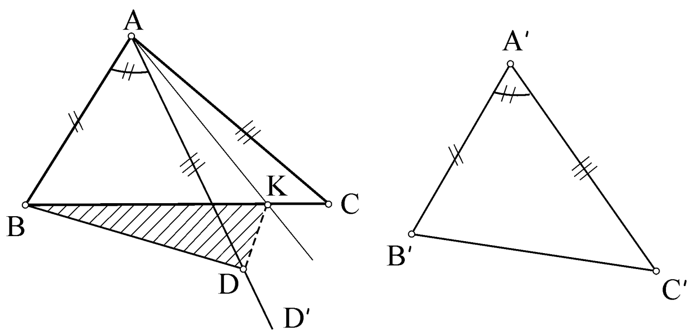


Слика 4.21.

Доказ. Како је$\measuredangle A > \measuredangle A'$ то у углу $\measuredangle A$ постоји полуправа AD' таква да је $\measuredangle BAD' = \measuredangle A'$. На полуправој AD' одредимо тачку D такву да је $AD = A'C'$. Како је још$A'C' = AC$ следи да је $AD = AC$. Сада могу наступити следећи случајеви:

(i) Тачка $D \in BC$ (Слика 4.21.). Посматрајмо троуглове ΔABD и $\Delta A'B'C'$. За ова два троугла имамо да важи: $AB = A'B'$, $AD = A'C'$ и $\measuredangle BAD = \measuredangle A'$, па је $\Delta ABD \cong \Delta A'B'C'$ на основу првог става о подударности троуглова.

Из њихове подударности следи да је $BD = B'C'$. Из $D \in BC$, следи да важи распоред тачака $\mathcal{B}(B, D, C)$ па је $BD < BC$. Даље важи $BD = B'C'$, одакле следи да је $B'C' < BC$.



Слика 4.22.

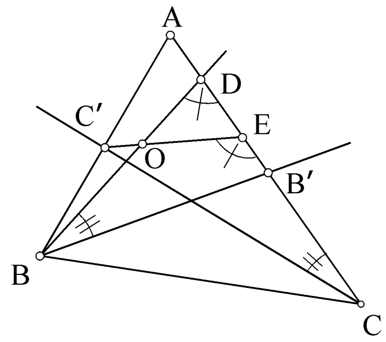
(ii) Тачка $D \notin BC$ (Слика 4.22.). Конструишимо симетралу s угла $\measuredangle DAC$. Нека је K тачка добијена у пресеку симетрале s и странице BC троугла. Уочимо дуж KD. Како је $AC = AD$ и s симетрала угла, добијамо да је $KD = KC$.

Из троугла ΔBKD добијамо $BD < BK + KD = BK + KC = BC$ тј. $BD < BC$ и знамо да је $BD = B'C'$ одакле следи да је $B'C' < BC$, што је требало показати. □

Теорема 4.7.11. *Ако су дата два троугла ΔABC и $\Delta A'B'C'$, код којих је $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $BC > B'C'$, тада је $\measuredangle A > \measuredangle A'$.*

Доказ се изводи методом свођења на противуречност и коришћењем Теореме 4.7.10. □

Теорема 4.7.12. (Штајнер-Лемусова теорема) *У троуглу* ΔABC *странице* AB *и* AC *су једнаке ако и само ако су му једнаки одсечци симетрала* BB' *и* CC' *редом унутрашњих углова* $\measuredangle B$ *и* $\measuredangle C$*.*



Слика 4.23.

Доказ. Нека су одсечци симетрала BB' и CC' редом унутрашњих углова $\measuredangle B$ и $\measuredangle C$ троугла ΔABC међусобно једнаки. Тада за дужи AC и AB важи тачно једна од следеће три могућности

(i) $AC > AB$, (ii) $AC < AB$ и (iii) $AC = AB$.

Размотримо сваку од њих понаособ.

(i) Нека је $AC > AB$. Тада је $\measuredangle B > \measuredangle C$. У углу $\measuredangle ABB'$ постоји полуправа BD таква да је $\measuredangle B'BD = \measuredangle ACC'$ (Слика 4.23), $\measuredangle CBD > \measuredangle C$, одакле следи да је $CD > BD$ тј. да између тачака C и D постоји тачка E таква да је $BD = CE$. За троуглове $\Delta BDB'$ и $\Delta CEC'$ важи $BB' = CC'$, $BD = CE$ и $\measuredangle B'BD = \measuredangle ECC'$, па су они подударни према првом ставу о подударности троуглова. Из подударности ових троуглова следи да су сагласни углови $\measuredangle BDC$ и $\measuredangle C'EC$ једнаки, тј. добили смо у троуглу ΔOED, где је тачка O пресек правих BD и $C'E$, да је спољашњи угао једнак несуседном унутрашњем углу што је у супротности са Теоремом 4.7.1. Значи претпоставка $AC > AB$ доводи до контрадикције.

(ii) Аналого показујемо да не важи ни да је $AC < AB$.

(iii) Према томе, преостаје нам да важи $AB = AC$.

Обратно се лако доказује. □

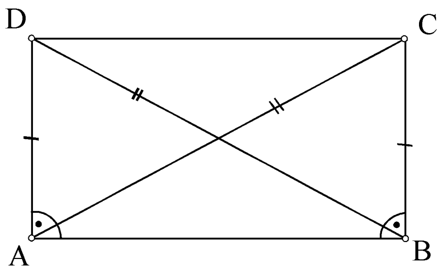
4.8 Четвороуглови у апсолутној геометрији

Затворена полигонална линија која се састоји од четири надовезане дужи представља четвороугао. Део равни ограничен четвороуглом представља четвороугаону површ. Лик подударан четвороуглу представља, као што смо се раније уверили, такође четрвороугао. У апсолутној геометрији су од посебног интереса Ламбертов и Сакеријев четвороугао.

Дефиниција 4.8.1. Четвороугао са три права угла називамо *Ламбертовим четвороуглом.* Ако су углови $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ и $\measuredangle C$ Ламбертовог четвороугла прави, тада су странице AB и BC основице а AD и CD висине Ламбертовог четвороугла.

Дефиниција 4.8.2. Четвороугао $ABCD$ код кога су углови $\measuredangle A$ и $\measuredangle B$ прави а $AD \cong BC$ називамо *Сакеријевим четвороуглом.* Страница AB је основица, CD противосновица а AD и BC су бочне странице Сакеријевог четвороугла.

Теорема 4.8.1. *Код Сакеријевог четвороугла $ABCD$ са основицом AB и противосновицом CD важи $\measuredangle C \cong \measuredangle D$.*

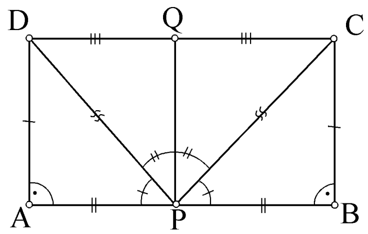


Слика 4.24.

Доказ. Троуглови ΔABC и ΔBAD (Слика 4.24) су подударни на основу првог става о подударности троуглова. Из њихове подударности следи $AC \cong BD$. Сада троуглови ΔACD и ΔBDC имају подударне све три одговарајуће странице, одакле следи њихова подударност према трећем ставу о подударности троуглова. Дакле, $\measuredangle ADC \cong \measuredangle BCD$. □

Дефиниција 4.8.3. Дуж која спаја средишта основице и противосновице Сакеријевог четвороугла је *средња линија* тог четвороугла.

Теорема 4.8.2. *Средња линија Сакеријевог четвороугла разлаже тај четвороугао на два Ламбертова четвороугла.*



Слика 4.25.

Доказ. Нека су P и Q средишта редом основице AB и противосновице CD (Слика 4.25) Сакеријевог четвороугла $ABCD$. Троуглови ΔAPD и ΔBPC су подударни на основу првог става о подударности троуглова. Из њихове подударности следи $PD \cong PC$ и $\measuredangle APD \cong \measuredangle BPC$. Сада су троуглови ΔPQD и ΔPQC подударни према трећем ставу о подударности троуглова, одакле следи $\measuredangle QPD \cong \measuredangle QPC$ и $\measuredangle PQD \cong \measuredangle PQC$. Углови $\measuredangle PQD$ и $\measuredangle PQC$ су подударни и напоредни, дакле прави. Како је још

$$\measuredangle APQ = \measuredangle APD + \measuredangle QPD = \measuredangle BPC + \measuredangle QPC = \measuredangle BPQ,$$

па су и углови $\measuredangle APQ$ и $\measuredangle BPQ$ прави. Дакле, четвороуглови $APQD$ и $BPQC$ су Ламбертови. □

Теорема 4.8.3. *Ако је код простог четвороугла $ABCD$: $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ и $AD \cong BC$ тада је $\measuredangle C \cong \measuredangle D$.*

Доказ. Теорема се доказује на потпуно исти начин као и Теорема 4.8.1. □

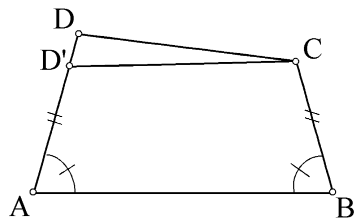
Теорема 4.8.4. *Ако је код простог четвороугла $ABCD$: $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ и $\measuredangle D > \measuredangle C$ тада је $BC > AD$.*

Доказ. За дужи BC и AD важи тачно једна од релација:

(i) $BC \cong AD$, (ii) $BC < AD$ или (iii) $BC > AD$.

(i) Нека је $BC \cong AD$. Како је још $\measuredangle A \cong \measuredangle B$, то на основу Теореме 4.8.3. следи $\measuredangle C \cong \measuredangle D$, што је у супротности са претпоставком.

(ii) Ако је $BC < AD$, тада постоји тачка D' (Слика 4.26) таква да је $AD' \cong BC$ и $\mathcal{B}(A, D', D)$. Четвороугао $ABCD'$ је прост јер су тачке C и D' са исте стране праве AB и задовољава све услове Теореме 4.8.3.,

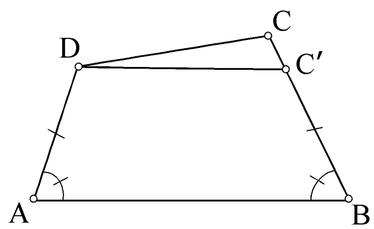


Слика 4.26.

одакле следи $\measuredangle BCD' \cong \measuredangle CD'A$. Тачка D' припада дужи AD, одакле следи да D' припада унутрашњости угла $\measuredangle BCD$, па је $\measuredangle BCD > \measuredangle BCD'$ и како је још $\measuredangle BCD' \cong \measuredangle CD'A$, то је $\measuredangle BCD > \measuredangle CD'A$. Угао $\measuredangle CD'A$ је спољашњи несуседни углу $\measuredangle CDD' \equiv \measuredangle CDA$, одакле следи $\measuredangle BCD > \measuredangle CDA$, што је у супротности са претпоставком теореме. Према томе не може бити $BC < AD$.

(iii) преостаје могућност $BC > AD$. □

Теорема 4.8.5. *Ако је код четвороугла $ABCD$: $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ и $BC > AD$ тада је $\measuredangle D > \measuredangle C$.*



Слика 4.27.

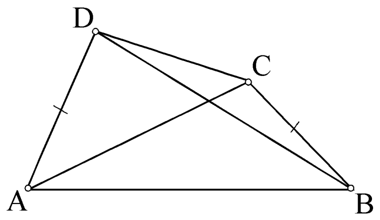
Доказ. Из $BC > AD$ следи да постоји тачка C' (Слика 4.27) таква да је $BC' \cong AD$ и $\mathcal{B}(B, C', C)$. Четвороугао $ABC'D$ задовољава све услове Теореме 4.8.3. одакле је $\measuredangle BC'D \cong \measuredangle ADC'$. Сада је

$$\measuredangle ADC > \measuredangle ADC' \cong \measuredangle BC'D > \measuredangle BCD,$$

тј. $\measuredangle D > \measuredangle C$. □

Теорема 4.8.6. *Ако је код простог четвороугла $ABCD$: $AD \cong BC$ и $\measuredangle A > \measuredangle B$, тада је $\measuredangle C > \measuredangle D$.*

Доказ. За троуглове ΔABC и ΔABD је $BC \cong AD$, $AB \equiv AB$ и $\measuredangle ABC < \measuredangle ABD$ (Слика 4.28) па је $AC < BD$. Сада за троуглове ΔACD и ΔBCD важи $CD \equiv CD$, $AD \cong BC$ и $AC < BD$, одакле је $\measuredangle ADC < \measuredangle BCD$, тј. $\measuredangle D < \measuredangle C$. $\square$



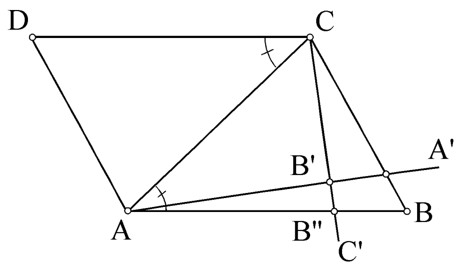
Слика 4.28.

Теорема 4.8.7. *Ако је код простог четвороугла $ABCD$: $\measuredangle A \cong \measuredangle C$ и $\measuredangle B \cong \measuredangle D$, тада је $AB \cong DC$ и $BC \cong AD$.*

Доказ. За углове $\measuredangle ACD$ и $\measuredangle CAB$ важи тачно једна од три релације:

(i) $\measuredangle ACD < \measuredangle CAB$, (ii) $\measuredangle ACD > \measuredangle CAB$ или (iii) $\measuredangle ACD < \measuredangle CAB$.

(i) Ако је $\measuredangle ACD < \measuredangle CAB$ тада је и $\measuredangle ACB > \measuredangle CAB$. У углу $\measuredangle ACB$ постоји полуправа CC' (Слика 4.29) таква да је $\measuredangle ACC' \cong \measuredangle CAD$. На исти начин постоји полуправа AA' унутар угла $\measuredangle CAB$ таква да је $\measuredangle CAA' \cong \measuredangle ACD$. Означимо са B' пресечну тачку полуправих AA' и CC'. Није тешко закључити, применом Пашове аксиоме, да се тачка B' налази унутар троугла ΔABC.



Слика 4.29.

Троуглови $\Delta ACB'$ и ΔACD су подударни према другом ставу о подударности троуглова. Одавде следи $\measuredangle AB'C \cong \measuredangle D$. Како је још $\measuredangle D \cong \measuredangle B$ добијамо $\measuredangle AB'C \cong \measuredangle ABC$. Означимо са B'' пресечну тачку правих CC'

и AB. Угао $\measuredangle AB'C$ је спољашњи несуседни у троуглу $\Delta AB''B'$ углу $\measuredangle AB''B'$ па је $\measuredangle AB'C > \measuredangle AB''B'$. На исти начин је $\measuredangle AB''B' > \measuredangle ABC$ као спољашњи несуседни у троуглу $\Delta B''BC$. Према томе, добија се $\measuredangle AB'C > \measuredangle ABC$, што представља контрадикцију. Према томе не може бити $\measuredangle ACD < \measuredangle CAB$.

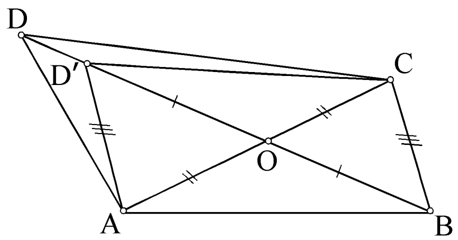
(ii) Аналогно, претпоставка $\measuredangle ACD > \measuredangle CAB$ доводи до контрадикције.

(iii) Дакле, преостаје да је $\measuredangle ACD \cong \measuredangle CAB$. Тада је $\measuredangle ACB \cong \measuredangle CAD$ као допуне једнаких углова до једнаких. Сада су троуглови ΔABC и ΔADC подударни према другом ставу о подударности троуглова, одакле следи $AB \cong CD$ и $BC \cong AD$. $\square$

Теорема 4.8.8. *Ако је код простог четвороугла $ABCD$, $\measuredangle B \cong \measuredangle D$ и ако средиште дијагонале AC лежи на дијагонали BD, тада су наспрамне странице тог четвороугла подударне међусобно.*

Доказ. Означимо са D' тачку праве BD такву да је $OB \cong OD'$ и $D, D' \ \ddot{-}\ O$. Тада важи тачно једна од релација:

(i) $\mathcal{B}(O, D', D)$, (ii) $\mathcal{B}(O, D, D')$ или (iii) $D' \equiv D$.



Слика 4.30.

(i) Нека је $\mathcal{B}(O, D', D)$. За труглове ΔOAB и $\Delta OCD'$ (Слика 4.30) је $AO \cong OC$, $OB \cong OD'$ и $\measuredangle AOB \cong \measuredangle COD'$ па су они подударни према првом ставу о подударности троуглова. Из њихове подударности следи $AB \cong CD'$. Сада су и троуглови $\Delta AOD'$ и ΔCOB подударни према првом ставу о подударности јер је $AO \cong CO$, $OD' \cong OB$ и $\measuredangle AOD' \cong \measuredangle COB$. Одавде је $AD' \cong CB$. За троуглове ΔABC и $\Delta CD'A$ је $AC \equiv CA$, $AB \cong CD'$ и $BC \cong D'A$, тј. и они су подударни (трећи став о подударности), одакле је $\measuredangle ABC \cong \measuredangle AD'C$. Како је још $\measuredangle ABC \cong \measuredangle ADC$ следи $\measuredangle ADC \cong \measuredangle AD'C$, што је у супротности са $\measuredangle ADC < \measuredangle AD'C$. Према томе није $\mathcal{B}(O, D', D)$.

(ii) Аналогно, и претпоставка $\mathcal{B}(O, D, D')$ доводи до контрадикције.

(iii) Према томе мора бити $D \equiv D'$, тј. $AB \cong CD' \equiv CD$ и $BC \cong AD' \equiv AD$. □

Теорема 4.8.9. *Ако је код простог четвороугла $ABCD$,*

$$AB + BC \cong CD + DA$$

и ако је средиште O дијагонале AC на дијагонали BD, тада су наспрамне странице тог четвороугла подударне.

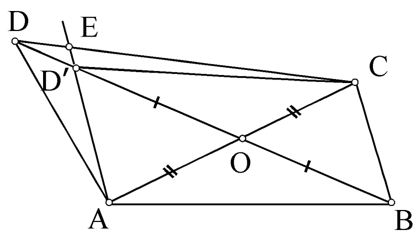
Доказ. Нека је D' тачка праве BD таква да је $OD' \cong OB$ и $D, D' \ddot{-} O$. Тада могу наступити следећи случајеви:

(i) $\mathcal{B}(O, D', D)$, (ii) $\mathcal{B}(O, D, D')$ или (iii) $D' \equiv D$.

(i) Нека је $\mathcal{B}(O, D', D)$. Троуглови ΔAOB и $\Delta COD'$ (Слика 4.31) су подударни, одакле је $AB \cong CD'$. Такође из подударности троуглова ΔBOC и $\Delta D'OA$ следи $BC \cong AD'$. Из последње две једнакости је $AB + BC \cong AD' + CD'$. По претпоставци је $AB + BC \cong AD + CD$, па је

$$AD + DC \cong AD' + CD'.$$

Означимо са E пресечну тачку правих AD' и CD. Тада је $\mathcal{B}(C, E, D)$ и $AD' + CD' < AD' + D'E + EC < AD + DE + EC \cong AD + DC$, тј. $AD' + CD' < AD + DC$ одакле следи $AD + DC > AB + BC$, што представља контрадикцију.



Слика 4.31.

(ii) Аналогно и претпоставка $\mathcal{B}(O, D, D')$ доводи до контрадикције.

(iii) Према томе мора бити $D \equiv D'$. Из подударности троуглова ΔAOB и ΔCOD следи $AB \cong CD$, док из подударности троуглова ΔBOC и ΔAOD следи $BC \cong AD$. □

4.9 Управност правих

Појам правог угла омогућује дефинисање појма управних правих.

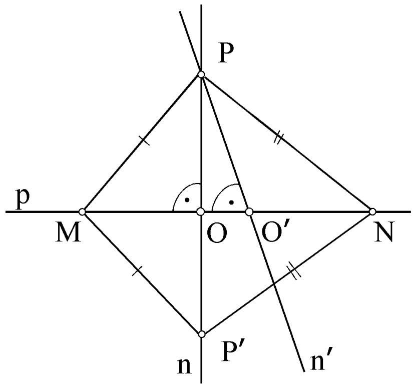
Дефиниција 4.9.1. Права a је *управна, ортогонална или нормална* на правој b ако праве a и b садрже краке неког правог угла и то симболички обележавамо са $a \perp b$.

Из дефиниције непосредно следи да је релација управности правих симетрична али да није рефлексивна и транзитивна.

Теорема 4.9.1. *За сваку праву p и сваку тачку P неке равни π постоји једна и само једна права n равни π таква да је $n \perp p$.*

Доказ. Разликујемо два случаја:

(i) Тачка P не припада правој p, (ii) тачка P припада правој p.

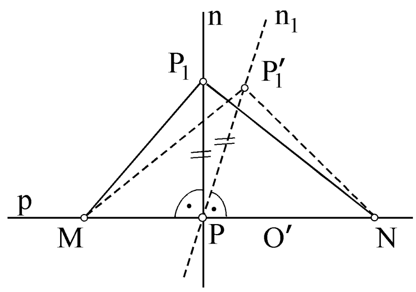


Слика 4.32.

(i) *Егзистенција.* Нека је тачка P ван праве p и нека су M и N (Слика 4.32) две произвољне тачке праве p и P' тачка равни π са оне стране праве p са које није тачка P тако да је $(P, M, N) \cong (P', M, N)$. Како су тачке P и P' са разних страна праве p, то дуж PP' има са правом p заједничку тачку O па је на основу Аксииоме III_7 задовољено да је $OP \cong OP'$. Како су P, M, N и P', M, N две тројке неколинеарних тачака равни π такве даје $(P, M, N) \cong (P', M, N)$ то постоји јединствена изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни π која тачке P, M, N преводи редом у тачке P', M, N. У тој изометријској трансформацији углу $\measuredangle POM$ одговара угао

$\measuredangle P'OM$ па су они подударни а како су још и напоредни они су прави, па је права $n \equiv PP'$ управна на праву p.

Јединственост праве n, у овом случају, доказује се индиректним поступком. Претпоставимо да постоји још једна права n' која садржи тачку P и управна је на праву p. Означимо са O' пресечну тачку праве n' са правом p. У том случају троугао $\Delta POO'$ има два права угла, што је у супротности са Последицом 4.7.1.



Слика 4.33.

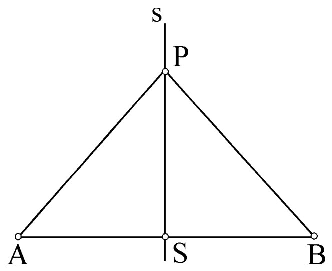
(ii) Нека је сада тачка P на правој p. Нека су M и N тачке праве p такве да је $\mathcal{B}(M, P, N)$. Тада постоји јединствена бисектриса PP_1, означимо је са n, опруженог угла $\measuredangle MPN$ која тај угао разлаже на два подударна напоредна угла. Сваки од та два угла је прав па према дефиницији следи да је права n управна на правој p, чиме је *егзистенција* доказана.

Јединственост се, и у овом случају, доказује индиректним поступком. Нека је n' још једна права која садржи тачку p и управна је на праву p. Тада на правој n_1 са исте стране праве p са које је тачка P_1 постоји јединствена тачка P_1' таква да је $PP_1 \cong PP_1'$. Тада су троуглови ΔMPP_1 и $\Delta MPP_1'$ подударни према првом ставу, а из њихове подударности следи $MP_1 \cong MP_1'$. На исти начин из подударности троуглова ΔNPP_1 и $\Delta NPP_1'$ следи $NP_1 \cong NP_1'$. Дакле, уређене тројке тачака (M, N, P_1) и (M, N, P_1') су подударне, што је у супротности са Аксиомом III_6. □

Дефиниција 4.9.2. Праву s која садржи средиште дужи AB и управна је на праву AB називамо *симетралом* или *медијатрисом* дужи AB.

Теорема 4.9.2. *Нека је у равни π задата дуж AB. Тачка P равни π припада медијатриси дужи AB ако и само ако је $PA \cong PB$.*

Доказ. Означимо са S средиште дужи AB. Нека је P (Слика 4.34) произвољна тачка равни π таква да је $PA \cong PB$. У том случају је $(A, S, P) \cong (B, S, P)$, одакле следи да су напоредни углови $\measuredangle ASP$ и $\measuredangle BSP$ подударни. То значи да је $SP \perp AB$, тј. тачка P припада медијатриси дужи AB.



Слика 4.34.

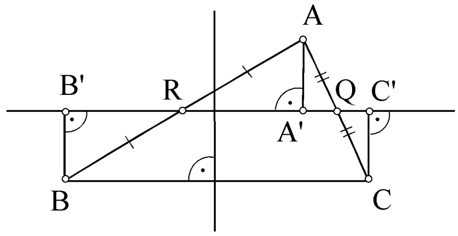
Обратно, нека је P произвољна тачка медијатрисе s дужи AB. Тада су троуглови ΔASP и ΔBSP подударни на основу првог става о подударности троуглова, одакле следи $PA \cong PB$. □

Теорема 4.9.3. *Права одређена средиштима Q и R страница AC и AB троугла ΔABC управна је на медијатрису s треће странице тог троугла.*

Доказ. Означимо са A', B' и C' редом подножја нормала из тачака A, B и C на праву QR (Слика 4.35). Тада је $\Delta AA'R \cong \Delta BB'R$ и $\Delta AA'Q \cong \Delta CC'Q$, одакле је $AA' \cong BB'$ и $AA' \cong CC'$. Према томе, четвороугао $B'C'CB$ је Сакеријев са основицом $B'C'$ и противосновицом BC. На основу Теореме 4.8.1. средња линија Сакеријевог четвороугла је заједничка нормала основице и противосновице, тј. медијатриса странице BC управна је на праву $QR \equiv B'C'$ □

4.10 Управност праве на раван

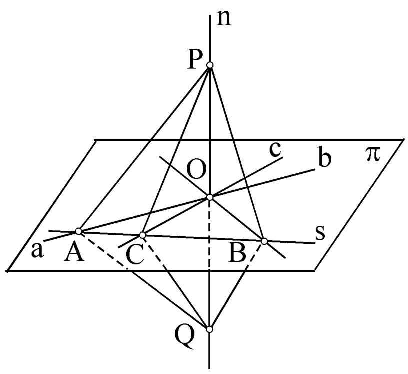
Дефиниција 4.10.1. Права n је *управна, ортогонална или нормална* на раван π ако права n продире раван π и управна је на свакој правој равни π која садржи тачку продора. То означавамо са $n \perp \pi$. Обратно, раван π је *управна на праву* n ако раван π сече праву n и ако је свака права равни π која пролази кроз пресечну тачку управна на праву n. То означавамо са $\pi \perp n$.



Слика 4.35.

Према наведеној дефиницији релација управности праве и равни је симетрична. Ако је права n управна на раван π, тада ћемо рећи да је права n управна на сваку праву равни π. На тај начин је допуштена могућност да мимоилазне праве буду међусобно управне.

Теорема 4.10.1. (Кошијев[2] став - критеријум управности праве на раван) *Права n је управна на раван π ако и само ако продире ту раван и у тачки продора је управна на двема разним правама те равни.*



Слика 4.36.

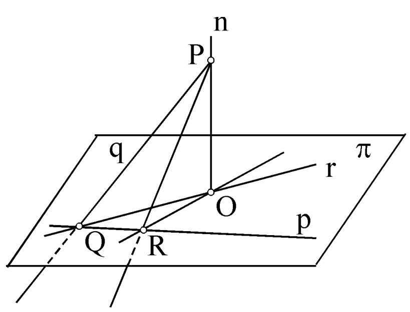
Доказ. Нека права n продире раван π и нека је у продорној тачки O (Слика 4.36) управна на двема правама a и b равни π. Да бисмо доказали да је n управна на π требамо доказати да је n управна на произвољној правој c равни π која пролази кроз тачку продора O. Означимо са s произвољну праву равни π која сече праве a, b и c редом у тачкама A,

[2]А.Л.Коши (1789-1853) је извео доказ ове теореме 1813. г.

B и C а са P и Q две тачке праве n такве да је $OP \cong OQ$ и $\mathcal{B}(P, O, Q)$. При томе је $\Delta OAP \cong \Delta OAQ$ и $\Delta OBP \cong \Delta OBQ$ па је и $AP \cong AQ$ и $BP \cong BQ$. Сада је $\Delta PAB \cong \Delta QAB$ одакле је $\measuredangle PAB \cong \measuredangle QAB$ тј. $\measuredangle PAC \cong \measuredangle QAC$. Сада је $\Delta PAC \cong \Delta QAC$ па је $PC \cong QC$. Према томе важи $\Delta POC \cong \Delta QOC$, па су углови $\measuredangle POC$ и $\measuredangle QOC$ подударни. Како су они још и напоредни они су прави па је права $n \equiv PQ$ управна на праву c, па према томе и на раван π. Обратно, доказ је тривијалан. $\square$

Изведени доказ претходне теореме важи и у геометрији Лобачевског тј. представља став апсолутне геометрије. Пре Кошија, Лежандр је доказао овај став у Еуклидској геометрији користећи метричка својства Еуклидског простора.

Теорема 4.10.2. *За сваку раван π и сваку тачку P простора S^3 постоји јединствена права која садржи тачку P и управна је на раван π.*



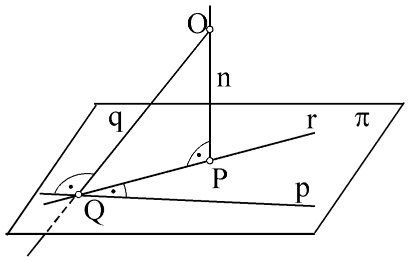
Слика 4.37.

Доказ. За тачку P и раван π могу наступити два случаја:
(i) $P \notin \pi$, (ii) $P \in \pi$.

(i) Нека тачка P не припада равни π. Означимо са p произвољну праву равни π. Тачка P и права p (Слика 4.37) одређују неку раван α. У равни α постоји јединствена права q таква да садржи тачку P и управна је на правој p. Подножје те нормале означимо са Q. Тачка Q припада правој p која је у равни π те у равни π постоји јединствена права r која садржи тачку Q и управна је на правој p.

Тачка P не припада правој r те постоји јединствена раван β која садржи тачку P и праву r. У равни β постоји јединствена права n која садржи тачку P и управна је на правој r. Доказаћемо да је права n управна на раван π. По конструкцији је $n \perp r$ те је према Кошијевом ставу довољно доказати да је права n управна на бар још једној правој која садржи тачку O и припада равни π. Нека је R тачка праве p таква да је $QR \cong OP$. Тада је $\Delta OPQ \cong \Delta ORQ$, па је $PQ \cong OR$. Сада су подударни троуглови ΔPOR и ΔPQR па је $\measuredangle POR \cong \measuredangle PQR$. Како је угао $\measuredangle PQR$ по конструкцији прав то је и угао $\measuredangle POR$ прав, тј. $n \perp OR$.

(ii) Нека сада тачка P припада равни π. У равни π уочимо праву p која не садржи тачку P. Кроз тачку P равни π (Слика 4.38) постоји јединствена права r управна на праву p.



Слика 4.38.

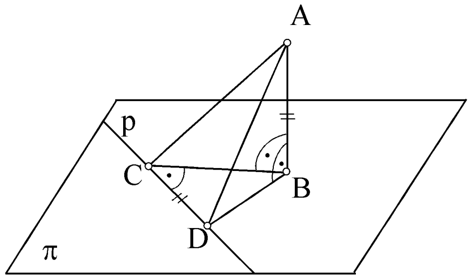
У произвољној равни која садржи праву p и различита је од равни π уочимо праву q управну на правој p у тачки пресека Q правих p и r. У равни одређеној правама q и r кроз тачку P постоји јединствена нормала на праву r. Да је права n нормална на раван π показује се као у случају (i). Јединственост праве n доказује се индиректно. $\square$

Теорема 4.10.3. (Теорема о три нормале) *Нека је права AB управна на равни π у тачки B и права BC управна на правој p равни π у тачки C. Тада је права AC управна на правој p.*

Доказ. Означимо са D тачку праве p (Слика 4.39) такву да је $AB \cong CD$. Тада су правоугли троуглови ΔABC и ΔDCB подударни, одакле следи $AC \cong BD$. Сада су подударни и троуглови ΔABD и ΔDCA на основу трећег става о подударности. Одатле следи $\measuredangle ABD \cong \measuredangle ACD$, тј. права AC је управна на правој p. $\square$

Теорема 4.10.4. *Нека је дата права n и тачка O на њој. Све праве које садрже тачку O и управне су на правој n припадају једној равни која је управна на правој n.*

Доказ. Означимо са p, q и r праве које садрже тачку O праве n и управне су на тој правој. Означимо са π раван одређену правама p и q, а са γ

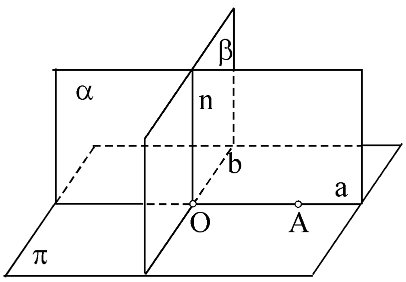


Слика 4.39.

раван одређену правама r и n. Нека је r' пресечна права равни γ и π. Тада је на основу Кошијеве теореме и права r' управна на на праву n.Та да би у тачки O постојале две праве равни γ које су управне на праву n што је немогуће. Дакле и права r припада равни π, па све праве управне на праву n у тачки O припадају једној равни која је управна на праву n. $\square$

Теорема 4.10.5. *Постоји тачно једна раван која садржи дату тачку A и управна је на датој правој n.*

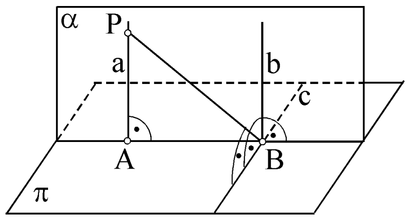
Доказ. Означимо са α (Слика 4.40) раван одређену тачком A и правом n. Нека је a права равни α која садржи тачку A и управна је на правој n и нека је β произвољна раван која садржи праву n и различита је од равни α. Означимо са b праву равни β која садржи тачку $O = a \cap n$ и управна је на правој n. Нека је π раван одређена правама a и b. Тачка A припада правој a, дакле и равни π. Права n је у тачки O управна на двема правама a и b равни π, па је $n \perp \pi$, тј. $\pi \perp n$ и $A \in \pi$. Тиме је доказана егзистенција тражене равни.



Слика 4.40.

Докажимо још јединственост. Нека је π' још једна раван која садржи тачку A и управна је на праву n. Означимо још са a' пресечну праву равни π' и α. У том случају би две разне праве a и a' садржале тачку A и биле управне на праву n, што је немогуће. □

Теорема 4.10.6. *Нека су a и b две разне праве управне на раван π. Тада су a и b компланарне праве.*



Слика 4.41.

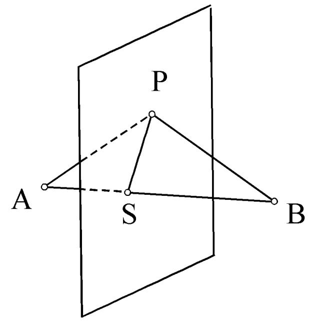
Доказ. Означимо са A и B (Слика 4.41) продорне тачке редом правих a и b кроз раван π, са P произвољну тачку праве a различиту од тачке A а са c праву равни π која садржи тачку B и управна је на правој AB. Према теореми о трима нормалама PB управна на c. Према томе, праве PB, AB и b су три праве управне на праву c у тачки B, те све три према Теореми 4.10.4. припадају једној равни α. Права a са равни α има две заједничке тачке P и A па и она припада равни α. □

Дефиниција 4.10.2. Раван која садржи средиште дужи AB и управна је на праву AB називамо *медијалном* или *симетралном равни.*

Како дуж има јединствено средиште и како права кроз задату тачку има јединствену нормалну раван следи да свака дуж има јединствену медијалну раван.

Теорема 4.10.7. *Тачка P припада медијалној равни дужи AB ако и само ако важи $PA \cong PB$.*

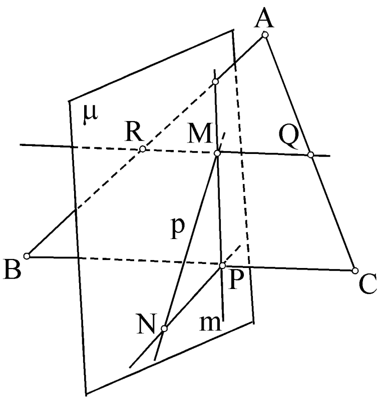
Доказ. Нека је P (Слика 4.42) произвољна тачка за коју је $PA \cong PB$. Означимо са S средиште дужи AB. Тада је $(A, S, P) \cong (B, S, P)$. Дакле напоредни углови $\measuredangle ASP$ и $\measuredangle BSP$ су подударни, а самим тим и прави. Према томе $PS \perp AB$, тј. тачка P припада равни која пролази кроз



Слика 4.42.

тачку S и управна је на правој AB, тј. тачка P припада медијалној равни дужи AB.

Обратно, нека тачка P припада медијалној равни дужи AB и нека је $P \neq S$. За троуглове ΔASP и ΔBSP је задовољено $SP \equiv SP$, $SA \cong SB$ и $\measuredangle ASP \cong \measuredangle BSP$, па су они подударни на основу првог става о подударности троуглова, одакле следи $PA \cong PB$ $\square$



Слика 4.43.

Теорема 4.10.8. *Права одређена средиштима Q и R страница AC и AB троугла ΔABC управна је на медијалну раван μ треће странице тог троугла.*

Доказ. Према Теореми 4.9.3. медијатриса m (Слика 4.43.) странице BC троугла ΔABC је управна на праву QR одређену средиштима Q

и R редом страница AC и AB. Означимо са P и M пресечне тачке медијатрисе m редом са правама BC и QR а са n праву управну на раван троугла ΔABC у тачки M. Нека је N произвољна тачка праве n различита од тачке M. Тада је права $p \equiv MN$, према теореми о трима нормалама, управна на праву QR. Дакле, права QR је управна на двема правама p и m медијалне равни μ, одакле према Кошијевом ставу следи да је QR управна на медијалну раван μ. $\square$

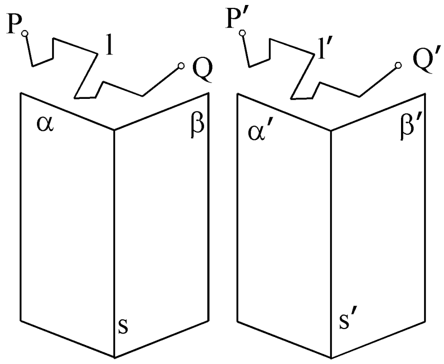
Део 5

Подударност геометријских ликова простора S^3

5.1 Подударност диедара

Теорема 5.1.1. *У изометријској трансформацији простора S^3 диедру одговара диедар.*

Доказ. Нека је $\mathcal{I}$ изометријска трансформација простора S^3 и Ω диедар са пљоснима α и β. У изометријској трансформацији $\mathcal{I}$ полуравнима α и β са заједничким рубом s одговарају неке полуравни α' и β' са заједничким рубом s'. Нека су P и Q две произвољне тачке иинутар диедра Ω а P' Q' тачке које у изометрији $\mathcal{I}$ одговарају редом тачкама P и Q.

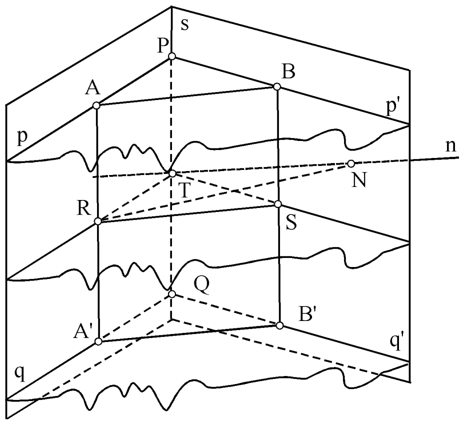


Слика 5.1.

Нека је l полигонална линија која спаја тачке P и Q (Слика 5.1) и која нема заједничких тачака са диедарском површи $\alpha\beta$. Таква полигонална линија постоји јер су тачке P и Q са исте стране диедарске површи $\alpha\beta$. Слика $l' = \mathcal{I}(l)$ полигоналне линије l у изометрији $\mathcal{I}$ је нека полигонална линија која која нема заједничких тачака са диедарском површи $\alpha'\beta'$ те су тачке P' и Q' са исте стране диедарске површи $\alpha'\beta'$.

Нека је Ω' диедар у коме су тачке P' и Q' са пљоснима α' и β'. Тада унутрашњим тачкама диедра Ω одговарају тачке које су унутар диедра Ω'. Није тешко установити да је свака тачка диедра Ω' слика неке тачке диедра Ω у изометрији $\mathcal{I}$. Дакле у изометрији диедру одговара диедар, тј. лик који је подударан неком диедру је такође диедар. $\square$

Теорема 5.1.2. *Равни управне на ивицу неког диедра секу тај диедар по подударним угловима.*



Слика 5.2.

Доказ. Означимо са μ и ν равни управне на ивицу s диедра $\alpha\beta$ редом у тачкама P и Q. Нека су p и p' пресечне полуправе равни μ са полуравнима α и β, а q и q' (Слика 5.2) пресечне полуправе равни ν са α и β. Треба показати да је $\measuredangle pp' \cong \measuredangle qq'$.

Означимо са A, A', B, B' тачке полуправих p, q, p' и q' редом, такве да је $PA \cong PB \cong QA' \cong QB'$. Нека је T средиште дужи PQ а R и S редом средишта дужи AA' и BB'. Четвороуглови $PQA'A$ и $PQB'B$ су међу собом подударни Сакеријеви четвороуглови. Како средња линија Сакеријевог четвороугла разлаже тај четвороугао на два Ламбертова четвороугла, то су четвороуглови $QTRA'$, $PTRA$, $QTSB'$ и $PTSB$ Ламбертови.

Углови $\measuredangle PTR$ и $\measuredangle PTS$ су прави па је права $s \equiv PQ$ према Коши-јевом ставу управна на раван RTS. Ако је n права равни RTS управна на RT у тачки T, онда је она управна и на праву s. На основу теореме о трима нормалама следи да је права NR управна на праву AA', где је N произвољна тачка праве n. Одавде следи да је $AA' \perp RTS$. Аналогно, $BB' \perp RTS$, па праве AA' и BB' припадају једној равни. Из подударности Ламбертових четвороуглова $PTRA$ и $PTSB$ следи $RA \cong SB$, па је четвороугао $RSBA$ Сакеријев. Аналогно, и четвороугао $RSB'A'$ је Сакеријев. Из подударности ова два Сакеријева четвороугла следи $AB \cong A'B'$. Према томе, троуглови ΔPAB и $\Delta QA'B'$ су подударни, одакле следи $\measuredangle APB \cong \measuredangle A'QB'$, тј. $\measuredangle pp' \cong \measuredangle qq'$. □

Дефиниција 5.1.1. Угао по коме нека раван нормална на ивицу диедра сече тај диедар називамо *углом тог диедра* или *нагибним углом диедра.*

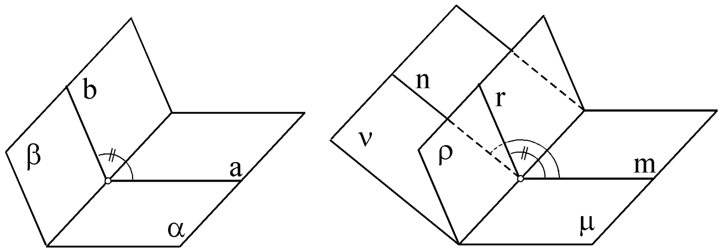
Такође важи:

Теорема 5.1.3. *Два диедра су подударна ако и само ако су углови тих диедара међу собом подударни.*

Доказ. Нека су диедри $\alpha\beta$ и $\alpha'\beta'$ подударни. Тада постоји изометрија $\mathcal{I}$ таква да је $\mathcal{I}(\alpha\beta) = \alpha'\beta'$. Изометрија $\mathcal{I}$ пресликава раван π, управну на ивицу s диедра $\alpha\beta$, на раван π' управну на ивицу s' диедра $\alpha'\beta'$. Дакле, нагибни угао диедра $\alpha\beta$ који припада равни π, пресликава се изометријом $\mathcal{I}$ на нагибни угао диедра $\alpha'\beta'$ који припада равни π', одакле следи да су нагибни углови ова два диедра међусобно подударни.

Обратно, нека су нагибни углови $\measuredangle ab$ и $\measuredangle a'b'$ редом дидара $\alpha\beta$ и $\alpha'\beta'$ међу собом подударни. Тада постоји изометрија $\mathcal{I}$ таква да је $\mathcal{I}(\measuredangle ab) = \measuredangle a'b'$. У том случају се изометријом $\mathcal{I}$ права s, управна у темену угла $\measuredangle ab$ на раван тог угла, пресликава у праву s' управну у темену угла $\measuredangle a'b'$ на раван угла $\measuredangle a'b'$. Изометријом $\mathcal{I}$ се и полуравни α и β са заједничким рубом s пресликавају на плуравни α' и β' са заједничким рубом s', при чему полуравни α' и β' садрже редом полуправе a' и b'. То значи да је $\mathcal{I}(\alpha\beta) = \alpha'\beta'$, тј. диедри $\alpha\beta$ и $\alpha'\beta'$ су међусобно подударни. □

Дефиниција 5.1.2. Ако су $\alpha\beta$ и $\mu\nu$ два диедра, и ако постоји полураван ρ која припада диедру $\mu\nu$, а руб полуравни ρ се поклапа са ивицом тог диедра, тако да је $\alpha\beta \cong \mu\rho$, онда је диедар $\alpha\beta$ *мањи* од диедра $\mu\nu$ (Слика 5.3). Такође, можемо рећи и да је диедар $\mu\nu$ *већи* од диедра $\alpha\beta$.



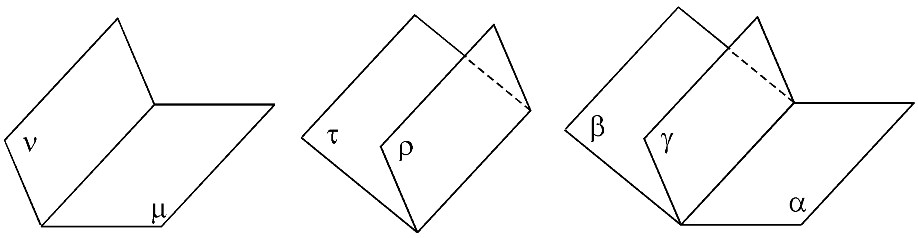
Слика 5.3.

Дефиниција 5.1.3. Диедар је *оштар, прав* или *туп* у зависности од тога да ли је мањи, једнак или већи од свог напоредног диедра.

На основу изложеног следи:

Теорема 5.1.4. *Диедар је оштар, прав или туп у зависности од тога да ли је његов нагибни игао оштар, прав или туп.*

Дефиниција 5.1.4. Диедар $\alpha\beta$ је *једнак збиру диедара* $\mu\nu$ и $\rho\tau$ (Слика 5.4), ако постоји полураван γ која разлаже диедар $\alpha\beta$ на диедре $\alpha\gamma$ и $\gamma\beta$ тако да је $\alpha\gamma \cong \mu\nu$ и $\gamma\beta \cong \rho\tau$.



Слика 5.4.

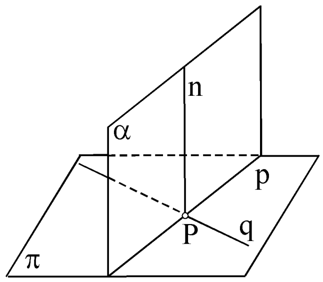
Претходна дефиниција се индуктивно може проширити и на $n > 2$ диедара.

5.2 Ортогоналност равни

Дефиниција 5.2.1. Нека се равни α и β секу по правој s. Те две равни одређују два пара унакрсних диедара. Ако су поменути диедри прави, онда кажемо да је раван α *ортогонална, нормална или управна* на раван β. То симболички означавамо $\alpha \perp \beta$.

Из дефиниције непосредно следи да је релација ортогоналности равни симетрична. Наведимо сада још неколико важних особина ове релације.

Теорема 5.2.1. *Ако је права n ортогонална на раван π, тада је свака раван која садржи праву n управна на раван π.*

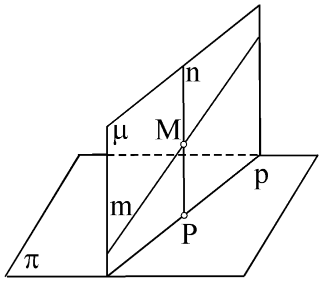


Слика 5.5.

Доказ. Како је права n управна на раван π (Слика 5.5), то она продире раван π у некој тачки P. Ознчимо са α раван која садржи праву n. Тачка P је заједничка тачка равни α и π. Следи, рвни α и π се секу по правој p која садржи тачку P. Означимо са q праву равни π управну у тачки P на праву p. Праве n и q садржане су редом у равнима α и π и у истој тачки P управне на пресечну праву p тих равни те оне одређују углове диедра које захватају равни α и π. Како је $n \perp \pi$, $q \in \pi$ и $S \in q$ то следи $n \perp q$, тј. углови диедара које захватају равни α и π су прави. Дакле, $\alpha \perp \pi$. $\square$

Теорема 5.2.2. *Ако права m не припада равни π, тада постоји јединствена раван μ која садржи праву m и управна је на раван π.*

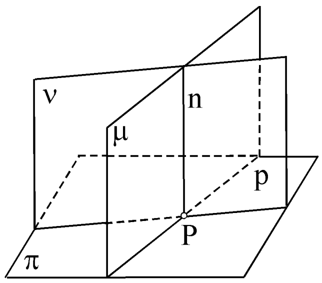
Доказ. Нека је M произвољна тачка праве m и нека је n права која садржи тачку M и управна је на равни π (Слика 5.6). Праве m и n имају заједничку тачку M те одређују неку раван μ. Како раван μ садржи праву



Слика 5.6.

n ортогоналну на раван π, то је на основу претходне теореме $\mu \perp \pi$. Остаје још да докажемо *јединственост*, тј. да је раван μ једина са особином да садржи праву m и управна је на раван π. Претпоставимо да је раван μ' још једна таква раван. Како је $\mu \perp \pi$ и $\mu' \perp \pi$ то равни μ и μ' секу раван π респективно по правама p и p'. Ако је n' права равни μ' која садржи тачку M и управна је на правој p', тада је $n' \perp \pi$ и $n' \neq n$. Дакле, постоје две праве n и n' које садрже тачку M и управне су на раван π, што је у супротности са теоремом о јединствености нормале. □

Теорема 5.2.3. *Ако су две разне равни μ и ν управне на раван π, тада је и њихова пресечна права n управна на раван π.*



Слика 5.7.

Доказ. Претпоставимо да права n није управна на раван π. Тада би према претходној теореми постојала јединствена раван која садржи праву n и управна је на равни π. То значи да би се равни μ и ν, од којих свака садржи праву n и управна је на раван π, поклапале. Међутим, то је немогуће јер се по претпоставци теореме равни μ и ν секу по правој n. Дакле $n \perp \pi$ (Слика 5.7). □

Теорема 5.2.4. *У свакој тачки простора S^3 постоји раван која је управна на две разне равни.*

Доказ. Нека су α и β две разне равни и P произвољна тачка. Означимо са a и b праве које пролазе кроз тачку P и управне су редом на равнима α и β. Раван γ која садржи праве a и b управна је и на раван α и на раван β. □

5.3 Триедар и подударност триедара простора $\mathbf{S}^3$

Геометријски лик подударан рогљастој површи је, као што смо видели такође рогљаста површ. Такође важи да је рогаљ подударан рогљу. У овом одељку задржаћемо се на тростране рогљасте површи и тростране рогљеве, тј. на *триедарске површи* и *триедре*. Наравно и за триедарске површи и триедре важи тврђење, аналогно одговарајућем тврђењу за рогљеве

Теорема 5.3.1. *Триедарска површ је подударна триедарској површи, а триедар је подударан триедру.*

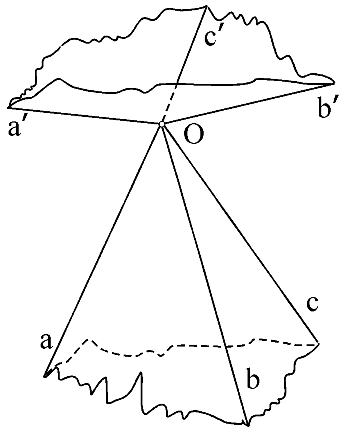
Следећом дефиницијом уводимо појам поларног триедра:

Дефиниција 5.3.1. *Поларним триедром* датог конвексног триедра $Oabc$ називамо триедар $Oa'b'c'$ (Слика 5.8) који са триедром $Oabc$ има заједничко само теме O и чије су ивице b', c' и a' управне редом на пљоснима bc, ca и ab триедра $Oabc$ и припадају полупросторима редом са рубовима одређеним пљоснима bc, ca и ab, којима не припада триедар $Oabc$.

Из дефиниције непосредно закључујемо да су углови $\measuredangle(a',a)$, $\measuredangle(a',b)$, $\measuredangle(b',b)$, $\measuredangle(b',c)$, $\measuredangle(c',c)$ и $\measuredangle(c',a)$ прави, а углови $\measuredangle(a',c)$, $\measuredangle(b',a)$ и $\measuredangle(c',b)$ тупи. За триедре важе следећа тврђења:

Теорема 5.3.2. *Поларни триедар датог конвексног триедра је конвексан.*

Теорема 5.3.3. *Сваки конвексан триедар је поларни триедар свог поларног триедра.*



Слика 5.8.

Доказ. Нека је $Oa'b'c'$ поларни триедар конвексног триедра $Oabc$. Тада је $a' \perp ab$, $b' \perp bc$ и $c' \perp ca$ а углови $\measuredangle(a', c)$, $\measuredangle(b', a)$ и $\measuredangle(c', b)$ су тупи. Одавде следи да су полуправе a, b, c управне редом на пљосни $a'c'$, $b'a'$ и $c'b'$ и припадају полупросторима редом са рубовима $a'c'$, $b'a'$ и $c'b'$, којима не припада триедар $Oa'b'c'$. То управо значи да је триедар $Oabc$ поларни триедар триедра $Oa'b'c$. □

Теорема 5.3.4. *Два конвексна триедра су подударна ако и само ако су подударни њихови одговарајући поларни триедри.*

Теорема 5.3.5. *Збир угла било ког диедра конвексног триедра $Oabc$ и одговарајућег ивичног угла поларног триедра $Oa'b'c'$ једнак је збиру двају правих углова.*

Све што смо досад навели за триедре може се уопштити и за рогљеве чији је број пљосни већи од три. Сада ћемо доказати још неколико ставова о триедрима.

Теорема 5.3.6. *Конвексни триедри $Oabc$ и $O'a'b'c'$ су подударни ако и само ако постоје тачке A, B, C и A', B', C' редом на ивицама a, b, c и a', b', c' такве да важи $(O, A, B, C) \cong (O', A', B', C')$.*

Доказ. Ако су триедри $Oabc$ и $O'a'b'c'$ подударни, тада постоји изометрија $\mathcal{I}$, таква да је $\mathcal{I}(Oabc) = O'a'b'c'$. Тада се произвољне тачке $A \in a$,

$B \in b$, $C \in c$ пресликавају изометријом $\mathcal{I}$ на тачке $A' \in a'$, $B' \in b'$ и $C' \in c'$ и притом важи $(O, A, B, C) \cong (O', A', B', C')$.

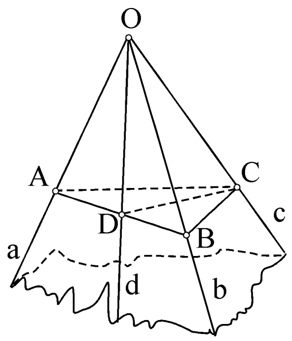
Обратно, ако на ивицама a, b, c, a', b' и c' триедара $Oabc$ и $O'a'b'c'$ постоје редом тачке A, B, C, A', B', C' такве да је

$$(O, A, B, C) \cong (O', A', B', C'),$$

тада постоји јединствена изометрија простора (Теорема 4.2.8.) која тачке O, A, B и C преводи редом у тачке O', A', B' и C'. То управо и значи да су триедри $Oabc$ и $O'a'b'c'$ подударни. $\square$

Теорема 5.3.7. *Збир два ивична угла конвексног триедра већи је од трећег ивичног угла тог триедра.*

Доказ. Нека је $Oabc$ конвексан триедар. Треба показати да је $\measuredangle(b, c) + \measuredangle(c, a) > \measuredangle(a, b)$. Ако је $\measuredangle(b, c) > \measuredangle(a, b)$ или $\measuredangle(c, a) > \measuredangle(a, b)$ доказ је тривијалан. Нека је $\measuredangle(b, c) < \measuredangle(a, b)$ и $\measuredangle(c, a) < \measuredangle(a, b)$. Тада у углу $\measuredangle(a, b)$ постоји полуправа d са почетком у тачки O која разлаже тај угао на углове $\measuredangle(d, a)$ и $\measuredangle(d, b)$ тако да је $\measuredangle(d, a) \cong \measuredangle(c, a)$.



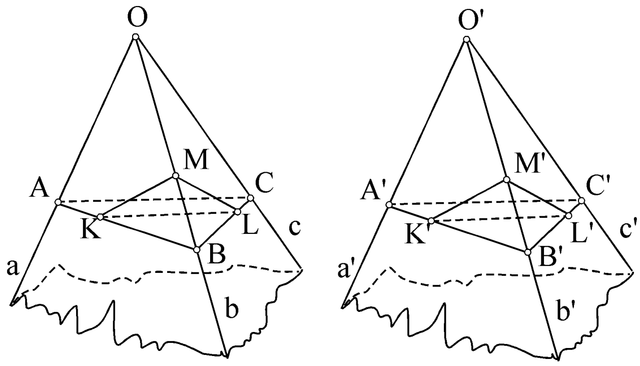
Слика 5.9.

Нека су A и B (Слика 5.9) произвољне тачке полуправих a и b. Тада полуправа l сече дуж AB у тачки D. Означимо са C тачку полуправе c такву да је $OC \cong OD$. Тада су троуглови ΔAOD и ΔAOC подударни према првом ставу о подударности троуглова, одакле следи $AD \cong AC$. Сада из $DB = AB - AD$ следи $DB = AB - AC$, а како још важи $AB - AC < BC$, то следи $DB < BC$. Сада је, на основу Теореме 4.7.3. $\measuredangle(d, b) < \measuredangle(b, c)$, па је $\measuredangle(a, b) = \measuredangle(d, a) + \measuredangle(d, b) < \measuredangle(b, c) + \measuredangle(c, a)$. $\square$

5.4 Ставови о подударност триедара простора S^3

Као што смо видели, два триедра су подударна ако и само ако су сви ивични углови и сви диедари првог троугла подударни одговарајућим ивичним угловима и диедрима другог троугла. Из истог разлога као код троуглова и овде су уведени ставови о подударности триедара. Постоји шест ставова о подударности триедара у апсолутној геометрији.

Теорема 5.4.1. (Први став о подударности триедара) *Два триедра су подударна ако и само ако су два ивична угла и диедар захваћен њима првог триедра подударни одговарајућим угловима и диедру другог триедра.*



Слика 5.10.

Доказ. Нека за триедре $Oabc$ и $O'a'b'c'$ (Слика 5.10) важи

$$\measuredangle(a,b) = \measuredangle(a',b'),\ \measuredangle(b,c) = \measuredangle(b',c')\ i\ dij(b) \cong dij(b').$$

Нека су A, B, C, A', B', C' тачке редом полуправих a, b, c, a', b', c' такве да је $OA = OB = OC = O'A' = O'B' = O'C'$. Тада је $\Delta OAB \cong \Delta O'A'B'$ и $\Delta OBC \cong \Delta O'B'C'$. Није тешко закључити да постоје тачке K, L и M редом дужи AB, BC и OB такве да је раван KLM управна на праву b. Означимо са K', L', и M' тачке полуправих $B'A'$, $B'C'$ $B'O'$ редом, такве да је $BK = B'K'$, $BL = B'L'$ и $BM = B'M'$. Тада је $\Delta KBM \cong \Delta K'B'M'$ и $\Delta LMB \cong \Delta L'M'B'$. Дакле, троуглови $\Delta K'B'M'$ и $\Delta L'M'B'$ су правоугли са правим угловима год темена M', одакле следи да је раван $K'L'M'$ управна на праву b'. Троуглови ΔKML и $\Delta K'M'L'$

су подударни према првом ставу о подударности троуглова, па је $KL = K'L'$. Сада је $\Delta KBL \cong \Delta K'B'L'$, одакле следи $\measuredangle KBL = \measuredangle K'B'L'$, тј. $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$ па су и троуглови ΔABC и $\Delta A'B'C'$ међу собом подударни. Сада је $AC = A'C'$ па је $(O, A, B, C) \cong (O', A', B', C')$ одакле према Теореми 5.3.6. следи подударност триедара $Oabc$ и $O'a'b'c'$. □

Теорема 5.4.2. (Други став о подударности триедара) *Два триедра су подударна ако и само ако су један ивични угао и на њему налегли диедри првог триедра подударни одговарајућем углу и диедрима другог триедра.*

Доказ. Следи из Теорема 5.3.4. и 5.3.5. и првог става о подударности триедара. □

Теорема 5.4.3. (Трећи став о подударности триедара) *Два триедра су подударна ако и само ако су одговарајући ивични углови тих триедара међу собом подударни.*

Доказ. Непосредно следи из Теореме 5.3.6. □

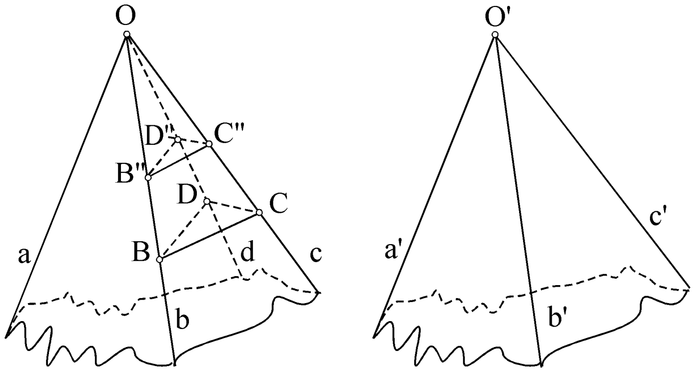
Теорема 5.4.4. (Четврти став о подударности триедара) *Два триедра су подударна ако и само ако су одговарајући диедри тих триедара међу собом подударни.*

Доказ. Следи из трећег става и Теорема 5.3.4. и 5.3.5. □

Теорема 5.4.5. (Пети став о подударности триедара) *Два триедра су подударна ако и само ако су два ивична угла, која нису оба права, и диедар наспрам једног од њих првог триедра подударни одговарајућим угловима и диедру другог триедра, а диедри наспрам другог пара одговарајућих ивичних углова оба оштра, оба права или оба тупа.*

Доказ. Нека су ивични углови ab и bc и диедар са ивицом a триедра $Oabc$ подударни редом ивичним угловима $a'b'$ и $b'c'$ и диедру са ивицом a' триедра $O'a'b'c'$, а диедри са ивицама c и c' оба оштра, оба права или оба тупа.

Ако би ивица b била управна на пљосан ac, онда би ивични углови ab и ac били прави. Претпоставимо да b није управна на пљосан bc и да пљосни ac и $a'c'$ нису подударне. Нека је нпр. $ac > a'c'$. У том случају постоји полуправа d (Слика 5.11) пљосни ac таква да је $ad \cong a'c'$. Триедри $Oabd$ и $O'a'b'c'$ имају подударне два ивична угла и њима захваћене диедре, па



Слика 5.11.

су подударни према првом ставу о подударности триедара. Одавде следи $bd \cong b'c'$. Како је још $b'c' \cong bc$ следи $bc \cong bd$. Означимо са B'', C'', D'' тачке редом полуправих b, c и d такве да је $OB'' \cong OC'' \cong OD''$. Тада су четворке тачака (O, B'', C'', D'') и (O, B'', D'', C'') међусобно подударне, одакле следи да су диедри са ивицама c и d триедра $Obcd$ подударни. Дакле, диедри са ивицом d редом триедара $Obad$ и $Obcd$ су оба оштра, оба права или оба тупа. Нека су диедри са ивицом d оба права и нека је B произвољна тачка полуправе b а C и D подножја нормала из тачке B редом на праве c и d. Тада су праве BC и BD управне на правама равни ac, одакле следи да троугао ΔBCD има два права угла $\measuredangle BCD$ и $\measuredangle BDC$, што је немогуће. Дакле, $ac \cong a'c'$, па су триедри $Oabc$ и $O'a'b'c'$ подударни на основу четвртог става о подударности триедара. □

Теорема 5.4.6. (Шести став о подударности триедара) *Два триедра су подударна ако и само ако су два два диедра, која нису оба права, и ивични угао наспрам једног од њих првог триедра подударни одговарајућим диедрима и ивичном углу другог триедра, а ивични углови наспрам другог пара одговарајућих диедара оба оштра, оба права или оба тупа.*

Доказ. Следи из петог става и Теорема 5.3.4. и 5.3.5. □

Приликом доказивања Петог става о подударности триедара доказали смо следеће тврђење:

Теорема 5.4.7. *Наспрам подударних ивичних углова конвексног триедра налазе се подударни диедри.*

Важи и тврђење обратно Теореми 5.4.7., тј. важи:

Теорема 5.4.8. *Наспрам подударних диедара конвексног триедра налазе се подударни ивични углови тог триедра.*

Доказ. Нека је $Oabc$ произвољан конвексан триедар и нека су A, B, C редом тачке његових ивица a, b, c такве да је $OA \cong OB \cong OC$. Тада ће на основу Теореме 5.3.6. важити: четворке тачака (O, A, B, C) и (O, A, C, B) су подударне ако и само ако су подударни триедри $Oabc$ и $Oacb$. Нека су диедри код ивица b и c триедра $Oabc$ међусобно подударни. Тада, према Другом ставу о подударности триедара важи $Oabc \cong Oacb$, а то значи да су одговарајући ивични углови ab и ac међусобно подударни. □

5.5 Подударност тетраедара простора S^3

Као што смо већ рекли, геометријски лик подударан полиедарској површи је полиедарска површ, а лик подударан полиедру јесте полиедар. У специјалном случају, геометријски лик подударан тетраедарској површи јесте тетраедарска површ, а лик подударан тетраедру јесте тетраедар.

Штавише важи следече тврђење:

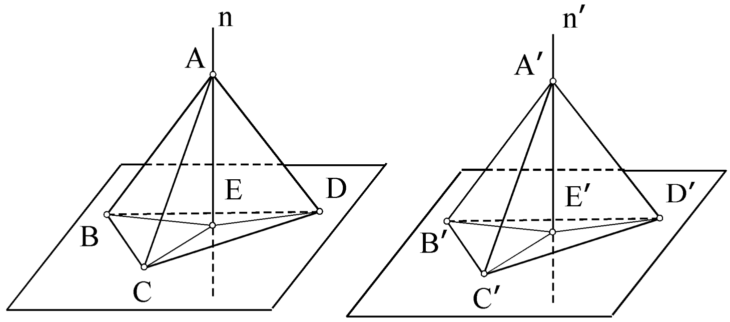
Теорема 5.5.1. *Тетраедар $ABCD$ је подударан тетраедру $A'B'C'D'$ ако и само ако је*

$$(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D').$$

Теорема 5.5.2. *Ако су A, B, C, D четири некомпланарне тачке, а B',C',D' три тачке такве да је $(B, C, D) \cong (B', C', D')$, тада у сваком од полупростора са рубом $B'C'D'$ постоји јединствена тачка A' таква да је*

$$(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D').$$

Доказ. Означимо са $\mathcal{I}$ изометрију која раван BCD пресликава на раван $B'C'D'$ при чему се тачке B, C, D пресликавају том изометријом редом у тачке B', C', D' (Слика 5.12), а са E означимо подножје нормале из тачке A на раван BCD. Нека је $E' = \mathcal{I}(E)$. Означимо са n' праву, управну у тачки E' на раван $B'C'D'$. Нека је A' тачка праве n' таква да је $A'E' \cong AE$. Сада су троуглови ABE, ACE и ADE подударни, на основу првог става о подударности троуглова, редом троугловима $A'B'E'$, $A'C'E'$ и $A'D'E'$. Из њихове подударности следи да су дужи AB, AC



Слика 5.12.

и AD подударне редом дужима $A'B'$, $A'C'$ и $A'D'$. Одавде следи да су уређене четворке (A, B, C, D) и (A', B', C', D') међусобно подударне. На основу Теореме 4.10.2. тачка E је јединствена. Због јединствености изометрије $\mathcal{I}$ и тачка E' је јединствена. Дакле, опет према Теореми 4.10.2. права n' је јединствена, па је према томе и изометрија која уређену четворку тачака (A, B, C, D) пресликава на четворку (A', B', C', D') такође јединстена. □

Дефиниција 5.5.1. Дуж AE је *висина тетраедра* $ABCD$ ако је E подножје праве управне из тачке A на раван BCD.

Део 6

Изометријске трансформације равни $\mathbf{S}^2$

6.1 Специфична својства изометријских трансформација равни $\mathbf{S}^2$

До сада су разматране изометријске трансформације у најопштијем облику.

Дефиниција 6.1.1. Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни S^2 је *директна* ако не мења орјентацију равни S^2. У супротном она је *индиректна*.

Теорема 6.1.1. *Скуп свих директних изометријских трансформација $G(\mathcal{I}^+)$ равни S^2 представља подгрупу групе свих изометрија $G(\mathcal{I})$ простора S^2.*

Доказ. Нека су $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ директне изометрије равни S^2. Тада је $\mathcal{I}_2^{-1}$, а самим тим и $\mathcal{I}_1 \circ \mathcal{I}_2^{-1}$ директна изометрија равни S^2. $\square$

Дефиниција 6.1.2. Групу $G(\mathcal{I}^+)$ називамо *групом директних изометријских трансформација* равни S^2.

Индиректне изометријске трансформације не могу чинити групу јер је производ две индиректне изометрије директна изометрија.

Наведена класификација, на директне и индиректне изометријске трансформације, представља прву, тј. најгрубљу класификацију изометријских трансформација равни S^2. Даља класификација изометријских трансформација изводи се према броју инваријантних тачака које разматрана изометрија поседује. Као што смо могли да видимо, изометрија праве са две разне инваријантне тачке представља коинциденцију, затим изометрија равни са три неколинеарне инваријантне тачке такође представља коинциденцију и на крају изометрија простора са четири некомпланарне инваријнтне тачке је такође коинциденција. Размотримо сада изометријске трансформације праве, равни и простора са мањим бројем инваријантних тачака редом од два, три и четири.

У овом одељку чемо се ограничити на проучавање изометријских трансформација равни S^2.

6.2 Осна рефлексија равни $\mathbf{S^2}$

Дефиниција 6.2.1. *Осном рефлексијом равни* S^2 у односу на праву p називамо изометријску трансформацију $\mathcal{S}_p$ која није коинциденција и у којој је свака тачка праве p инваријантна. Права p је *оса* рефлексије $\mathcal{S}_p$.

Напомена. Из дефиниције следи да поред тачака праве p у равни S^2 осна рефлексија нема инваријантних тачака. Реч рефлексија коришћена је уместо речи симетрија у појму осна рефлексија јер појам симетрије у геометријској теорији изометријских трансформација има шире значење и означава сваку изометријску трансформацију која лик Φ датог простора преводи у лик Φ' а простор у самог себе.

Сада ћемо навести неке особине осне рефлексије.

Теорема 6.2.1. *Све фиксне тачке осне рефлексије су на оси те рефлексије.*

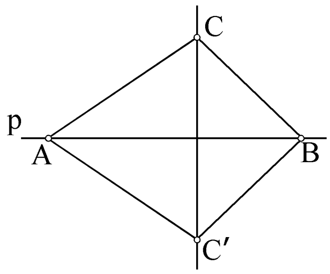
Доказ. Нека је A фиксна тачка осне рефлексије $\mathcal{S}_p$, са осом p. Претпоставимо супротно да $A \notin p$. Ако су B и C две произвољне разне тачке праве p, онда су на основу дефиниције и тачке B и C фиксне тачке те осне рефлексије. Дакле, како изометријска трансформација $\mathcal{S}_p$ има три фиксне неколинеарне тачке, то је она коинциденција. На тај начин, долазимо до контрадикције, па према томе мора бити $A \in p$. □

Теорема 6.2.2. *Ако су P и P' кореспондентне тачке осне рефлексије $\mathcal{S}_p$ равни S^2 тада је права p медијатриса дужи PP'.*

Доказ. Нека су A и B произвољне тачке осе p. Тада осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ преводи тачке A, B, P редом у тачке A, B, P'. Како је $\mathcal{S}_p$ изометрија мора бити $AP \cong AP'$ и $BP \cong BP'$ па тачке A и B припадају медијатриси дужи PP'. Како свака дуж има јединствену медијатрису, то је медијатриса дужи PP' права AB тј. оса p. □

Теорема 6.2.3. *Осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ равни S^2 је једнозначно одређена ако је дата њена оса p или један пар одговарајућих неистоветних тачака P и P'.*

Теорема 6.2.4. *Осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ равни S^2 је индиректна изометријска трансформација.*



Слика 6.1.

Доказ. Ако обележимо са A и B две разне тачке осе p и са C било коју тачку равни S^2 ван осе p (Слика 6.1), биће права p медијатриса дужи CC', где је $C' = \mathcal{S}_p(C)$. Стога су тачке C и C' с разних страна праве p, па су одговарајући троуглови ΔABC и $\Delta ABC'$ супротносмерни, и према томе осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ индиректна. □

Теорема 6.2.5. *Осном рефлексијом $\mathcal{S}_p$ равни S^2 у себе саму се пресликава оса p те рефлексије, као и све праве те равни које су нормалне на осу p.*

Доказ. Према дефиницији је $\mathcal{S}_p(p) = p$. Означимо са q праву равни S^2 различиту од праве p, при чему је $\mathcal{S}_p(q) = q$. Нека је X произвољна тачка праве q која не припада правој p. Тада, тачка X није фиксна тачка рефлексије $\mathcal{S}_p$ (јер $X \notin p$) па је $\mathcal{S}_p(X) = X'$, $X \neq X'$. То значи, према Теореми 6.2.2., да је права p медијатриса дужи XX', тј. с обзиром на то да је и $X' \in q$ следи да је права $q \equiv XX'$ управна на праву p. На исти начин, применом Теореме 6.2.2. доказује се и обрат: Ако је $q \perp p$ тада је $\mathcal{S}_p(q) = q$. □

Теорема 6.2.6. *Осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ равни S^2 је инволуциона изометријска трансформација, тј. важи $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \varepsilon$.*

Доказ. Обележимо са X произвољну тачку равни S^2 а са X', X'' тачке равни S^2 такве да је $\mathcal{S}_p(X) = X'$ и $\mathcal{S}_p(X') = X''$. Ако је $X \in s$, тада је $X \equiv X'$ и $X' \equiv X''$, па је $X \equiv X''$. Ако $X \notin s$, тада је $X \neq X'$ и $X' \neq X''$, па је оса p осне рефлексије $\mathcal{S}_p$ медијатриса сваке од дужи XX' и $X'X''$, па је $X \equiv X''$. Овим смо доказали да важи $\mathcal{S}_p^2 = \varepsilon$, па је осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ инволуциона трансформација. □

Теорема 6.2.7. *Ако је изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни S^2 индиректна и инволуциона тада је $\mathcal{I}$ осна рефлексија равни S^2.*

Теорема 6.2.8. *Ако индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни S^2 поседује инваријантну тачку O тада је $\mathcal{I}$ осна рефлексија чија оса садржи тачку O.*

Доказ. Како је $\mathcal{I}$ индиректна изометријска трансформација а коинциденција ε директна изометријска трансформација то је $\mathcal{I} \neq \varepsilon$. Према томе у равни S^2 постоји тачка P таква да је $\mathcal{I}(P) = P'$ и $P \neq P'$. Тада тачке P и P' одређују неку дуж PP' у равни S^2. Нека је p медијатриса те дужи. Како у изометрији $\mathcal{I}$ тачки O одговара сама тачка O, а тачки P одговара тачка P' биће $OP \cong OP'$. Дакле тачка O припада медијатриси p дужи PP'. Доказаћемо да изометрија $\mathcal{I}$ представља осну рефлексију са осом p, тј. да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p$. Композиција $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ је директна изометријска трансформација са две фиксне тачке па представља коинциденцију, тј. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \varepsilon$. Одавде је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_p$, тј. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p$. □

Теорема 6.2.9. *Нека су p и q две разне компланарне праве. Тада је једина могућа фиксна тачка композиције $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ заједничка тачка правих p и q (уколико се секу), тј.*

$$\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(X) = X \text{ ако и само ако } X = p \cap q.$$

Доказ. Нека је $X = p \cap q$. Тада $X \in p$ и $X \in q$ па је $\mathcal{S}_p(X) = \mathcal{S}_q(X) = X$, а то значи да је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(X) = X$.

Обратно, нека је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(X) = X$ и $\mathcal{S}_p(X) = X'$. Тада је $\mathcal{S}_q(X') = X$. Претпоставимо да је $X \neq X'$. У том случају су, на основу Теореме 6.2.2., праве p и q медијатрисе дужи XX'. То није могуће јер дуж не може имати две разне медијатрисе па мора бити $X \equiv X'$. Тада је $\mathcal{S}_p(X) = \mathcal{S}_q(X) = X$, па тачка X припада различитим правама p и q. □

6.3 Осносиметрични ликови у равни $\mathbf{S^2}$

Дефиниција 6.3.1. Лик ω у равни S^2 је *осносиметричан* ако постоји осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ која пресликава S^2 у S^2 тако да је $\mathcal{S}_p(\omega) = \omega$. Права p представља у том случају *осу симетрије лика* ω.

Навешћемо неке особине осносиметричних ликова равни S^2

Теорема 6.3.1. *Свака дуж AB у равни S^2 има две и само две осе симетрије: праву која садржи дуж AB и медијатрису дужи AB.*

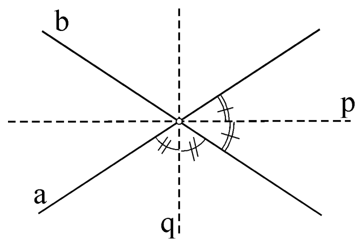
Теорема 6.3.2. *Угао у равни S^2 има јединствену осу симетрије - праву која садржи бисектрису тог угла.*

6.4 Теорема Хјелмслева

Због сложености доказа следеће тврђење издвајамо у посебан одељак.

Теорема 6.4.1. (Теорема Хјелмслева) (i) *Ако су a и b конкурентне праве, тада постоје тачно две осне рефлексије са међусобно управним осама, које те две праве пресликавају једну на другу.*
(ii) *Ако су a и b компланарне, дисјунктне праве тада постоји јединствена осна рефлексија која их пресликава једну на другу.*

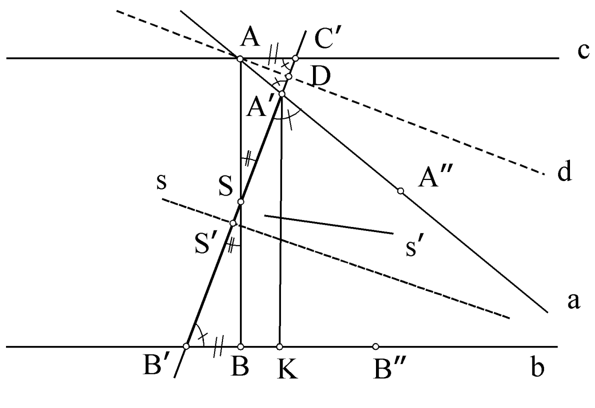
Доказ. (i) Конкурентне праве a и b разлажу раван којој припадају на два пара унакрсних углова чије бисектрисе припадају двема правама p и q за које се непосредно доказује да су међусобно управне. Осним рефлексијама $\mathcal{S}_p$ и $\mathcal{S}_q$ се праве a и b пресликавају једна на другу. Будући да сваки угао има јединствену бисектрису, поред $\mathcal{S}_p$ и $\mathcal{S}_q$ нема више осних рефлексија које праве a и b пресликавају једну на другу.
(ii) Нека су су a и b две дисјунктне компланарне праве. Означимо са A произвољну тачку праве a, а са B подножје управне из тачке A на правој b. Ако права AB није управна и на правој a, тада постоји права c различита од a, која је у тачки A управна на AB. Означимо са d осу рефлексије правих a и c која припада оном пару унакрсних углова на које раван разлажу те две праве, којем не припада и права b. Нека је, S средиште дужи AB, а D подножје праве управне из тачке S на праву d. Тачке S и D су са разних страна праве a, па права SD сече a у некој тачки A'. Како се осном рефлексијом $\mathcal{S}_d$ праве SD и a пресликавају редом на праве SD и c, то се праве SD и c секу у тачки $C' = \mathcal{S}_d(A')$. Нека је



Слика 6.2.

B' тачка праве b која је са оне стране праве AB са које није C', такву да је $BB' \cong AC'$. Тада су троуглови $\Delta SC'A$ и $\Delta SB'B$ подударни, одакле следи да су и углови $\measuredangle ASC'$ и $\measuredangle BSB'$ међусобно подударни. Одавде следи да су тачке C', S и B' колинеарне.

Нека је сада A'' произвољна тачка праве a таква да је $\mathcal{B}(A, A', A'')$. Углови $\measuredangle SB'B$, $\measuredangle SC'A$, $\measuredangle C'A'A$, $\measuredangle SA'A''$ су међусобно подударни, па права $A'B'$, са исте своје стране захвата подударне углове са правама a и b. Ако је $AB \perp a$, права AB захвата подударне углове и са a и са b, па тачке A и B можемо обележити са A' и B'. Докажимо да је медијатриса s дужи $A'B'$ оса рефлексије којом се праве a и b пресликавају једна на другу.



Слика 6.3.

Означимо сада са $\mathcal{S}_s(A'') = B''$. Нека је S' средиште дужи $A'B'$. Тада су троуглови $\Delta S'A'A''$ и $\Delta S'B'B''$ међусобно подударни, па су углови $\measuredangle S'B'B$ и $\measuredangle S'B'B''$ међусобно подударни јер су оба подударна углу $\measuredangle S'A'A''$. Дакле, тачке B, B' и B'' су колинеарне, тј $B'' \in b$, па је

$\mathcal{S}_s(a) = b$. На тај начин је доказана *егзистенција* осне рефлексије која праву a пресликава у праву b.

Докажимо сада *јединственост*. Нека је s' још једна оса рефлексије којом се праве a и b пресликавају једна на другу. Нека је $\mathcal{S}_{s'}(A') = K$. Тада је $K \neq B'$. У том случају би и права $A'K$ захватала са исте своје стране подударне углове са правама a и b, па би у троуглу $\Delta A'B'K$ спољашњи угао код темена K био мањи од унутрашњег несуседног угла код темена B', што је немогуће. $\square$

6.5 Представљање изометријских трансформација равни $\mathbf{S}^2$ помоћу осних рефлексија

Теорема 6.5.1. *Свака изометријска трансформација равни S^2 може се представити у облику композиције највише три осне рефлексије.*

Доказ. С обзиром на број инваријантних тачака разликујемо четири случаја који се могу јавити у погледу било које изометрије $\mathcal{I}$ равни S^2.

(i) Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни S^2 поседује бар три неколинеарне инваријантне тачке, означимо их са A, B и C. Тада је $\mathcal{I}(A) = A$, $\mathcal{I}(B) = B$ и $\mathcal{I}(C) = C$. Нека је p произвољна права равни S^2. Осна симетрија $\mathcal{S}_p$ је инволуција, тј. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \varepsilon$. Изометријска трансфрмација $\mathcal{I}$ поседује три неколинеарне инваријантне тачке па представља коинциденцију, тј. $\mathcal{I} = \varepsilon$. Према томе имамо $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p$, тј. у овом случају изометрија $\mathcal{I}$ се може представити као композиција двеју осних рефлексија.

(ii) Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни S^2 поседује две разне инваријантне тачке A и B, тј. $\mathcal{I}(A) = A$ и $\mathcal{I}(B) = B$. С обзиром да изометријска трансформација $\mathcal{I}$ има две инваријантне тачке A и B то је свака тачка праве AB у трансформацији $\mathcal{I}$ инваријантна. Ван праве AB изометријска трансформација $\mathcal{I}$ нема инваријантних тачака јер би се у противном овај случај свео на претходни. Према томе изометријска трансформација $\mathcal{I}$ није коинциденција те постоји тачка P равни S^2 таква да је $\mathcal{I}(P) = P'$ и $P \neq P'$. Нека је p медијатриса дужи PP'. Како у изометрији $\mathcal{I}$ тачкама A, B и P одговарају редом тачке A, B и P', то тачке A и B припадају медијатриси дужи PP'. Изометријска трансформација $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ равни S^2 поседује три инваријантне неколинеарне тачке A, B и P па представља коинциденцију, тј. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \varepsilon$. Множењем последње једнакости са $\mathcal{S}_p$ са леве стране и узимајући у обзир инволутивност пресликавања $\mathcal{S}_p$ добијамо да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p$ чиме је доказ завршен и у случају (ii).

(iii) Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ поседује једну инваријантну тачку, означимо је са A. Према томе изометријска трансформација $\mathcal{I}$ није коинциденција па постоји тачка P таква да је $\mathcal{I}(P) = P'$ и $P \neq P'$. Означимо са p медијатрису дужи PP'. Како у изометрији $\mathcal{I}$ тачкама A и P одговарају редом тачке A и P' то тачка A припада медијатриси p дужи PP'. Изометријска трансформација $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ поседује две инваријантне тачке A и P па према случају (ii) представља осну рефлексију, тј. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_q$, одакле је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$, па је и овај случај доказан.

(iv) Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ нема инваријантних тачака. Тада је $\mathcal{I} \neq \varepsilon$ па постоји тачка P равни S^2 таква да је $\mathcal{I}(P) = P'$ и $P \neq P'$. Како су P и P' две разне тачке оне одређују дуж PP' у равни S^2. Нека је права p медијатриса те дужи. Изометријска трансформација $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ поседује једну инваријантну тачку P па се према доказаном случају (iii) може представити као производ две осне рефлексије. Нека је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r$. Одавде множењем са $\mathcal{S}_p$ са леве стране добијамо $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r$, чиме је теорема доказана. $\square$

Свака изометријска трансформација се може представити као композиција неког броја осних рефлексија али је од интереса да тај број буде *минималан*.

Дефиниција 6.5.1. Сваку композицију коначног броја осних рефлексија равни S^2 којом је представљена нека изометријска транформација $\mathcal{I}$ те равни називамо *осно-рефлексивном или симетријском репрезентацијом* те изометрије. Симетријску репрезентацију изометрије $\mathcal{I}$ равни S^2 састављену из најмањег могућег броја осних симетрија називамо *минималном или оптималном симетријском репрезентацијом* те изометрије.

6.6 Унутрашњи аутоморфизми групе $\mathbf{G}(\mathcal{I})$

Нека се изометријом $f : S^n \to S^n$ $(n = 1, 2, 3)$ произвољна тачка X простора S^n пресликава у тачку Y простора S^n, тј. нека је $f(X) = Y$, и нека се X и Y пресликавају изометријом g у тачке $X' = g(X)$ и $Y' = g(Y)$ (Слика 6.4). Тада је $f(X) = Y$ ако и само ако је $g \circ f \circ g^{-1}(X') = Y'$. На тај начин, помоћу изометријске трансформације g свакој изометријској трансформацији f додељујемо нову изометријску трансформацију $g \circ f \circ g^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, mapsto, "g"'] & Y \arrow[d, mapsto, "g"] \\ X' \arrow[r, mapsto, "f^g = gfg^{-1}"] & Y' \end{tikzcd}$$

Слика 6.4.

За ту нову трансформацију рећи ћемо да је добијена *унутрашњим аутоморфизмом* или *трансмутацијом* изометријске трансформације f помоћу трансформације g. То означавамо

$$g \circ f \circ g^{-1} = f^g.$$

6.7 Трансмутација осних рефлексија

Теорема 6.7.1. (О трансмутацији осних рефлексија) *Нека је $\mathcal{S}_p$ било која осна рефлексија равни S^2 и $\mathcal{I}$ било која изометријска трансформација те равни. Тада је $\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(p)}$, тј. $\mathcal{S}_p^{\mathcal{I}} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(p)}$.*

Доказ. Према дефиницији осне рефлексије за сваку тачку X праве $\mathcal{I}(p)$ је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1}(X) = \mathcal{I}^{-1}(X)$ јер је $\mathcal{I}^{-1}(X) \in p$, тј. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1}(X) = \mathcal{I}^{-1}(X)$. Множењем обеју страна са $\mathcal{I}$ добијамо $\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1}(X) = X$, те индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1}$ има инваријантну тачку па представља осну рефлексију. У тој осној рефлексији свака тачка X праве $\mathcal{I}(p)$ је инваријантна те је $\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(p)}$. □

Теорема 6.7.2. *Две осне рефлексије $\mathcal{S}_p$ и $\mathcal{S}_q$ равни S^2 комутирају, тј. важи $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$ ако и само ако су им осе управне или им се осе поклапају.*

Доказ. Претпоставимо најпре да је $\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$, тј.

$$\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b = \mathcal{S}_a \tag{6.1}$$

Ако обележимо са a' праву одређену са $\mathcal{S}_b(a) = a'$, према Теореми 6.7.1. о трансмутацији осне рефлексије $\mathcal{S}_a$ осном рефлексијом $\mathcal{S}_b$, следи

$$\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b = \mathcal{S}_{a'}. \tag{6.2}$$

Из једнакости 6.1 и 6.2 следи да је $\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_{a'}$, па је $a = a'$, тј. $a = \mathcal{S}_b(a)$. Сада према Теореми 6.2.5. следи $a \equiv b$ или $a \perp b$.

Обратно, нека је сада $a \perp b$. Одавде следи да је $\mathcal{S}_b(a) = a$, одакле трансмутацијом осне рефлексије $\mathcal{S}_a$ осном рефлексијом $\mathcal{S}_b$, налазимо да је $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b = \mathcal{S}_a$, тј.

$$\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a.$$

што је требало доказати. Случај када се праве a и b поклапају је тривијалан. $\square$

Теорема 6.7.3. *Нека је дата произвољна композиција осних рефлексија $\mathcal{S}_{p_1} \circ \mathcal{S}_{p_2} \circ \ldots \circ \mathcal{S}_{p_n}$. Тада је за произвољну изометрију $\mathcal{I}$:*

$$\mathcal{I} \circ (\mathcal{S}_{p_1} \circ \mathcal{S}_{p_2} \circ \ldots \circ \mathcal{S}_{p_n}) \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(p_1)} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{I}(p_2)} \circ \ldots \circ \mathcal{S}_{\mathcal{I}(p_n)}.$$

Доказ. У композицији $\mathcal{S}_{p_1} \circ \mathcal{S}_{p_2} \circ \ldots \circ \mathcal{S}_{p_n}$ између сваке две суседне осне рефлексије можемо убацити коинциденцију у облику $\varepsilon = \mathcal{I}^{-1} \circ \mathcal{I}$. На тај начин добијамо

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I} \circ (\mathcal{S}_{p_1} \circ \mathcal{S}_{p_2} \circ \ldots \circ \mathcal{S}_{p_n}) \circ \mathcal{I}^{-1} \\
&\qquad = \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_{p_1} \circ \mathcal{I}^{-1} \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_{p_2} \circ \mathcal{I}^{-1} \circ \mathcal{I} \circ \ldots \circ \mathcal{I}^{-1} \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_{p_n} \circ \mathcal{I}^{-1} \\
&\qquad = \mathcal{S}_{p_1}^{\mathcal{I}} \circ \mathcal{S}_{p_2}^{\mathcal{I}} \circ \ldots \circ \mathcal{S}_{p_n}^{\mathcal{I}} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(p_1)} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{I}(p_2)} \circ \ldots \circ \mathcal{S}_{\mathcal{I}(p_n)}
\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен. $\square$

Наведене теореме представљају део општије теореме о аутоморфизмима групе изометрија $G(\mathcal{I})$. Наиме Теорема 6.7.1. је применљива на произвољне изометрије и у том случају њена формулација би била следећа:

Теорема 6.7.4. *Нека је $\mathcal{I}_1$ изометријска трансформација простора S^n са скупом инваријантних тачака A. Тада је за произвољну изометрију $\mathcal{I}$ простора S^n трансформација $\mathcal{I} \circ \mathcal{I}_1 \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}_1^{\mathcal{I}}$ такође изометрија простора S^n истог типа као трансформација $\mathcal{I}_1$ са скупом инваријантних тачака $\mathcal{I}(A)$.*

Такође примењена на низ изометријских трансформација $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$,…,$\mathcal{I}_n$ трансмутација даје нову изометријску трансформацију која је производ изометријских трансформација истог типа добијених појединачним трансмутацијама сваке од изометријских трансформација у низу $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$,…,$\mathcal{I}_n$, тј.

$$\mathcal{I} \circ (\mathcal{I}_1 \circ \mathcal{I}_2 \circ \ldots \circ \mathcal{I}_n) \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}_1^{\mathcal{I}} \circ \mathcal{I}_2^{\mathcal{I}} \circ \cdots \circ \mathcal{I}_n^{\mathcal{I}}.$$

При томе ако скупови A_1, A_2, ..., A_n представљају респективно скупове инваријантних тачака трансформација $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots \mathcal{I}_n$, тада ће скупови $\mathcal{I}(A_1)$, $\mathcal{I}(A_2)$,..., $\mathcal{I}(A_n)$ представљати респективно скупове инваријантних тачака трансформација добијених трансмутацијом.

Дефиниција 6.7.1. Скуп изометријских трансформација ћемо звати *инваријантним комплексом* групе изометрија простора S^n, $n = 1, 2, 3$ ако се било којим унутрашњим аутоморфизмом трансформације из тог скупа опет добија трансформација из тог скупа. Ако је инваријантни комплекс уз то и подгрупа групе свих изометрија простора S^n, $n = 1, 2, 3$, зваћемо га *инваријантном подгрупом.*

6.8 Прамeнови правих у равни S^2

Дефиниција 6.8.1. Скуп $\mathcal{L}$ свих правих неке равни S^2 називамо *праменом правих* ако за сваке три праве a, b, c скупа $\mathcal{L}$ композиција

$$\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$$

представља неку осну рефлексију $\mathcal{S}_d$.

Из дефиниције прамена правих непосредно закључујемо следеће:

(i) Ако су a, b и c три праве неког прамена и ако је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$, тада и права d припада том прамену правих.

(ii) Ако праве a, b, c припадају једном прамену $\mathcal{L}$ тада и осе рефлексија $\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c$, $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b$, $\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b$, $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_c$, $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ припадају прамену $\mathcal{L}$.

(iii) За сваку тачку X у равни S^2 постоји у прамену правих $\mathcal{L}$, тачно једна права p која је садржи.

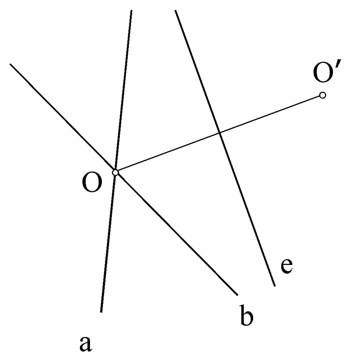
(iv) Ако су a, b, c три праве прамена $\mathcal{L}$ тада је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c$.

Заиста, нека је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$. Тада је $\mathcal{S}_d^2 = \varepsilon$, па је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \varepsilon$. Множењем са леве стране редом са $\mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_b$, $\mathcal{S}_c$ добијамо $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c$.

Следећа тврђења нам омогућују да уведемо две врсте прамена правих у апсолутној равни S^2.

Теорема 6.8.1. *Скуп свих конкурентних правих равни S^2 представља један прамен правх.*

Доказ. Означимо са $\mathcal{L}$, скуп свих конкурентних правих посматране равни S^2 а са a, b, c ма које три праве тог скупа, а са O њихову заједничку тачку. Тада је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a(O) = O$. С обзиром да је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ индиректна трансформација са инваријантном тачком O, она представља осну рефлексију $\mathcal{S}_d$, чија оса d садржи тачку O, те права d припада скупу $\mathcal{L}$.



Слика 6.5.

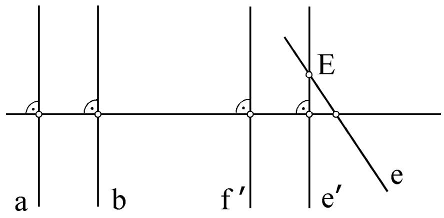
Обратно, ако је e произвољна права која не садржи O (Слика 6.5), тада композиција $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ није осна рефлексија. Ако би, напротив, композиција $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ била осна рефлексија $\mathcal{S}_f$, тада би се тачка O рефлексијама $\mathcal{S}_e$ и $\mathcal{S}_f$ пресликавалала у тачку $O' \neq O$ јер је $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a(O) = O$ и $O \notin e$. Праве e и f би тада биле медијатрисе дужи OO', па би се поклапале, а тада би биле истоветне и праве a и b што је супротно претпоставци.

Дакле, према дефиницији прамена, скуп $\mathcal{L}$ тада представља прамен правих у посматраној равни. □

Дефиниција 6.8.2. Прамен конкурентних правих у равни називамо *елиптичким праменом правих.*

Теорема 6.8.2. *Скуп свих правих неке равни S^2 управних на неку праву s те равни представља прамен правих.*

Доказ. Нека су a, b, c три разне праве равни S^2 управне на дату праву s исте равни. Тада, композиција $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ представља индиректну изометријску трансформацију са инваријантном правом s, што значи да јој мења орјентацију. Дакле, на тој правој постоји инваријантна тачка. Следи да је композиција $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ осна рефлексија $\mathcal{S}_d$ чија је оса управна на праву s.



Слика 6.6.

Обратно, нека је e произвољна права равни S^2 таква да није управна на праву s (Слика 6.6). Тада композиција $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ није осна рефлексија. Заиста, ако би било $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_f$, онда би у произвољној тачки E праве e постојала права e' која је управна на праву s. Тада би три праве a, b, e' биле нормалне на праву s па би било $\mathcal{S}_{e'} \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_{f'}$. Следи $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_f = \mathcal{S}_{e'} \circ \mathcal{S}_{f'}$, а одавде $\mathcal{S}_{e'} \circ \mathcal{S}_e = \mathcal{S}_{f'} \circ \mathcal{S}_f$. Како праве e и e' имају заједничку тачку E то ће и права f' садржати тачку E, што значи да се праве e' и f' поклапају на основу теореме о јединствености нормале. Значи и праве a и b ће се поклапати, а то је контрадикција. □

Дефиниција 6.8.3. Прамен правих равни S^2 управних на једној правој p називамо *ортогоналним* или *хиперболичким праменом правих*, а праву p *базисном* правом хиперболичког прамена правих.

6.9 Изогонална спрегнутост парова правих равни S^2

Дефиниција 6.9.1. Каже се да је у равни S^2 пар правих c и d *изогонално спрегнут* или *симетрично распоређен* с паром правих a и b ако је

$$\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d.$$

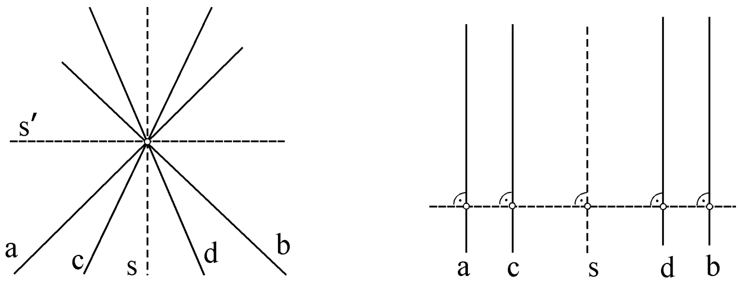
Дефиниција 6.9.2. Ако је медијатриса дужи AB истоветна са осом рефлексије пара правих c, d од којих је свака управна на правој AB, рећи ћемо да су пар тачака A, B и пар правих c, d *симетрично распоређени.*

Из дефиниције непосредно следи да изогоналне праве a, b, c равни S^2 припадају једном прамену правих.

Теорема 6.9.1. *Релација изогоналности парова правих равни S^2 је релација еквиваленције.*

За нас је од посебног значаја критеријум установљавања изогоналности двају парова правих равни S^2 који је дат следећим тврђењем:

Теорема 6.9.2. *Нека су a, b, c, d четири праве неког елиптичког или хиперболичког прамена правих $\mathcal{L}$ равни S^2. Да би парови правих a, b и c, d били изогонално спрегнути међу собом, потребно је и довољно да се осе симетрије правих a и b поклапају са осама симетрије правих c и d.*



Слика 6.7.

Доказ. Претпоставимо најпре да су парови правих a, b и c, d изогонално спрегнути, тј. да је $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$. Нека је s оса симетрије правих a и b (Слика 6.7). Обележимо са d' праву одређену релацијом $\mathcal{S}_s(c) = d'$. Тада је $d = d'$. Заиста, из уведених претпоставки следи да је

$$\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_b \text{ и } \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_c.$$

Применом последњих двеју једнакости добијамо да је

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_d = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a &= (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_s) \circ \mathcal{S}_a \\ &= \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ (\mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a) \\ &= \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ (\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_{d'}) = \mathcal{S}_{d'}.\end{aligned}$$

Из једнакости осних рефлрксија $\mathcal{S}_d$ и $\mathcal{S}_{d'}$ следи једнакост њихових оса d и d'. Одавде следи $\mathcal{S}_s(c) = d$, а то значи да је права s оса симетрије правих c и d.

Обратно, нека се осе симетрије правих a и b поклапају са осама симетрије правих c и d. У том случају важе релације

$$\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_b \text{ и } \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_c.$$

Применом последњих двеју једнакости добијамо да је

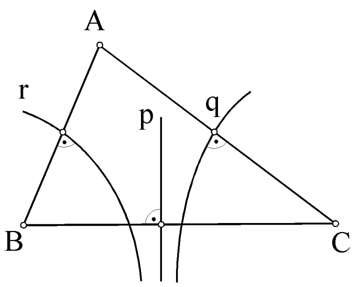
$$\begin{aligned}\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d &= (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_s) \circ \mathcal{S}_a \\ &= \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ (\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a) \\ &= \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ (\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_d) = \mathcal{S}_d,\end{aligned}$$

тј. парови правих a, b и c, d су изогонално спрегнути међу собом. □

6.10 Праменови правих и троугао

Размотримо сада неке теореме у вези са троугловима.

Теорема 6.10.1. *Медијатрисе страница троугла припадају једном прамену правих.*



Слика 6.8.

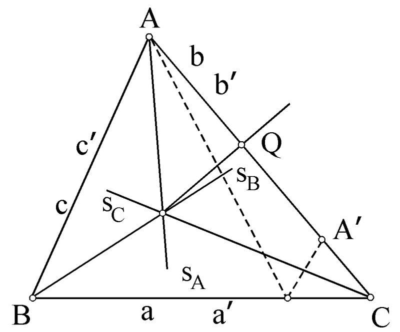
Доказ. Обележимо са p, q и r (Слика 6.8) медијатрисе редом страница BC, CA и AB троугла ΔABC. У композицији $\mathcal{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ тачка B је инваријантна, тј. $\mathcal{I}(B) = B$. С обзиром да је изометријска трансформација $\mathcal{I}$ индиректна и има инваријантну тачку B то је $\mathcal{I}$ нека осна рефлексија. Означимо је са $\mathcal{S}_s$. Дакле, $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_s$. Тада $B \in s$ и праве p, q, r по дефиницији припадају истом прамену правих. □

Доказ који смо извели важи у Апсолутној геометрији. У Еуклидској геометрији медијатрисе страница троугла се секу у једној тачки, центру описаног круга око троугла тј. прамен правих одређен медијатрисама је елиптички. У геометрији Лобачевског медијатрисе страница троугла се не морају сећи те не можемо око сваког троугла описати круг.

Теорема 6.10.2. *Ако су s_A, s_B и s_C симетрале унутрашњих углова троугла ΔABC тада оне припадају једном прамену конкурентних правих.*

Доказ. Нека је ΔABC (Слика 6.9) произвољан троугао у равни S^2. Обележимо са a, b, c редом орјентисане праве BC, CA, AB а са a', b', c' те исте праве али са супротном орјентацијом. Нека је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{s_C} \circ \mathcal{S}_{s_B} \circ \mathcal{S}_{s_A}$. У овој композицији правој b одговара права b' тј. $\mathcal{I}(b) = b'$ што значи да у изометрији $\mathcal{I}$ правој b одговара иста права b али са супротном орјентацијом. Тачки A праве b одговара у изометрији $\mathcal{I}$ нека тачка A' која мора бити на правој b те средиште дужи AA', означимо га са Q, представља инваријантну тачку у изометрији $\mathcal{I}$.

Како је $\mathcal{I}$ индиректна изометријска трансформација, као композиција три осне рефлексије она представља осну рефлексију $\mathcal{I} = \mathcal{S}_s$, где је права s нормална на b у тачки Q. На тај начин је $\mathcal{S}_{s_C} \circ \mathcal{S}_{s_B} \circ \mathcal{S}_{s_A} = \mathcal{S}_s$ па праве s_A, s_B и s_C припадају једном прамену правих. Симетрале s_B и s_C, с обзиром на то да обе припадају унутрашњости троугла, секу се у тачки S, те се и све праве прамена коме припадају праве s_B и s_C секу у једној тачки те се као резултат добија елиптички прамен правих. Средиште прамена биће центар круга уписаног у троугао ΔABC који додирује AC у тачки Q. □



Слика 6.9.

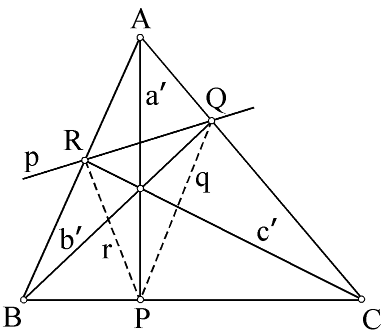
Аналогно се доказује и следећа теорема:

Теорема 6.10.3. *Симетрале једног унутрашњег и спољашњих углова код других двају темена неког троугла припадају једном прамену правих.*

Теорема 6.10.4. *Праве одређене висинама троугла у равни S^2 припадају једном прамену правих.*

Доказ. Нека је у равни S^2 дат троугао ΔABC и нека су AP, BQ, CR (Слика 6.10) висине тог троугла. Докажимо да праве AP, BQ, CR припадају једном прамену правих. Ако је ΔABC правоугли онда се у темену правог угла секу све три висине, те се тај случај непосредно доказује. Нека ΔABC није правоугли. Обележимо са a, b, c праве одређене страницама BC, CA, AB а са a', b', c' праве одређене висинама AP, BQ, CR и са p праву одређену тачкама Q и R, а са q и r праве такве да је $\mathcal{S}_{c'}(p) = r$, $\mathcal{S}_{b'}(p) = q$ при томе свака од композиција $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c$, $\mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_c$, $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{c'}$ преводи праву q у праву r.

Будући да је $A = b \times c$, $B = b' \times c$, $C = b \times c'$ то су A, B, C инваријантне у тим композицијама, свака од тачака A, B, C налази се на оси симетрије правих q и r но с обзиром да су тачке A, B, C неколинеарне а налазе се на осама симетрије q и r биће праве q и r конкурентне и сећи ће се у једној тачки P'. При томе је тачка A на једној а тачке B и C на другој оси симетрије правих q и r те су тачке P и P' истоветне. На тај начин праве a, a', b, b', c, c' представљају симетрале унутрашњих или спољашњих углова троугла ΔPQR. С обзиром да се тројке правих a', b, c; a, b', c; a, b, c' секу редом у тачкама A, B, C према ставу о симетралама унутрашњих (и спољашњих) углова у троуглу у равни S^2 следи да праве a', b', c' припадају једном прамену правих. $\square$



Слика 6.10.

Дефиниција 6.10.1. Прамен правих коме припадају праве одређене висинама троугла у равни S^2 називамо *ортоцентричним праменом правих.*

У равни S^2 троугао може да располаже ортоцентричним праменом неконкурентних правих. Ако је тај прамен, прамен конкурентних правих, тада заједничку тачку свих правих тог елиптичког прамена називамо ортоцентром тог троугла. У Еуклидској геометрији ортоцентрични прамен је обавезно елиптички, док у геометрији Лобачевског он може бити и хиперболички.

6.11 Централна ротација равни $\mathbf{S^2}$

Дефиниција 6.11.1. Композицију двеју осних рефлексија равни S^2 чије се осе секу у некој тачки O називамо *централном ротацијом равни S^2 око тачке O.*

Ако поменуте осне рефлексије означимо $\mathcal{S}_a$ и $\mathcal{S}_b$ тада је $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{R}_{ab}$ централна ротација равни S^2. Ако је O пресечна тачка правих a и b тада тачку O називамо средиштем централне ротације $\mathcal{R}_{ab}$.

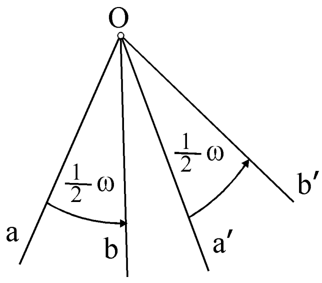
Из дефиниције централне ротације у равни S^2 непосредно следи да централна ротација равни S^2 има јединствену инваријантну тачку: центар те ротације.

Централна ротација равни S^2 је по дефиницији композиција двеју осних рефлексија, које су индиректне изометријске трансформације, те она представља *директну изометријску трансформацију равни S^2.*

Свакој тачки $X \in S^2$ различитој од средишта O централне ротације $\mathcal{R}_{ab}$ у равни S^2 одговара нека друга тачка X', тј. $X' = \mathcal{R}_{ab}(X)$ при чему је орјентисани угао $\measuredangle XOX'$ једнак двоструком орјентисаном углу између правих a и b. Означимо тај двоструки орјентисани угао са ω. Тада централну ротацију $\mathcal{R}_{ab}$ можемо означити са $\mathcal{R}_{O,\omega}$. Угао ω називамо *углом централне ротације.*

Није тешко установити да се централна ротација $\mathcal{R}_{O,\omega}$ равни S^2 може представити као композиција било којих двеју осних рефлексија $\mathcal{S}_a$ и $\mathcal{S}_b$, при чему се праве a и b секу у тачки O и орјентисани угао ω једнак је двоструком орјентисаном углу између правих a и b. На тај начин избор генеришућих рефлексија $\mathcal{S}_a$ и $\mathcal{S}_b$ дозвољава слободан избор једне од оса рефлексија која садржи центар ротације O, тј. важи следећа теорема:

Теорема 6.11.1. *Две централне ротације $\mathcal{R}_{O,\omega}$ и $\mathcal{R}_{O',\omega'}$ исте равни S^2 међу собом су једнаке ако и само ако су тачке O и O' истоветне, а углови ω и ω' подударни и истосмерни.*



Слика 6.11.

Доказ. Обележимо са a, b и a', b' праве помоћу којих су дефинисане поменуте централне ротације. Те праве задовољавају релације $\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ и $\mathcal{R}_{O',\omega'} = \mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_{a'}$ (Слика 6.11).

Претпоставимо да је $\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{R}_{O',\omega'}$. Тада имамо да је

$$\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_{a'}, \quad \text{тј.} \quad \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{a'} = \mathcal{S}_{b'}. \tag{6.3}$$

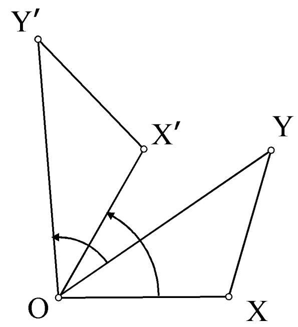
Из релације (6.3) следи да праве a, b, a', b' припадају једном прамену, па се тачка $O = a \cap b$ поклапа са тачком $O' = a' \cap b'$. Сем тога, из релације (6.3) следи да су праве a и b' изогонално спрегнуте са правама a' и b, па су орјентисани углови $\measuredangle(a,b)$ и $\measuredangle(a',b')$, тј. углови ω и ω' међусобно подударни и истосмерни.

Обратно, ако претпоставимо да се тачке O и O' поклапају, а углови ω и ω' су међусобно подударни и истосмерни, тада ће праве a, b, a', b' бити конкурентне, а орјентисани углови $\measuredangle(a,b)$ и $\measuredangle(a',b')$ подударни и истосмерни. Осим тога, праве a и b' су изогонално спрегнуте са правама a' и b, па је $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{a'} = \mathcal{S}_{b'}$, тј. $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_{a'}$, одакле следи

$$\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{R}_{O',\omega'},$$

чиме је доказ теореме завршен. $\square$

Теорема 6.11.2. *У централној ротацији $\mathcal{R}_{O,\omega}$ равни S^2 тачкама X и Y различитим од тачке O одговарају тачке X' и Y' такве да су истосмерни углови $\measuredangle XOX'$ и $\measuredangle YOY'$ међу собом подударни.*



Слика 6.12.

Доказ. Означимо са X_1' тачку равни S^2 такву да је орјентисани угао $\measuredangle XOX_1'$ подударан и истосмеран са усмереним углом ω и $OX \cong OX_1'$. Обележимо га са ω'. Тада, према Теореми 6.11.1. имамо да је $\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{R}_{O,\omega'}$. Због тога је (Слика 6.12) $X_1' = \mathcal{R}_{O,\omega'}(X) = \mathcal{R}_{O,\omega}(X) = X'$. На тај начин, истосмерни углови ω и $\measuredangle XOX'$ међу собом су подударни. На потпуно исти начин се доказује да су и истосмерни углови $\measuredangle YOY'$ и ω међу собом подударни. Следи да су и истосмерни углови $\measuredangle XOX'$ $\measuredangle YOY'$ међу собом подударни. $\square$

Из доказаних двеју теорема непосредно следи да је централна ротација равни S^2 једнозначно одређена центром O и још једним паром одговарајућих тачака. Штавише, ако у централној ротацији $\mathcal{R}_{O,\omega}$ равни S^2 тачкама A, B, C, ... различитим од тачке O одговарају редом тачке A', B', C', ... и ако углове $\measuredangle AOA'$, $\measuredangle BOB'$, $\measuredangle COC'$, ... истосмерне са углом ω обележимо редом са ω_1, ω_2, ω_3, ..., биће

$$\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{R}_{O,\omega_1} = \mathcal{R}_{O,\omega_2} = \mathcal{R}_{O,\omega_3} = \dots$$

Теорема 6.11.3. *Директна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни S^2 са јединственом инваријантном тачком O представља централну ротацију.*

Доказ. Нека су P и P' две разне тачке равни S^2 такве да је $\mathcal{I}(P) = P'$. Означимо са p праву одређену тачкама O и P, а са q медијатрису дужи PP'. Следи $OP \cong OP'$ а одавде је $O \in q$. Дакле, тачка O се налази у пресеку правих p и q. С обзиром на то да је $\mathcal{I}$ директна и $\mathcal{S}_q$ индиректна изометријска трансформација, композиција $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{I}$ ће бити индиректна изометријска трансформација. Она поседује две разне инваријантне тачке O

и P, те према познатој теореми представља осну рефлексију $\mathcal{S}_p$. Дакле, $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_p$, па је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p.$$

Из ове једнакости и релације $O = p \cap q$, следи да изометријска трансформација $\mathcal{I}$ представља централну ротацију. $\square$

Теорема 6.11.4. (О трансмутацији централних ротација) *Ако је $\mathcal{R}_{O,\omega}$ произвољна централна ротација равни S^2 и $\mathcal{I}$ произвољна изометријска трансформација те равни тада је*

$$\mathcal{R}^{\mathcal{I}}_{O,\omega} = \mathcal{R}_{\mathcal{I}(O),\mathcal{I}(\omega)}.$$

Доказ. По дефиницији је централна ротација $\mathcal{R}_{O,\omega}$ производ осних рефлексија $\mathcal{S}_b$ и $\mathcal{S}_a$. Трансмутацијом трансформације $\mathcal{R}_{O,\omega}$ вршимо у ствари трансмутацију сваке од генеришућих осних рефлексија, тј важи:

$$\mathcal{R}^{\mathcal{I}}_{O,\omega} = \mathcal{I} \circ \mathcal{R}_{O,\omega} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{I}^{-1} \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(b)} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{I}(a)}$$

тј. добијамо $\mathcal{R}^{\mathcal{I}}_{O,\omega} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(b)} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{I}(a)}$.

Како се праве a и b секу у тачки O њихове слике у изометрији $\mathcal{I}$ се секу у тачки $\mathcal{I}(O)$ што значи да трансформација $\mathcal{S}_{\mathcal{I}(b)} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{I}(a)}$ има инваријантну тачку $\mathcal{I}(O)$ па представља централну ротацију $\mathcal{R}_{\mathcal{I}(O),\mathcal{I}(\omega)}$. Наиме трансформација $\mathcal{I}$ преводи праве a и b у праве $\mathcal{I}(a)$ и $\mathcal{I}(b)$, затим преводи орјентисани угао $\omega\,(\omega/2)$ у ојентисани угао $\mathcal{I}(\omega)\,(\mathcal{I}(\omega/2))$ који је подударан углу $\omega\,(\omega/2)$ али у погледу орјентације може имати исту орјентацију ако је $\mathcal{I}$ директна изометрија, односно супротну орјентацију ако је $\mathcal{I}$ индиректна изометрија. $\square$

Став о трансмутацији централне ротације омогућује да се установе ставови о комутативности централних ротација са другим изометријским трансформацијама.

6.12 Група ротација равни S^2

Није тешко утврдити да за централне ротције важи следеће тврђење:

Теорема 6.12.1. *Скуп свих централних ротација равни S^2 које имају заједничко средиште O укључујући коинциденцију представља групу у односу на операцију композиције пресликавања.*

Дефиниција 6.12.1. Групу сачињену од централних ротација равни S^2 које имају заједничко средиште O називамо *групом ротација равни* S^2 *са центром* O и симболички је обележавамо $G(\mathcal{R}_O)$.

Теорема 6.12.2. *Група $G(\mathcal{R}_O)$ централних ротација равни S^2 око тачке O је Абелова. Другим речима, за произвољне две централне ротације $\mathcal{R}_{O,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{O,\beta}$ из групе $G(\mathcal{R}_O)$ важи релација*

$$\mathcal{R}_{O,\beta} \circ \mathcal{R}_{O,\alpha} = \mathcal{R}_{O,\alpha} \circ \mathcal{R}_{O,\beta}.$$

Доказ. Нека је p произвољна права равни S^2 која садржи тачку O. Нека су затим m и n две праве равни S^2 такво да важи

$$\mathcal{R}_{O,\alpha} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m \text{ и } \mathcal{R}_{O,\beta} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p.$$

Множењем одговарајућих страна ових двеју једнакости, налазимо да је

$$\mathcal{R}_{O,\beta} \circ \mathcal{R}_{O,\alpha} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m \tag{6.4}$$

$$\mathcal{R}_{O,\alpha} \circ \mathcal{R}_{O,\beta} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p. \tag{6.5}$$

С обзиром на то да праве p, m, n равани S^2 садрже исту тачку O, оне припадају једном прамену конкурентних правих, што значи да композиција

$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n \tag{6.6}$$

представља неку осну рефлексију. С обзиром на то да је осна рефлексија инволуциона трансформација то ће квадрат композиције (6.6) представљати коинциденцију, тј.

$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n = \varepsilon$$

тј.

$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m. \tag{6.7}$$

Из једнакости (6.4), (6.5) и (6.7) добијамо да је

$$\mathcal{R}_{O,\beta} \circ \mathcal{R}_{O,\alpha} = \mathcal{R}_{O,\alpha} \circ \mathcal{R}_{O,\beta}.$$

а то је и требало доказати. □

Теорема 6.12.3. *Централне ротације $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ $\mathcal{R}_{B,\beta}$ равни S^2 су комутативне ако и само ако се средишта A и B тих ротација поклапају. Другим речима важи:*

$$\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} \text{ ако и само ако } A \equiv B.$$

Доказ. Нека најпре поменуте ротације комутирају, тј. нека је

$$\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}.$$

Тада је

$$\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{A,\alpha}. \tag{6.8}$$

Ако у централној ротацији $\mathcal{R}_{B,\beta}$ тачки A одговара нека тачка A', а усмереном углу α одговара неки усмерени угао α', према теореми о трансмутацији централних ротација имамо да је

$$\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{A',\alpha'}. \tag{6.9}$$

Упоређивањем једнакости (6.8) и (6.9) следи да је $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{A',\alpha'}$. Према Теореми 6.11.1. следи да се тачке A и A' поклапају, а углови α и α' подударни и истосмерни. Према томе, тачка A је инваријантна тачка при ротацији $\mathcal{R}_{B,\beta}$, одакле следи $A \equiv B$.

Обратно тврђење на један начин већ смо доказали приликом извођења доказа теореме 6.12.2.

Оно се може доказати на још један начин који ћемо у наставку изложити. Нека се тачке A и B поклапају и нека је

$$\mathcal{R}_{B,\beta}(A) = A' \text{ и } \mathcal{R}_{B,\beta}(\alpha) = \alpha'.$$

Одавде непосредно закључујемо да се тачке A и A' поклапају а углови α и α' су подударни и истосмерни. На основу Теореме 6.11.1. следи $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{A',\alpha'}$. Сада је према теореми о трансмутацији централних ротација задовољено $\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{A,\alpha}$ тј.

$$\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}.$$

Тиме је доказ у потпуности завршен. □

Приметимо да скуп свих централних ротација једне равни у односу на различито средиште не представља групу.

6.13 Појам круга у равни S^2

Група ротација равни S^2 са средиштем O омогућује да изведемо дефиницију појма *круга* на специфичан начин.

Дефиниција 6.13.1. Нека је G група рефлексија. Скуп свих тачака добијених као слике тачке X помоћу рефлексија из групе G називамо *трајекторијом* тачке X у односу на групу G, или *скупом тачака еквивалентних са тачком* X у односу на групу G.

Дефиниција 6.13.2. Нека је $G(\mathcal{R}_O)$ група централних ротација равни S^2 око тачке O, а P тачка равни S^2 различита од тачке O. Трајекторија тачке P у односу на групу $G(\mathcal{R}_O)$ назива се *круг.* Тачка O се назива *средиштем* тог круга а подударне дужи које спајају тачку O са тачкама круга називају се *полупречници* тог круга.

С обзиром да се свака централна ротација може представити као композиција двеју осних рефлексија у односу на осе рефлексије које садрже инваријантну тачку O, у случају групе $G(\mathcal{R}_O)$ радимо са елементима прамена конкурентних правих са заједничким средиштем O те можемо рећи да *круг представља ортогоналну трајекторију или само трајекторију елемената прамена правих.*

Помоћу релација "веће", "мање" непосредно се може развити теорија о кругу.

Дефиниција 6.13.3. За тачку X кажемо да је *у кругу са центром O и полупречником r* ако је $OX < r$, а да је *изван круга* ако је $OX > r$.

Дефиниција 6.13.4. Скуп свих тачака у кругу $k(O,r)$ називамо *отвореном кружном површи* а унију овог скупа и скупа свих тачака круга k *затвореном кружном површи.*

Убудуће, затворену кружну површћемо звати једноставно само *кружна површ.*

За кружне површи важи следеће тврђење:

Теорема 6.13.1. *Кружна површ је конвекан геометријски лик.*

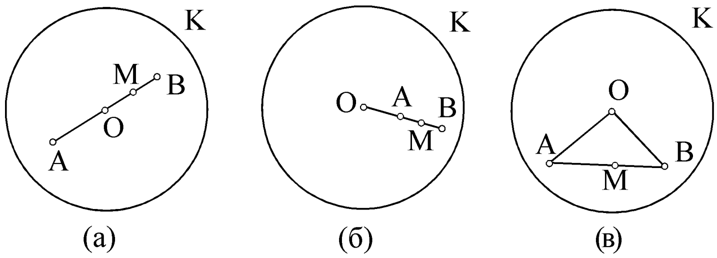
Доказ. Свака кружна површ се може представити као скуп тачака

$$K(O,r) = \{X \in S^2 | OX \leq r\}.$$

Требамо доказати да за било које две тачке A и B које припадају кружној површи K, све тачке дужи AB припадају кружној површи K.

Разликујемо два случаја:

(i) тачке A, B, O су колинеарне и (ii) тачке A, B, O нису колинеарне.



Слика 6.13.

(i) Ако су тачке A, B, O колинеарне тада (Слика 6.13 (а), (б)) важи тачно један од распореда тачака (а) $\mathcal{B}(A, O, B)$, (б) $\mathcal{B}(O, A, B)$ или (в) $\mathcal{B}(O, B, B)$.

(а) Нека је $\mathcal{B}(A, O, B)$. Тачке A и B су тачке кружне површи K па је $OA \leq r$ и $OB \leq r$. Нека је M произвољна тачка дужи AB. Ако је $M \equiv O$ онда $M \in K$. Ако важи распоред тачака $\mathcal{B}(A, O, B)$ онда треба доказати да за сваку тачку M дужи AB, M припада кружној површи K. Ако се M не поклапа са O, онда може важити један од распореда тачака $\mathcal{B}(A, M, O)$ или $\mathcal{B}(O, M, B)$. Ако важи распоред тачака $\mathcal{B}(A, M, O)$, онда је $OM < OA \leq r$, одакле следи да $M \in K$. Ако важи распоред тачака $\mathcal{B}(O, M, B)$, онда $OM < OB \leq r$, одакле следи да $M \in K$. Како је M произвољна тачка дужи AB следи $AB \subset K$.

(б) Ако је $\mathcal{B}(O, A, B)$ и $M \in AB$, тада је $\mathcal{B}(O, A, M, B)$, па је $OM < OB$ и како је још $OB \leq r$ то $M \in K$.

(в) Ако је $\mathcal{B}(O, B, A)$ и $M \in AB$, тада је $\mathcal{B}(O, B, M, A)$, па је $OM < OA$ и како је још $OA \leq r$ то $M \in K$.

(ii) Ако тачке A, B, O нису колинеарне, тада уочимо троугао $\triangle ABO$ и тачку M на страници AB (Слика 6.13 (в)). Тада је

$$OM < max\{OA, OB\} \leq r,$$

па следи да и у овом случају $M \in K$. □

Из претходне теореме следи да је кружна површ повезан геометријски лик.

У овако аксиоматски заснованој геометрији може се увести и појам тангенте и сечице круга.

Дефиниција 6.13.5. Права t је *тангента круга* ако припада равни тог круга и има са њим само једну заједничку тачку.

Дефиниција 6.13.6. Права s је *сечица круга* ако припада равни тог круга и има са њим две заједничке тачке.

6.14 Централна симетрија реда n у равни $\mathbf{S^2}$

Дефиниција 6.14.1. У равни S^2 геометријски лик Φ *обртно или ротационо подударан* са ликом Φ' у односу на тачку O ако постоји централна ротација $\mathcal{R}_{O,\omega}$ равни S^2 тако да је $\mathcal{R}_{O,\omega}(\Phi) = \Phi'$.

Из дефиниције закључујемо да релација обртне подударности представља релацију еквиваленције. Посебан значај има случај када је $\Phi = \Phi'$.

Дефиниција 6.14.2. Каже се да у равни S^2 лик Φ располаже *централном симетријом реда n* ако постоји централна ротација $\mathcal{R}_{O,\frac{4R}{n}}$ у равни S^2 тако да је $\mathcal{R}_{O,\frac{4R}{n}}(\Phi) = \Phi$ где је O тачка равни S^2, R - орјентисан прав угао, а n цео позитиван број или рационалан број облика $\frac{p}{q}$ при чему су p и q узајамно прости. Тачка O се назива средиштем централне симетрије $\mathcal{R}_{O,\frac{4R}{n}}$.

Наводимо сада неке основне особине централне симетрије реда n у простору S^2.

Теорема 6.14.1. *Ако лик Φ у равни S^2 располаже централном симетријом реда n где је n цео позитиван број дељив са целим позитивним бројем $m > 1$, тада лик Φ располаже централном симетријом реда m.*

Теорема 6.14.2. *Централна симетрија реда n лика Φ у равни S^2 је периодична трансформација. Ако са k означимо тај период тада је $k = n$ ако је n цео број већи од један, тј. $k = p$ ако је n рационалан број облика p/q при чему су p и q узајамно прости.*

Централна симетрија реда n лика Φ у равни S^2 омогућује да помоћу изометријских трансформација дефинишемо појам правилног полигона.

Дефиниција 6.14.3. За полигон $A_1A_2\ldots A_n$ у равни S^2 кажемо да је *правилан* или *регуларан* ако располаже централном симетријом реда n.

Централна симетрија реда 2 је као инволуциона трансформација од посебног значаја у скупу централних ротација. Приметимо да централна симетрија реда 2 заправо представља полуобрт равни око тачке O тј. ротацију за опружени угао. Оваква инволутивна трансформација може се представити као композиција двеју осних рефлексија чије су осе управне међусобом. С обзиром на то да је $\omega/2 = R$, тј. $a \perp b$ добијамо комутативну композицију осних рефлексија, тј.

$$\mathcal{R}_{O,2R} = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a.$$

Напомена. Централна симетрија реда 2 се у литератури најчешће назива само *централна симетрија* или *централна рефлексија.* Овај други назив се може сматрати оправданим пошто је централна симетрија реда 2 једина у скупу централних симетрија реда n која је инволуциона.

Теорема 6.14.3. *Централна симетрија реда 2 је инволуциона трансформација, и представља производ комутативних осних рефлексија $\mathcal{S}_a$ и $\mathcal{S}_b$.*

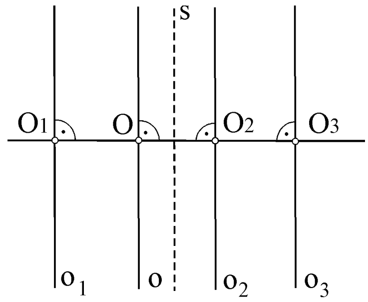
Доказ. Централна симетрија реда 2 се може представити као композиција двеју осних рефлексија чије су осе a и b узајамно управне, тј. $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$. Из ортогоналности оса a и b следи комутативност осних рефлексија $\mathcal{S}_a$ и $\mathcal{S}_b$, тј. важи $\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$. Сада је $\mathcal{S}_O^2 = (\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a)^2 = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b = \varepsilon$ јер је $\mathcal{S}_a^2 = \varepsilon$ и $\mathcal{S}_b^2 = \varepsilon$. □

Теорема 6.14.4. (О композицији централних рефлексија у равни S^2) *Композиција непарног броја централних симетрија у равни S^2 чија средишта припадају једној правој l равни S^2 представља такође централну симетрију чије је средиште на правој l.*

Доказ. Нека је n број централних рефлексија које учествују у композицији. Нека је најпре $n = 3$, тј. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{O_3} \circ \mathcal{S}_{O_2} \circ \mathcal{S}_{O_1}$. Означимо са o_1, o_2 и o_3 (Слика 6.14.) праве управне на праву l редом у тачкама O_1, O_2 и O_3. Тада је $\mathcal{S}_{O_3} = \mathcal{S}_{o_3} \circ \mathcal{S}_l = \mathcal{S}_l \circ \mathcal{S}_{o_3}$, $\mathcal{S}_{O_2} = \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_l = \mathcal{S}_l \circ \mathcal{S}_{o_2}$ и $\mathcal{S}_{O_1} = \mathcal{S}_{o_1} \circ \mathcal{S}_l = \mathcal{S}_l \circ \mathcal{S}_{o_1}$ па имамо

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{o_3} \circ \mathcal{S}_l \circ \mathcal{S}_l \circ \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_l \circ \mathcal{S}_{o_1} = \mathcal{S}_{o_3} \circ \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1} \circ \mathcal{S}_l.$$

Међутим осе o_1, o_2 и o_3 припадају истом прамену правих са базисном правом l па је $\mathcal{S}_{o_3} \circ \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1} = \mathcal{S}_o$, тј. као резултат се добија осна рефлексија $\mathcal{S}_o$ чија оса o припада истом прамену правих па је и $o \perp l$. Шта



Слика 6.14.

више, пар правих o_1, o_3 је изогонално спрегнут са паром правих o_2, o. Према томе $\mathcal{I} = \mathcal{S}_o \circ \mathcal{S}_l = \mathcal{S}_O$ где је O пресечна тачка правих o и l.

Ако је $n > 3$ доказ се изводи математичком индукцијом.

Претпоставимо да тврђење важи за $n = 2k - 1$ и докажимо да важи за $n = 2k + 1$. Дакле, према индукцијској претпоставци, композиција централних рефлексија

$$\mathcal{S}_{O_1} \circ \mathcal{S}_{O_2} \circ \mathcal{S}_{O_3} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{O_{2k-1}}$$

чија средишта $O_1, O_2, O_3, \cdots, O_{2k-1}$ припадају истој правој l, представља неку централну рефлексију $\mathcal{S}_P$ чије средиште P такође припада истој правој l.

Посматрајмо композицију од $n = 2k + 1$ централних рефлексија

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{O_1} \circ \mathcal{S}_{O_2} \circ \mathcal{S}_{O_3} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{O_{2k+1}}$$

чија средишта $O_1, O_2, O_3, \cdots, O_{2k+1}$ припадају правој l. Тада композиција од три централне рефлексије

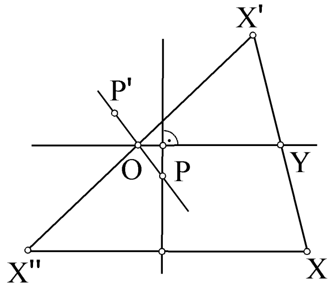
$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_P \circ \mathcal{S}_{O_{2k}} \circ \mathcal{S}_{O_{2k+1}},$$

чија су средишта колинеарна и припадају правој l, представља такође неку централну рефлексију $\mathcal{S}_Q$ са средиштем $Q \in l$. □

Теорема 6.14.5. (Шала[1]-Хјелмслева[2]) *Средишта дужи које спајају одговарајуће тачке индиректне изометријске трансформације $\mathcal{I}$ равни S^2 припадају једној правој.*

[1] М. Шал (1793-1880), француски геометричар.

[2] J. Т. Хјелмслев (1873-1950) фински математичар и песник. Радио је на пољу геометрије и историје геометрије.



Слика 6.15.

Доказ. Нека је P произвољна тачка равни S^2 и P' слика тачке P у изометрији $\mathcal{I}$, тј. $P' = \mathcal{I}(P)$ и нека је O средиште дужи PP' (Слика 6.15). Нека је X било која друга тачка равни S^2 и $X' = \mathcal{I}(X)$ а X'' тачка симетрична са тачком X' у односу на тачку O. У том случају композиција $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}$ састављена је из директне изометрије $\mathcal{S}_O$ и индиректне трансформације $\mathcal{I}$ па је она индиректна изометрија равни S^2. У тој индиректној изометрији тачка P је инваријантна те ова композиција представља неку осну рефлексију $\mathcal{S}_p$ чија оса p садржи тачку P.

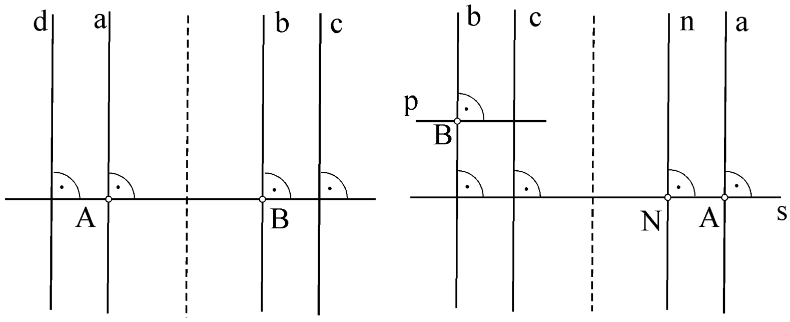
Како у тој композицији тачки X одговара тачка X'', права p је медијатриса дужи XX''. Ако је Y средиште дужи XX' биће и права одређена средиштима O и Y страница $X'X''$ и XX' троугла $\Delta XX'X''$ управна на медијатриси p дужи XX''. С обзиром да постоји тачно једна права која садржи фиксирану тачку O и управна је на датој правој p, средишта свих дужи које спајају кореспондентне тачке индиректне изометрије $\mathcal{I}$ равни S^2 припадају једној правој, у нашем случају то је права OY. □

Дефиниција 6.14.4. Праву одређену средиштима дужи које спајају одговарајуће тачке индиректне изометријске трансформације $\mathcal{I}$ равни S^2 називамо *осом* те изометријске трансформације.

Теорема 6.14.6. *Ако су $\mathcal{S}_A$ и $\mathcal{S}_B$ две разне централне симетрије, а $\mathcal{S}_c$ осна рефлексија равни, тада је композиција $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A$ осна рефлексија ако и само ако је права AB управна на праву c.*

Доказ. Нека је права AB управна на праву c и нека су a и b праве које пролазе, редом, кроз тачке A и B и управне су на AB (Слика 6.16). Тада праве a, b, c припадају ортогоналном прамену правих са базисном правом AB, па је

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_d,$$



Слика 6.16.

чиме је доказ у овом смер завршен.

Обратно, нека је $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_d$. Означимо са s праву која садржи тачку A и управна је на праву c. Нека су затим a и b праве које садрже, редом, тачке A и B и управне су на праву s. Означимо са p праву која садржи тачку B и управна је на правој b. Тада је

$$\mathcal{S}_d = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s.$$

Праве a, b, c припадају ортогоналном прамену правих са базисном правом s па је $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_n$, при чему је и права n управна на s у некој тачки $N \in s$. Дакле, $\mathcal{S}_d = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_s$, па праве d, p, n и s припадају истом прамену конкурентних правих правих $\mathcal{L}_N$ са средиштем у тачки N. Како су притом праве p и s управне на праву b, следи да се праве p и s поклапају. Према томе, закључујемо да је $AB \perp c$. □

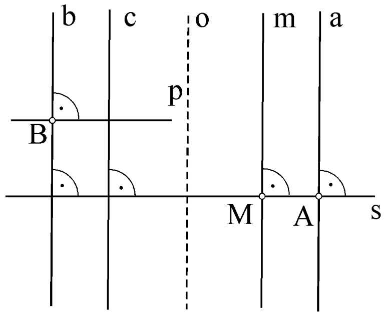
Теорема 6.14.7. *Пар тачака A, B и пар правих c, d су симетрично распоређени ако и само ако је $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_d$.*

Доказ. Нека су пар тачака A, B и пар правих c, d симетрично распоређени. Означимо са a и b праве управне на праву AB редом у тачкама A и B. Нека је s оса симетрије правих c и d. Тада је s медијатриса дужи AB према дефиницији симетричне распоређености. То значи да је s оса симетрије и правих a, b тј. биће $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$. Композицијом са леве и десне стране у претходној релацији са $\mathcal{S}_{AB}$ добијамо

$$\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_{AB}.$$

Према теореми о трансмутацији закључујемо да је

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_{d'}. \tag{6.10}$$



Слика 6.17.

Одавде је $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_{d'}$, а како је још због нормалности правих AB и d задовољено $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_d$ следи $\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_d = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_{d'}$, тј. $\mathcal{S}_d = \mathcal{S}_{d'}$ а одавде $d \equiv d'$. Према томе, релација (6.10) постаје $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_d$, а то је и требало доказати.

Обратно, нека је за тачке A и B и праве c и d задовољена релација $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_d$. У тачки A конструишимо нормалу S на праву a а у тачки B нормалу p на праву b (Слика 6.17). Тада је $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a$ и $\mathcal{S}_B = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b$ Сада је

$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_d. \tag{6.11}$$

Праве a, b и c припадају истом ортогоналном прамену правих, па је

$$\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_m, \tag{6.12}$$

при чему и права m припада истом ортогоналном прамену правих. Означимо са M пресечну тачку правих s и m. Сада из (6.11) и (6.12) следи

$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_d, \tag{6.13}$$

тј. праве s, m и p припадају истом прамену конкурентних правих $\mathcal{L}_M$. Дакле, праве p и s пролазе кроз тачку тачку M и ортогоналне су на праву b, одакле следи да се праве p и s поклапају, тј. тачка B припада правој s. Због тога релација (6.13) постаје $\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_d$, тј. праве m и d се поклапају, па из релације (6.12) добијамо

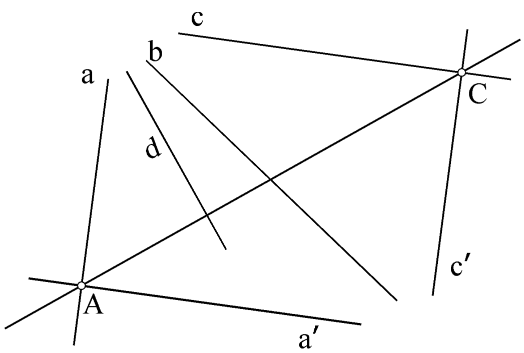
$$\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d. \tag{6.14}$$

То значи да парови правих a, b и c, d имају исту осу симетрије, означимо је са o. Међутим, како је $A \in a$, $B \in b$, $a \perp AB$, $b \perp AB$, $\mathcal{S}_o(a) = b$ то ће бити $\mathcal{S}_o(A) = B$. То значи да је да је права o медијатриса дужи AB, тј. пар тачака A, B и пар правих c, d су симетрично распоређени. $\square$

6.15 Теорема о нормалама и последице

Наредна теорема представља значајно тврђење у геометријској теорији праменова. Позната је под имеом *теорема о нормалама.*

Теорема 6.15.1. *Нека су a, b, c три праве једног прамена правих, а a' и c' праве управне на a и c, редом у тачкама A и C. Праве a', b, c' припадају једном прамену ако и само ако је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$ и d права управна на праву AC.*



Слика 6.18.

Доказ. С обзиром на то да праве a, b, c припадају истом прамену ппревих, то ће композиција $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ бити нека осна рефлексија $\mathcal{S}_d$ (Слика 6.18). Са $\mathcal{I}$ означимо композицију $\mathcal{S}_{c'} \circ \mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_{a'}$. Тада је

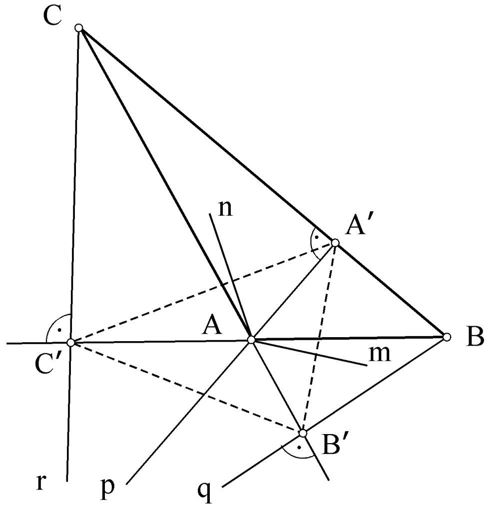
$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{c'} \circ \mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_{a'} = \mathcal{S}_{c'} \circ (\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_a) \circ \mathcal{S}_{a'} = \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_A,$$

па је изометрија $\mathcal{I}$ осна рефлексија ако и само ако је права d управна на праву AC. $\square$

Теорема 6.15.2. *Праве које садрже темена троугла и управне су на правама које садрже његове наспрамне ивице, припадају једном прамену правих.*

Доказ. Случај правоуглог троугла је тривијалан.

Означимо са p, q, r праве које, редом, садрже темена A, B, C неког троугла ΔABC и управне су на правама које садрже ивице BC, CA, AB, редом, у тачкама A', B', C'. Ако су сви углови троугла ΔABC оштри, тачке A', B', C' припадају ивицама тог троугла. Ако је један од углова



Слика 6.19.

туп, на пример угао $\measuredangle A$, тада ће само тачка A' припадати наспрамној ивици троугла ΔABC. Нека су m и n праве које пролазе кроз теме A, а управне су редом, на правама $A'B'$ и $A'C'$ (Слика 6.19). Тачке A и B можемо посматрати као средишта двају праменова конкурентних правих са заједничком правом AB. Применом теореме о нормалама добијамо $\mathcal{S}_{AB'} \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_m$, одакле следи

$$\mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AC} \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_p. \tag{6.15}$$

С друге стране и тачке A и C су средишта двају праменова. На исти начин добијамо

$$\mathcal{S}_{AC} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p. \tag{6.16}$$

Из релација (6.15) и (6.16) имамо да је $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_p$. Из последње релације следи да су праве m и n симетричне у односу на праву p. Дакле, права p је оса рефлексије пара правих $A'B'$, $A'C'$. На потпуно исти исти начин,закључујемо да су праве q и r осе рефлексија, редом, парова правих $A'B'$, $B'C'$ и $A'C'$, $B'C'$.

Ако су сви унутрашњи углови троугла ΔABC оштри, онда су праве p, q, r симетрале унутрашњих углова троугла $\Delta A'B'C'$, па према томе, припадају истом елиптичком прамену правих.

Ако је пак угао $\measuredangle A$ троугла ΔABC туп, права p је симетрала унутрашњег, а праве q и r симетрале спољашњих углова троугла $\Delta A'B'C'$. И у овом случају праве p, q, r припадају истом прамену правих. $\square$

Претходна теорема се чешће среће у следећем облику: *Праве одређене висинама троугла припадају истом прамену правих.*

Теорема 6.15.3. *Ако су a, c и d три разне праве једног прамена равни S^2, тада постоји права s која сече праве a, c и d у трима разним тачкама.*

Доказ. Нека је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_b$ и нека је B произвољна тачка праве b. Означимо са A и C подножја управних из тачке B редом на правама a и c. На основу теореме о нормалама, права d је управна на праву AC. Према томе, права AC је тражена права која сече праве a, c и d. □

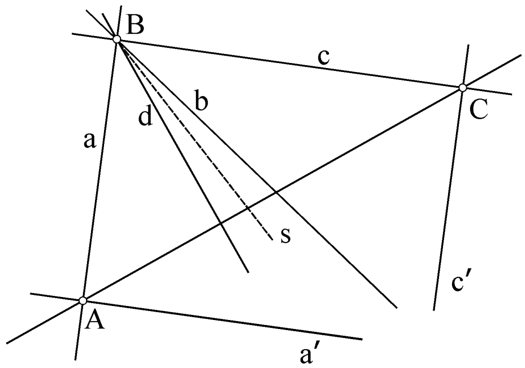
Теорема 6.15.4. *Ако су a, b, c три дисјунктне праве једног прамена правих у равни S^2, тада су тачно две од тих трију правих са разних страна треће праве.*

Доказ. На основу претходне теореме постоји права која сече праве a, b, c у тачкама A, B, C редом, па важи тачно једна од трију релација $\mathcal{B}(A,B,C)$, $\mathcal{B}(B,C,A)$, $\mathcal{B}(C,A,B)$. Не умањујући општост доказа можемо претпоставити да је $\mathcal{B}(A,B,C)$. Праве a, b и c су дисјунктне, одакле следи да све тачке једне од њих припадају некој полуравни чији је руб нека од преосталих двеју правих. То значи да су праве a и c са разних страна праве b, тј. да су праве b и c са исте стране праве a, и да су праве a и b са исте стране праве c. □

Теорема 6.15.5. *Нека су a' и c' две разне праве неке равни и B тачка те равни ван правих a' и c'. Тада постоји јединствена права b која садржи тачку B, таква да праве a', b и c' припадају једном прамену.*

Доказ. Означимо са a и c праве које садрже тачку B и управне су редом на праве a' и c' у тачкама A и C. Нека је још d права која садржи тачку B и управна је на правој AC. Како праве a, d, c припадају једном прамену правих то ће композиција $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_a$ бити осна рефлексија $\mathcal{S}_b$. Шта више, ако је s оса симетрије правих a и c, она ће бити и оса симетрије правих b и d. Дакле, $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$ па праве a', b и c', на основу теореме о нормалама, припадају једном прамену (Слика 6.20).

Обратно, нека права b садржи тачку B и нека праве a', b, c' припадају једном прамену. Тада је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$ и $d \perp AC$, при чему су a и c праве које садрже B и управне су, редом, на правама a' и c' у тачкама A и C. Значи, оса симетрије правих b и d се поклапа са осом симетрије s правих a и c. Права d јединствена права кроз тачку B управна на

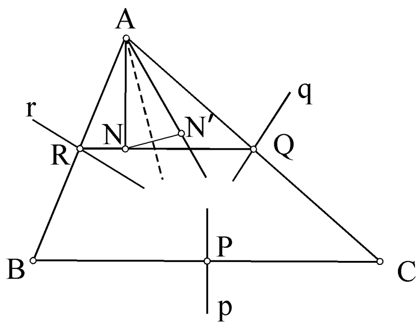


Слика 6.20.

праву AC. Према томе и њој симетрична права у односу на праву s, је јединствена. □

На основу доказа претходне теореме омогућено нам је да установимо једну важну особину прамена правих који садржи медијатрисе страница неког троугла.

Нека су p, q, r медијатрисе редом страница BC, CA, AB троугла ΔABC. Означимо са Q и R средишта дужи CA и AB, а са a праву која садржи тачку A и припада прамену којем припадају праве q и r. Таада је права a симетрична правој, управној из тачке A на праву QR, у односу на симетралу унутрашњег угла код темена A троугла ΔABC.



Слика 6.21.

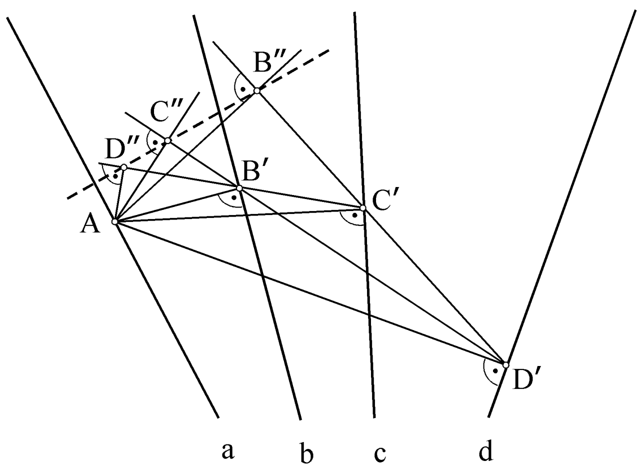
Означимо сада са N подножје управне из тачке A на правој QR, а са N' њој симетричну тачку у односу на симетралу угла $\angle QAR$. Тада ће углови $\measuredangle QAN'$ и $\measuredangle RAN$ бити подударни. Углови $\measuredangle RAN$ и $\measuredangle QAN$ су оштри па ћи углови $\measuredangle QAN'$ и $\measuredangle RAN'$ бити оштри (Слика 6.21).

6.16 Теорема о транзитивности и последице

У овом одељку ћемо дати доказ кључне теореме у теорији праменова правих. То је тзв. *теорема о транзитивности.*

Теорема 6.16.1. (Теорема о транзитивности) *Нека су a, b, c и d четири разне праве равни S^2. Ако су композиције $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ и $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ осне рефлексије, тада је и композиција $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a$, такође осна рефлексија.*

Доказ. Означимо са A произвољну тачку праве a која не припада ни једној од правих b, c, d (Слика 6.22). Нека су затим праве b', c', d' управне из тачке A редом на на правама b, c, d. Означимо са B', C', D' подножја тих управних. На крају, означимо са b'', c'', d'' праве управне из тачке A, редом, на правама $C'D'$, $B'D'$, $B'C'$, а са B'', C'', D'' означимо подножја тих управних.



Слика 6.22.

Тада, према теореми о нормалама имамо

$$\mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{c'} = \mathcal{S}_{d''}, \quad \mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{d'} = \mathcal{S}_{c''}. \tag{6.17}$$

Такође, према истој теореми закључујемо да су релације

$$\mathcal{S}_{d''} \circ \mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_{c''} = \mathcal{S}_p, \quad \mathcal{S}_{d''} \circ \mathcal{S}_{c'} \circ \mathcal{S}_{b''} = \mathcal{S}_q \tag{6.18}$$

задовољене ако и само ако праве p и q садрже тачку A и управне су редом на правама $C''D''$ и $B''D''$. Из релација (6.17) следи да је

$$\mathcal{S}_{d''} \circ \mathcal{S}_{c'} = \mathcal{S}_{c''} \circ \mathcal{S}_{d'},$$

па је на основу друге од релација (6.18) задовољено

$$\mathcal{S}_{c''} \circ \mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_{b''} = \mathcal{S}_q.$$

Одавде, на основу теореме о нормалама, следи да је права q управна на $C''B''$. Како је још права q управна и на $B''D''$ то ће тачке B'', C'', D'' бити колинеарне. Дакле, праве p и q се поклапају. Према томе, из релација (6.18) следи да је

$$\mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_{c''} = \mathcal{S}_{c'} \circ \mathcal{S}_{b''}$$

тј.

$$\mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_{c'} \circ \mathcal{S}_{b''} = \mathcal{S}_{c''}.$$

С обзиром на то да је

$$\mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_{a} \circ \mathcal{S}_{d'} = \mathcal{S}_{c''},$$

имамо

$$\mathcal{S}_{c'} \circ \mathcal{S}_{b''} = \mathcal{S}_{a} \circ \mathcal{S}_{d'},$$

тј.

$$\mathcal{S}_{c'} \circ \mathcal{S}_{a} \circ \mathcal{S}_{d'} = \mathcal{S}_{b''}.$$

Према томе, на основу теореме о нормалама, композиција $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a$ представља осну рефлексију. □

Теорема 6.16.2. *Нека су a и b две разне праве. Ако је свака од следећих трију композиција $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$, осна рефлексија, онда је и композиција*

$$\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c,$$

такође, осна рефлексија.

Доказ. С обзиром на то да су композиције $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ и $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ осне рефлексије, то ће и композиција $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a$ ће бити осна рефлексија на основу Теореме 6.16.1. е. Према томе и $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_c$ ће такође бити осна рефлексија. На потпуно исти начин, с обзиром на то да су композиције $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ и $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ осне рефлексије, биће и композиција $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a$ осна рефлексија. Дакле, и $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_c$ ће бити осна рефлексија. Према томе, композиције $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_c$ и $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_c$ су осне рефлексије, одалкле је, према Теореми 6.16.1., и $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c$ осна рефлексија ако су a и c две разне праве. Ако се a и c поклапају, будући да су композиције $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ и $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ осне рефлексије, биће и композиција $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_a$ осна рефлексија. Према томе биће и композиција $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c$ осна рефлексија. $\square$

Теорема 6.16.3. *Ако су a и b две разне праве равни S^2, тада постоји јединствен прамен правих те равни коме припадају обе праве a и b.*

Доказ. Означимо са $\mathcal{L}(a,b)$ скуп свих правих x равни S^2 таквих да је $\mathcal{S}_x \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ осна рефлексија. Ако праве c, d, e припадају скупу правих $\mathcal{L}(a,b)$, тада ће, на основу Теореме 6.16.2., композиција $\mathcal{S}_e \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c$ бити осна рефлексија. С обзиром на то, да за било коју праву y ван скупа $\mathcal{L}(a,b)$ композиција $\mathcal{S}_y \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ није осна рефлексија, скуп $\mathcal{L}(a,b)$ представља прамен правих равни S^2.

Докажимо још да се сваки прамен $\mathcal{L}$ који садржи праве a и b поклапа са прамeном $\mathcal{L}(a,b)$. Заиста, ако нека права x припада прамену $\mathcal{L}$, тада је $\mathcal{S}_x \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ осна рефлексија. То значи да та права припада и прамену $\mathcal{L}(a,b)$. Ако нека права y не припада прамену $\mathcal{L}$, тада, по дефиницији, постоје праве c и d тога прамена такве да композиција $\mathcal{S}_y \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c$ није осна рефлексија. Тада, будући да су $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ и $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ осне рефлексије, композиција $\mathcal{S}_y \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ није осна рефлексија јер би, у супротном, и $\mathcal{S}_y \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_c$ била осна рефлексија на основу Теореме 6.16.1. Дакле, права y тада не припада прамену $\mathcal{L}(a,b)$. $\square$

Ако праве c и d припадају прамену $\mathcal{L}(a,b)$, тада је, на основу претходне теореме, $\mathcal{L}(a,b) = \mathcal{L}(c,d)$. Према томе, *прамен правих је једнозначно одређен било којим двема својим правама.* То значи да *два разна прамена могу имати највише једну заједничку праву.*

Претходно тврђење, према коме је прамен једнозначно одређен било којим двема разним својим правама, омогућава нам да докажемо још нека значајна тврђења из теорије праменова правих.

Теорема 6.16.4. *Ако је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$, тада и права d припада прамену правих коме припадају праве a, b и c.*

Доказ. Из $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$ следи $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b = \mathcal{S}_c$. То значи да и права d припада прамену $\mathcal{L}(a, b)$. □

Теорема 6.16.5. *Нека су a, b, c три праве неког прамена правих $\mathcal{L}$ и нека је s оса рефлексије пара правих a, c. Тада и права $d = \mathcal{S}_s(b)$ припада прамену правих $\mathcal{L}$.*

Доказ. Из $\mathcal{S}_s(a) = c$ следи $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_s$. Дакле, на основу Теореме 6.16.3., права s припада прамену $\mathcal{L}(a, c) = \mathcal{L}$. На исти начин, $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_b = \mathcal{S}_s$, па и права d, опет на основу Теореме 6.16.3., припада прамену $\mathcal{L}(b, s) = \mathcal{L}$. □

Теорема 6.16.6. *Нека праве a, b, c припадају једном прамену правих. Тада, композиција $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$, представља осну рефлексију $\mathcal{S}_d$ ако и само ако се оса симетрије пара правих a и c поклапа са осом симетрије пара правих b и d.*

Доказ ове теореме се изводи уз помоћ Теореме 6.16.5., аналогно доказу Теореме 6.9.2.

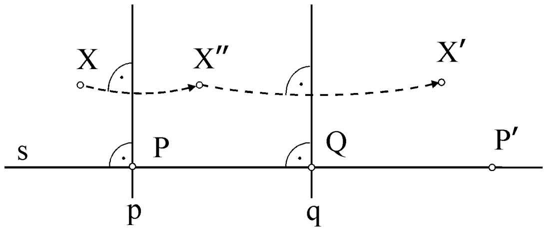
6.17 Транслација равни S^2

Сем централних ротација постоји још једна врста изометријских трансформација равни S^2 које се могу представити као композиција двеју осних рефлексија. То су *транслације равни S^2*.

Дефиниција 6.17.1. Нека су $\mathcal{S}_p$ и $\mathcal{S}_q$ осне рефлексије равни S^2 чије су осе p и q управне на некој правој s у тачкама P и Q редом и нека је $P' = \mathcal{S}_q(P)$. *Транслацијом равни S^2* по правој s за дуж PP' називамо композицију $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Означавамо је $\tau_{\overrightarrow{PP'}}$.

Приметимо да праве p и q припадају истом хиперболичком прамену правих са базисном правом s. За праву s кажемо и да је *базисна права транслације*. Транслација чува инваријантност праве s. Поред ове особине, из наведене дефиниције следи:

Теорема 6.17.1. *Транслација је директна изометријска трансформација равни S^2 и нема инваријантних тачака.*



Слика 6.23.

Доказ. Транслација је директна изометријска трансформација као композиција двеју индиректних трансформација.

Претпоставимо да је X инваријантна тачка транслације $\tau_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. То значи да је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(X) = X$, тј.

$$\mathcal{S}_a(X) = X', \quad \text{и} \quad \mathcal{S}_b(X') = X.$$

Дакле, дуж (XX') би имала две симетрале, а то је немогуће. Дакле, транслација $\tau_{\overrightarrow{PP'}}$ нема инваријантних тачака. □

Теорема 6.17.2. *Транслација у равни S^2 је одређена уређеним паром тачака. Два уређена пара тачака (X, Y) и (X', Y') равни S^2 одређују исту транслацију ако и само ако су колинеарни, исто орјентисани и подударни.*

Доказ ове теореме аналоган је доказу Теореме 6.11.1.

Наредним теоремама изводимо још нека својства транслација равни S^2.

Теорема 6.17.3. *Ако је у равни S^2 тачка B средиште дужи AC, онда важи $\tau_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$.*

Доказ. Нека је s права одређена тачкама A и C, а ако се тачке A и C поклапају, нека је s произвољна права која садржи тачку A. Означимо са a, b и c праве нормалне на правој s редом у тачкама A, B и C. Важи $\mathcal{S}_b(A) = C$, па је на основу дефиниције транслације $\tau_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$. На основу дефиниције централне симетрије је $\mathcal{S}_B = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_s$ и $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a$. Дакле, $\tau_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$, што је и требало доказати. □

Наредним двема теоремама установљују се услови под којима нека изометријска трансформација равни S^2 представља транслацију те равни.

Теорема 6.17.4. *Ако директна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни S^2 нема инваријантних тачака, она представља транслацију те равни.*

Доказ. Како је је $\mathcal{I}$ директна изометријска трансформација равни S^2, то се она може представити као композиција двеју осних рефлексија те равни. Нека је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p. \tag{6.19}$$

Трансформација $\mathcal{I}$ нема инваријантних тачака, па је $p \cap q = \emptyset$. Ако обележимо са P било коју тачку праве p и са P' тачку такву да је $\mathcal{S}_q(P) = P'$ биће

$$\tau_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p. \tag{6.20}$$

Из релација (6.19) и (6.20) следи да је $\mathcal{I} = \tau_{\overrightarrow{PP'}}$. □

Теорема 6.17.5. *Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни S^2 представља транслацију те равни ако и само ако се може представити као композиција двеју разних централних рефлексија те исте равни.*

Доказ. Нека најпре изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни S^2 представља неку транслацију $\tau_{\overrightarrow{PP'}}$, те равни. Обележимо са Q средиште дужи PP', са s праву одређену тачкама P и P', а са p и q праве управне на правој s редом у тачкама P и Q. Тада имамо да је

$$\tau_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_p) = \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P.$$

Обратно, претпоставимо да изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни S^2 представља композицију двеју разних централних рефлексија. Нека је нпр. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P$. Обележимо са s праву одређену тачкама P и Q, са p и q праве које су у тачкама P и Q управне на правој s и са P' тачку такву да је $\mathcal{S}_q(P) = P'$. Тада је

$$\mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P = (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_p) = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \tau_{\overrightarrow{PP'}},$$

чиме је доказ теореме у потпуности завршен. □

Теорема 6.17.6. (О трансмутацији транслације равни S^2) *Ако је $\tau_{\overrightarrow{MN}}$ транслација а $\mathcal{I}$ било која изометрија равни S^2, тада је*

$$\mathcal{I} \circ \tau_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{I}^{-1} = \tau_{\overrightarrow{\mathcal{I}(M)\mathcal{I}(N)}}.$$

Доказ. Транслација $\tau_{\overrightarrow{MN}}$ се може приказати као композиција осних рефлексија $\mathcal{S}_m$ и $\mathcal{S}_n$, при чему су праве m и n управне на праву MN респективно у тачкама M и S, а S је средиште дужи MN. Према томе важи

$$\begin{aligned}\mathcal{I} \circ \tau_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{I}^{-1} &= \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_n \circ \mathcal{I}^{-1} \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{I}^{-1} \\ &= \mathcal{S}_n^{\mathcal{I}} \circ \mathcal{S}_m^{\mathcal{I}} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(n)} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{I}(m)} = \tau_{\overrightarrow{\mathcal{I}(M)\mathcal{I}(N)}}\end{aligned}$$

а то је и требало показати. □

Овај став омогућује да се установе ставови о комутативности транслације са осталим изометријама.

Није тешко утврдити да важи следеће тврђење:

Теорема 6.17.7. *Композиција парног броја осних рефлексија равни S^2 чије су осе управне на некој правој s представља коинциденцију или транслацију са осом s.*

Теорема 6.17.8. *Композиција парног броја централних симетрија равни S^2 којима средишта припадају некој правој s представља коинциденцију или транслацију са осом s.*

Доказ. На основу Теореме 6.14.4., композиција непарног броја централних рефлексија, чија средишта припадају једној правој s, је такође централна рефлексија. Дакле, композиција парног броја централних рефлексија, чија средишта припадају једној правој s, једнака је композицији две централне рефлексије. То је према Теореми 6.17.5. транслација, ако се средишта те две централне рефлексије не поклапају, односно коинциденција ако им се средишта поклапају.

6.18 Клизајућа рефлексија равни $\mathbf{S^2}$

Проучавању изометријских трансформација равни S^2 којима се минимална симетријска репрезентација састоји од три осне рефлексије претходи увођење нарочите врсте изометријских трансформација. То су тзв. транслаторне, односно клизајуће рефлексије.

Дефиниција 6.18.1. *Транслаторна* (*клизајућа*) *рефлексија* равни S^2 у ознаци $\mathcal{G}_{\overrightarrow{MN}}$ је композиција транслације $\tau_{\overrightarrow{MN}}$ и осне рефлексије

$\mathcal{S}_{MN}$ са осом MN, тј.

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{S}_{MN} \circ \tau_{\overrightarrow{MN}}.$$

Композиција из дефиниције је комутативна. Заиста, узимајући у обзир да је $\tau_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m$, $\mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m$, $\mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_n$, где је $p \equiv MN$ имамо

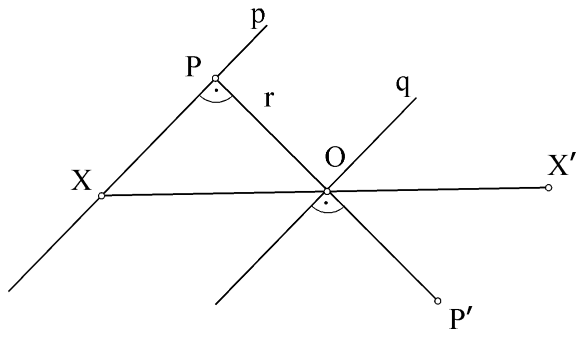
$$\tau_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_p \circ \tau_{\overrightarrow{MN}}.$$

Поред ове особине из дефиниције непосредно следи да је $\mathcal{G}_{\overrightarrow{MN}}$ индиректна изометријска трансформација.

Теорема 6.18.1. *Клизајућа рефлексија $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ равни S^2 нема инваријантних тачака. Она има јединствену инваријантну праву, то је оса PP' те рефлексије.*

Доказ. Први део теореме доказујемо индиректним поступком. Ако претпоставимо да клизајућа рефлексија $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ поседује неку инваријантну тачку X имамо да је $\mathcal{S}_{PP'} \circ \tau_{\overrightarrow{PP'}}(X) = X$. Ставимо ли да је $\tau_{\overrightarrow{PP'}}(X) = X'$, биће $\mathcal{S}_{PP'}(X') = X$. С обзиром да транслација $\mathcal{S}_{PP'}$ равни S^2 нема инваријантних тачака биће $X \neq X'$. Из релација $\mathcal{S}_{PP'}(X') = X$ и $X \neq X'$ следи да су тачке X и X' с разних страна праве PP', што је немогуће јер из релације $\tau_{\overrightarrow{PP'}}(X) = X'$ следи да праве XX' и PP' немају заједничких тачака. Стога клизајућа рефлексија $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ равни S^2 нема инваријантних тачака. Будући да је права s на којој се налазе тачке P и P' инваријантна у свакој од тих трансформација $\tau_{\overrightarrow{PP'}}$ и $\mathcal{S}_{PP'}$, права s је инваријантна и у клизајућој рефлексији $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$. Индиректним поступком доказујемо да је s јединствена инваријантна права трансформације $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$. Ако би трансформација $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$, сем праве s, поседовала још неку инваријантну праву t, важила би релација $\tau_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_{PP'}(t) = t$. Нека је T тачка таква да је $T \in t$ и $T \notin s$, затим T' тачка одређена релацијом $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}(T) = T'$. При томе су тачке T и T' с разних страна праве s, те права t сече праву s у некој тачки S. С обзиром да су у клизајућој рефлексији $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ праве s и t инваријантне, инваријантна је и њихова пресечна тачка S, што је према првом делу ове теореме немогуће. $\square$

Теорема 6.18.2. *Ако индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни S^2 нема инваријантних тачака, она представља клизајућу рефлексију.*



Слика 6.24.

Доказ. Нека је X произвољна тачка равни S^2 и X' њена одговарајућа тачка (Слика 6.24). С обзиром да изометрија $\mathcal{I}$ нема инваријантних тачака, имамо да је $X \neq X'$. Ако обележимо са O средиште дужи XX', биће X инваријантна тачка композиције $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}$. Будући да је $\mathcal{I}$ индиректна и $\mathcal{S}_O$ директна изометријска трансформација равни S^2, композиција $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}$ представља индиректну изометријску трансформацију те равни. Стога она представља неку осну рефлексију $\mathcal{S}_p$ чија оса p садржи инваријантну тачку X. Из једнакости $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_p$ следи да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p$. По претпоставци, изометрија $\mathcal{I}$ нема инваријантних тачака, па O не припада правој p. Обележимо са r праву равни S^2, која садржи тачку O, а управна је на правој p, у тачки P, а са q праву равни S^2, која је управна на правој r у тачки O. Нека је P' тачка одређена релацијом $\mathcal{S}_q(P) = P'$. Тада имамо да је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{PP'} \circ \tau_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}},$$

чиме је доказ теореме завршен. $\square$

Теорема 6.18.3. *Ако су P и P' две разне тачке неке равни S^2 и s права те исте равни, тада је*

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_P \quad \text{ако и само ако} \quad \mathcal{S}_s(P) = P'.$$

Доказ. Нека је најпре $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_P$. Обележимо са s' медијатрису дужи PP' и са p праву равни S^2 управну на праву PP' у тачки P. Тада имамо да је

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \tau_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_{PP'} = \mathcal{S}_{s'} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{PP'} = \mathcal{S}_{s'} \circ \mathcal{S}_P.$$

Према томе $\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_{s'}$ па се осе s и s' поклапају. Одавде следи

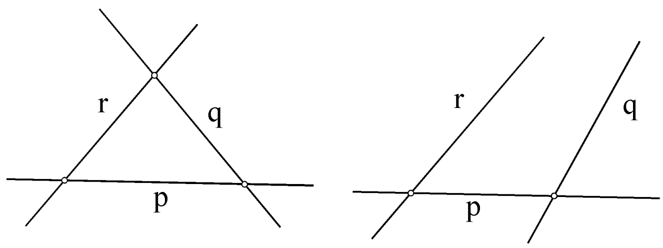
$$\mathcal{S}_s(P) = P'.$$

Обратно, нека је $\mathcal{S}_s(P) = P'$. Ако обележимо са p праву која припада равни S^2 и која је у тачки P управна на правој PP', имамо да је

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \tau_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_{PP'} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{PP'} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_P,$$

чиме је доказ теореме у потпуности завршен. □

Теорема 6.18.4. (Основна теорема о клизајућој рефлексији) *Композиција трију осних рефлексија равни S^2 у односу на праве које не припадају једном прамену правих представља клизајућу рефлексију равни S^2. Наиме ако је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ где праве p, q и r не припадају једном прамену правих тада је $\mathcal{I}$ клизајућа рефлексија.*



Слика 6.25.

Доказ. Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ не може имати инваријантних тачака, јер ако би имала инваријантну тачку она би представљала осну рефлексију у односу на неку праву која би са правама p, q, r чинила прамен што је немогуће јер по претпоставци праве p, q, r не припадају истом прамену (Слика6.25). Нека је S произвољна тачка равни S^2 и S' тачка равни S^2 таква да је $\mathcal{I}(S) = S'$ и $S \neq S'$. Нека је O средиште дужи SS'. У композицији $\mathcal{S}_O\mathcal{I}$ тачка S је инваријантна, тј. $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}(S) = S$. Индиректна изометријска трансформација $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}$ има инваријантну тачку па мора представљати неку осну рефлексију $\mathcal{S}_{p'}$ при чему $S \in p'$. Из $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{p'}$ следи $\mathcal{I} = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_{p'}$ јер је $\mathcal{S}_O^2 = \varepsilon$. При томе тачка O не припада правој p' јер би у супротном $\mathcal{I}$ представљала неку осну рефлексију $\mathcal{S}_{r'}$ чија је оса r' управна на правој p' у тачки O што је по претпоставци теореме искључено јер би у том случају праве p, q и r припадале истом прамену. Обележимо са P подножје управне из тачке O на праву p' а са q' праву која садржи тачку O и управна је на правој p. Тада је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_{p'} = \mathcal{S}_{OP} \circ \mathcal{S}_{q'} \circ \mathcal{S}_{p'} = \mathcal{S}_{OP} \tau_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$$

а то је и требало показати. □

На основу свега реченог није тешко закључити да важи следеће тврђење.

Теорема 6.18.5. *Постоје две и само две врсте индиректних изометријских трансформација равни S^2: клизајућа рефлексија и осна рефлексија.*

Део 7

Изометријске трансформације простора S^3

7.1 Директне и индиректне изометријске трансформације простора S^3

У овом поглављу биће уведене и разматране специфичне врсте изометријских трансформација простора S^3. Као и у случају равни S^2 установићемо најпре да постоје директне и индиреректне изометријске трансформације тог простора.

Постоје две врсте изиметријских трансформација простора S^3. То су *директне изометријске трансформације* које не мењају оријентацију простора S^3 и *индиректне изометријске трансформације* које мењају оријентацију тог простора.

Јасно је да идентична трансформација простора S^3 представља директну изометријску трансформацију.

Поменимо још и следеће тврђење

Теорема 7.1.1. *Композиција састављена из двеју директних или двеју индиректних изометријских трансформација простора S^3 увек представља директну изометријску трансформацију тог простора. Композиција састављена из једне директне и једне индиректне трансформације простора S^3 увек представља индиректну изометријску трансформацију.*

Та особина омогућује да установимо да важи и следеће тврђење:

Теорема 7.1.2. *Скуп свих директних изометријских трансформација простора S^3 представља некомутативну подгрупу групе $G(\mathcal{I})$ свих изометријских трансформација простора S^3.*

Дефиниција 7.1.1. Подгрупу из претходне теореме називамо *групом директних изометријских трансформација простора S^3* и симболички обележавамо $G(\mathcal{I}^+)$.

Директне и индиректне изометријске трансформације простора S^3 представљају само један начин поделе изометријских трансформација тог простора. Класификацији тих трансформација можемо приступити на потпуно другачији начин. Када смо разматрали тврђење према коме изометријска трансформација са четири некомпланарне инваријантне тачке представља коинциденцију, било је природно поставити питање које су то неидентичне изометријске трансформације тог простора које поседују три неколинеарне инваријантне тачке, односно две, једну или нула инваријантних тачака.

7.2 Раванска рефлексија простора $\mathbf{S^3}$

У овм одељку посебну пажњу ћемо посветити управо на неиденти чне изометријске трансформације простора S^3 које имају три неколинеарне инваријантне тачке, и према томе по једну раван којој су све тачке инваријантне. Такве трансформације назваћемо раванским рефлексијама.

Дефиниција 7.2.1. *Рефлексијом у односу на раван* π називамо неидентичну трансформацију $\mathcal{S}_\pi$ простора S^3 којој је свака тачка равни π инваријантна. Раван π називамо основом те раванске рефлексије.

Из дефиниције раванских рефлексија непосредно закључујемо да раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ простора S^3 ван равни π нема инваријантних тачака, јер би у супротном била коинциденција.

Такође, важи и следеће тврђење:

Теорема 7.2.1. *Ако у раванској рефлексији $\mathcal{S}_\pi$ простора S^3 тачки $X \in S^3$ одговара нека тачка $X' \in S^3$, $X' \neq X$, тада је π медијална раван дужи XX'.*

Доказ. Обележимо са A, B, C три неколинеарне тачке равни π. Тада је

$$AX \cong AX', \quad BX \cong BX', \quad CX \cong CX'.$$

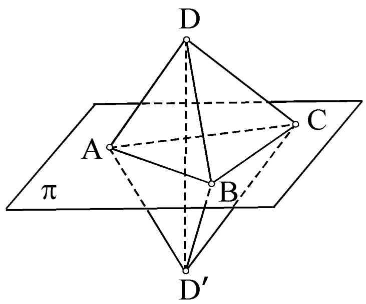
Следи да свака од тачака A, B, C припада медијалној равни π' дужи XX'. Како су тачке A, B, C неколинеарне, оне одређују тачно једну раван, па је $\pi \equiv \pi'$. □

Из ових особина непосредно следи тврђење:

Теорема 7.2.2. *Раванска рефлексија је једнозначно одређена својом основом π или пак једним паром X и X', $X \neq X'$ одговарајућих тачака.*

Наводимо још неколико важнијих особина раванске рефлексије простора S^3.

Теорема 7.2.3. *Раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ простора S^3 је индиректна изометријска трансформација.*



Слика 7.1.

Доказ. Означимо са A, B, C три неколинеарне тачке равни π, а са D произвољну тачку ван равни π и са D' тачку такву да је $D' = \mathcal{S}_\pi(D)$. Тада је $D \neq D'$ и π је медијална раван дужи DD' (Слика 7.1). Дакле, тачке D и D' су са разних страна равни π те су одговарајући тетраедри $ABCD$ и $ABCD'$ супротносмерни. Значи, раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ је индиректна изометријска трансформација. □

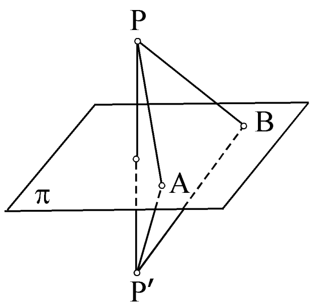
Теорема 7.2.4. *Раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ простора S^3 је инволуциона изометријска трансформација.*

Доказ. Означимо са X произвољну тачку простора S^3, а са X', X'' тачке такве да је

$$\mathcal{S}_\pi(X) = X' \quad \text{и} \quad \mathcal{S}_\pi(X') = X''.$$

Ако је $X \in \pi$, доказ је тривијалан. Нека је $X \notin \pi$. У том случају је $X \neq X'$ и $X' \neq X''$. Значи, основа π раванске рефлексије $\mathcal{S}_\pi$ је медијална раван сваке од дужи XX' и $X'X''$, па закључујемо да је $X \equiv X''$. Овим смо доказали да је $\mathcal{S}_\pi^2 = \varepsilon$, тј. да је раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ инволуциона трансформација. □

Теорема 7.2.5. *Ако индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора S^3 има две разне инваријантне тачке A и B, она представља неку раванску рефлексију $\mathcal{S}_\pi$ простора S^3 при чему основа π садржи обе тачке A и B.*



Слика 7.2.

Доказ. С обзиром на то да је $\mathcal{I}$ индиректна а ε директна изометријска трансформација, мора бити $\mathcal{I} \neq \varepsilon$. Према томе, постоји у простору S^3 тачка P таква да је $\mathcal{I}(P) = P'$ и $P \neq P'$. При томе је $PA \cong P'A$ и $PB \cong P'B$, одакле следи да свака од тачака A и B припада медијалној равни π дужи PP' (Слика 7.2). Како су $\mathcal{S}_\pi$ и $\mathcal{I}$ индиректне изометријске трансформације, то њихова композиција $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}$ представља директну изометријску трансформацију простора S^3. Та директна изометријска трансформација поседује три инваријантне неколинеарне тачке A, B, P, па према томе она представља коинциденцију. Дакле $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I} = \varepsilon$, а одавде је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi$. □

Теорема 7.2.6. *Ако је $\mathcal{S}_\pi$ раванска рефлексија простора S^3 и p права тог простора, а не припада равни π, тада је*

$$\mathcal{S}_\pi(p) = p \quad \textit{ako i samo ako} \quad p \perp \pi.$$

Доказ. Нека је $\mathcal{S}_\pi(p) = p$. Тада је $\pi \cap p \neq \emptyset$, јер би у супротном истоветне праве p и $\mathcal{S}_\pi(p)$ биле са разних страна равни π, а то је наравно немогуће. Дакле, права p продире раван π. Означимо са O ту продорну тачку. Ако је P тачка праве p таква да важи $P \neq O$ и $P' = \mathcal{S}_\pi(P)$, тада да је $P \neq P'$ и $P' \in p$. То значи да је π медијална раван дужи PP' тј. $p \perp \pi$.

Обратно, нека је $p \perp \pi$ и $p \cap \pi = O$. Тада је $\mathcal{S}_\pi(p) = p$. Заиста, ако је P тачка праве p, $P \neq O$ и $P' = \mathcal{S}_\pi(P)$,тада је $P \neq P'$. Дакле π је медијална раван дужи PP' па је $PP' \perp \pi$. ССледи $P' \in p$, а одавде закључујемо да је $\mathcal{S}_\pi(p) = p$.

Теорема 7.2.7. *Ако су $\mathcal{S}_\alpha$ и $\mathcal{S}_\beta$ две раванске рефлексије простора S^3 са разним основама α и β , а X тачка тог истог простора, тада је*

$$\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha(X) = X \quad \textit{ako i samo ako} \quad X \in \alpha \cap \beta.$$

Доказ. Нека је $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha(X) = X$. Означино са X' тачку простора S^3, такву да је $\mathcal{S}_\alpha(X) = X'$. Тада је $\mathcal{S}_\beta(X') = X$. Докажимо да се тачке X и X' поклапају. Ако би било $X \neq X'$, тада би постојале две разне медијалне равни α и β дужи XX' што је контрадикција. Дакле $X \equiv X'$, па је $\mathcal{S}_\alpha(X) = X$ и $\mathcal{S}_\beta(X) = X$, одакле следи да је X заједничка тачка равни α и β.

Обратно, нека је X заједничка тачка равни α и β. Тада $X \in \alpha$ и $X \in \beta$, одакле је $\mathcal{S}_\alpha(X) = X$ и $\mathcal{S}_\beta(X) = X$, тј. $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha(X) = X$. □

Теорема 7.2.8. (О трансмутацији раванске рефлексије) *Ако је $\mathcal{S}_\pi$ раванска рефлексија простора S^3 и $\mathcal{I}$ произвољна изометријска трансформација тог простора тада је $\mathcal{S}_\pi^{\mathcal{I}} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(\pi)}$.*

Доказ. Нека је $\pi' = \mathcal{I}(\pi)$ и нека је $P' \in \pi'$ произвољна тачка. Тада постоји тачка P равни π таква да је $P' = \mathcal{I}(P)$. Тада је,

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}^{-1}(P') = \mathcal{I}^{-1}(P').$$

Одавде следи

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}^{-1}(P') = \mathcal{I} \circ \mathcal{I}^{-1}(P') = \varepsilon(P') = P'.$$

Дакле, све тачке равни π' су инваријантне у композицији

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}^{-1}.$$

Како је још та композиција индиректна трансформација простора S^3, то она представља раванску рефлексију $\mathcal{S}_{\pi'}$. Према томе, добили смо

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(\pi)},$$

а то је и требало доказати. □

Теорема 7.2.9. *У простору S^3 две раванске рефлексије $\mathcal{S}_\alpha$ и $\mathcal{S}_\beta$ са разним основама α и β комутирају ако и само ако су им основе међу собом управне.*

Доказ. Претпоставимо најпре да је $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta$. Тада је

$$\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\alpha. \tag{7.1}$$

Означимо са α' раван одређену са $\mathcal{S}_\beta(\alpha) = \alpha'$. Тада према Теореми 7.2.8. налазимо да је

$$\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}'_\alpha. \tag{7.2}$$

Сада из једнакости (7.1) и (7.2) следи да је $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}'_\alpha$, тј. $\alpha = \alpha'$, а одавде $\alpha = \mathcal{S}_\beta(\alpha)$. Одавде, узимајући у обзир да је $\alpha \neq \beta$ закључујемо да је раван α управна на раван β.

Обратно, нека је сада раван α управна на раван β. Одавде следи да је $\mathcal{S}_\beta(\alpha) = \alpha$, те према теореми о трансмутацији раванске рефлексије $\mathcal{S}_\alpha$ раванском рефлексијом $\mathcal{S}_\beta$, добијамо да је

$$\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\alpha \quad \text{тј.} \quad \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta.$$

На тај начин је доказ теореме у потпуности завршен. □

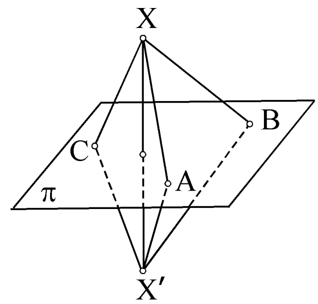
7.3 Представљање изометријских трансформација простора S³ помоћу раванских рефлексија

У овом одељку биће установљена једна значајна особина изометријских трансформација апсолутног простора S^3. То је особина према којој се *свака изометријска трансформација тог простора може представити у облику композиције коначног броја раванских рефлексија.* Истовремено ће бити доказано да минималан број раванских рефлексија помоћу којих се може представити произвољна унапред задата изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора S^3, није већи од четири. Ово својство омогућује да помоћу раванских рефлексија изградимо и целу теорију изометријских трансформација најпре апсолутног простора S^3, а затим и еуклидског простора E^3.

Теорема 7.3.1. *Свака изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора S^3 може се представити као композиција највише четири раванске рефлексије тог простора.*

Доказ. С обзиром на максималан број линеарно незвисних тачака инваријантних у изометрији $\mathcal{I}$ простора S^3 могу наступити пет различита случаја.

(i) Изометрија $\mathcal{I}$ има бар четири некомпланарне инваријантне тачке. Означимо их са A, B, C и D. Тада је $\mathcal{I}(A) = A$, $\mathcal{I}(B) = B$, $\mathcal{I}(C) = C$, $\mathcal{I}(D) = D$. Према основном ставу о изометријским трансформацијама простора S^3 таква изометријска трансформација представља коинциденцију простора S^3, тј. $\mathcal{I} = \varepsilon$. Како је $\mathcal{S}_\pi$ инволуциона изометријска трансформација, следи $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi$, тј. у овом случају $\mathcal{I}$ је представљена као композиција две раванске рефлексије.

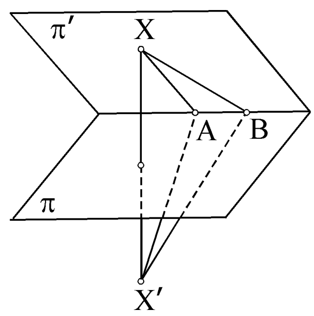


Слика 7.3.

(ii) Изометрија $\mathcal{I}$ располаже са три неколинеарне инваријантне тачке, означимо их са A, B и C. Ван равни одређеној тачкама A, B и C изометрија $\mathcal{I}$ нема инваријантних тачака, па је $\mathcal{I} \neq \varepsilon$. Према томе постоји тачка X простора S^3 таква да је $\mathcal{I}(X) = X'$ и $X \neq X'$ (Слика 7.3). Означимо са π медијалну раван дужи XX'. Како је $AX = AX'$, $BX = BX'$ и $CX = CX'$ следи да тачке A, B и C припадају равни π. Композиција $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}$ има четири инваријантне некомпланарне тачке A, B, C и X па представља коинциденцију. Дакле

$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I} = \varepsilon$, одакле је

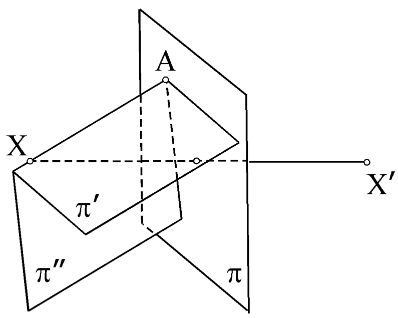
$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi.$$



Слика 7.4.

(iii) Изометрија $\mathcal{I}$ располаже са две разне инаријантне тачке, означимо их са A и B. Ван праве одређене тачкама A и B изометрија $\mathcal{I}$ нема инваријантних тачака, па је $\mathcal{I} \neq \varepsilon$. Према томе постоји тачка X ван праве AB простора S^3 таква да је $\mathcal{I}(X) = X'$ и $X \neq X'$ (Слика 7.4). Означимо са π медијалну раван дужи XX'. Како је $AX = AX'$ и $BX = BX'$ следи да тачке A и B припадају равни π. Композиција $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}$ има три инваријантне неколинеарне тачке A, B и X па према претходном случају представља неку раванску рефлексију $\mathcal{S}_{\pi'}$. Дакле $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi'}$, одакле је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_{\pi'}.$$



Слика 7.5.

(iv) Изометрија $\mathcal{I}$ располаже са једном инваријантном тачком A. Постоји тачка X простора S^3 различита од тачке A таква да је $\mathcal{I}(X) = X'$ и $X \neq X'$ (Слика 7.5). Означимо са π медијалну раван дужи XX'. Како је $AX = AX'$ следи да тачка A припада равни π. Композиција $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}$ има две разне инваријантне тачке A и X па према претходном случају представља композицију две раванске рефлексије $\mathcal{S}_{\pi'}$ и $\mathcal{S}_{\pi''}$. Дакле $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi'} \circ \mathcal{S}_{\pi''}$, одакле је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_{\pi'} \circ \mathcal{S}_{\pi''}.$$

(v) Остаје нам да размотримо случај када изометрија $\mathcal{I}$ нема инваријантних тачака. Постоји тачка X простора S^3 таква да је $\mathcal{I}(X) = X'$ и $X \neq X'$. Означимо са π медијалну раван дужи XX'. Композиција $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}$ има инваријантну тачку X па према претходном случају представља композицију три раванске рефлексије $\mathcal{S}_{\pi'}$, $\mathcal{S}_{\pi''}$ и $\mathcal{S}_{\pi'''}$. Дакле $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi'} \circ \mathcal{S}_{\pi''} \circ \mathcal{S}_{\pi'''}$, одакле је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_{\pi'} \circ \mathcal{S}_{\pi''} \circ \mathcal{S}_{\pi'''}.$$

Тиме је доказ теореме у потпуности завршен. □

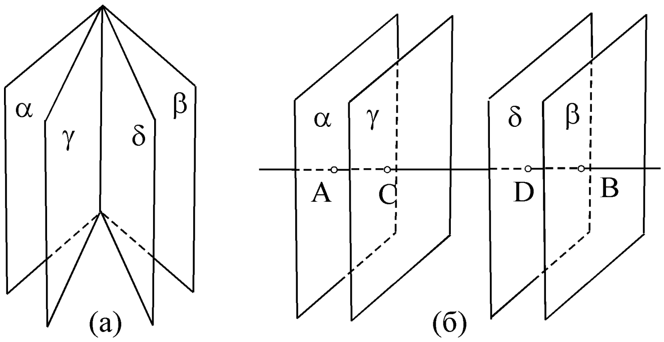
Напомена. Важиће и генерализација овакве теореме за n-димензиони простор при чему ће свака изометрија $\mathcal{I}$ простора S^n моћи да се прикаже као композиција највише $n+1$ хиперраванских рефлексија, при чему под појмом хиперраванске рефлексије подразумевамо неидентичну изометрију која чува инваријантним $n-1$ димензиони подпростор простора S^n, тачку по тачку.

Дефиниција 7.3.1. Репрезентацију изометријске трансформације простора S^3 са минималним бројем раванских рефлексија називамо *минималном* или *оптималном репрезентацијом*.

7.4 Прамен равни. Сноп равни. Сноп правих простора S^3

Дефиниција 7.4.1. Скуп $\mathcal{X}$ равни простора S^3 представља *прамен равни* ако за три произвољне равни α, β и γ скупа $\mathcal{X}$, композиција три раванске рефлексије $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ представља раванску рефлексију $\mathcal{S}_\delta$.

Својства прамена равни у простору S^3 потпуно су аналогна својствима прамена правих простора S^2.



Слика 7.6.

Дефиниција 7.4.2. Прамен равни у S^3 називамо *коаксијалним* или *елиптичким* ако се све равни тог прамена секу по једној правој (Слика 7.6 (а)). Прамен равни у S^3 називамо *ортогоналним* или *хиперболичким* ако су све равни тог прамена управне на једној правој (Слика 7.6 (б)).

Дефиниција 7.4.3. Скуп $\mathcal{Y}$ правих простора S^3 представља *сноп правих* ако су сваке две праве из тог скупа компланарне. Равни одређене паровима правих неког снопа називамо равнима тог снопа правих. Скуп свих равни неког снопа правих називамо *снопом равни.*

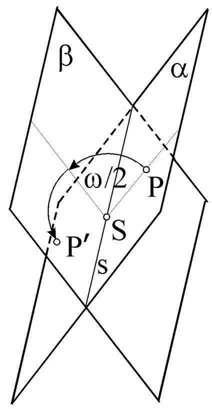
У апсолутној геометрији разликујемо две врсте снопова правих.

Дефиниција 7.4.4. Скуп свих правих које се секу у истој тачки простора S^3 представља сноп који називамо *конкурентним* или *елиптичким снопом* правих простора S^3. Скуп свих правих управних на исту раван неког простора S^3 представља сноп који називамо *ортогоналним* или *хиперболичким снопом правих* простора S^3.

Поменутим сноповима правих одговарају снопови равни. Стога у простору S^3 имамо две врсте снопова равни.

7.5 Осна ротација простора $\mathbf{S}^3$

Већ смо поменули да се изучавању сложених врста изометријских трансформација апсолутног простора S^3 а касније и еуклидског простора E^3 може приступити *разматрањем специфичних облика њихових минималних симетријских репрезентација.* Придржавајући се доследно тог начела установићемо поступно све постојеће врсте изометријских трансформација апсолутног простора S^3 а касније и еуклидског простора E^3 и извести њихове најважније особине. Најпре ћемо се позабавити осном ротацијом.



Слика 7.7.

Дефиниција 7.5.1. Нека су $\mathcal{S}_\alpha$ и $\mathcal{S}_\beta$ раванске рефлексије простора S^3 чије се основе α и β секу по некој правој s и нека је ω двоструки орјентисани угао између равни α и β (Слика 7.7). *Осном ротацијом простора* S^3 око праве s за угао ω називамо трансформацију

$$\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha.$$

Права s је оса ротације, а орјентисани угао ω угао ротације.

Како је раванска рефлексија индиректна изометријска трансформација, осна ротација је као композиција двеју раванских рефлексија директна изометрија. Није тешко установити да је осној ротацији $\mathcal{R}_{s,\omega}$ инваријантна свака тачка праве s и да ван праве s та трансформација нема инваријантних тачака. Ако у осној ротацији $\mathcal{R}_{s,\omega}$ угао ω није опружен, s је једина инваријантна права ове трансформације док су инвариваријантне једино равни управне на осу s. Ако је у осној ротацији угао ω опружен, тада сем праве s постоји неограничено много правих које су инваријантне и то су праве које секу праву s под правим углом. У том случају сем равни које су управне на праву s постоји још неограничено много инваријантних равни, то су равни које садрже праву s.

С обзиром да су у осној ротацији простора S^3 инваријантне једино тачке осе s, две осне ротације простора S^3 могу бити једнаке само у случају ако имају заједничку осу. Није тешко доказати да је осна ротација $\mathcal{R}_{s,\omega}$ једнозначно одређена правом s и углом ротације ω.

Теорема 7.5.1. *Скуп $\mathcal{R}_s$ који се састоји од идентичне трансформације и свих осних ротација простора S^3 које имају заједничку осу s представља групу.*

Доказ. Нека су $\mathcal{R}_{s,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{s,\beta}$ две произвољне осне ротације из скупа $\mathcal{R}_s$. Означимо са π произвољну раван која садржи праву s. Нека су μ и ν равни одређене са $\mathcal{R}_{s,\alpha} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu$ и $\mathcal{R}_{s,\beta} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi$. Дакле, равни μ и ν секу раван π по правој s. То значи да равни mu и nu садрже праву s, па се оне поклапају или се секу по правој s. Даље важи

$$\mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu.$$

Размотримо понаособ обе могућности за равни μ и ν:

(i) Ако се равни μ и ν поклапају, онда је $\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu = \varepsilon$.

(ii) Ако се равни μ и ν секу по правој s, онда је $\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu = \mathcal{R}_{s,\gamma}$.

У оба случаја је $\mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} \in \mathcal{R}_s$.

Нека је сада $\mathcal{R}_{s,\omega}$ произвољна осна ротација из скупа $\mathcal{R}_s$. Означино са μ и ν равни простора S^3 такве да важи $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu$. Тада је

$$\mathcal{R}_{s,\omega}^{-1} = (\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu)^{-1} = \mathcal{S}_\mu^{-1} \circ \mathcal{S}_\nu^{-1} = \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu = \mathcal{R}_{s,-\omega}.$$

Дакле ако $\mathcal{R}_{s,\omega} \in \mathcal{R}_s$ тада и $\mathcal{R}_{s,\omega}^{-1} \in \mathcal{R}_s$.

Како елементи скупа $\mathcal{R}_s$ представљају истовремено и елементе групе $G(\mathcal{I})$ свих изометријских трансформација простора S^3, то је $\mathcal{R}_s$ подгрупа групе $G(\mathcal{I})$. Дакле, $\mathcal{R}_s$ представља групу у односу на операцију $\circ$ слагања пресликавања. $\square$

Дефиниција 7.5.2. Групу која се састоји од идентичког пресликавања и свих осних ротација са заједничком осом s називамо *групом осних ротација простора S^3 око праве s* и симболички је означавамо са $G(\mathcal{R}_s)$.

Теорема 7.5.2. *Група* $G(\mathcal{R}_s)$ *је комутативна.*

Доказ. Нека је π раван која саржи праву s а μ и ν равни такве да је $\mathcal{R}_{s,\alpha} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu$ и $\mathcal{R}_{s,\beta} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi$. Коршћењем претходних релација добијамо

$$\mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu. \tag{7.3}$$

и

$$\mathcal{R}_{s,\alpha} \circ \mathcal{R}_{s,\beta} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi. \tag{7.4}$$

Равни μ и ν секу раван π по истој правој s. То значи да равни μ, ν и π припадају истом коаксијалном прамену равни $\mathcal{L}_s$. Дакле, композиција $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu$ представља неку раванску рефлексију, која је инволуциона трансформација простора S^3 па је њен квадрат коинциденција. Дакле, $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu = \varepsilon$, тј.

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu. \tag{7.5}$$

Упоређивањем релација (7.3), (7.4) и (7.5) добијамо

$$\mathcal{R}_{s,\alpha} \circ \mathcal{R}_{s,\beta} = \mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha},$$

тј. важи комутативност. □

Теорема 7.5.3. (Даламбер,[1] 1743) *Свака директна изометријска трансформација* $\mathcal{I}$ *простора* S^3 *која има једну инваријантну тачку* O *предсравља коинциденцију* ε *или неку осну ротацију* $\mathcal{R}_{s,\omega}$ *чија оса* s *садржи тачку* O.

Доказ. У случају када је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi = \varepsilon$ доказ следи непосредно. Претпоставимо да је $\mathcal{I} \neq \varepsilon$. Тада у S^3 постоји тачка P таква да је $\mathcal{I}(P) = P'$ и $P \neq P'$. Нека је π_1 медијална раван дужи PP'. Композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ је директна изометријска трансформација и има две инваријантне тачке O и P, $O \neq P$ па представља неку раванску рефлексију $\mathcal{S}_{\pi_2}$. Из $\mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ следи $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}$, при чему се равни π_1 и π_2 секу по правој OP Ако ту праву обележимо са s а двоструки орјентисани угао између равни π_1 и π_2 са ω, биће $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega}$. □

Теорема 7.5.4. (О трансмутацији осних ротација) *Ако је* $\mathcal{R}_{s,\omega}$ *осна ротација простора* S^3 *и* $\mathcal{I}$ *произвољна изометрија истог простора, тада је*

$$\mathcal{R}^{\mathcal{I}}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{\mathcal{I}(s),\mathcal{I}(\omega)}.$$

[1] Жан ле Рон д'Аламбер (1717-1783) француски математичар, физичар и филозоф.

Доказ. Нека су μ и ν равни простора S^3 такве да важи

$$\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu.$$

Тада се равни μ и ν о секу по правој s при чему је $\measuredangle(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\omega$. Нека су затим μ' и ν' равни простора S^3 такве да је $\mu' = \mathcal{I}(\mu)$ и $\nu' = \mathcal{I}(\nu)$. Тада се равни μ' и ν' секу по правој $s' = \mathcal{I}(s)$ под углом $\measuredangle(\mu',\nu') = \frac{1}{2}\omega'$. У даљем доказу применићемо теорему о трансмутацији раванских рефлексија. Тада

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I} \circ (\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu) \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{\nu'} \circ \mathcal{S}_{\mu'} = \mathcal{R}_{s',\omega'},$$

чиме је доказ теореме завршен. □

Теорема 7.5.5. *Осна ротација $\mathcal{R}_{s,\omega}$ и раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ простора S^3 су две комутативне трансформације ако и само ако је права s управна на равни π.*

Доказ. Нека је најпре да је $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi$ тј.

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s,\omega}. \tag{7.6}$$

Ако обележимо са s' праву која у раванској рефлексији одговара правој s и са ω' угао који у тој истој рефлексији одговара углу ω, применом теореме о трансмутацији осних рефлексија добијамо

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s',\omega'}. \tag{7.7}$$

Из (7.6) и (7.7) следи да је $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s',\omega'}$. Дакле, осе s и s' се поклапају, а оријентисани углови ω и ω' су подударни и истосмерни. То је могуће само у случају ако је $s \perp \pi$

Обратно, нека је $s \perp \pi$. Означимо са s' праву за коју важи $s' = \mathcal{S}_\pi(s)$ а са ω' угао за који је $\omega' = \mathcal{S}_\pi(\omega)$. Тада ће се праве s и s' поклапати, а оријентисани углови ω и ω' биће подударни и истосмерни, па је $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s',\omega'}$. Сада, применом теореме о трансмутацији осних ротација, добијамо да је

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s',\omega'} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi,$$

тј. $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi$, а то је и требало доказати. □

Теорема 7.5.6. *Две осне ротације $\mathcal{R}_{a,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{b,\beta}$ простора S^3, при чему углови α и β нису опружени углови, су комутативне ако и само ако се осе a и b тих ротација поклапају.*

Доказ. Нека је $\mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} = \mathcal{R}_{a,\alpha} \circ \mathcal{R}_{b,\beta}$. Тада је

$$\mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} \circ R_{b,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{a,\alpha}. \tag{7.8}$$

Ако је $\mathcal{R}_{b,\beta}(a) = a'$, $\mathcal{R}_{b,\beta}(\alpha) = \alpha'$ према теореми о трансмутацији осних ротација имамо да је

$$\mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} \circ R_{b,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{a',\alpha'}. \tag{7.9}$$

Из ове једнакости (7.8) и (7.9) следи да је $\mathcal{R}_{a,\alpha} = \mathcal{R}_{a',\alpha'}$. Према томе, праве a и a' се поклапају, а углови α и α' подударни и истосмерни, што је могуће само у случају када се праве a и b поклапју.

Обратно тврђење већ смо доказали Теоремом 7.5.2.

Оно се може *доказати на још један начин.* Претпоставимо, да се праве a и b поклапају. Ако је $\mathcal{R}_{b,\beta}(a) = a'$ и $\mathcal{R}_{b,\beta}(\alpha) = \alpha'$, праве a и a' ће се поклапати, а углови α и α' биће подударни и истосмерни. Дакле, биће $\mathcal{R}_{a,\alpha} = \mathcal{R}_{a',\alpha'}$. Сада,применом теореме о трансмутацији осних ротација закључујемо да је $\mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} \circ R_{b,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{a,\alpha}$ тј.

$$\mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} = \mathcal{R}_{a,\alpha} \circ \mathcal{R}_{b,\beta},$$

а то је и требало доказати. □

Теорема 7.5.7. (Ојлер[2], 1765) *Композиција двеју осних ротација простора S^3, којима се осе секу у некој тачки O, представља осну ротацију чија оса садржи тачку O.*

Доказ. Нека су $\mathcal{R}_{a,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{b,\beta}$ осне ротације простора S^3, којима се осе a и b секу у тачки O. Означимо са π раван одређену правима a и b. Нека су затим μ и ν равни такве да је $\mathcal{R}_{a,\alpha} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu$ и $\mathcal{R}_{b,\beta} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi$. Тада композицију осних ротација $\mathcal{R}_{a,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{b,\beta}$ можемо написати у облику

$$\mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu.$$

С обзиром на то да равни μ и ν секу раван π по двема разним правама a и b, следи да је $\mu \neq \nu$. Дакле, две разне равни μ и ν имају заједничку тачку O, па према томе оне имају и заједничку

[2]Леонард Ојлер (1707-1783) швајцарски математичар и физичар. Ојлер је дошао до великих открића у потпуно различитим областима као што су математичка анализа и теорија графова.

праву c. Значи, композиција $\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu$ представља неку осну ротацију простора S^3 $\square$

Примедба. Ојлерова теорема представља специјалан случај Даламберове, међутим Ојлеру није била позната Даламберова теорема.

Осна ротација простора S^3 омогућује да се дефинишу специфичне врсте симетрија простора S^3.

7.6 Осна симетрија реда n простора S^3

Дефиниција 7.6.1. У простору S^3 лик Φ располаже осном симетријом реда n ако постоји осна ротација $\mathcal{R}_{s,\frac{4R}{n}}$ таква да је $\mathcal{R}_{s,\frac{4R}{n}}(\Phi) = \Phi$ при чему је $n \in Z^+$ или је n рационалан број облика $\frac{p}{q}$ где су p и q узајамно прости. Права s представља осу наведене симетрије реда n.

Особине осне симетрије реда n аналогне су особинама централне симетрије равни S^2 реда n.

Теорема 7.6.1. *Ако просторни лик Φ располаже осном симетријом реда n, $n \in N$ и n је дељив целим позитивним бројем m, $m > 1$, тада лик Φ располаже и осном симетријом реда m.*

Теорема 7.6.2. *Осна симетрија реда n лика Φ је периодична трансформација. Период k те трансформације одређен је релацијом $k = n$ или $k = p$ у зависности од тога да ли је n цео број или је облика p/q, где су p и q узајамно прости бројеви.*

Специјално за $n = 2$ осну симетрију реда два називамо једноставно *осном симетријом простора* S^3. Својства осне симетрије простора S^3 у потпуности су аналогна својствима централне симетрије равни S^2.

Приметимо да осну рефлексију $\mathcal{S}_s$ простора S^3 можемо представити као композицију две раванске рефлексије $\mathcal{S}_\alpha$ и $\mathcal{S}_\beta$, при чему су равни α и β ортогоналне међусобно и имају заједничку праву s

Одавде непосредно следи да осна рефлексија $\mathcal{S}_s$ простора S^3 представља осну ротацију којој је угао ротације једнак $2R$. Дакле, осна рефлексија представља директну изометријску трансформацију простора S^3 којој су инваријантне једино тачке осе s. Није тешко доказати да је у осној рефлексији $\mathcal{S}_s$ простора S^3 инваријантна свака раван која садржи осу s, као и свака раван која је управна на оси s. У равни која садржи осу s осна рефлексија $\mathcal{S}_s$ индукује осну рефлексију, а у равни која је управна на оси с осна рефлексија $\mathcal{S}_s$ индукује централну рефлексију.

Теорема 7.6.3. *Осна рефлексија $\mathcal{S}_s$ простора S^3 је инволуциона трансформација.*

Доказ. Нека су α и β две равни простора S^3 такве да имају непразан пресек и да су међусобно ортогоналне. Из ортогоналности равни α и β следи

$$\mathcal{S}_s^2 = (\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha) \circ (\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha) = (\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha) \circ (\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta) = \varepsilon,$$

чиме је доказ теореме завршен. □

Теорема 7.6.4. *Раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ и осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ простора S^3, при чему оса p не припада основи π, представљају две комутативне изометријске трансформације ако и само ако је права p управна на раван π.*

Доказ. Нека је најпре $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi$ тј.

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_p. \tag{7.10}$$

Нека је сада p' права за коју важи $\mathcal{S}_\pi(p) = p'$. На основу теореме о трансмутацији осне рефлексије $\mathcal{S}_p$ раванском рефлексијом $\mathcal{S}_\pi$ следи

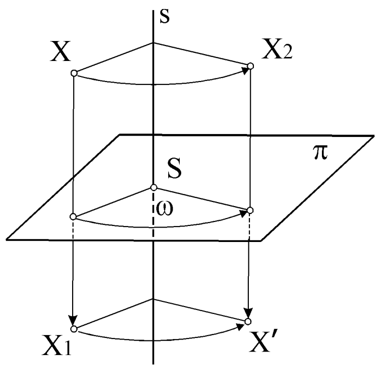
$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_{p'}. \tag{7.11}$$

Из једнакости (7.10) и (7.11) следи да је $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{p'}$, а одавде $p \equiv p'$. Како права p не припада равни π релација $p \equiv p'$ важи само у случају када је права p управна на раван π.

Обратно, нека је $p \perp \pi$. Одавде следи да је $\mathcal{S}_\pi(p) = p$, па на основу теореме о трансмутацији осне рефлексије $\mathcal{S}_p$ раванском рефлексијом $\mathcal{S}_\pi$ имамо да је $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_p$, одакле непосредно следи $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi$, а то је и требало доказати. □

7.7 Оснoротациона рефлексија простора S^3

У досадашњим излагањима упознали смо само једну врсту индиректних изометријских трансформација простора S^3. То су раванске рефлексије тог простора. По дефиницији оне представљају неидентичне изометријске трансформације које располажу равнима чије су све тачке инваријантне. то значи да свака раванска рефлексија поседује бесконачно много инваријантних тачака. Увешћемо индиректне изометријске трансформације које поседују само по једну инваријантну тачку. Њима претходи увођење нове врсте индиректних изометријских трансформација, тзв. основоротационих рефлексија простора S^3.



Слика 7.8.

Дефиниција 7.7.1. Композицију једне осне ротације $\mathcal{R}_{s,\omega}$ и једне раванске рефлексије $\mathcal{S}_\pi$ простора S^3 при чему је права s управна на раван π називамо *основоротационом рефлексијом простора* S^3 и обележавамо је са $\mathcal{R}_{\pi;s,\omega}$. Раван π зовемо *основом* а оријентисани угао ω *углом основоротационе рефлексије* $\mathcal{R}_{\pi;s,\omega}$, док пресечну тачку S праве s са равни π називамо *средиштем* основоротационе рефлексије простора S^3.

Из дефиниције непосредно следи да је основоротациона рефлексија $\mathcal{R}_{\pi;s,\omega}$ простора S^3 једнозначно одређена основом π, осом s и оријентисаним углом ω. С обзиром да је осна ротација директна, а раванска рефлексија индиректна изометријска трансформација, њихова композиција, према томе и основоротациона рефлексија представља индиректну изометријску трансформацију простора S^3. Није тешко доказати да оснoротациона рефлексија $\mathcal{R}_{\pi;s,\omega}$ простора S^3 поседује само једну инваријантну тачку, то је тачка S која се добија у пресеку основе π и осе s. Ако угао ω није опружен, она поседује јединствену инваријантну праву оса s, и јединствену инваријантну раван основу π те оснoротационе рефлексије.

Наведимо сада неке основне особине оснoротационих рефлексија простора S^3.

Из дефиниције непосредно закључујемо да су осна ротација $\mathcal{R}_{s,\omega}$ и раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ које сачињавају ротациону рефлексију $\mathcal{R}_{\pi;s,\omega}$ комутативне трансформације јер је s управна на π. Означимо $X_1 = \mathcal{S}_\pi(X)$, $X' = \mathcal{S}_\pi(X_2)$, $X_2 = \mathcal{R}_{s,\omega}(X)$, $X' = \mathcal{R}_{s,\omega}(X_1)$. Тада је $X' = \mathcal{R}_{\pi;s,\omega}(X) = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega}(X) = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi(X)$ (Слика 7.9).

Теорема 7.7.1. *Свака индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ која има јединствену инваријантну тачку S у простору S^3 представља оснoротациону рефлексију са средиштем S.*

Доказ. Како је $\mathcal{I}$ индиректна изометријска трансформација простора S^3, а ε директна изометријска трансформација тог простора, биће $\mathcal{I} \neq \varepsilon$. Због тога постоји тачка X простора S^3 таква да је $\mathcal{I}(X) = X'$ и $X \neq X'$. Нека је π_1 медијална раван дужи XX'. Композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ има две инваријантне тачке S и X. Композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ је директна изометријска трансформација простора S^3 те према Даламберовој теореми представља коинциденцију или осну ротацију чија оса садржи тачке S и X.

Композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ није коинциденција јер ако би било $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \varepsilon$ онда би било $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1}$ те би изометријска трансформација $\mathcal{I}$ представљала раванску рефлексију и поседовала сем тачке S још инваријантних тачака, што је контрадикција са претпоставком теореме.

Према томе, $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega}$, тј. ако је права s управна на π_1 непосредно закључујемо да је $\mathcal{I}$ оснoротациона рефлексија. Ако права s није управна на π_1 тада обележимо са π_2 раван која садржи праву s и управна је на раван π_1, а са π_3 обележимо раван такву да је $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$. У том случају је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$ при чему је раван π_2 управна на π_1 и сече је по правој s_1. Обележимо са σ_1 раван која садржи праву s_1 и управна је на π_3, а са σ_2 раван такву да је $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{S}_{\sigma_1} \circ \mathcal{S}_{\sigma_2}$. С обзиром да је $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{R}_{s_1,2R}$ биће и $\mathcal{S}_{\sigma_1} \circ \mathcal{S}_{\sigma_2} = \mathcal{R}_{s_1,2R}$ одакле следи да права s_1 припада равни σ_2 јер је $\pi_1 \cap \pi_2 = s_1$ и да је раван σ_2 управна на σ_1 јер углови ротације код једнаких ротација морају бити подударни. Према томе важи $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3} = \mathcal{S}_{\sigma_1} \circ \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$. Равни σ_2 и π_3 су управне на раван σ_1 и секу се по некој правој o која садржи тачку S и која је управна на σ_1 те композиција $\mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$ представља осну ротацију $\mathcal{R}_{o,\theta}$ око праве o при чему је θ двоструки орјентисани угао између равни σ_2 и π_3. Према томе имамо да је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\sigma_1} \circ \mathcal{R}_{o,\theta} = \mathcal{R}_{\sigma_1;o,\theta}$$

чиме смо доказали да изометрија $\mathcal{I}$ представља осноротациону рефлексију са средиштем S. □

Теорема 7.7.2. (Теорема Шала) *Свака директна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора S^3 може се представити као композиција двеју осних рефлексија тог простора.*

Доказ. Ако је $\mathcal{I} = \varepsilon$, тада због инволутивности осне рефлексије за произвољну праву p простора S^3 је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p$.

Ако је $\mathcal{I} \neq \varepsilon$ тада постоји тачка X простора S^3 таква да је $\mathcal{I}(X) = X'$, $X \neq X'$. Нека је π_1 медијална раван дужи XX'. С обзиром на то да је $\mathcal{I}$ директна а раванска рефлексија $\mathcal{S}_{\pi_1}$ индиректна изометрија простора S^3, композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ је индиректна изометрија простора S^3 па представља или раванску рефлексију или осноротациону рефлексију са средиштем X.

Нека је композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ раванска рефлексија. Означимо је са $\mathcal{S}_{\pi_2}$. тада је $\mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$, одакле је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}$. Означимо са π раван управну на равни π_1 и π_2 а са m и n праве по којима она сече равни π_1 и π_2. Тада је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n.$$

Ако композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ сем тачке X нема других инваријантних тачака тада она представља осноротациону рефлексију $\mathcal{R}_{\pi_4;s,\omega}$, тј. $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{R}_{\pi_4;s,\omega}$ којој је средиште тачка X. Обележимо са π_2 раван која сдржи праву s и управна је на π_1, а са π_3 раван такву да је $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$. У том случају биће

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{R}_{\pi_4;s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3} \circ \mathcal{S}_{\pi_4}.$$

Како је права s у равни π_3 и управна је на π_4 следи да је раван π_3 управна на раван π_4. Сем тога је $\pi_3 \cap \pi_4 = n$, $\pi_1 \cap \pi_2 = m$ и $\pi_1 \perp \pi_2$ одакле следи да је

$$\mathcal{I} = (\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}) \circ (\mathcal{S}_{\pi_3} \circ \mathcal{S}_{\pi_4}) = \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n,$$

што је и трбало показати. □

7.8 Централна рефлексија простора $\mathbf{S}^3$

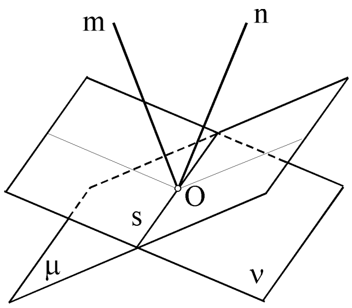
Осноротациона рефлексија простора S^3 у општем случају није инволуциона трансформација. Она је инволуциона само у случају када је угао ротације опружен.

Дефиниција 7.8.1. *Централном рефлексијом* $\mathcal{S}_O$ простора S^3 називамо композицију једне осне рефлексије $\mathcal{S}_s$ и једне раванске рефлексије $\mathcal{S}_\pi$ простора S^3, при чему је $s \perp \pi$ у тачки O.

Према томе, ако је права s управна на раван π у тачки O, имамо да је $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_\pi$. Тачку O називамо центром или средиштем централне рефлексије $\mathcal{S}_O$.

Из дефиниције непосредно следи да централна рефлексија простора S^3 представља осноротациону рефлексију којој је угао ротације једнак $2R$. Централна рефлексија представља индиректну изометријску трансформацију простора S^3. Она има само једну инваријантну тачку - средиште O те централне рефлексије. Нека је X тачка простора S^3 различита од центра O и $X' = \mathcal{S}_O(X)$. Тада је O средиште дужи XX'.

Теорема 7.8.1. *Централна рефлексија* $\mathcal{S}_O$ *простора* S^3 *једнозначно је одређена својим средиштем* O*.*



Слика 7.9.

Доказ. Довољно је да докажемо да за две произвољне праве m и n које се секу у тачки O и равни μ и ν које су у тачки O управне редом на правама m и n важи релација $\mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_m = S\nu \circ \mathcal{S}_n$. Означимо са π раван одређену правама m и n, а са s пресечну равни μ и ν.

Тада је права s управна на раван π. Нека су μ' и ν' равни одређене редом паровима правих m, s и n, s. Следи

$$\mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_{\mu'} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_{\nu'} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_n,$$

одакле следи да је централна рефлексија $\mathcal{S}_O$ простора S^3 једнозначно одређена својим средиштем O. □

Теорема 7.8.2. *Централна рефлексија $\mathcal{S}_O$ простора S^3 је инволуциона трансформација.*

Доказ. Нека је π произвољна раван која садржи тачку O и s права управна у тачки O на раван π. Тада је $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_s$, па је

$$\mathcal{S}_O^2 = (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_s) = (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_s) = \varepsilon,$$

тј. централна рефлексија $\mathcal{S}_O$ је инволуциона трансформација. □

Теорема 7.8.3. (Теорема о трансмутацији централне рефлексије) *Ако је $\mathcal{S}_O$ централна рефлексија и $\mathcal{I}$ произвољна изометријска трансформација простора S^3 и $O' = \mathcal{I}(O)$, тада је*

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{O'}.$$

Доказ. Обележимо са p произвољну праву која садржи тачку O и са π раван која је у тачки O управна на правој p. Ако у трансформацији $\mathcal{I}$ правој p одговара права p', а равни π одговара раван π', онда је права p' управна на раван π' у некој тачки O', и при том важи $\mathcal{I}(O) = O'$. Из тог разлога је

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}^{-1} &= \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1} \\
&= (\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}^{-1}) \circ (\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}_{-1}) \\
&= \mathcal{S}_{\pi'} \circ \mathcal{S}_{p'} = \mathcal{S}_{O'},
\end{aligned}$$

тј. централна рефлексија $\mathcal{S}_{O'}$ је добијена трансмутацијом централне рефлексије $\mathcal{S}_O$, изометријском трансформацијом $\mathcal{I}$, што означавамо са $\mathcal{S}_O^{\mathcal{I}} = \mathcal{S}_{\mathcal{I}(O)}$. □

Теорема 7.8.4. *Централна рефлексија $\mathcal{S}_O$ и раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ простора S^3 су две комутативне трансформације ако и само ако тачка O припада равни π.*

Доказ. Нека је $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi$ тј.
$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_O. \tag{7.12}$$
Означимо са O' тачку за коју је $\mathcal{S}_\pi(O) = O'$. Тада, према теореми о трансмутацији централне рефлексије $\mathcal{S}_O$ раванском рефлексијом $\mathcal{S}_\pi$ имамо да је
$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_{O'}. \tag{7.13}$$
Из (7.12) и (7.13) следи да је $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_{O'}$, оакле следи да се таћке O и O' поклапају, што је задовољено само у случају када тачка O припада равни π.

Обратно, нека тачка O припада равни π. Одавде следи да је $\mathcal{S}_\pi(O) = O$. Применом теореме о трансмутацији централне рефлексије $\mathcal{S}_O$ раванском рефлексијом $\mathcal{S}_\pi$ добијамо да је $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_O$ тј. $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi$, а то је и требало доказати. □

Теорема 7.8.5. *Централна рефлексија $\mathcal{S}_O$ и осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ простора S^3 су две комутативне трансформације ако и само ако тачка O припада правој p.*

Доказ. Нека је је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p$ тј.
$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_O, \tag{7.14}$$
и нека је O' тачка за коју важи $\mathcal{S}_p(O) = O'$. Тада, према теореми о трансмутацији централне рефлексије $\mathcal{S}_O$ осном рефлексијом $\mathcal{S}_p$ имамо да је
$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{O'}. \tag{7.15}$$
Сада, из (7.14) и (7.15) следи $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_{O'}$, а одавде је $O = O'$. Дакле, тачка O припада правој p.

Обратно, нека је $O \in p$. Одавде следи да је $\mathcal{S}_p(O) = O$. Према теореми о трансмутацији централне рефлексије $\mathcal{S}_O$ осном рефлексијом $\mathcal{S}_p$ следи $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_O$ тј. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p$. □

Теорема 7.8.6. *Централна рефлексија простора S^3 може се представити као композиција три раванске рефлексије којима су основе управне међу собом у средишту те рефлексије.*

Доказ. Важи $\mathcal{R}_{\pi;s,2R} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,2R}$ и $\mathcal{R}_{s,2R} = \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu$ при чему је s пресечна права равни μ и ν и $\mu \perp \nu$. Како је $s \perp \pi$, то су равни π, μ и ν три међусобом управне равни. Означимо са O пресечну тачку тих трију равни. Тада је $\mathcal{R}_{\pi;s,2R} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu$, тј. $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu$, а то је и требало доказати. □

Теорема 7.8.7. *Композиција непарног броја централних рефлексија простора S^3 чија средишта припадају некој правој p представља такође неку централну рефлексију простора S^3 чији је центар на правој p.*

Доказ. Нека су O_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ средишта централних рефлексија $\mathcal{S}_{O_i}$ при чему тачке O_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ припадају правој p. Нека је најпре $n = 3$, тј посматрајмо изометрију $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{O_3} \circ \mathcal{S}_{O_2} \circ \mathcal{S}_{O_1}$. Нека су π_1, π_2, π_3 равни управне на правој p редом у тачкама O_1, O_2 и O_3. Тада је $\mathcal{S}_{O_3} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$, $\mathcal{S}_{O_2} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{\pi_2}$ и $\mathcal{S}_{O_1} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{\pi_1}$ при чему је свака од три композиције комутативна. Према томе имамо

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{\pi_3} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{\pi_3} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1}.$$

Основе π_1, π_2 и π_3 управне су на истој правој p те припадају истом прамену равни. Према томе композиција $\mathcal{S}_{\pi_3} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1}$ представља неку раванску рефлексију $\mathcal{S}_\pi$ чија основа π припада истом прамену равни, тј. $\pi \perp p$. Дакле добили смо да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi$ и $p \perp \pi$. Дакле $\mathcal{I}$ представља неку централну рефлексију $\mathcal{S}_O$ где је O пресечна тачка праве p и равни π.

За $n > 3$ доказ се изводи математичком индукцијом.

Претпоставимо да тврђење вази за $n = 2k - 1$ централних рефлексија, тј. да композиција централних рефлексија

$$S_{O_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, 2k - 1,$$

при чему средишта поменутих рефлексија припадају некој правој p, представља такође неку централну рефлексију S_O простора S^3 чије је средиште O на правој p.

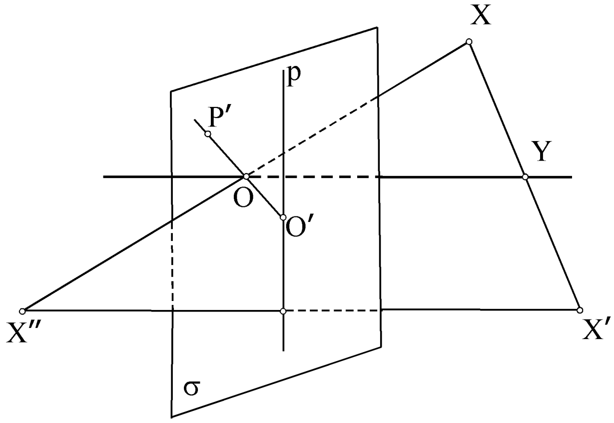
Докажимо да тврђење важи за композицију од $n = 2k + 1$ централних рефлексија којима су средишта на правој p. Нека је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{O_{2k+1}} \circ \mathcal{S}_{O_{2k}} \mathcal{S}_{O_{2k-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{O_2} \circ \mathcal{S}_{O_1}.$$

Како према доказаном делу тврђење важи за композицију три централне рефлексије, добијамо

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{O_{2k+1}} \circ \mathcal{S}_{O_{2k}} \circ \mathcal{S}_O,$$

тј. $\mathcal{I} = S_{O'}$, при чему је $O' \in p$. На тај начин, доказ је у потпуности завршен. $\square$



Слика 7.10.

Теорема 7.8.8. (Генералисана теорема Хјелмслева) *Средишта дужи која спајају одговарајуће тачке индиректне изометријске трансформације $\mathcal{I}$ простора S^3, или се поклапају или припадају једној равни.*

Доказ. Ако трансформација $\mathcal{I}$ простора S^3 представља централну рефлексију тог простора тврђење следи непосредно. Размотрћемо случај када трансформација $\mathcal{I}$ простора S^3 не прдставља централну рефлексију тог простора.

Нека је у том случају P произвиљна тачка простора S^3 и $\mathcal{I}(P) = P'$. Нека је O средиште дужи PP' (Слика 7.10) и X произвољна тачка простора S^3 различита од тачке P. Нека је још $\mathcal{I}(X) = X'$ и $\mathcal{S}_O(X') = X''$. У том случају тачка P је инваријанта директне изометријске трансформације $\mathcal{S}_O\mathcal{I}$. Тада према Даламберовој теореми она представља неку осну ротацију $\mathcal{R}_{p,\omega}$, при чему оса p садржи тачку P. Како је $\mathcal{R}_{p,\omega}(X) = X''$, медијална раван σ дужи XX'' садржи осу p осне ротације $\mathcal{R}_{p,\omega}$. Означимо са Y средиште дужи XX'. Права OY одређена средиштима страница $X'X''$ и XX' троугла $\Delta XX'X''$ је управна на медијалној равни σ. Како је $OY \perp \sigma$ и раван σ садржи праву p то је права OY управна на праву p. Како су тачка Y и права p фиксиране то тачка Y припада равни π која садржи тачку O и управна је на правој p. Раван π садржи средишта дужи која спајају кореспондентне тачке изометријске трансформације $\mathcal{I}$. $\square$

Дефиниција 7.8.2. Раван π одређену средиштима дужи кореспондентних тачака индиректне изометријске трансформације $\mathcal{I}$ простора S^3 називамо *основом* те изометријске трансформације.

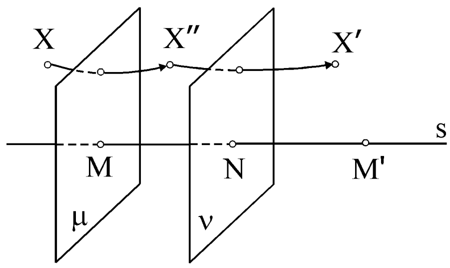
7.9 Транслација простора S^3

Поред осних ротација постоји још једна врста изометријских трансформација простора S^3 које се могу представити као композиција двеју раванских рефлексија. То је транслација простора S^3.

Дефиниција 7.9.1. Нека су $\mathcal{S}_\mu$ и $\mathcal{S}_\nu$ раванске рефлексије простора S^3 са основама μ и ν управним на правој s у тачкама M и N и нека је M' тачка симетрична тачки M у односу на раван ν. *Транслацијом простора* S^3 по правој s за орјентисану дуж $\overrightarrow{MM'}$ називамо трансформацију

$$\tau_{\overrightarrow{MM'}} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu.$$

Праву s називамо *осом те транслације.*



Слика 7.11.

Наводимо неке од особина транслације простора S^3. Из дефиниције непосредно закључујемо да је транслација $\tau_{\overrightarrow{MM'}}$ простора S^3 једнозначно одређена тачкама M и M' (Слика 7.11). С обзиром на то да је раванска рефлексија индиректна изометрија, транслација је као композиција двеју раванских рефлексија директна изометријска трансформација. Није тешко установити да транслација нема инваријантних тачака и да поседује једну инваријантну праву - осу транслације s одређену тачкама M и M'. Такође, није тешко установити да скуп τ_s који се састоји од идентичке трансформације ε

и свих транслација простора S^3 са заједничком осом s представља Абелову групу.

Дефиниција 7.9.2. Групу која се састоји од идентичке трансформације и свих транслација простора S^3 са заједничком осом s називамо *групом транслација са осом* s и обележавамо је $G(\tau_s)$.

Теорема 7.9.1. *Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора S^3 представља транслацију тог простора ако и само ако се може представити као композиција двеју разних централних рефлексија тог простора.*

Доказ. Нека је најпре изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора S^3 - транслација $\tau_{\overrightarrow{PP'}}$ тог простора. Нека је тачка Q средиште дужи PP', а s права одређена тачкама P и P'. Нека су α и β равни управне на правој с редом у тачкама P и Q. Сада је

$$\tau_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = (\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_\alpha) = \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P.$$

Обратно, нека је нпр. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P$. Означимо са s праву одређену тачкама P и Q, а са α и β равни које су у тачкама P и Q управне на правој s. Нека је $P' = \mathcal{S}_\beta(P)$. Сада је

$$\mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P = (\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_\alpha) = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \tau_{\overrightarrow{PP'}},$$

чиме је доказ завршен. □

Теорема 7.9.2. (О трансмутацијама транслација) *Ако је $\tau_{\overrightarrow{MM'}}$ транслација и $\mathcal{I}$ било која изометријска трансформација простора S^3 тада је*

$$\tau^{\mathcal{I}}_{\overrightarrow{MM'}} = \tau_{\overrightarrow{\mathcal{I}(M)\mathcal{I}(M')}}.$$

Доказ се врши аналогно одговарајућем доказу о трансмутацијам транслација равни S^2. Није тешко утврдити да важе следеће теореме:

Теорема 7.9.3. *Композиција парног броја централних рефлексија простора S^3 чија средишта припадају некој правој p представља транслацију простора S^3 дужправе p.*

Теорема 7.9.4. *Транслација $\tau_{\overrightarrow{MM'}}$ и praванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ простора S^3 су комутативне ако и само ако M и M' припадају равни π.*

Теорема 7.9.5. *Транслација* $\tau_{\overrightarrow{MN}}$ *и осна ротација* $\mathcal{R}_{s,\omega}$ *простора* S^3 *су комутативне ако и само ако тачке* M *и* N *припадају правој* s.

Доказ. Нека је најпре $\mathcal{R}_{s,\omega} \circ \tau_{\overrightarrow{MN}} = \tau_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}$ тј.

$$\mathcal{R}_{s,\omega} \circ \tau_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}^{-1} = \tau_{\overrightarrow{MN}}. \tag{7.16}$$

Ако означимо са M' и N' тачке које у осној ротацији $\mathcal{R}_{s,\omega}$ одговарају редом тачкама M и N, тада према теореми о трансмутацији транслација имамо да је

$$\mathcal{R}_{s,\omega} \circ \tau_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}^{-1} = \tau_{\overrightarrow{M'N'}}. \tag{7.17}$$

Из једнакости (7.16) и (7.17)следи да је $\tau_{\overrightarrow{MN}} = \tau_{\overrightarrow{M'N'}}$, па су оријентисане $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{M'N'}$ истосмерне и поклапају се, то је могуће само ако је M, N, M' и N припадају истој правој. То значи да тачке M, N, M' и N припадају оси ротације s.

Обратно, нека сада тачке M и N припадају оси s. Означимо са $M' = \mathcal{R}_{s,\omega}(M)$ и $N' = \mathcal{R}_{s,\omega}(N)$. Сада ће дужи MN и $M'N'$ припадати оси s и бити попдударне и истосмарне па је $\tau_{\overrightarrow{MN}} = \tau_{\overrightarrow{M'N'}}$. На крају имамо да је

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{s,\omega} \circ \tau_{\overrightarrow{MN}} &= \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \tau_{\mathcal{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}^{-1} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \\ &= \tau_{\overrightarrow{M'N'}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \tau_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega},\end{aligned}$$

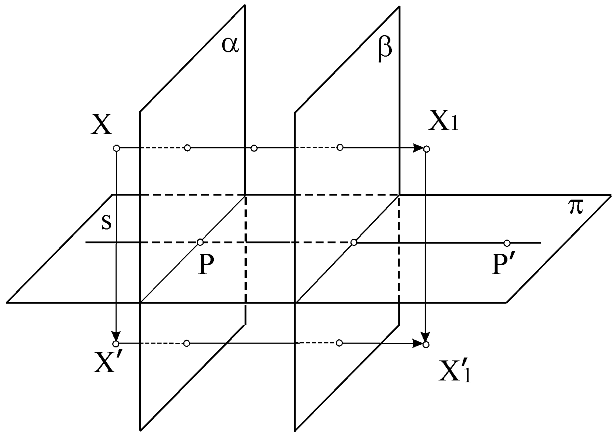
тј. осна ротација $\mathcal{R}_{s,\omega}$ и транслација $\tau_{\overrightarrow{MN}}$ простора S^3 су комутативне трансформације. □

7.10 Клизајућа рефлексија простора S3

Дефиниција 7.10.1. *Клизајућом или транслаторном рефлексијом* $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{PP'}}$ називамо композицију састављену од транслације $\tau_{\overrightarrow{PP'}}$ и раванске рефлексије $\mathcal{S}_\pi$, при чему права PP' припада равни π. Праву s одређену тачкама P и P' називамо *осом* а раван π *основом* клизајуће рефлексије (Слика 7.12).

Композиција из дефиниције је комутативна јер раван π садржи праву PP'.

Навешћемо сада неке особине клизајуће рефлексије простора S^3.



Слика 7.12.

Клизајућа рефлексија простора S^3 је у потпуности одређена основом π и осом PP'. Клизајућа рефлексија нема инваријантних тачака, има само једну инваријантну праву осу PP' и две инваријантне равни: основу π и раван која садржи осу PP' и управна је на основу π. Клизајућа рефлексија је индиректна изометријска трансформација.

Теорема 7.10.1. *Ако је $\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}}$ клизајућа рефлексија простора S^3 и q права која је у средишту Q дужи PP' управна на раван π, тада је*

$$\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_P = \mathcal{S}_{P'} \circ \mathcal{S}_q.$$

Доказ. Према дефиницији клизајуће рефлексије простора S^3, добијамо да је

$$\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_\pi \circ \tau_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_P;$$
$$G_{\pi;\overrightarrow{PP'}} = \tau_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_{P'} \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_{P'} \circ \mathcal{S}_q.$$

чиме је доказ завршен. □

7.11 Завојно кретање простора S³

Дефиниција 7.11.1. *Завојним или хеликоидним кретањем* $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega}$ простора S^3 називамо композицију састављену од једне транслације

$\tau_{\overrightarrow{PP'}}$ и једне осне ротације $\mathcal{R}_{\overrightarrow{PP'},\omega}$. Орјентисану праву $\overrightarrow{PP'}$ називамо осом а орјентисани угао ω углом тог завојног кретања. У случају да је угао ω опружен, такво завојно кретање зовемо *завојним полуобртајем.*

Непосредно из дефиниције следи да је завојно кретање једнозначно одређено ако су задати транслациона дуж $\overrightarrow{PP'}$ и угао обртања ω.

Завојно кретање је директна изометријска трансформација као композиција две директне изометрије. Према познатом ставу транслација $\tau_{\overrightarrow{PP'}}$ и осна ротација $\mathcal{R}_{\overrightarrow{PP'},\omega}$ су комутативне трансформације јер се осе осне ротације и транслације поклапају. Завојно кретање нема инваријантних тачака и има само једну инваријантну праву - осу PP'.

Није тешко доказати следећу теорему применом генералисане теореме Хјелмслева.

Теорема 7.11.1. *Ако су дата ма каква два подударна и супротно орјентисана скупа тачака простора S^3, тада средине дужи које спајају одговарајуће тачке у изометрији коју одређују ти скупови тачака припадају једној равни.*

Теорема 7.11.2. *Завојно кретање $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega}$ простора S^3 може се представити као композиција двеју осних рефлексија тог простора, при чему су осе тих рефлексија међу собом мимоилазне.*

Доказ. Ако обележимо са s праву одређену тачкама P и P', а са π_1, π_2 и σ_1, σ_2 равни такве да је $\tau_{PP'} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1}$ и $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1}$ биће $\pi_1, \pi_2 \perp s$ и $\sigma_1 \cap \sigma_2 = s$, па је $\sigma_1 \perp \pi_1$ и $\sigma_2 \perp \pi_2$. Ставимо ли да је $\sigma_1 \cap \pi_1 = s_1$ и $\sigma_2 \cap \pi_2 = s_2$ налазимо да је

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega} = \tau_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} &= \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} \\ &= \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} = \mathcal{S}_{s_2} \circ \mathcal{S}_{s_1}\end{aligned}$$

што је и требало доказати. □

С обзиром на то да у апсолутној равни није у потпуности разрешаван проблем дисјунктних правих, то је и разлог немогућности извођења потпуне класификације изометријских трансформација, како у равни S^2 тако и у простору S^3. Тек након увођења аксиоме паралелности биће могуће извршити потпуну класификацију изометријских трансформација, како равни, тако и простора.

Део 8

Непрекидност у геометрији

Неким тврђењима у претходним разматрањима на известан начин смо били упућени да праву линију замишљамо и на моделу представљамо као *непрекидну линију.* Могли смо само наслутити, али не и егзактно изградити учење о непрекидности.

На пример, тврђење према коме круг који има тачака са разних страна неке праве, сече ту праву није доказивано, већ се претпостаљало да представља јасну геометриску чињеницу.

Чак и сам Еуклид[1] из Александрије у својим *Елементима*, наводи конструкцију правилног троугла, у којој не доказује да се одговарајући кругови секу. Све до краја XIX века математичари нису осетили потребу доказивања оваквих тврђења, као ни потребу увођења аксиома непрекидности.

Тек је Мориц Паш[2] 1882. године истакао неопходност увођења аксиома непрекидности и заснивање непрекидности у геометрији у својој књизи *Новија геометрија.*

У уводу ове књиге напоменули смо да је још Архимед приметио неке недостатке аксиоматике у Еуклидовим елементима. У свом делу *О ваљку и лопти* он је употпунио Еуклидове аксиоме. Поред, осталих аксиома он је додавањем тзв. *Еудиксове аксиоме престиживости* ударио темеље *геометријске непрекидности у великом.* Према аксиоми престиживости се коначним бројем преношења може "стићи и престићи" свака тачка праве.

[1]Еуклид (330. пне. - 275. пне.), грчки математичар. Написао је бројна дела, од којих нека нису сачувана и позната су само по наслову. Сачувана дела су: "Елементи" (геометрија као наука о простору) у 13 књига, "Дата" (о условима задавања неког математичког објекта), "Оптика" (с теоријом перспективе), и др.

[2]М. Паш (1843-1930), немачки математичар.

Канторовом[3] аксиомом је уведена тзв. *непрекидност у малом* и на тај начин омогућено доказивање ставова као што су нпр. став о пресеку праве и круга, или пак став о пресеку двају кругова. Према непрекидности у малом права је "густо испуњена тачкама".

Еудокс-Архимедова и Канторова аксиома непрекидности, могу се исказати само једном аксиомом, тзв. Дедекиндовом аксиомом непрекидности. Хилберт[4] је у својој књизи *Основи геометрије* поред Архимедове аксиоме претпоставио да важи и тзв. *аксиома потпуности* која је еквивалентна Канторовој аксиоми.

На крају напоменимо да је захваљујући геометрији непрекидности могуће изградити теорију мерења како равних, тако и просторних геометријских ликова. Без непрекидности не би било могуће оправдати назив геометрије као *науке о мерењу*.

Ми ћемо непрекиднст увести у овој књизи, тако што ћемо претпоставити да важи само једна аксиома непрекидности - Дедекиндова аксиома.

8.1 Дедекиндова аксиома непрекидности

$\mathbf{IV_1}$ (Дедекиндова[5] аксиома непрекидности) *Ако су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ два непразна скупа тачака орјентисане праве p тако да за произвољну тачку P скупа $\mathcal{M}$ и призвољну тачку Q скупа $\mathcal{N}$ важи да је тачка P испред тачке Q ($P \prec Q$), тада на правој p постоји тачка X таква да за сваку тачку $P \in \mathcal{M}\backslash\{X\}$ и $Q \in \mathcal{N}\backslash\{X\}$ важи релација $P \prec X \prec Q$.*

Наведена аксиома је довољна да се изведе комплетна теорија непрекидности у апсолутној геометрији. Као последице Дедекиндове аксиоме непрекидности навешћемо Архимедов став за дужи и Канторову аксиому.

Теорема 8.1.1. (Архимедов[6] став за дужи) *Ако су AB и CD две дужи такве да је $AB > CD$ тада постоји природан број n такав да је*

$$nCD \leqslant AB < (n+1)CD.$$

[3] Г. Кантор (1845-1918) немачки математичар, утемељивач теорије скупова.

[4] Д. Хилберт (1862-1943) немачки математичар.

[5] Р. Дедекинд (1831-1916), немачки математичар.

[6] Архимед (287. пне-212. пне) грчки математичар, физичар и астроном, из Сиракузе на Сицилији, син астронома. Први је израчунао број π, пронашао закон полуге, закон потиска (Архимедов закон, Архимедова вага) и др.

Архимедов став за дужи може се формулисати и на следећи начин:

Нека су AB и CD две дужи и нека су A_1, A_2, A_3, $\cdots$ тачке праве AB такве да је

$$\mathcal{B}(A, A_1, A_2), \quad \mathcal{B}(A_1, A_2, A_3), \quad \mathcal{B}(A_2, A_3, A_4), \cdots$$

и

$$AA_1 \cong A_1A_2 \cong A_2A_3 \cong \cdots \cong CD.$$

Тада постоји природан број n такав да је или

$$B \equiv A_n \quad \textit{или} \quad \mathcal{B}(A_n, B, A_{n+1}).$$

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да постоји бесконачан низ дужи $AA_1 \cong A_1A_2 \cong \cdots$, $\mathcal{B}(A, A_1, A_2)$, $\mathcal{B}(A_1, A_2, A_3)$, $\mathcal{B}(A_2, A_3, A_4)$,$\cdots$, које су све садржане у AB. На правој AB изаберимо такав распоред тачака да је $A \prec B$. Све тачке праве AB поделимо на две класе. Нека првој класи $\mathcal{M}$ припадају све тачке праве AB које су испред тачке A_n. Нека су у другој $\mathcal{N}$ све остале тачке праве AB. Тада је свака тачка праве AB садржана у једној и само једној класи. Класе $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ су непразни скупови. Заиста, класи $\mathcal{M}$ припада тачка A, а класи $\mathcal{N}$ тачка B. Поред тога свака тачка прве класе је испред сваке тачке друге класе. На основу Дедекиндове аксиоме постоји јединствена тачка X праве AB која врши пресек праве AB. Тачка X није тачка класе $\mathcal{M}$. Такође тачка X је тачка која је испред свих тачака класе $\mathcal{N}$. На основу аксиоме III_5 постоји тачка C таква да је

$$C \prec X, \quad XC \cong A_1A_2.$$

Како је $C \prec X$ то тачка C не може бити тачка класе $\mathcal{N}$. Према томе тачка C припада класи $\mathcal{M}$. Према дефиницији класе $\mathcal{M}$ следи $C \prec A_n$ и $C \prec A_{n+1}$. Према томе, свака од тачака A_n и A_{n+1} је између тачака X и C, одакле следи $A_nA_{n+1} < CX$, што је у супротности са $XC \cong A_nA_{n+1}$ □

Теорема 8.1.2. *Ако су a и b произвољне дужи такве да је $a < b$, тада за произвољну дуж c постоје природни бројеви m и n такви да је*

$$a < \frac{m}{2^n}c < b.$$

Доказ. Из Архимедове теореме, с обзиром на то да је $a < b$ следи да постоји природан број n такав да је $c < 2^n(b-a)$, одакле следи

$$\frac{1}{2^n}c < b - a.$$

За дужи $\frac{1}{2^n}$ и a може наступити један од случајева:
(i) $\frac{1}{2^n}c > a$ или (ii) $\frac{1}{2^n}c < a$.
(i) Ако је $\frac{1}{2^n}c > a$ онда је $a < \frac{1}{2^n}c < b - a < b$, тј.

$$a < \frac{1}{2^n}c < b,$$

чиме је теорема доказана. У овом случају је $m = 1$.

(ii) Ако је $\frac{1}{2^n}c < a$, тада на основу Архимедовог става постоји природан број m такав да је

$$(m-1)\frac{1}{2^n}c \leq a < m\frac{1}{2^n}c.$$

Тада је

$$a < m\frac{1}{2^n}c = \frac{1}{2^n} + (m-1)\frac{1}{2^n}c < b - a + a = b,$$

тј.

$$a < \frac{m}{2^n}c < b.$$

□

Теорема 8.1.3. (Канторов став) *Ако бесконачан низ затворених дужи $[A_0B_0]$, $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, ... неке праве p задовољава услове:*

(i) *свака дужтог низа садржи следећу дуж,*

(ii) *не постоји дужкоја је садржана у свим дужима тог низа; тада постоји јединствена тачка X која је садржана у свим дужима тог низа.*

Доказ. Нека је $[A_0B_0]$, $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, ... бесконачан низ дужи праве p, тако да је $[A_{n+1}B_{n+1}] \subset [A_nB_n]$ за сваки природан број n и не постоји дужкоја припада свим дужима тог низа.

На правој p изаберимо орјентацију тако да је $A_n \prec B_n$ за свако $n \in N$. Уколико за неко n то није задовољено означимо A_n са B_n и обрнуто. Тачке праве p поделимо на две класе $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, тако да тачка припада првој класи $\mathcal{M}$ ако је испред неке тачке A_n (самим тим она је и испред тачака A_{n+1}, A_{n+2}, $\cdots$). Другој класи $\mathcal{N}$ нека припадају све остале тачке праве p. Очигледно је да је свака тачка праве p у једној и само једној од класа $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Такође обе класе су непразне јер је нпр., $A_1 \in \mathcal{M}$ а $B_1 \in \mathcal{N}$. Тачке класе $\mathcal{M}$ су испред тачака класе $\mathcal{N}$. Дакле сви услови Дедекиндове аксиоме су задовољени. Према томе постоји тачка X која врши пресек праве p на класе $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Значи тачка X је иза свих тачака $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ класе $\mathcal{M}$ а испред свих тачака $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ класе $\mathcal{N}$, тј. тачка X припада дужи $[A_nB_n]$ за свако $n \in N$.

Докажимо још јединственост. Нека је Y још једна тачка која припада свакој тачки датог низа. Тада би и свака тачка Z дужи XY припадала свакој дужи поменутог низа, тј. цела дуж XY би припадала свакој дужи низа $[A_0B_0]$, $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, ..., што је немогуће. □

Дефиниција 8.1.1. Низ дужи $[A_0B_0]$, $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, ... неке праве p је *Канторов низ* ако:

(i) свака дуж тог низа садржи следећу дуж,

(ii) не постоји дужкоја је садржана у свим дужима датог низа дужи.

Теорема 8.1.4. *Не постоји дуж мања од сваке дужи Канторовог низа.*

Доказ. Означимо са X јединствену тачку која је садржана у свим дужима Канторовог низа дужи $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, ..., $[A_nB_n]$, ... неке праве p. Тада је $\mathcal{B}(A_k, X, B_k)$, за свако $k \in \mathbb{N}$. Можемо претпоставити да су све тачке A_k са једне а све тачке B_k са друге стране тачке X. како је $A_kB_k = A_kX \cup XB_k$ и $A_kB_k \supset A_{k+1}B_{k+1}$ то тачка A_{k+1} припада дужи $A_{k+1}X$ а тачка B_{k+1} припада дужи XB_{k+1}. Означимо са x произвољну дужправе p. Тада на правој p постоје тачке A и B такве да је тачка X средиште дужи, $AB \cong x$, $A_k, A \overset{\cdot\cdot}{-} X$ и $B_k, B \overset{\cdot\cdot}{-} X$. Када на дужи AX не би било ни једне од тачака A_k, тада би било $\mathcal{B}(A_k, A, X)$ за свако $k \in \mathbb{N}$, одакле следи да би дуж AX припадала свим дужима Канторовог низа, што је немогуће, па су за довољно велико n све тачке A_k, $k > n$, између тачака A и X. Аналогно, за довољно велико n су све тачке B_k, $k > n$, између тачака X и B. То значи да за довољно велико n дуж AB садржи сваку од дужи A_kB_k, $k > n$, одакле је $A_nB_n < x$. □

Често се уместо Дедекиндове аксиоме узимају Архимедов и Канторов став као аксиоме непрекидности. Нека уз прве три групе аксиома важе Архимедов и Канторов став.

Доказ Дедекиндове аксиоме. С обзиром на чињеницу да су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ непразни скупови, то постоје тачке M_1 и N_1 које припадају редом скуповима $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Означимо са S_1 средиште дужи M_1N_1. Како је S_1 тачка праве p то она припада тачно једном од скупова $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Уколико тачка S_1 припада скупу $\mathcal{M}$, означимо је са M_2, а тачку N_1 са N_2, а ако S_1 припада скупу $\mathcal{N}$ означимо је са N_2 а тачку M_1 са M_2. Нека је сада S_2 средиште дужи M_2N_2. Применом поменутог поступка добијамо низ затворених дужи $[M_1N_1]$, $[M_2N_2]$,...,$[M_nN_n]$,... од којих свака садржи следећу и

$$M_{k+1}N_{k+1} = \frac{1}{2}M_kN_k.$$

Докажимо да не постоји дуж која је садржана у свим дужима конструисаног низа дужи. Ако би x била таква дуж, онда би за свако k важило $x < M_kN_k$. Међутим по конструкцији је $M_kN_k = \frac{1}{2^{k-1}}M_1N_1$, одакле је $x < \frac{1}{2^{k-1}}M_1N_1$, тј. $2^{k-1}x < M_1N_1$, за свако $k \in \mathbb{N}$, што је у супротности са Архимедовим ставом. Дакле, низ $[M_1N_1]$, $[M_2N_2]$,...,$[M_nN_n]$,... је Канторов, па постоји јединствена тачка X која припада свим дужима поменутог низа. Из конструкције низа дужи $[M_kN_k]$, $k \in \mathbb{N}$, следи да су све тачке низа $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ са једне стране тачке X, а све тачке низа $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ са друге стране тачке X. Тачка X припада само једном од скупова $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$.

Ако је $M \neq X$ произвољна тачка скупа $\mathcal{M}$ тада не може бити $\mathcal{B}(M_k, X, M)$ јер би постојала тачка скупа $\mathcal{N}$ између двеју тачака скупа $\mathcal{M}$. Аналогно, ако је $N \neq X$ тачка скупа $\mathcal{N}$ тада не може бити $\mathcal{B}(N, X, N_k)$ јер би постојала тачка скупа $\mathcal{M}$ која је између N и X. Дакле, постоји јединствена тачка X која раздваја тачке скупова $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, тј. за сваку тачку $P \in \mathcal{M}\setminus\{X\}$ и $Q \in \mathcal{N}\setminus\{X\}$ важи $P \prec X \prec Q$. □

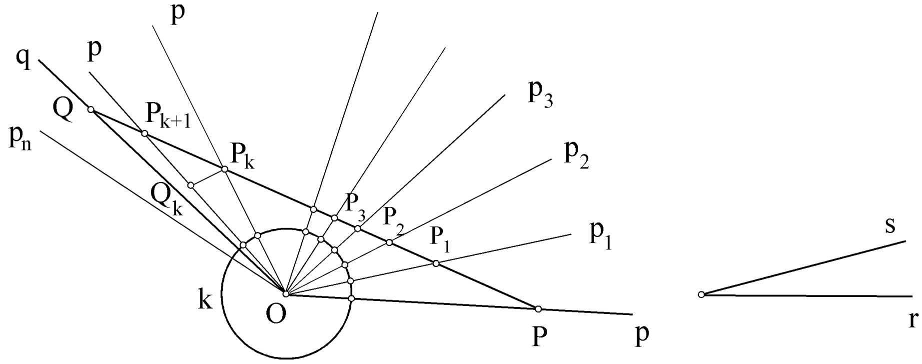
8.2 Ставови за углове аналогни Архимедовом и Канторовом ставу

Ставови аналогни Архимедовом и Канторовом ставу могу се показати и за углове. Тако на пример, теорема аналогна Архимедовом ставу може се исказати у следећем облику:

Теорема 8.2.1. (Архимедов став за углове) *Нека су $\measuredangle pq$ и $\measuredangle rs$ два произвољна угла мања од збира два права угла и нека у равни угла*

$\measuredangle pq$ постоји коначан низ полуправих p_1, p_2, $\cdots$, p_n $(n = 1, 2, \cdots)$ које полазе из темена угла $\measuredangle pq$, при чему су парови углова $\measuredangle pp_1$ и $\measuredangle p_1p_2$, $\measuredangle p_1p_2$ и $\measuredangle p_2p_3$, $\cdots$, $\measuredangle p_{n-2}p_{n-1}$ и $\measuredangle p_{n-1}p_n$ парови суседних углова такви да су сви углови $\measuredangle pp_1$, $\measuredangle p_1p_2$, $\measuredangle p_2p_3 \cdots \measuredangle p_{n-1}p_n$ подударни датом углу $\measuredangle rs$ а полуправа q припада оном углу $\measuredangle pp_n$ који садржи све углове посматраног низа.

Доказ. Означимо са O теме угла $\measuredangle pq$ а са P и Q тачке редом полуправих p и q (Слика 8.1). Нека је p_1 полуправа са оне стране полуправе p са које је крак q, тако да је $\measuredangle pp_1 = \measuredangle rs$. За углове $\measuredangle pp_1$ и $\measuredangle pq$ важи тачно једна од могућности $\measuredangle pp_1 > \measuredangle pq$, $\measuredangle pp_1 \cong \measuredangle pq$ или $\measuredangle pp_1 < \measuredangle pq$. Ако је $\measuredangle pp_1 > \measuredangle pq$ или $\measuredangle pp_1 \cong \measuredangle pq$ можемо сматрати да



Слика 8.1.

је доказ завршен.

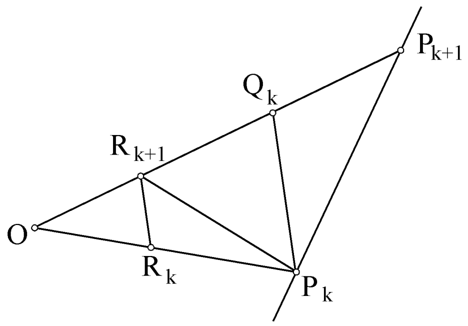
Нека је $\measuredangle pp_1 < \measuredangle pq$ и угао $\measuredangle p_1p_2$ суседан углу $\measuredangle pp_1$ такав да је $\measuredangle p_1p_2 \cong \measuredangle pp_1$. Ако је $\measuredangle pp_2 \geq 2R$ онда је у њему садржан угао $\measuredangle pq$. Нека је $\measuredangle pp_2 < 2R$, где смо са R означили прав угао.

Тада за углове $\measuredangle pp_2$ и $\measuredangle pq$ важи тачно једна од могућности $\measuredangle pp_2 > \measuredangle pq$, $\measuredangle pp_2 \cong \measuredangle pq$ или $\measuredangle pp_2 < \measuredangle pq$. Ако је $\measuredangle pp_2 > \measuredangle pq$ или $\measuredangle pp_2 \cong \measuredangle pq$ доказ је завршен. Ако је $\measuredangle pp_2 < \measuredangle pq$, онда је $\measuredangle pp_2$ садржан у углу $\measuredangle pq$. Нека је тада $\measuredangle p_2p_3$ суседан углу $\measuredangle p_1p_2$ при чему је $\measuredangle p_2p_3 \cong \measuredangle p_1p_2$. Настављајући поступак добијамо низ углова $\measuredangle pp_1$, $\measuredangle p_1p_2$, $\measuredangle p_2p_3$, $\cdots$ подударних датом углу $\measuredangle rs$, при чему су углови $\measuredangle pp_1$, $\measuredangle pp_2$, $\measuredangle pp_3$, $\cdots$ садржани у углу $\measuredangle pq$.

Докажимо да је за довољно велико n угао $\measuredangle pq$ садржан у углу $\measuredangle pp_n$, не поклапајући се с њим.

Претпоставимо супротно, тј. да су сви углови $\measuredangle pp_k$ $k = 1, 2, \cdots$ садржани у углу $\measuredangle pq$. Тада су све полуправе p_k у углу $\measuredangle pq$ па секу дуж PQ. Означимо крак p са p_0, а пресек дужи PQ и полуправе p_k са P_k, $k = 0, 1, 2, \cdots$. Тада важи распоред тачака $\mathcal{B}(P_0, P_1, P_2, P_3, \cdots, P_k)$. Доказаћемо да су дужи P_kP_{k+1} $k = 0, 1, 2, \cdots$ све веће од од извесне дужи.

За две дужи OP_k и OP_{k+1} на основу трихотомије једнакости, важи тачно једна од могучности: $OP_k = OP_{k+1}$, $OP_k < OP_{k+1}$ или $OP_k > OP_{k+1}$. Ако је $OP_k = OP_{k+1}$, онда тачку P_{k+1} означимо са Q_k. Ако је $OP_k < OP_{k+1}$ онда постоји тачка Q_k на полуправој OP_{k+1} таква да је $\mathcal{B}(O, Q_k, P_{k+1})$ и $OQ_k = OP_k$. У троуглу ΔOP_kP_{k+1} је $\measuredangle OP_{k+1}P_k < \measuredangle OP_kP_{k+1}$ па је $OP_k < OP_{k+1}$. То значи да угао $\measuredangle OP_{k+1}P_k$ мора бити оштар. Троугао ΔOP_kQ_k је једнакокраки па су му углови на основици једнаки и оштри. Дакле, угао $\measuredangle OQ_kP_k$ је оштар а њему напоредан угао $\measuredangle P_kQ_kP_{k+1}$ је туп. То значи да је угао $\measuredangle OP_{k+1}P_k$ оштар, па је $\measuredangle OP_{k+1}P_k < \measuredangle P_kQ_kP_{k+1}$. Дакле, у троуглу $\Delta P_kQ_kP_{k+1}$ је $P_kQ_k < P_kP_{k+1}$. Аналогно се разматра случај $OP_k > OP_{k+1}$. Тада тачку Q_k бирамо на полуправој OP_k тако да је $\mathcal{B}(O, Q_k, P_k)$ и $OP_{k+1} = OQ_k$. У овом случају се добија да је $P_{k+1}Q_k < P_kP_{k+1}$. Нека је k круг са средиштем у тачки O и



Слика 8.2.

полупречником мањим од свих дужи OP_k, $k = 1, 2, \cdots, n-1$. Означимо са R_k тачку у којој круг k сече дуж OP_k, $k = 1, 2, \cdots, n-1$. Докажимо да је тада $R_kR_{k+1} < P_kP_{k+1}$ (Слика 8.2). У троуглу ΔOP_kR_{k+1} угао $\measuredangle P_kR_{k+1}Q_k$ је спољашњи несуседни углу $\measuredangle OP_kR_{k+1}$ па је $\measuredangle P_kR_{k+1}Q_k > \measuredangle OP_kR_{k+1}$. Сада је у троугловима $\Delta P_kR_kR_{k+1}$ и $\Delta R_{k+1}Q_kP_k$ страница P_kR_{k+1} заједничка, затим $P_kR_k = Q_kR_{k+1}$ и $\measuredangle R_kP_kR_{k+1} < \measuredangle P_kR_{k+1}Q_k$ па је $R_kR_{k+1} < P_kQ_k$. Како је још

$P_kQ_k \leq P_kP_{k+1}$, то је $R_kR_{k+1} < P_kP_{k+1}$. И у осталим случајевима се долази до истог закључка.

С друге стране, све дужи R_kR_{k+1}, $k = 0, 1, 2, \cdots$ су међусобом подударне, па можемо писати да је $P_kP_{k+1} > R_0R_1$. С обзиром на то да важи $\mathcal{B}(P, P_1, P_2, P_3, \cdots, P_k)$ биће

$$PP_1 + P_1P_2 + \cdots + P_{k-1}P_k = PP_k.$$

С обзиром на то да је сваки сабирак у претходној једнакости мањи од R_0R_1 имамо $PP_k < kR_0R_1$, $k = 1, 2, \cdots$, а то је у супротности са Теоремом 8.1.1. Дакле, претпоставка да су сви углови $\measuredangle pp_k$ садржани у углу $\measuredangle pq$ доводи до контрадикције. То значи да постоји неки број k такав да се полуправа p_k поклапа са краком q или пак да је крак q садржан у углу $\measuredangle pp_k$. У првом случају пишемо $n - 1$ уместо k, а у другом n уместо k. Дакле, полуправа p_{n-1} је садржана у углу $\measuredangle pq$ или се поклапа са q, а p_n је изван тог угла. То значи да угао $\measuredangle pp_n$ који садржи полуправе p_k, па самим тим и углове p_kp_{k+1}, $k = 1, 2, \cdots, n-1$, садржи и полуправу q. Тиме је теорема доказана. □

Теорема 8.2.2. (Канторов став за углове) *Нека је*

$$\measuredangle p_1q_1, \quad \measuredangle p_2q_2, \quad \measuredangle p_3q_3, \cdots$$

бесконачан низ углова, мањих од збира два права угла, равни α, са заједничким теменом O, при чему сваки од тих углова садржи следећи и не постоји угао који је садржан у свим угловима датог низа. Тада у равни α постоји јединствена полуправа x са почетком у тачки O која припада свим угловима датог низа.

Доказ ове теореме, као и формулацију теореме за углове, аналогне Дедекиндовој аксиоми, и њен доказ препуштамо читаоцу.

8.3 Последице аксиома непрекидности

Многе теореме које су наизглед очигледне не могу се доказати без примене аксиома непрекидности. Сада ћемо навести неколико примера таквих теорема.

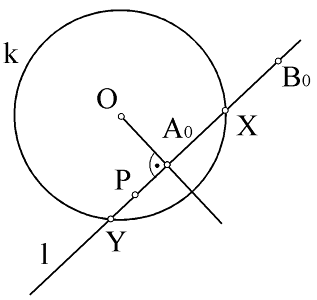
Теорема 8.3.1. *Ако је дат круг $k(O, r)$ и тачка P унутар круга k тада произвољна права l у равни круга k која садржи тачку P има са кругом k две заједничке тачке.*

Доказ. Могу наступити два случаја:

(i) Права l садржи средиште O круга k,

(ii) Права l не садржи средиште O круга k.

(i) Нека тчка O припада правој l. Тада постоје тачке X и Y на правој l са разних страна тачке O такве да је $OX \cong r$ и $OY \cong r$, па права l има са кругом $k(O, r)$ две заједничке тачке X и Y.



Слика 8.3.

(ii) Нека сада тачка O не припада правој l (Слика 8.3). Означимо са A_0 подножје нормале из тачке O на правој l. Тада ће бити $OA_0 \leqslant OP$. Како је тачка P унутар круга k биће $OP < r$, те је и $OA_0 < r$. Одредимо на правој l са било које стране тачке A_0 тачку B_0 такву да је $A_0B_0 \cong r$. У правоуглом троуглу ΔOA_0B_0 хипотенуза OB_0 је већа од катете A_0B_0 па је $OB_0 > r$, тј. тачка B_0 је ван круга k. Нека је C_0 средиште дужи A_0B_0. У том случају за тачку C_0 могу наступити три могућности: $OC_0 \cong r$, $OC_0 < r$ и $OC_0 > r$.

Ако је $OC_0 \cong r$ тврђење следи непосредно. Ако је тачка C_0 унутар круга k означимо са A_1 тачку C_0 а са B_1 тачку B_0. Ако је C_0 изван круга k означимо A_1 тачку A_0 а са B_1 тачку C_0. У оба случаја је је $OA_1 < r$ и $OB_1 > r$, дуж A_1B_1 је једнака половини дужи A_0B_0 и садржана је у њој. Означимо са C_1 средиште дужи A_1B_1. За тачку C_1 имамо следеће могућности: $OC_1 \cong r$, $OC_1 < r$ или $OC_1 > r$. Ако је $OC_1 \cong r$, онда је C_1 пресечна тачка праве l и круга k. Ако је $OC_1 > r$ обележимо са A_2 тачку A_1 а са B_2 тачку C_1, а ако је $OC_1 < r$ онда означимо са A_2 тачку C_1 а са B_2 тачку B_1. У оба случаја је $OA_2 < r$, $OB_2 > r$, дуж A_2B_2 једнака је половини дужи A_1B_1 и садржана је у њој.

Настављајући тај поступак после n корака добијамо да је

$$OA_n < r, \quad OB_n > r, \quad A_nB_n = \frac{1}{2^n}A_0B_0, \quad [A_nB_n] \subset [A_{n-1}B_{n-1}].$$

Према томе, добили смо низ затворених дужи $[A_nB_n]$ за који важи:

(i) свака дуж тог низа садржи следећу,

(ii) не постоји дуж садржана у свим дужима тог низа.

Заиста, јер ако би постојала таква дуж d која би припадала свим дужима тог низа дужи, тада број n можемо изабрати тако да дуж $[A_nB_n]$ буде мања од било које унапред задате дужи, па и од дужи d, па би већа дуж d била садржана у мањој дужи A_nB_n, што је немогуће.

Дакле, задовољени су сви услови Канторовог става за дужи па постоји јединствена тачка X која припада свим дужима тог низа дужи. Докажимо да тачка X припада кругу k, тј. да је једна од пресечних тачака праве l и круга k. Довољно је да докажемо да је $OX \cong r$. За дужи OX и r важи тачно једна од следеће три могућности:

(i) $OX < r$, (ii) $OX > r$ и (iii) $OX \cong r$.

(i) Нека је $OX < r$. Тада постоји нека дуж ε таква да је $OX = r - \varepsilon$. Из троугла ΔOXB_n имамо $OB_n < OX + XB_n$. Тачка X припада дужи $[A_nB_n]$, па је $XB_n < A_nB_n$. Број n можемо изабрати довољно велики да дуж $[A_nB_n]$ буде мања од било које унапред задате дужи ε. Тада је $XB_n < \varepsilon$ па је $OB_n < r - \varepsilon + \varepsilon = r$. Дакле, добили смо да тачка B_n припада унутрашњости круга што представља контрадикцију. Према томе није $OX < r$.

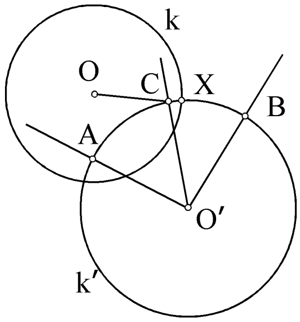
(ii) Аналогно се доказује да није $OX > r$.

(iii) Значи, мора бити $OX \cong r$, тј. тачка X припада кругу k.

За тачку Y праве l симетричну тачки X у односу на тачку A_0 непосредно се добија да припада кругу k. Дакле, права l и круг k имају две заједничке тачке X и Y. Није тешко закључити да осим ових двеју тачака круг k и права l немају других заједничких тачака. $\square$

Напоменимо да доказ ове теореме није могуће извести без употребе аксиома непрекидности.

Теорема 8.3.2. *Ако два круга k и k' припадају једној равни и ако један од та два круга, нпр. k' садржи неку тачку A која се налази унутар* *круга k и неку тачку B ван круга k, тада кругови k и k' имају две заједничке тачке.*



Слика 8.4.

Доказ. Нека су O и O' (Слика 8.4) средишта а r и r' полупречници редом кругова k и k'. Означимо са s медијатрису једног од углова $\measuredangle AO'B$. Полуправа s има са кругом k' једну заједничку тачку, означимо је са C. При томе је или $OC \cong r$ или $OC < r$ или $OC > r$. Ако је $OC \cong r$ тада је тачка C једна заједничка тачка кругова k и k'. Ако је $OC < r$ обележимо са A_1 тачку C а са B_1 тачку B. Ако је пак $OC > r$ обележимо са A_1 тачку A а са B_1 тачку C. У оба случаја је $OA_1 < r$, $OB_1 > r$ и $\measuredangle A_1O'B_1 = \frac{1}{2}\measuredangle AO'B$.

Конструишимо медијатрису угла $\measuredangle A_1O'B_1$ и означимо са C_1 заједничку тачку медијатрисе s_1 и круга k'. За тачку C_1 постоје три могућности: $OC_1 \cong r$, $OC_1 < r$ или $OC_1 > r$. Ако је $OC_1 \cong r$ тада је тачка C_1 заједничка тачка кругова k и k'. Ако је $OC_1 < r$ означимо са A_2 тачку C_1 а са B_2 тачку B_1, а ако је пак $OC_1 > r$ онда означимо са A_2 тачку A_1 а са B_2 тачку C_1. Тада је у оба случаја $OA_2 < r$, $OB_2 > r$ и $\measuredangle A_2O'B_2 = \frac{1}{2^2}\measuredangle AO'B$.

Настављајући тај поступак добијамо тачке A_n и B_n такве да је $OA_n < r$, $OB_n > r$ и $\measuredangle A_nO'B_n = \frac{1}{2^n}\measuredangle AO'B$. На тај начин је добијен неограничен низ затворених углова

$$[\measuredangle AO'B], \quad [\measuredangle A_1O'B_1], \quad [\measuredangle A_2O'B_2], \quad \ldots$$

који задовољавају следеће услове:

(i) сваки угао из тог низа садржи следећи,

(ii) не постоји угао садржан у свим угловима тог низа.

Тада, према Канторовом ставу за углове следи да постоји јединствена полуправа s' садржана у свим угловима тог низа. Означимо са X тачку те полуправе такву да је $O'X \cong r'$, односно тачку у којој полуправа s' сече круг k'. Докажимо да тачка X припада и кругу k. У том случају за тачку X могу наступити три могућности:

(i) $OX \cong r$, (ii) $OX < r$ или (iii) $OX > r$.

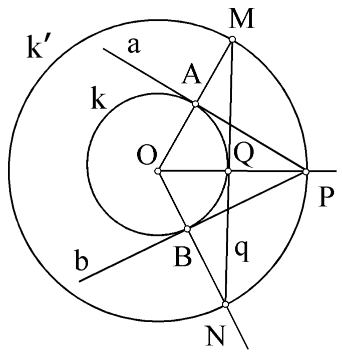
(i) Нека је $OX < r$. У том случају постоји нека дужε таква да је $OX = r - \varepsilon$. У троуглу ΔOXB_n је $OB_n < OX + XB_n$. Број n можемо изабрати тако да тетива A_nB_n буде мања од било које унапред задате дужи ε. Како је тачка X унутрашња тачка дужи $A_n, B_n]$ то је $XB_n < A_nB_n$ па је $XB_n < \varepsilon$. Према томе имамо да је $OB_n < r - \varepsilon + \varepsilon = r$, па је B_n унутрашња тачка круга k што је у контрадикцији са конструкцијом низа тачака B_0, B_1, B_2, ... Дакле није $OX < r$.

(ii) На потпуно исти начин и претпоставка $OX > r$ доводи до контрадикције.

(iii) Према томе мора бити $OX \cong r$, тј. тачка X припада кругу k.

Разматрањем другог угла $\measuredangle AO'B$ аналогним поступком добијамо другу пресечну тачку Y кругова k и k'. □

Теорема 8.3.3. *Ако је у равни дат круг $k(O,r)$ и тачка P ван тог круга, тада кроз тачку P постоје две и само две праве које додирују круг $k(O,r)$.*



Слика 8.5.

Доказ. Тачка P је ван круга $k(O,r)$ па је $OP > r$. Стога на полуправој OP постоји тачка Q (Слика 8.5) таква да је $OQ = r$. Тачка

Q припада кругу k. Нека је q права управна на праву OP у тачки Q. Нека је k' круг са средиштем у тачки O и полупречником OP. Како је $OQ < OP$ тачка Q ће бити унутар круга k'. Права q садржи унутрашњу тачку Q круга k' те права q и круг k' имају две заједничке тачке M и N. Полуправе OM и ON секу круг $k(O,r)$ у двема тачкама A и B. Како су A и P две разне тачке оне одређују тачно једну праву a. Слично тачке B и P одређују тачно једну праву b. Доказаћемо да праве a и b имају са кругом k само по једну заједничку тачку. Довољно је да установимо да је $\measuredangle OAP = \measuredangle OBP = R$. Како је $\Delta OAP \cong \Delta OQM$ и $\measuredangle OQM$ прав биће $\measuredangle OAP$ прав. Одатле следи да је права a тангента круга k. Аналогно се показује да је и права b тангента круга k у тачки B. Према томе постоје две праве које садрже тачку P и додирују круг $k(O,r)$. Да осим ових двеју правих нема других тангенти кроз тачку P на круг k доказује се индиректним путем. $\square$

Можемо приметити да овај став има уопштење у простору S^3 у коме кругу $k(O,r)$ одговара сфера $S(O,r)$, тачки P права p а правама a и b равни α и β.

8.4 Мерење дужи

У апсолутној геометрији могуће је развити процес мерења дужи и углова. Међутим мерење површи и запремина није могуће с обзиром на одсуство појма паралелности, односно одговарајуће аксиоме.

Дефиниција 8.4.1. *Системом мерења дужи* називамо функцију $\mathcal{L}$ која свакој дужи a кореспондира реалан број $\mathcal{L}(a)$ тако да важи:
(1) За сваку дуж a је $\mathcal{L}(a) \geq 0$, (Услов ненегативности)
(2) Постоји дуж a_0 таква да је $\mathcal{L}(a_0) = 1$ (Услов нормираности)
(3) Ако је $a \cong b$ тада је $\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b)$ (Услов инваријантности)
(4) Ако је $a + b = c$ тада је $\mathcal{L}(a) + \mathcal{L}(b) = \mathcal{L}(c)$. (Услов адитивности).
Број $\mathcal{L}(a)$ који је у систему $\mathcal{L}$ мерења дужи кореспондиран дужи a називамо мером или дужином дужи a у систему мерења $\mathcal{L}$. Дужаa_0 за коју је $\mathcal{L}(a_0) = 1$ називамо јединичном дужи у систему мерења $\mathcal{L}$.

Наведена дефиниција представља аксиоматску дефиницију мерења дужи.

Теорема 8.4.1. *Нека је $\mathcal{L}$ систем мерења дужи. Тада је функција $\mathcal{L}'$ систем мерења дужи ако и само ако постоји број $k \in \mathbb{R}^+$, такав да важи $\mathcal{L}' = k\mathcal{L}$.*

Теорема 8.4.2. *У систему $\mathcal{L}$ мерења дужи за сваке две дужи a и b важи:*
(а) $\mathcal{L}(a) < \mathcal{L}(b) \Leftrightarrow a < b$,
(б) $\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b) \Rightarrow a \cong b$,
(ц) $\mathcal{L}(a - b) = \mathcal{L}(a) - \mathcal{L}(b)$ *за* $a > b$.

Доказ. (а) Нека је $a < b$ и нека је O почетна тачка полуправе p. Означимо са A и B тачке полуправе p такве да је $OA \cong a$ и $OB \cong b$. Тада је $\mathcal{B}(O, A, B)$, тј. $OB \cong OA + AB$. Одавде према услову (4) из дефиниције следи $\mathcal{L}(OB) = \mathcal{L}(OA) + \mathcal{L}(AB)$. То значи да је $\mathcal{L}(OA) < \mathcal{L}(OB)$, тј. $\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b)$.

Обратно, ако је $\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b)$, тада на полуправој p са почетком у тачки O постоје тачке A и B такве да је $OA \cong a$, $OB \cong b$ и $\mathcal{B}(O, A, B)$, одакле следи да је $OA < OB$, тј. $a < b$.

(б) Нека је $\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b)$ и $a \neq b$. Тада је према доказаном делу под (а) $\mathcal{L}(a) \neq \mathcal{L}(b)$, што је немогуће.

(ц) На полуправој p са почетком у тачки O уочимо тачке A и B такве да је $OA = a$ и $OB = b$. С обзиром на то да је $a > b$ важи $\mathcal{B}(O, B, A)$, тј. $OA \cong OB + BA$. Одавде следи на основу услова адитивности $\mathcal{L}(OA) = \mathcal{L}(OB) + \mathcal{L}(BA)$, тј. $\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b) + \mathcal{L}(a-b)$, чиме је доказ завршен. □

Теорема 8.4.3. *Ако је a_0 било која дуж, тада постоји један и само један систем $\mathcal{L}_0$ мерења дужи такав да је $\mathcal{L}_0(a_0) = 1$.*

Доказ. Нека су на извесној правој l задате две дужи $a_0 = A_0B_0$ и $a = AB$, при чему је дуж $AB < A_0B_0$. ДужA_0B_0 поделимо на 2^k подударних дужи. Нека је A_kB_k било која од њих. На правој l конструишимо систем тачака таквих да сваке две узастопне тачке тог система одређујудужподударну са дужи A_kB_k и да саме тачке A_k, B_k припадају том систему. Јасно је да тачке A_0 и B_0 као и све деобене тачке дужи A_0B_0 припадају том систему. Сагласимо се да добијени систем тачака назовемо k-том градијацијом или градијацијом ранга kу односу на дуж A_0B_0 и ту градијацију обележимо са N_k. Градијацијом N_k разложена је права l на неограничено много дужи подударних са A_kB_k. Обележимо са n_k укупан број дужи градијације N_k које припадају дужи AB а са n'_k укупан број дужи градијације N_k које са дужи AB имају заједничких унутрашњих тачака. Ако броју k дајемо редом вредности $0, 1, 2, \ldots$ добијамо два низа бројева

$$n_0,\ \frac{n_1}{2},\ \frac{n_2}{2^2},\ \frac{n_3}{2^3},\ \ldots \tag{8.1}$$

$$n'_0,\ \frac{n'_1}{2},\ \frac{n'_2}{2^2},\ \frac{n'_3}{2^3},\ \ldots \tag{8.2}$$

При томе је $n_{k+1} \geq 2n_k$ и $n'_{k+1} \leq 2n'_k$ па је

$$n_0 \leq \frac{n_1}{2} \leq \frac{n_2}{2^2} \leq \frac{n_3}{2^3} \leq \ldots$$

$$n'_0 \geq \frac{n'_1}{2} \geq \frac{n'_2}{2^2} \geq \frac{n'_3}{2^3} \geq \ldots$$

Према томе низ (6.1) је неопадајући а низ (6.2) не растући. Осим тога из $n_k \leq n'_k$ следи

$$\frac{n_k}{2^k} \leq \frac{n'_k}{2^k} \leq n'_0 \quad \text{i} \quad \frac{n'_k}{2^k} \geq \frac{n_k}{2^k} \leq n_0,$$

па је низ (6.1) ограничен са горње а низ (6.2) са доње стране, те оба низа конвергирају кад $k \to +\infty$.

Нека је

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{n_k}{2^k} = n \quad \text{i} \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{n'_k}{2^k} = n'.$$

С обзиром на то да је $n'_k - n_k \leq 2$ биће

$$\frac{n'_k - n_k}{2^k} \leq \frac{2}{2^k} \quad \text{pa je} \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{n'_k - n_k}{2^k} = 0$$

и према томе $n = n'$. Сагласимо се да заједничку граничну вредност низова (6.1) и (6.2) обележимо са $\mathcal{L}(a)$. У том случају је

$$\mathcal{L}_0(a) = \lim_{k\to+\infty} \frac{n_k}{2^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{n'_k}{2^k} = n.$$

На тај начин свакој дужи a која припада правој l кореспондиран је известан број $\mathcal{L}_0(a)$ одређен у односу на дуж a_0. Може се лако показати да функција $\mathcal{L}_0$ представља систем мерења дужи, тј. да функција $\mathcal{L}_0$ конструисана на овај начин задовољава услове аксиоматске дефиниције мерења дужи. □

На основу изложеног можемо установити да је простор S^3 метрички. Меру дужи AB зовемо *растојањем* између тачака A и B. Ако још претпоставимо да је мера нула дужи једнака нули, онда у апсолутном простору имамо метрику. Означимо са

$$d_{\mathcal{L}}(A,B)$$

растојање између тачака A и B. Тада важи

(i) $d_{\mathcal{L}}(A,B) = 0$ ако и само ако се тачке A и B поклапају,

(ii) $d_{\mathcal{L}}(A,B) = d_{\mathcal{L}}(B,A)$,

(iii) $d_{\mathcal{L}}(A,B) + d_{\mathcal{L}}(B,C) \geq d_{\mathcal{L}}(A,C)$.

Непосредно се утврђује да све три особине метрике важе.

Такође није тешко показати да важе следећа тврђења

Теорема 8.4.4. *За три дате тачке A, B и C је $\mathcal{B}(A,B,C)$ ако и само ако су A, B и C три разне тачке такве да је*

$$d_{\mathcal{L}}(A,B) + d_{\mathcal{L}}(B,C) = d_{\mathcal{L}}(A,C).$$

Теорема 8.4.5. *За четири тачке A, B, C и D је $(A,B) \cong (C,D)$ ако и само ако је $d_{\mathcal{L}}(A,B) = d_{\mathcal{L}}(C,D)$.*

8.5 Мерење углова

У апсолутној геометрији потпуно аналогно појму мере дужи уводи се појам мере углова.

Дефиниција 8.5.1. *Системом мерења углова* називамо функцију $\mathcal{L}$ која сваком углу α кореспондира реалан број $\mathcal{L}(\alpha)$ тако да важи:
(1) За сваки угао α је $\mathcal{L}(\alpha) \geq 0$, (Услов ненегативности)
(2) Постоји угао α_0 такав да је $\mathcal{L}(\alpha_0) = 1$ (Услов нормираности)
(3) Ако је $\alpha \cong \beta$ тада је $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\beta)$ (Услов инваријантности)
(4) Ако је $\alpha + \beta = \gamma$ тада је $\mathcal{L}(\alpha) + \mathcal{L}(\beta) = \mathcal{L}(\gamma)$. (Услов адитивности).
Број $\mathcal{L}(\alpha)$ који је у систему $\mathcal{L}$ мерења дужи кореспондиран углу α називамо мером или величином угла α у систему мерења $\mathcal{L}$. Угао α_0 за који је $\mathcal{L}(\alpha_0) = 1$ називамо јединичним углом у систему мерења $\mathcal{L}$.

Наведена дефиниција представља аксиоматску дефиницију мерења углова.

Теорема 8.5.1. *Нека је $\mathcal{L}$ систем мерења углова. Тада је функција $\mathcal{L}'$ систем мерења углова ако и само ако постоји број $k \in \mathbb{R}^+$, такав да важи $\mathcal{L}' = k\mathcal{L}$.*

Теорема 8.5.2. *У систему $\mathcal{L}$ мерења углова за сваке два угла α и β важи:*
(a) $\mathcal{L}(\alpha) < \mathcal{L}(\beta) \Leftrightarrow \alpha < \beta$,
(b) $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\beta) \Rightarrow \alpha \cong \beta$,
(c) $\mathcal{L}(\alpha - \beta) = \mathcal{L}(\alpha) - \mathcal{L}(\beta)$ *за* $\alpha > \beta$.

Од свих система мерења углова углова за нас је најинтересантнији онај који правом углу додељује број $\pi/2$. Такав систем мерења углова називамо ит природним системом мерења углова.

До сада изложене четири групе аксиома у целини чине систем аксиома апсолутне геометрије. Даље разгранавање геометрије на Еуклидску и хиперболичку коју називамо геометријом Лобачевског вршимо увођењем аксиоме паралелности. У погледу специфичности апсолутна геометрија је окарактерисана везаношћу транслације за базисну праву, односно одсуством могућности мерења површине и запремине која из тога проистиче, док ће ови појмови бити даље развијани појединачно након увођења аксиоме паралелности. При томе све теореме изведене у апсолутној геометрији као последица само четири групе аксиома бивају очуване и у Еуклидској геометрији и у геометрији Лобачевског, односно допуњене јачим тврђењима која проистичу као последица увођења аксиоме паралелности.

Део 9

Еквиваленти петог Еуклидовог постулата

Еуклидска геометрија (названа по старогрчком математичару Еуклиду) спада међу најстарије познате области математике. У својим Елементима, Еуклид започиње са ограниченим бројем претпоставки (23 дефиниције, 5 основних појмова и 5 постулата) и тежи ка томе да докаже све остале резултате (пропозиције). Најпроблематичнији, али зато и најпознатији од постулата, обично се назива *Еуклидов пети постулат*, или једноставно *аксиома паралелности*, и он у Еуклидовој оригиналној формулацији гласи:

И да ће се, ако једна права у пресеку са другим двема образује са исте стране два унутрашња угла чији је збир мањи од два права угла, те две праве, бескрајно продужене, сећи и то са стране са које су ови углови мањи од два права угла.

Остали постулати су једноставни и кратки, рецимо први гласи: *Да се може повући од сваке тачке ка свакој другој тачки права линија.* Одмах је постало сумњиво да ли пети постулат може опстати на овај начин и да ли се он може доказати из других постулата и аксиома, чиме би се свео на теорему. Више од двадесет векова су трајали ти покушаји доказивања петог постулата који су на крају довели до постављања основа за неке другачије геометрије.

Многи су антички математичари покушали доказати да је пети постулат, у ствари теорема. Неки су чак писали доказе. Данас знамо да је Прокло,[1] у својим коментарима Елемената, критиковао

[1] Прокло (411- 485), грчки филозоф.

Птолемеја[2] због због погрешног доказа петог постулата и дао свој доказ, који је такође погрешан.

Други математичари касније су извели тврђења који су еквивалентни овом постулату, али имају једноставнију форму. Међутим у било којој форми показало се да је овај Еуклидов пети постулат много сложенији од његових осталих постулата, међу којима се налази на пример и постулат: *Кроз било које две тачке може се повући права линија.*

Познати математичар XVII века Валис је 1663. године понудио доказ петог постулата који је био заснован на привидно очигледном тврђењу да постоје слични троуглови тј. да се за сваки троугао може конструсати њему сличан троугао. Показало се да је тврђење о постојању сличних троуглова еквивалентно петом постулату.

Италијански математичар Гироламо Сакери је 1697. године покушао доказати пети постулат полазећи од супротне претпоставке и тражећи начин да дође до контрадикције. Он успут доказује већи број теорема једне потпуно нове геометрије, али управо за то тврди да је бесмислено и из тога изводи закључак о контрадикцији.

Јохан Хајнрих Ламберт[3] је такође пошао од супротне претпоставке и следио ток закључака, тако добивши низ теорема нееуклидске геометрије, међутим није ни у једном моменту тврдио да је стигао до контрадикције.

Лежандр је такође дуго времена посветио петом постулату. Доказао је да је еквивалентан исказ петом постулату и следећи: *Збир углова у троуглу једнак је збиру два права угла.* Он је оставио "доказ" петог постулата који се базира на тврдњи *да се кроз тачку унутар угла може повући права која сече оба крака угла.* Касније је утврдјено да је и ова тврдња у ствари још један еквивалентан исказ петог постулата.

Једно од најпознатијих тврђења еквивалентних петом еуклидовом постулату, које се користи као аксиома паралелноси уместо петог еуклидовог постулата, је:

Плејферова[4] аксиома паралелности. *Ако је p произвољна права и A тачка ван ње тада у равни $\pi(p, A)$ постоји јединствена права a која садржи тачку A и нема заједничких тачака са правом p.*

[2]Птоломеј грчко-римски астроном, географ и математичар из Александрије. Живео је у првом и другом веку нове ере.

[3]Јохан Хајнрих Ламберт (1728-1777) швајцарски математичар и физичар, члан Берлинске и Минхенске академије наука.

[4]Џон Плејфер (1748-1819) шкотски научник и математичар.

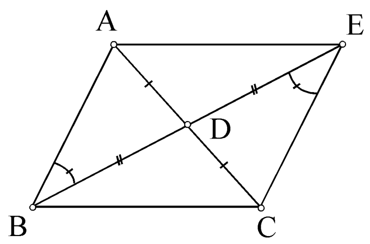
У овом поглављу изложићемо најинтересантније еквиваленте Плејферове аксиоме паралелности. Напоменимо, да сва тврђења у овом одељку доказујемо у апсолутној геометрији.

9.1 Лежандрове теореме

Теореме у овом поглављу односе се на збирове унутрашњих углова троугла и n-тоугла у апсолутној геометрији - без аксиоме паралелности.

Теорема 9.1.1. *За сваки троугао Δ постоји троугао Δ_1 такав да су збирови унутрашњих углова троуглова Δ и Δ_1 једнаки међу собом а један унутрашњи угао троугла Δ_1 је бар два пута мањи од једног унутрашњег угла троугла Δ.*

Доказ. Означимо са A, B, C темена тругла Δ али тако да $\measuredangle ACB \leq \measuredangle BAC$. Означимо даље са D средину странице AC а са E тачку симетричну тачки B у односу на тачку D (Слика 9.1). Тада је ΔEBC тражени троугао Δ_1.



Слика 9.1.

Означимо са $\sigma(ABC)$ збир унутрашњих углова троугла ΔABC. Из подударности троуглова ΔABD и ΔCED следи

$$\sigma(ABD) = \sigma(CED).$$

Међутим, $\measuredangle CED$ једнак је углу $\measuredangle ABD$, па је бар један од углова $\measuredangle ABD$ и $\measuredangle DBC$ бар два пута мањи од $\measuredangle ABC$. Тада је $\measuredangle DBC + \measuredangle DEC = \measuredangle ABC$ и $\measuredangle BCE = \measuredangle BCA + \measuredangle CAB$ па је

$$\begin{aligned}\sigma(\Delta) &= \measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB \\ &= \measuredangle DBC + \measuredangle DEC + \measuredangle BCA + \measuredangle ECA \\ &= \sigma(EBC) = \sigma(\Delta_1)\end{aligned}$$

Из $\measuredangle ACB \leq \measuredangle BAC$ следи $CE = AB \leq BC$ а одавде $\measuredangle CBE \leq \measuredangle BEC$. Непосредно добијамо $2\measuredangle EBC \leq \measuredangle EBC + \measuredangle BEC = \measuredangle ABC$, па је $\Delta_1 = \Delta EBC$ тражени троугао. $\square$

Теорема 9.1.2. (Прва Лежандрова[5] теорема) *У апсолутној геометрији збир унутрашњих углова произвољног троугла није већи од збира два права угла.*

Претпоставимо да постоји троугао Δ такав да му је збир унутршнјих углова већи од збира два права угла. Означимо са R прав угао. То значи да $\sigma(\Delta) > 2R$, тј. $\sigma(\Delta) = 2R + \varepsilon$ при чему је $\varepsilon > 0$. Према претходној теореми следи да постоји троугао Δ_1 такав да је $\sigma(\Delta) = \sigma(\Delta_1)$ а један унутрашњи угао троугла Δ_1 бар два пута мањи од једног унутрашњег угла троугла Δ. Означимо те углове редом са α_1 и α. Тада је

$$\alpha_1 \leq \frac{1}{2}\alpha.$$

На исти начин постоји Δ_2 такав да је $\sigma(\Delta_1) = \sigma(\Delta_2)$, а један унутрашњи угао, означимо га са α_2 троугла Δ_2 бар два пута мањи од угла α_1 тругла Δ_1. Тада је

$$\alpha_2 \leq \frac{1}{2}\alpha_1 \leq \frac{1}{2^2}\alpha.$$

Настављајући овај поступак добијамо низ троуглова $\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2\ \ldots\ \Delta_n \ldots$ и низ углова $\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n\ \ldots$ при чему је

$$\sigma(\Delta) = \sigma(\Delta_1) = \sigma(\Delta_2) = \ldots = \sigma(\Delta_n) \ldots$$

и

$$\alpha_n \leq \frac{1}{2^n}\alpha.$$

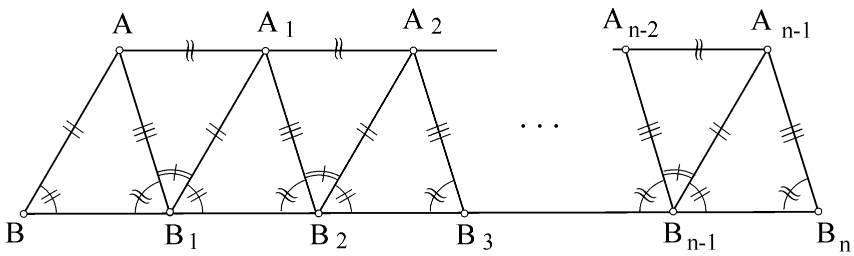
Значи, добили смо $\sigma(\Delta) = \sigma(\Delta_n)$ и $\alpha_n \leq \frac{1}{2^n}\alpha$ за $\forall n \in N$. При томе број n можемо изабрати тако велики да угао α_n буде мањи од било ког унапред задатог угла па и од ε. Ако је $\alpha_n < \varepsilon$ збир остала два угла троугла Δ_n је већи од $2R$, а то је немогуће. Према томе не постоји троугао чији је збир унутрашњих углова већи од збира два права угла. $\square$

[5] Адријен-Мари Лежандр (1752-1833) француски математичар. Значајно је допринео на пољима статистике, теорије бројева, апстрактне алгебре и математичке анализе.

Доказ Прве Лежандрове теореме - други начин. Претпоставимо да постоји троугао ΔABB_1 такав да му је збир унутрашњих углова $\sigma(\Delta ABB_1)$ троугла ΔABC већи од збира два права угла. На полуправој BB_1 конструишимо тачке $B_2, B_3, ..., B_n$ тако да важи

$$\mathcal{B}(B, B_1, B_2, B_3, ..., B_{n-1}, B_n) \quad \text{i} \quad BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = ... = B_{n-1}B_n.$$

Са оне стране полуправе BB_1 са које је тачка A констришимо тачке $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}$ (Слика 9.2.) такве да је



Слика 9.2.

$$\Delta ABB_1 \cong \Delta A_1B_1B_2 \cong ... \cong \Delta A_{n-1}B_{n-1}B_n.$$

Одавде је

$$AB = A_1B_1 = A_2B_2 = ... = A_{n-1}B_{n-1} \quad \text{i}$$
$$AB_1 = A_1B_2 = A_2B_3 = ... = A_{n-1}B_n.$$

Даље важи

$$\measuredangle AB_1A_1 = \measuredangle A_1B_2A_2 = ... = \measuredangle A_{n-2}B_{n-1}A_{n-1}$$

(као допуне једнаких углова до опруженог угла). Посматрајмо следеће троуглове: ΔAB_1A_1, $\Delta A_1B_2A_2$, ..., $\Delta A_{n-2}B_{n-1}A_{n-1}$. Они су подударни јер је

$$AB_1 = A_1B_2 = A_2B_3 = ... = A_{n-2}B_{n-1}$$
$$AB = A_1B_1 = A_2B_2 = ... = A_{n-1}B_{n-1}$$
$$\measuredangle AB_1A_1 = \measuredangle A_1B_2A_2 = ... = \measuredangle A_{n-2}B_{n-1}A_{n-1},$$

па су им и остали одговарајући елементи једнаки, тј.

$$AA_1 = A_1A_2 = ... = A_{n-2}A_{n-1}.$$

Посматрајмо полигон $BAA_1A_2..A_{n-1}B_n$. За овај полигон важи

$$BB_n < BA + AA_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-2}A_{n-1} + A_{n-1}B_n$$

тј.

$$n \cdot BB_1 < AB + (n-1)AA_1 + AB_1,$$

па је

$$n \cdot (BB_1 - AA_1) < BA + AB_1 - AA_1 = d = const.$$

За троугао ΔABB_1 по претпоставци важи да је збир његових унутрашњих углова већи од збира два права угла, тј. $\sigma(\Delta ABB_1) > 2R$, одакле следи да је

$$\measuredangle ABB_1 + \measuredangle BB_1A + \measuredangle B_1AB > 2R. \tag{9.1}$$

Даље још важи

$$\measuredangle BB_1A + \measuredangle AB_1A_1 + \measuredangle A_1B_1B_2 = 2R$$

тј.

$$\measuredangle BB_1A + \measuredangle AB_1A_1 + \measuredangle ABB_1 = 2R. \tag{9.2}$$

Ако упоредимо једнакости (9.1) и (9.2) закључујемо да је $\measuredangle BAB_1 > \measuredangle AB_1A_1$. Посматрајмо троуглове ΔABB_1 и ΔAB_1A_1. Код њих је $AB_1 = A_1B$, $AB = A_1B_1$ и $\measuredangle B_1AB > \measuredangle AB_1A_1$, одакле на основу задатка 4.7.10. следи $BB_1 > AA_1$ тј. $BB_1 - AA_1 > 0$.

У претходном разматрању смо добили да је

$$n \cdot (BB_1 - AA_1) < d = const.$$

где је n природан број, што је у супротности са Архимедовом аксиомом непрекидности. Преме томе, претпоставка да је збир унутрашњих углова у троуглу ΔABB_1 већи од збира два права угла доводи до контрадикције, па стога збир унутрашњих углова у троуглу не може бити већи од збира два права угла. □

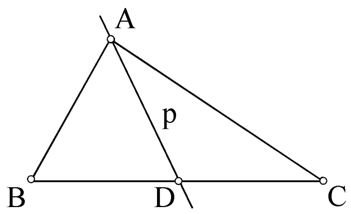
Дефиниција 9.1.1. Нека је $\sigma(ABC)$ збир унутрашњих углова троугла ΔABC и R прав угао. Разлику

$$\delta(ABC) = 2R - \sigma(ABC)$$

називамо *дефектом троугла* ΔABC.

Очигледно је $\delta(ABC) \geq 0$.

Лема 9.1.1. *Ако је збир унутрашњих углова неког троугла једнак збиру два права угла, тада је збир унутрашњих углова сваког троугла, који је од првог одсечен неком правом такође једнак збиру два права угла.*

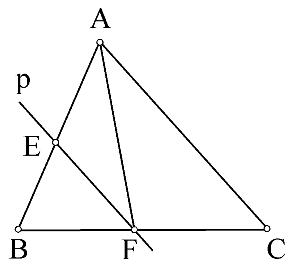


Слика 9.3.

Доказ. За пресечну праву p могу наступити два случаја:

(i) да садржи једно теме троугла и (ii) не садржи ни једно теме троугла.

(i) Нека права p садржи теме A троугла ΔABC (Слика 9.3). Означимо са D пресечну тачку праве p са страницом BC. Тада је $\sigma(\Delta ABC) = \sigma(\Delta ABD) + \sigma(\Delta ACD) - 2R$ и $\sigma(ABC) = 2R$ па је $\sigma(\Delta ABD) + \sigma(\Delta ACD) = 4R$. С друге стране збир унутрашњих углова у троуглу не може бити већи од збира два права угла па је $\sigma(\Delta ABD) = 2R$ и $\sigma(\Delta ACD) = 2R$

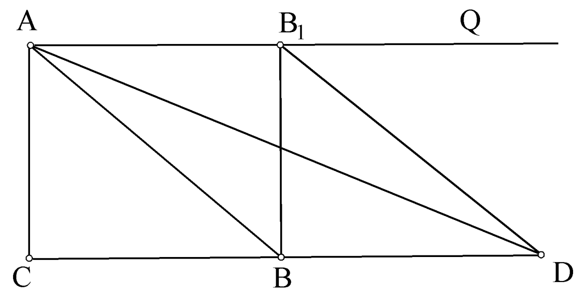


Слика 9.4.

(ii) Нека права p не садржи ни једно теме троугла ΔABC (Слика 9.4). Означимо са E и F пресечне тачке праве p редом са страницама AB и BC троугла ΔABC. Збир унутрашњих углова троугла

ΔABC једнак је збиру два права угла па је према доказаном делу (i) збир унутрашњих углова троугла ΔABF, а самим тим и троугла ΔBEF једнак збиру два права угла. □

Лема 9.1.2. *Ако је збир унутрашњих углова неког правоуглог троугла једнак збиру два права угла, тада је збир унутрашњих углова правоуглог троугла који се од првог добија удвостручавањем једне катете, такође једнак збиру два права угла.*



Слика 9.5.

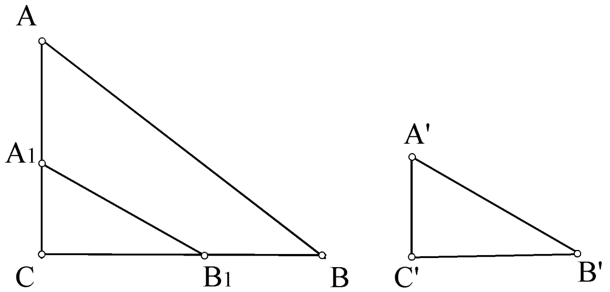
Доказ. Нека је збир унутршњих углова троугла ΔABC, са правим углом код темена C, једнак збиру два права угла (Слика 9.5.). У тачки A конструишимо полуправу AQ управну на правој AC са оне стране праве AC са које је тачка B. На полуправој AQ уочимо тачку B_1 такву да је $AB_1 = CB$. Нека је још D тачка полуправе CB таква да је $BD = BC$ и $\mathcal{B}(C, B, D)$. Како је $\sigma(\Delta ABC) = 2R$ и $\measuredangle C = R$ следи $\measuredangle CAB + \measuredangle CBA = R$. С друге стране је $\measuredangle CAB + \measuredangle BAB_1 = R$ па је $\measuredangle CBA = \measuredangle BAB_1$. За троуглове ΔABC и ΔABB_1 имамо $AB \equiv AB$, $BC = AB_1$ и $\measuredangle CBA = \measuredangle BAB_1$ па су они подударни. Из њихове подударности следи $\measuredangle AB_1B = \measuredangle C = R$, $\measuredangle CAB = \measuredangle B_1BA$. Сада је $\measuredangle B_1BC = \measuredangle B_1BA + \measuredangle ABC = \measuredangle CAB + \measuredangle ABC = R$, тј. $B_1B \perp CD$. Сада су троуглови ΔABB_1 и ΔB_1DB подударни јер је $\measuredangle AB_1B = \measuredangle DBB_1 = R$, $BB_1 \equiv BB_1$ и $AB_1 = DB_1$. Из њихове подударности следи $AB = B_1D$ и $\measuredangle BAB_1 = \measuredangle B_1DB$. Сада троуглови ΔABD и ΔDB_1A имају све одговарајуће странице подударне па су подударни према трећем ставу о подударности троуглова, одакле следи $\measuredangle BDA = \measuredangle B_1AD$. Збир унутрашњих углова троугла ΔACD је

$$\begin{aligned}\sigma(\Delta ACD) &= \measuredangle ACD + \measuredangle CDA + \measuredangle DAC\\ &= R + \measuredangle B_1AD + \measuredangle DAC = R + \measuredangle B_1AC = 2R\end{aligned}$$

тј. $\sigma(\Delta ACD) = 2R$. □

Лема 9.1.3. *Ако је збир унутрашњих углова једног правоуглог троугла једнак збиру два права угла, тада је збир унутрашњих углова сваког правоуглог троугла једнак збиру два права угла.*

Доказ. Нека је ΔABC правоугли троугао са правим углом код темена C чији је збир унутрашњих углова једнак збиру два права угла и нека је $\Delta A'B'C'$ произвољан правоугли троугао са правим углом код темена C'.

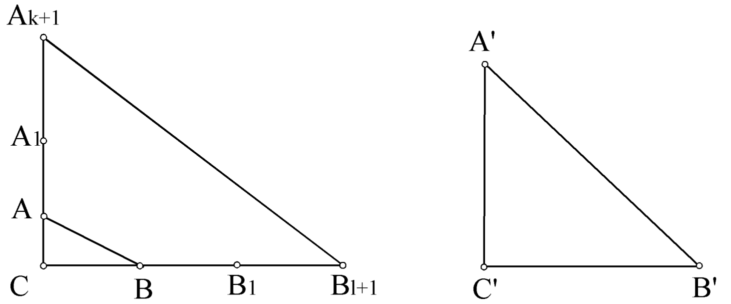


Слика 9.6.

(i) Ако су обе катете троугла ΔABC веће или једнаке од одговарајућих катета троугла $\Delta A'B'C'$ тада на дужима CB и CA постоје тачке B_1 и A_1 такве да је $CB_1 = C'A'$ и $CA_1 = C'A'$ (Слика 9.6). Правоугли троугао ΔA_1B_1C настао је одсецањем од правоуглог троугла ΔABC чији је збир унутрашњих углова једнак збиру два права угла па је према Леми 9.1.1. збир унутрашњих углова троугла ΔA_1B_1C једнак збиру два права угла. Из подударности троуглова ΔA_1B_1C и $\Delta A'B'C'$ следи да је збир унутрашњих углова троугла $A'B'C'$ једнак збиру два права угла.

(ii) Ако је катета CA мања од катете $C'A'$ онда на полуправој CA одредимо низ тачака $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ такав да је $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots)$ и $CA \cong AA_1$, $AA_1 \cong A_1A_2$,… (Слика 9.7). Тада постоји природан број k такав да је $CA_k < C'A' < CA_{k+1}$. При томе је према Леми 9.1.2. збир унитрашњих углова у сваком од троуглова ΔA_nBC ($n = 1, 2, ..., k+1$) једнак $2R$.

Ако је катета CB мања од катете $C'B'$ на полуправој CB уочимо низ тачака $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ такав да је $\mathcal{B}(B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots)$ и $CB \cong$



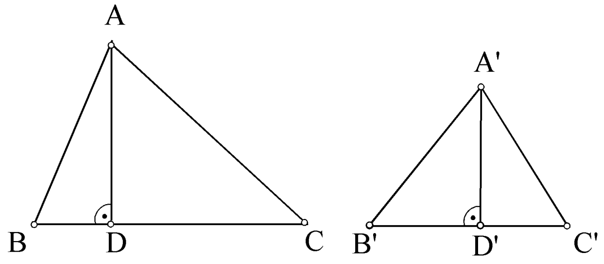
Слика 9.7.

BB_1, $BB_1 \cong B_1B_2$,... Тада постоји природан број l такав да је $CB_l < C'A' < CB_{l+1}$. При томе је према Леми 9.1.2. збир унутрашњих углова у сваком од троуглова ΔA_nB_mC $(m = 1, 2, ..., l+1)$ једнак $2R$. Дакле, збир унутрашњих углова у троуглу $\Delta A_{k+1}B_{l+1}C$ једнак је $2R$, при чему је $CA_{k+1} > C'A'$ и $CB_{l+1} > C'B'$ па је према доказаном делу под (i) збир унутрашњих углова троугла $\Delta A'B'C'$ једнак збиру два права угла.

Теорема 9.1.3. (Друга Лежандрова теорема) *Ако је у једном троуглу*
ΔABC збир унутрашњих углова једнак збиру два права угла тада је у сваком другом троуглу $\Delta A'B'C'$ збир унутрашњих углова такође једнак збиру два права угла.

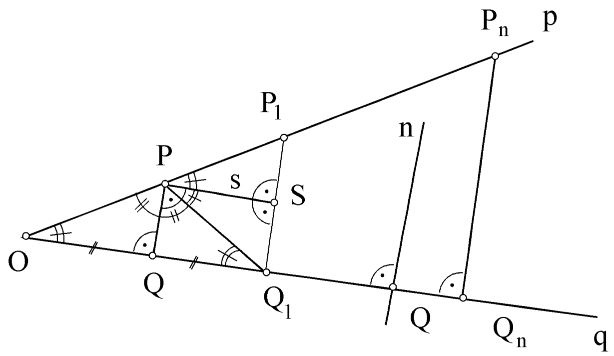
Доказ. Код троуглова ΔABC и $\Delta A'B'C'$ бар по једна висина има подножје на наспрамној страници (Слика 9.8). Нека су то подножја D и D' редом из тачака A и A'. Како је код ΔABC збир унутрашнјих углова једнак збиру два права угла, то висина AD разлаже тај троугао на троуглове ΔABD и ΔACD такве да су им збирови унутрашњих углова једнаки по $2R$ (Лема 9.1.1.).
Троугао ΔABD је правоугли и збир унутрашњих углова му је једнак $2R$ одакле следи према Леми 9.1.2. да су збирови унутрашнјих углова правоуглих троуглова $\Delta A'B'D'$ и $\Delta A'C'D'$ једнаки по $2R$ па је и збир унутрашњих углова троугла $A'B'C'$ једнак збиру два права угла. □

Теорема 9.1.4. *Постоји троугао коме је збир унутрашњих углова једнак збиру два права угла, ако и само ако свака права управна на један крак било којег оштрог угла сече други крак тог угла.*



Слика 9.8.

Доказ. Нека је $\measuredangle pOq$ произвољан оштар угао и нека је $P \in p$ произвољна тачка. Означимо са Q подножје управне из тачке P на полуправу q (Слика 9.9). Нека је R произвољна тачка полуправе q и n управна на q у тачки R.



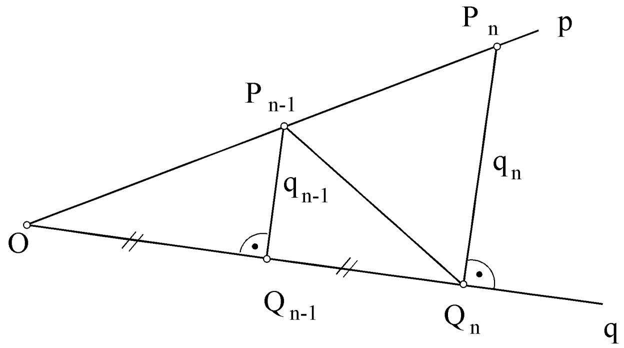
Слика 9.9.

Ако важи $\mathcal{B}(O, R, Q)$ онда на основу Пашове аксиоме директно следи да права n сече и полуправу p. Нека је $\mathcal{B}(O, Q, R)$ и P_n, Q_n, $n = 1, 2, \cdots$ такве да је $\mathcal{B}(O, P, P_1, P_2, \cdots, P_n)$, $\mathcal{B}(O, Q, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n)$, $OP_n = 2^n\, OP$ и $OQ_n = 2^n\, OQ$. Ако постоји троугао код кога је сума унутрашњих углова једнака збиру два права угла, онда је збир унутрашњих углова сваког троугла једнак збиру два права угла (друга Лежандрова теорема). Дакле, збир унутрашњих углова троугла ΔOP_nQ_n једнак је збиру два права угла. Означимо са S тачку праве s управне на PQ у тачки Pтакву да је $PS \cong OQ$.

Тада је

$$\Delta OPQ \cong \Delta PP_1S \cong \Delta PQ_1S \cong \Delta PQ_1Q,$$

па је $\measuredangle PQ_1Q \cong \measuredangle POQ$ и $\measuredangle P_1Q_1P \cong \measuredangle OPQ$ а како је још $\measuredangle POQ + \measuredangle OPQ = R$, то је $\measuredangle OQ_1P_1$ прав. Расуђујући на исти начин закључујемо да је ΔOP_nQ_n правоугли троугао са правим углом код темена Q_n. На основу Архимедове аксиоме тачку Q_n можемо изабрати тако да је $\mathcal{B}(O, R, Q_n)$. Сада права n на основу Пашовог става мора сећи још једну страницу троугла ΔOP_nQ_n у унутрашњој тачки. Уколико би n секла страницу P_nQ_n у унутрашњој тачки, добили би смо троугао са два права угла, што је немогуће. Према томе n мора сећи дуж OP_n, тј. полуправу p, чиме је доказ завршен.



Слика 9.10.

Обратно, нека свака права q_n управна у тачки Q_n на крак q сече крак p оштрог угла $\measuredangle pOq$ у тачки P_n (Слика 9.10). Тада за дефект троугла ΔOP_nQ_n важи

$$\delta(OP_nQ_n) = \delta(OP_{n-1}Q_{n-1}) + \delta(P_{n-1}Q_{n-1}Q_n + \delta(P_{n-1}P_nQ_n),$$

тј.

$$\delta(OP_nQ_n) \geq 2\delta(OP_{n-1}Q_{n-1}).$$

Настављајући тај поступак после n корака добијамо

$$\delta(OP_nQ_n) \geq 2^n\delta(OPQ).$$

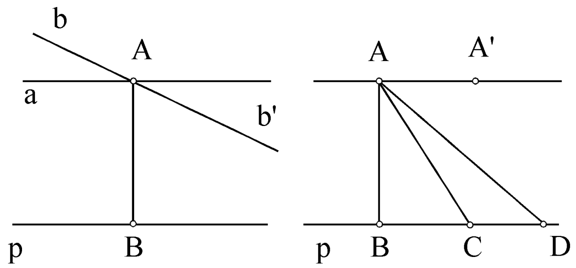
Ако би било $\delta(OPQ) > 0$, број n можемо изабрати довољно велики да $2^n\delta(OPQ)$ буде веће од било ког унапред задатог угла, па и од $2R$. Тада би било

$$\delta(OP_nQ_n) > 2R$$

а то је немогуће. Дакле, мора бити $\delta(OPQ) = 0$, тј. $\sigma(OPQ) = 2R$. $\square$

Теорема 9.1.5. (Трећа Лежандрова теорема) *Постоји троугао* Δ *коме је збир* $\sigma(\Delta)$ *унутрашњих углова једнак збиру два права угла ако и само ако у равни* π *одређеној правом* p *и тачком* A *ван ње постоји само једна права* a *која садржи тачку* A *и не сече праву* p.

Доказ. Означимо са B подножје нормале из тачке A на праву p, а са a праву која је управна на AB у тачки A (Слика 9.11.). Претпоставимо да постоји троугао чији је збир унутрашњих углова једнак збиру два права угла и докажимо да је права a једина која пролази кроз тачку A и нема заједничких тачака са правом p. Нека је b још једна права у равни π која садржи тачку A и нема заједничких тачака са правом са правом p. Нека је b' она од полуправих праве b са почетком у тачки A која са полуправом BA гради оштар угао. Права p је управна на крак BA оштрог угла, па на основу теореме 9.1.4. она сече други крак b', дакле и праву b.



Слика 9.11.

Обратно, нека је у равни π дата права p, тачка A ван ње и права a која садржи тачку A и нема заједничких тачака са правом p. Нека је права a јединствена са том особином. Показаћемо да постоји троугао чији је збир унутрашњих углова једнак збиру два права угла. Обележимо са B подножје управне из тачке A на праву p (Слика 9.11.). Нека је C произвољна тачка праве p различита од тачке B и A' тачка праве a са исте стране праве AB са које је и тачка C. Тада је збир $s(ABC)$ унутрашњих углова троугла ΔABC једнак $2R$. Докажимо то. На основу прве Лежандрове теореме важи $s(ABC) \leq 2R$, па је $\measuredangle ACB \leq \measuredangle CAA'$. Ако би било $\measuredangle ACB < \measuredangle CAA'$ онда би унутар угла $\measuredangle CAA'$ постојала полуправа b' која са AC гради угао β подударан углу $\measuredangle ACB$. Угао $\measuredangle ACB$ је оштар одакле следи да је и β оштар, тј. полуправа b на основу теореме 9.1.4. сече праву p у тачки D. Тада би у троуглу ΔACD спољашњи угао код темена C био једнак унутрашнем несуседном углу $\measuredangle CAD$, што је немогуће. Према томе мора бити збир унутрашњих углова у ΔABC једнак $2R$. □

9.2 Еквиваленти Плејферове аксиоме паралелности

Теорема 9.2.1. *Тврђење: "Збир унутрашњих углова произвојног троугла једнак је збиру два права угла", еквивалентно је Плејферовој аксиоми паралелности.*

Доказ. Следи директно из друге и треће Лежандрове теореме. □

Теорема 9.2.2. *Тврђење: "Збир σ унутрашњих углова простог равног n- тоугла једнак је $\sigma = 2(n-2)R$, при чему је R прав угао", еквивалентно је Плејферовој аксиоми паралелности.*

Доказ. Директно следи из претходне теореме. □

Последица. *Тврђење "Збир спољашњих углова код свих темена конвексног простог равног n- тоугла једнак је $4R$" еквивалентно је Плејферовој аксиоми паралелности.*

Теорема 9.2.3. *Тврђење: "Углови на противосновици Сакеријевог четвороугла су прави" еквивалентно је Плејферовој аксиоми паралелности.*

Теорема 9.2.4. *Тврђење: "Сви углови Ламбертовог четвороугла су прави", еквивалентно је Плејферовој аксиоми паралелности.*

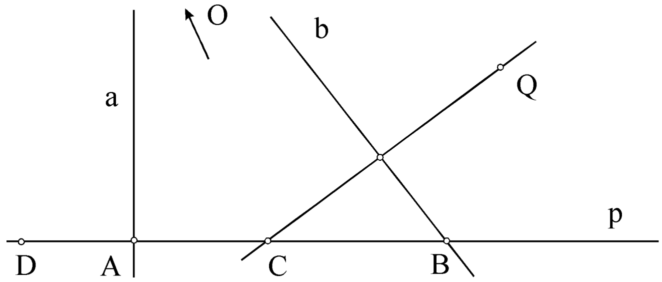
Теорема 9.2.5. *Тврђење: "Свака права у равни оштрог угла која је управна на један крак оштрог угла сече други крак", еквивалентно је Плејферовој аксиоми паралелности.*

Доказ. Следи директно из Теореме 9.1.4. и треће Лежандрове теореме. □

Теорема 9.2.6. *Тврђење: "Кроз макоје три неколинеарне тачке пролази круг", еквивалентно је Плејферовој аксиоми паралелности.*

Доказ. Нека важи Плејферова аксиома паралелности и нека су A, B и C три неколинеарне тачке. Медијатрисе страница троугла ΔABC припадају истом прамену правих. Није тешко закључити да се ради о прамену конкурентних правих, тј. да пресечна тачка O медијатриса страница троугла ΔABC представља средиште круга описаног око троугла ΔABC.

Обратно, нека важе аксиоме апсолутне геометрије и нека кроз ма које три неколинеарне тачке пролази круг. Нека произвољне праве a и b секу неку праву p тако да је a управна на p и b није управна на p.

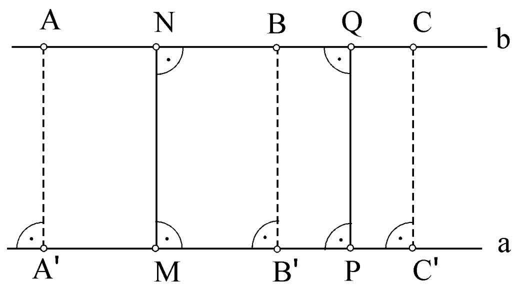


Слика 9.12.

Означимо са A и B пресечне тачке праве p редом са правама a и b (Слика 9.12). Нека је C тачка праве p таква да је $\mathcal{B}(A, C, B)$. Нека је D тачка симетрична тачки C у односу на тачку A, q права која је нормална на праву b и садржи тачку C и Q тачка праве q симетрична тачки C у односу на праву b. Дакле, праве a и b су медијатрисе редом дужи CD и CQ. Тачке C, D и Q су три неколинеарне тачке јер би у супротном било $b \perp p$. Према уведеној претпоставци кроз тачке C, D и Q пролази круг, са центром у тачки O. Тачка O је подједнако удаљена од темена C, D и Q троугла ΔDCQ, тј. $OC \cong OD \cong OQ$. Тачка O припада правој a, јер је a медијатриса дужи CD. Такође тачка O припада и правој b, јер је b медијатриса дужи CQ. Дакле, праве a и b секу се у тачки O, што на основу Теореме 9.1.4. и треће Лежандрове теореме значи да важи Плејферова аксиома паралелности. $\square$

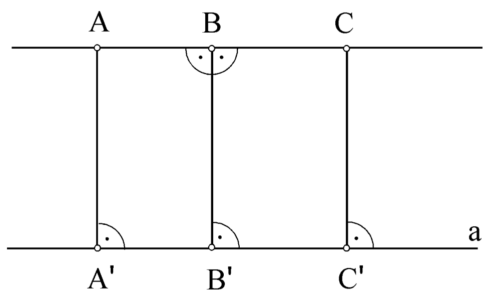
Теорема 9.2.7. *Тврђење: "У равни постоје три колинеарне тачке подједнако удаљене од дате праве", еквивалентно је Плејферовој аксиоми паралелности.*

Доказ. Нека су A, B, C три колинеарне тачке подједнако удаљене од праве a. Доказаћемо да тада важи Плејферова аксиома паралелности. Означимо са A', B', C' подножја нормала редом из тачака A, B и C на праву A.



Слика 9.13.

Тада је $AA' \cong BB' \cong CC'$. Дакле четвороугао $AA'B'B$ је Сакеријев. Средња линија MN тог четвороугла (Теорема 4.8.2.) је заједничка нормала основице и противосновице, тј. $MN \perp a$ и $MN \perp b$ (Слика 9.13).



Слика 9.14.

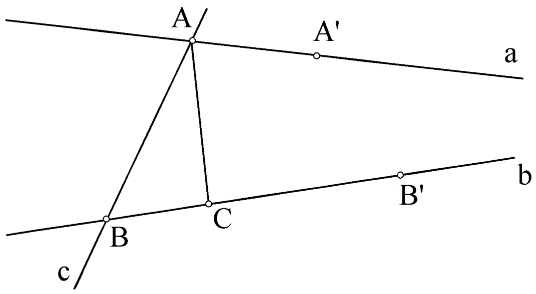
Четвороугао $BB'C'C$ је Сакеријев па је средња линија PQ заједничка нормала на праве a и b (Теорема 4.8.2.). Како тачке N и Q припадају правој b и не припадају правој a, то тачке M, N, P и Q образују четвороугао са четири права угла, одакле на основу Теореме 9.2.2. важи Плејферова аксиома паралелности.

Обратно, нека важи Плејферова аксиома паралелности и нека су у равни дате права a и тачке A, B и C са исте стране праве a, тако да је $AA' \cong BB' \cong CC'$ где су A', B' и C' подножја нормала редом из тачака A, B и C на праву a. Показаћемо да су тачке A, B и C колинеарне (Слика 9.14).

Четвороугао $AA'B'B$ је Сакеријев. Углови на противосновици су му прави јер важи Плејферова аксиома паралелности, тј. $\measuredangle ABB' = R$. Такође, четвороугао $BB'C'C$ је је Сакеријев, па је $\measuredangle CBB' = R$. Дакле, углови $\measuredangle ABB'$ и $\measuredangle CBB'$ су прави и напоредни, тј. тачке A, B и C су колинеарне. □

Пети Еуклидов постулат. Због свог историјског значаја, од посебног је интереса Пети Еуклидов постулат као један од многих еквивалената Плејферове аксиоме паралелности.

Теорема 9.2.8. *Пети Еуклидов постулат и Плејферова аксиома паралелности су еквивалентна тврђења.*



Слика 9.15.

Доказ. Нека важи Плејферова аксиома паралелности и нека права c сече праве a и b редом у тачкама A и B. Означимо са A' и B' тачке редом правих a и b такве да је

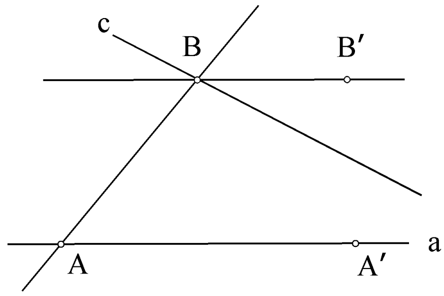
$$\measuredangle A'AB + \measuredangle B'BA < 2R$$

где је R прав угао (Слика 9.15). Тада је бар један од углова $\measuredangle A'AB$ и $\measuredangle B'BA$ оштар. Не умањујући општост доказа претпоставимо да је угао $\measuredangle B'BA$ оштар.

Означимо са C подножје управне из тачке A на праву b. Тачке C и B' су са исте стране тачке B јер би смо у супротном добили троугао чији је збир унутрашњих углова већи од збира два права угла, што је у супротности са првом Лежандровом теоремом. Тада је и угао $\measuredangle CAA'$ оштар. Заиста, како важи Плејферова аксиома паралелности то је $\measuredangle BAC + \measuredangle ABC = R$, одакле закључујемо

$$\begin{aligned}\measuredangle CAA' &= \measuredangle BAA' - \measuredangle BAC = \measuredangle BAA' - (R - \measuredangle ABC)\\ &= \measuredangle BAA' - R + \measuredangle ABC < 2R - R = R\end{aligned}$$

Права b је нормала у тачки C на један крак оштрог угла $\measuredangle CAA'$, одакле на основу Теореме 9.2.5. сече други крак тог угла. Дакле праве a и b се секу, тј. важи пети Еуклидов постулат.



Слика 9.16.

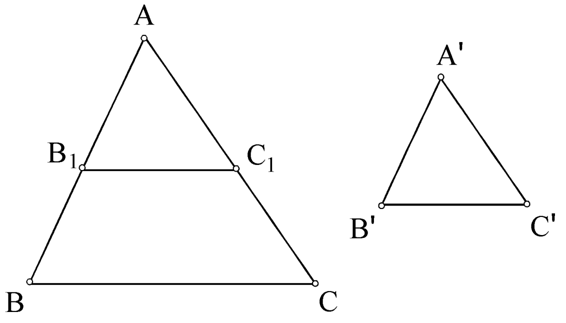
Обратно, нека важи пети Еуклидов постулат и нека су дати права a и тачка B ван прве a. Нека су A и A' произвољне тачке праве a и нека је B' тачка равни (a, B) одређеној правом a и тачком B тако да је (Слика 9.16)

$$A', B' \ddot{-} AB \text{ i } \measuredangle A'AB + \measuredangle ABB' = 2R.$$

Права $b \equiv BB'$ је једина права равни (a, B) која садржи тачку B и нема заједничких тачака са правом a. Заиста, свака друга права c равни (a, B) која садржи тачку B гради са правом AB супротне углове чији је збир различит од збира два права угла. Како важи пети Еуклидов постулат права c мора сећи праву a, а то значи да важи Плејферова аксиома паралелности. $\square$

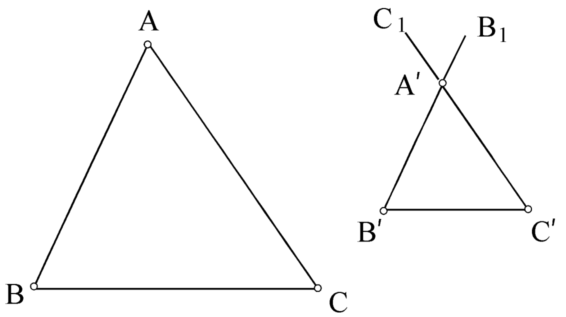
Размотрићемо још један интересантан еквивалент аксиоме паралелности:

Теорема 9.2.9. *Тврђење: "Постоје два троугла којима су одговарајући углови једнаки а одговарајуће странице неједнаке" еквивалентно је Плејферовој аксиоми паралелности.*



Слика 9.17.

Доказ. Нека за троуглове ΔABC и $\Delta A'B'C'$ важи $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$, $\measuredangle C = \measuredangle C'$ а одговарајуће странице су им неједнаке (Слика 9.17). То значи да постоји тачка $B_1 \neq B$ на полуправој AB таква да је $AB_1 \cong A'B'$ и тачка $C_1 \neq C$ на полуправој AC таква да је $AC_1 \cong A'C'$.



Слика 9.18.

Троуглови ΔAB_1C_1 и $\Delta A'B'C'$ су подударни јер имају једнаке две странице и њима захваћен угао, одакле следи

$$\measuredangle AB_1C_1 \cong \measuredangle A'B'C' \text{ i } \measuredangle AC_1B_1 \cong \measuredangle A'C'B'.$$

Посматрајмо четвороугао BCC_1B_1. Тада за збир унутрашњих углова тог четвороугла важи

$$\begin{aligned}\sigma(BCC_1B_1) &= \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle CC_1B_1 + \measuredangle C_1B_1B \\ &= \measuredangle B' + \measuredangle C' + (2R - \measuredangle C') + (2R - \measuredangle B') = 4R.\end{aligned}$$

На основу Теореме 9.2.2. важи Плејферова аксиома паралелности.

Обратно, нека важи Плејферова аксиома паралелности. Нека је дат троугао ΔABC и дуж $B'C'$ тако да је $B'C' \neq BC$ (Слика 9.18).

Нека су $B'B_1$ и $C'C_1$ полуправе такве да је

$$\measuredangle(B'B_1, B'C') = \measuredangle B,\ \ \measuredangle(B'C', C'C_1) = \measuredangle C.$$

Углови $\measuredangle B$ и $\measuredangle C$ су углови троугла ΔABC , па важи $\measuredangle B + \measuredangle C < 2R$, одакле следи $\measuredangle B' + \measuredangle C' < 2R$. Како смо претпоставили да важи Плејферова аксиома паралелности важиће и Пети Еуклидов постулат, тј. полуправе $B'B_1$ и $C'C_1$ ће се сећи у тачки A'. Троуглови ΔABC и $\Delta A'B'C'$ имају сва три одговарајућа угла једнака, док им одговарајуће странице нису једнаке. $\square$

Део 10

Аксиома паралелности. Еуклидска геометрија

10.1 Плејферова аксиома паралелности. Појам Еуклидског простора.

Аксиома паралелности је, као што смо видели, била позната као став још у античким временима код Грка. Међутим, Еуклидова оригинална формулација унеколико се разликује од Плејферове аксиоме паралелности, која у ствари представља еквивалент петог Еуклидовог постулата. Пошто овако исказан поседује једноставну формулацију Плејфер 1797. године узима тај став за аксиому, а пети постулат за теорему.

Плејферова аксиома паралелности. *Ако је p произвољна права и A тачка ван ње, тада у равни $\pi(p, A)$ постоји највише једна права a, која садржи тачку A и нема заједничких тачака са правом p.*

Дефиниција 10.1.1. Теорију засновану на систему аксиома апсолутне геометрије и Плејферовој аксиоми паралелности називамо *Еуклидском* или *параболичком геометријом.* Раван и простор у којима важе аксиоме Еуклидске геометрије називамо респективно *Еуклидском равни* и *Еуклидским простором* и означавамо их редом са E^2 и E^3.

10.2 Паралелност у $\mathbf{E^n}$, $(\mathbf{n = 2, 3})$

У Еуклидској геометрији се ради лакшег излагања уводе бинарне релације дефинисане на скупу свих правих и скупу свих равни: *релација паралелности правих* и *релација паралелности равни* а такође и *релација паралелности праве и равни.*

Дефиниција 10.2.1. У простору E^3 права p је *паралелна* са правом q ако је права p компланарна са правом q при чему је $p \equiv q$ или $p \cap q = \emptyset$. То означавамо $p \parallel q$.

Из претходне дефиниције и Плејферове аксиоме паралелности непосредно следи следеће тврђење

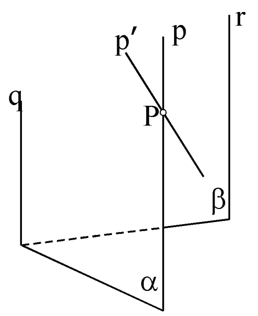
Теорема 10.2.1. *За сваку праву p и сваку тачку P простора E^3 постоји јединствена права q простора E^3 таква да садржи тачку P и паралелна је правој p.*

Теорема 10.2.2. *Релација паралелности дефинисана на скупу правих простора E^n, $n = 2, 3$ је релација еквиваленције.*

Доказ. Рефлексивност и симетричност релације паралелности правих следе директно из дефиниције. Доказаћемо транзитивност. Нека су p, q и r три праве простора E^n такве да је $p \parallel q$ и $q \parallel r$. Доказаћемо да је тада $q \parallel r$. Из чињенице да је $p \parallel q$ следи да су праве p и q компланарне. На исти начин компланарне су и праве q и r. Означимо са α раван одређену правама p и q а са β раван одређену правама q и r. За равни α и β могу наступити следећи случајеви: $\alpha = \beta$ и $\alpha \neq \beta$.

(i) Нека је $\alpha = \beta$. Ако је $p = q$ или $q = r$ доказ је тривијалан. Нека је $p \neq q$ и $q \neq r$. Тада праве p и r не могу имати заједничких тачака, јер би у супротном у равни α постојале две разне праве p и r које се секу и које са правом q немају заједничких тачака, што је у супротности са Плејферовом аксиомом паралелности.

(ii) Нека је сада $\alpha \neq \beta$. У том случају мора бити $p \neq q$ и $q \neq r$ јер би се у супротном равни α и β поклапале. Дакле важи $p \cap q = \varnothing$ и $q \cap r = \varnothing$. Да би доказали да су праве p и r паралелне довољно је доказати да су дисјунктне и компланарне. Ако би се праве p и r секле у тачки S, тада би права q и тачка S одређивале јединствену раван па би било $\alpha = \beta$ што је у супротности са претпоставком. Значи важи $p \cap r = \varnothing$, тј. праве p и r су дисјунктне. Докажимо још да су праве p и r компланарне. Нека је $P \in p$ произвољна тачка. Тада тачка P и права r одређују неку раван γ. Равни α и γ имају заједничку тачку па је њихов пресек права. Уколико је то права p доказ је завршен, јер у том случају праве p и r припадају равни γ. Нека је p' пресечна права равни α и γ, при чему је $p \neq p'$ (Слика10.1).



Слика 10.1.

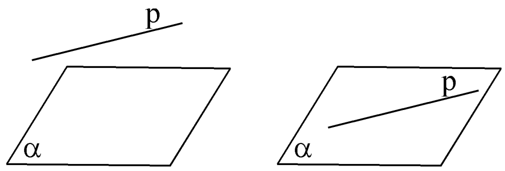
Сада праве p, p' и q припадају истој равни α при чему се праве p и p' секу у истој тачки P и према Плејферовој аксиоми паралелности не могу бити истовремено дисјунктне са правом q. Дакле, праве p' и q се секу у некој тачки Q. Тачка Q припада свим трима равнима α, β и γ. Како је q пресечна права равни α и β, а r пресечна права равни β и γ, то важи

$$Q \in \alpha \cap \beta \cap \gamma = (\alpha \cap \beta) \cap (\beta \cap \gamma) = q \cap r,$$

тј. Q је пресечна тачка правих q и r, што је немогуће, јер смо претпоставили да је $q \cap r = \varnothing$. Дакле, праве p и r су компланарне. $\Box$

Релација паралелности правих као релација еквиваленције разбија скуп свих правих простора E^n на класе еквиваленције. Те класе еквиваленције зваћемо *правцима.* На тај начин правац праве p представља скуп свих правих које су са њом паралелне.

Дефиниција 10.2.2. У простору E^3 *права p је паралелна равни π* (ознака $p \parallel \pi$) ако је $p \subset \pi$ или $p \cap \pi = \emptyset$. Обратно, у простору E^3 раван π је паралелна са правом p (ознака $\pi \parallel p$) ако је $\pi \supset p$ или $\pi \cap p = \emptyset$ (Слика 10.2).



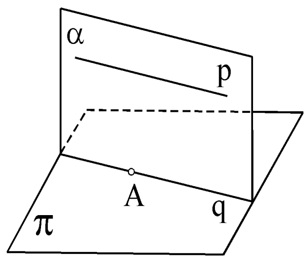
Слика 10.2.

Из дефиниције непосредно следи да ако је $p \parallel \pi$ тада је и $\pi \parallel p$ и обратно. Према томе у могућности смо да за такву праву p и раван π кажемо да су паралелне без обзира на њихов поредак.

Теорема 10.2.3. *Права p је паралелна равни π ако и само ако у равни π постоји права q паралелна са правом p.*

Доказ. Ако права p припада равни π доказ је тривијалан. Размотримо случај када права p не припада равни π.

Нека је $p \parallel \pi$. Докажимо да у равни π постоји права q таква да је $p \parallel q$. Нека је A произвољна тачка у равни π. Тачка A не припада правој p, одакле следи да тачка A и права p одређују раван α (Слика 10.3). Равни α и π имају заједничку тачку A па је њихов пресек права q. Равни α и π су различите јер права п припада равни α а не припада равни π. Праве p и q су компланарне и немају заједничких тачака, јер би њихова заједничка тачка припадала равни π, што је немогуће. Дакле, праве p и q морају бити паралелне. Нека сада у равни π постоји права q паралелна пра-

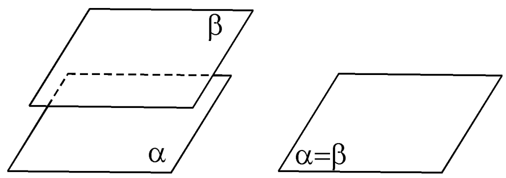


Слика 10.3.

вој p. Докажимо да је права p паралелна равни π. Како права p не припада равни π нити са њом има заједничких тачака, то праве p и

q немају заједничких тачака па одређују неку раван α. Раван π и права p су дисјунктне, јер ако би се секле, њихова пресечна тачака би припадала пресеку равни α и π, тј правој q, што је немогуће јер су праве p и q дисјунктне. Према томе парава p и раван π су паралелне. $\square$

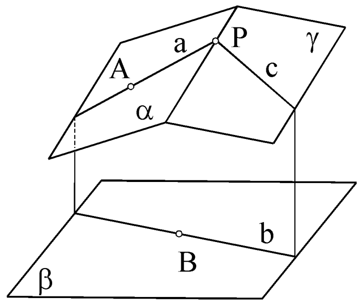
Дефиниција 10.2.3. У простору E^3 *раван* α *је паралелна равни* β, (ознака: $\alpha \parallel \beta$) ако је $\alpha \equiv \beta$ или $\alpha \cap \beta = \varnothing$.



Слика 10.4.

Теорема 10.2.4. *Релација паралелности равни простора* E^3 *је релација еквиваленције.*

Доказ. Рефлексивност и симетричност следе директно из дефиниције. Докажимо транзитивност. Нека су α, β и γ три равни такве да је $\alpha \parallel \beta$ и $\beta \parallel \gamma$, докажимо да је тада $\alpha \parallel \gamma$. за равни α, β и γ могу наступити следећи случајеви: (i) $\alpha = \beta$ или $\beta = \gamma$, (ii) $\alpha \neq \beta$ и $\beta \neq \gamma$. Први случај је тривијалан. Размотримо случај $\alpha \neq \beta$ и $\beta \neq \gamma$. Тада $\alpha \cap \beta = \varnothing$ и $\beta \cap \gamma = \varnothing$. Претпоставимо да равни α и γ нису паралелне, тј. нека је p пресечна права равни α и γ. Нека је P произвољна тачака праве p и A тачка равни α која не припада правој p. Нека је још B произвољна тачка равни β. Тада постоји раван π која садржи неколинеарне тачке A, B и P (Слика 10.5). Раван π има заједничких тачака са сваком од равни α, β и γ, одакле следи да са сваком од њих има заједничку праву. Означимо те заједничке праве редом са a, b и c. Праве a и c су различите јер би у супротном тачка A припадала и правој c па би се равни α и γ поклапале, што у овом случају није могуће. Различите праве a и c имају заједничку тачку P, и дисјунктне су са правом b у равни π, што је у супротности са Плејферовом аксиомом паралелности. Према томе равни α и γ морају бити паралелне. $\square$



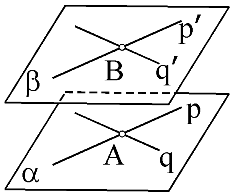
Слика 10.5.

Теорема 10.2.5. *Нека су дати раван α и тачка B. Тада постоји јединствена раван β која садржи тачку B и паралелна је равни α.*

Доказ. За тачку B и раван α имамо следеће могућности:
(i) $B \in \alpha$, (ii) $B \notin \alpha$.

(i) У првом случају α је тражена раван.

(ii) Нека $B \notin \alpha$. Означимо са A произвољну тачку равни α. Нека су p и q произвољне различите праве равни α које садрже тачку A. Према теореми 10.2.1. постоје јединствене праве p' и q' које садрже тачку B, такве да је $p' \parallel p$ и $q' \parallel q$. Ако би се праве p' и q' поклапале, онда би због транзитивности релације паралелности правих, праве p и q биле паралелне, што је у супротности са њиховим избором. Према томе, праве p' и q' се секу у тачки B па одређују тачно једну раван β (Слика 10.6). Раван β је тражена раван. Докажимо



Слика 10.6.

то. Раван β садржи тачку B. Претпоставимо да равни α и β нису паралелне. У том случају равни α и β се секу по некој правој r. Према Плејферовој аксиоми паралелности бар једна од правих p' и q' у равни β мора сећи праву r. Нека права p' сече праву r у тачки R. Праве p и p' су две разне паралелне праве па одређују неку раван π. Тада тачка R припада равнима π и α, па самим тим и њиховом пресеку, тј. правој p. То значи да се праве p и p' секу у тачки R што је у супротности са њиховим избором. Према томе раван β паралелна је равни α. Тиме је доказана егзистенција такве равни.

Треба показати још јединственост. Нека је β_1 произвољна раван, која садржи тачку B и паралелна је равни α. Због транзитивности релације паралелности равни следи да су равни β и β_1 паралелне, а како имају заједничку тачку B оне се поклапају. □

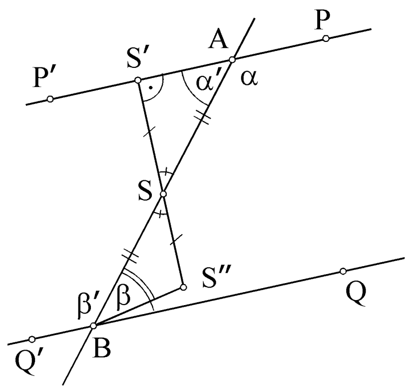
10.3 Углови на трансверзали

Сада ћемо разматрати неке даље последице Плејферове аксиоме.

Теорема 10.3.1. *Нека су A, B, P, Q тачке исте равни такве да је $P, Q \ddot{-} AB$. Тада важи еквиваленција:*

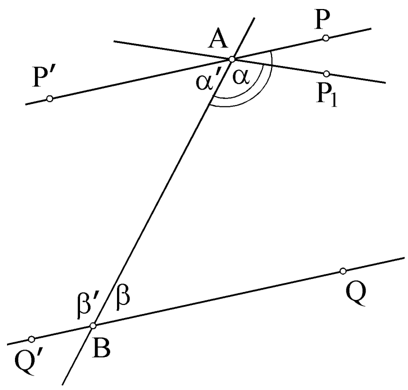
$$AP \parallel BQ \Leftrightarrow \measuredangle PAB + \measuredangle QBA = 2R.$$

Доказ. Означимо са P' и Q' произвољне тачке такве да је $\mathcal{B}(P, A, P')$ и $\mathcal{B}(Q, B, Q')$. Уведимо ознаке: $\alpha = \measuredangle PAB$, $\beta = \measuredangle QBA$, $\alpha' = \measuredangle P'AB$, $\beta' = \measuredangle Q'BA$.



Слика 10.7.

Претпоставимо најпре да важи $\measuredangle PAB + \measuredangle QBA = 2R$. Тада из $\measuredangle PAB + \measuredangle P'AB = 2R$ следи $\measuredangle QBA = \measuredangle P'AB$. Означимо са S средиште дужи AB, са S' подножје нормале из тачке S на праву PA, и са S'' тачку такву да је $S''S \cong SS'$ и $\mathcal{B}(S', S, S'')$ (Слика 10.7). Троуглови $\Delta SS'A$ и $\Delta SS''B$ су подударни према другом ставу о подударности, следи да је и угао $\measuredangle BS''S$ прав, и $\measuredangle SBS'' = \measuredangle SAS' = \measuredangle P'AB = \measuredangle QBA = \measuredangle SBQ$. Према томе, тачка S'' припада правој BQ, па је права $S'S''$ заједничка нормала правих PA и QB. Следи да је $AP \parallel BQ$, јер ако би се праве AP и BQ секле у некој тачки X, тада би из те тачке постојале две разне нормале на праву $S'S''$, што је у супротности са теоремом о јединствености нормале.



Слика 10.8.

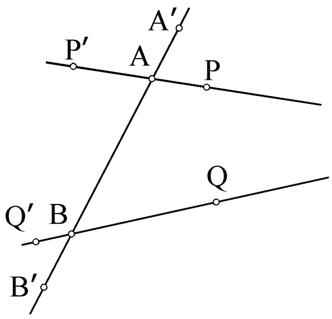
Обратно, нека је $AP \parallel BQ$. Докажимо да је тада

$$\measuredangle PAB + \measuredangle QBA = 2R.$$

Нека је AP_1 права за коју је $Q, P_1 \ddot{-} AB$ и $\measuredangle P_1AB = 2R - \measuredangle QBA$ (Слика 10.8). Према доказаном у првом делу теореме следи да је је $AP_1 \parallel BQ$. Према томе, добили смо да кроз тачку A ван праве BQ пролазе две праве AP и AP_1 паралелне правој BQ, одакле следи да се праве AP и AP_1 поклапају, па је $\measuredangle PAB = \measuredangle P_1AB = 2R - \measuredangle QBA$, тј. $\measuredangle PAB + \measuredangle QBA = 2R$. $\square$

Дефиниција 10.3.1. *Углови на трансверзали* су углови које образује права која сече две разне праве неке равни. Ту њихову заједничку сечицу називамо *трансверзала*.

Уведимо следеће ознаке: нека права t сече праве PP' и QQ' редом у тачкама A и B таквим да је $\mathcal{B}(P,A,P')$, $\mathcal{B}(Q,B,Q')$ и $P,Q \ddot{-} AB$ (Слика 10.9). Нека су A' и B' тачке праве t такве да је $\mathcal{B}(A',A,B,B')$. У том случају ћемо рећи да су углови: (i) $\measuredangle A'AP$ и $\measuredangle ABQ$ - *сагласни*,



Слика 10.9.

(ii) $\measuredangle PAB$ и $\measuredangle QBA$ а такође и $\measuredangle PAA'$ и $\measuredangle QBB'$ - *супротни*,

(iii) $\measuredangle PAB$ и $\measuredangle Q'BA$ а такође и $\measuredangle PAA'$ и $\measuredangle Q'BB'$ - *наизменични*.

Углови на трансверзали чији краци садрже дуж AB су *унутрашњи* а они други *спољашњи*.

Према томе, претходне појмове можемо увести и на следећи начин:

Дефиниција 10.3.2. (i) Један спољашњи и један унутрашњи угао са исте стране трансверзале су *сагласни углови*.

(ii) Два спољашња или два унутрашња угла са исте стране трансверзале су *супротни углови*.

(iii) Два спољашња или два унутрашња несуседна угла са разних страна трансверзале су *наизменични углови*.

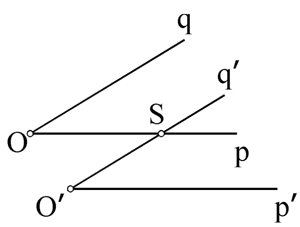
За насће од интереса бити случај кад су праве PP' и QQ' паралелне. На основу претходне теореме закључујемо да су супротни углови, на трансверзали паралелних правих, суплементни. Директна последица те теореме је и да су сагласни углови на трансверзали паралелних правих као и наизменични углови међу собом подударни. Могуће је исказати и теореме аналогне претходној у којима се уместо о супротним говори о сагласним или наизменичним угловима.

Сада можемо формулисати и доказати *теорему о угловима са паралелним крацима.*

Теорема 10.3.2. *Нека су* $\measuredangle pOq$ *и* $\measuredangle p'Oq'$ *два конвексна угла неке равни са крацима таквим да је* $p \parallel p'$ *и* $q \parallel q'$*. Тада:*

(i) *Ако су оба угла оштра или оба тупа тада су они подударни.*

(ii) *Ако је један угао оштар а други туп тада су они суплементни.*



Слика 10.10.

Доказ. Означимо са p_1, q_1, p_1', q_1' праве одређене крацима p, q, p', q' датих углова. Како је $p_1 \parallel p_1'$, то права q_1' мора сећи праву p_1 у некој тачки S (Слика 10.10). Један од углова који одређују праве p_1 и q_1' означимо са α. Сада је права q_1' трансверзала паралелних правих p_1 и p_1', а права p_1 трансверзала паралелних правих q_1 и q_1'. Тако је сваки од углова $\measuredangle pOq$ и $\measuredangle p'Oq'$ као угао на одговарајућој трансверзали подударан или суплементан углу α. Значи, и углови $\measuredangle pOq$ и $\measuredangle p'Oq'$ су подударни или суплементни. Наравно, ако су оба оштра онда не могу бити суплементни па су подударни. Слично ако је један угао оштар а други туп тада морају бити суплементни. □

Навешћемо без доказа *теорему о угловима са нормалним крацима* (Слика 10.11).

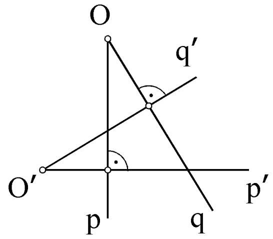
Теорема 10.3.3. *Нека су* $\measuredangle pOq$ *и* $\measuredangle p'Oq'$ *два конвексна угла неке равни са крацима таквим да је* $p \perp p'$ *и* $q \perp q'$*. Тада:*

(i) *ако су оба угла оштра или оба тупа они су подударни,*

(ii) *ако је један угао оштар а други туп они су суплементни.*

10.4 Четвороугао, паралелограм, средња линија троугла

У овом одељку ћемо детаљније проучити неке врсте четвороуглова. Две ивице простог четвороугла са заједничким теменом



Слика 10.11.

зовемо *суседне ивице*, а оне које немају заједничких тачака *наспрамне ивице.* Унутрашњи углови чији краци садрже исту ивицу четвороугла зову се *суседни углови*, у супротном су *наспрамни углови.* Уведимо сада специјалну врсту четвороуглова.

Дефиниција 10.4.1. Четвороугао $ABCD$ је *трапез* ако је $AB \parallel CD$. Ивице AB и CD су основице, а BC и AD *краци* тог трапеза. Трапез је *једнакокраки* ако је $BC \cong AD$ и није $BC \parallel AD$, а *правоугли* ако је један његов унутрашњи угао прав.

На основу теорема о угловима на трансверзали паралелних правих, два унутрашња угла која одговарају краку трапеза су суплементна. Такође, то је довољан услов да би неки четвороугао био трапез. Сада ћемо увести још једну врсту четвороуглова, који представљају специјалну врсту трапеза. Ради се о *паралелограмима.* Њих можемо дефинисати на разне начине, али ми ћемо изабрати онај најприроднији, а за све остале ћемо доказати да су са њим еквивалентни.

Дефиниција 10.4.2. Четвороугао $ABCD$ је *паралелограм* ако је

$$AB \parallel CD \quad \text{и} \quad AD \parallel BC.$$

Дакле, паралелограм је четвороугао са два пара паралелних наспрамних ивица. У самој дефиницији паралелограма није коришћен појам подударности. Наиме паралелограми, а такође и трапези се могу разматрати и у тзв. *афиној геометрији.* То је геометрија заснована на свим групама аксиома еуклидске геометрије, осим треће групе, аксиома подударности. Докажимо сада следећу теорему:

Теорема 10.4.1. *Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(i) *Четвороугао $ABCD$ је паралелограм.*

(ii) $AB \parallel CD$ *и* $AB \cong CD$.

(iii) $AB \cong CD$ *и* $AD \cong BC$.

(iv) *Парови наспрамних углова четвороугла $ABCD$ су парови подударних углова.*

(v) *Свака два суседна унутрашња угла су суплементна.*

(vi) *Дијагонале четвороугла $ABCD$ се узајамно полове.*

Доказ. Означимо са α, β, γ, δ унутрашње углове који одговарају теменима A, B, C, D редом, четвороугла $ABCD$. Четвороугао је конвексан па се његове дијагонале секу у некој тачки C. Потребно је доказати еквивалентност исказа (i)-(vi). Да бисмо избегли доказивање свих еквиваленција, по две импликације, нпр. са (i), доказ ћемо поједноставити доказујући импликације руководећи се следећом шемом: (i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii)$\Longrightarrow$(iv)$\Longrightarrow$(v)$\Longrightarrow$(i) и нпр. (v)$\Longleftrightarrow$(iii).

(i)$\Longrightarrow$(ii). Нека је четвороугао $ABCD$ паралелограм. Тада је $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$. Права AC је трансверзала паралелних правих AB и CD па су углови $\measuredangle CAB$ и $\measuredangle ACD$ подударни као наизменични. Слично из паралелности правих AD и BC следи да су и углови $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle CAD$ подударни. Како је $AC \cong AC$ то на основу другог става о подударности троуглови ΔACB и ΔCAD подударни па је и $AB \cong CD$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). Нека је $ABCD$ четвороугао такав да је $AB \parallel CD$ и $AB \cong CD$. Докажимо да је и $AD \cong BC$. Права AC је трансверзала паралелних правих AB и CD па су углови $\measuredangle CAB$ и $\measuredangle ACD$ подударни као наизменични. Троуглови ΔACB и ΔCAD подударни. Тада, из њихове подударности следи $BC \cong AD$.

(iii)$\Longrightarrow$(iv). Нека је $ABCD$ четвороугао такав да је $AB \cong CD$ и $AD \cong BC$. Докажимо да је $\beta = \delta$. Заиста, на основу трећег става о подударности троуглова је $\Delta ACB \cong \Delta CAD$. Следи $\measuredangle ABC \cong \measuredangle CDA$ тј. $\beta = \delta$. Аналогно доказујемо и да је $\alpha = \gamma$.

(iv)$\Longrightarrow$(v). Нека је $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$. Како је $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R$ следи да је $\alpha + \beta = 2R$ и $\beta + \gamma = 2R$.

(v)$\Longrightarrow$(i). Нека су углови α и β суплементни. Они су супротни углови на трансверзали AB правих AD и BC па је $AD \parallel BC$. Аналогно, углови β и γ су суплементни па је и $AB \parallel CD$. Дакле, четвороугао $ABCD$ паралелограм.

(iii)$\Longleftrightarrow$(vi). Нека је $ABCD$ четвороугао код кога је $AB \cong CD$ и $AD \cong BC$. Докажимо да је тачка S заједничко средиште дијагонала AC и BD. Троуглови ΔACB и ΔCAD су подударни према трећем ставу о подударности. На основу тога је $\measuredangle ACB \cong \measuredangle CAD$ па је и $\measuredangle SCB \cong \measuredangle SAD$. Из подударности унакрсних углова $\measuredangle CSB$ и $\measuredangle ASD$ следи да су и углови $\measuredangle SBC$ и $\measuredangle SDA$ подударни. Према другом ставу подударни су троуглови ΔCSB и ΔASD. Следи да је $SB \cong SD$ и $SC \cong SA$ тј. тачка C представља заједничко средиште дијагонала AC и BD.

Обратно, нека је сада тачка S заједничко средиште дијагонала AC и BD. Тада је $SB \cong SD$ и $SC \cong SA$. Троуглови ΔCSB и ΔASD су подудрарни према првом ставу. Тада је $AD \cong BC$. Аналогно доказујемо и да је $AB \cong CD$. $\square$

Уведимо сада још неке врсте четвороуглова за које се показује да су такође паралелограми.

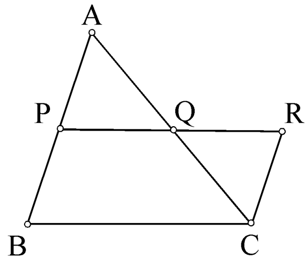
Дефиниција 10.4.3. (i) Четвороугао коме су све ивице подударне назива се *ромб*.
(ii) Четвороугао коме су сви унутрашњи углови међу собом подударни назива се *правоугаоник*.
(iii) Четвороугао чије си све странице једнаке и сви углови прави назива се *квадрат*.

Теорема 10.4.2. (i) *Паралелограм је ромб ако су му дијагонале међу собом нормалне.*
(ii) *Паралелограм је правоугаоник ако су му дијагонале међу собом подударне.*
(iii) *Паралелограм је квадрат ако су му дијагонале међу собом нормалне и подударне.*

Дефиниција 10.4.4. Дуж која спаја средишта двеју страница неког троугла назива се *средња линија* троугла која одговара трећој страници.

Теорема 10.4.3. (О средњој линији троугла) *Ако су P и Q средишта редом страница AB и AC троугла ΔABC тада је:*

$$PQ = \frac{1}{2}BC \quad i \quad PQ \parallel BC.$$



Слика 10.12.

Доказ. Означимо са R (Слика 10.12) тачку праве PQ такву да је $\mathcal{B}(P,Q,R)$ и $PQ \cong QR$. Тачка Q је заједничко средиште дужи AC и PR па је четвороугао $APCR$ паралелограм, одакле следи да је $AP \cong RC$ и $AP \parallel RC$. Тачка P је средиште дужи AB па је $PB \cong RC$ и $PB \parallel RC$, тј. и четвороугао $PBCR$ је паралелограм. Тада је $PR \parallel BC$ и $PR \cong BC$, одакле следи $PQ \parallel BC$ и $PQ = \frac{1}{2}BC$. □

10.5 Значајне тачке троугла

Троугао, наизглед једноставна фигура, има јако много интересантних особина. Овде ћемо навести неке од њих везане за карактеристичне тачке троугла, које називамо значајним тачкама троугла.

Теорема 10.5.1. (О центру описаног круга) *Медијатрисе страница троугла секу се у једној тачки S.*

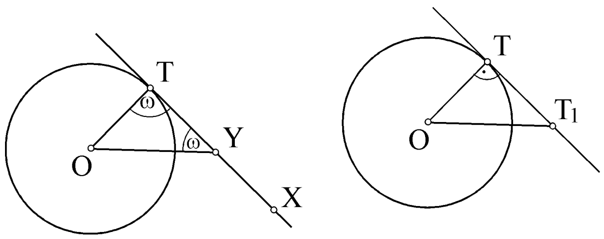
Доказ. Доказали смо у одељку о праменовима правих равни S^2 (Теорема 6.10.1.) да медијатрисе страница троугла припадају истом прамену правих. Како се у овом случају не може радити о прамену паралелних правих, закључујемо да се медијатрисе страница троугла секу у једно тачки. □

Теорема 10.5.2. (О центру уписаног круга) *Бисектрисе унутрашњих углова троугла секу се у једној тачки.*

Доказ ове теореме (Теорема 6.10.2.) изведен је у апсолутној геометрији.

Пре него што утврдимо шта представља пресечна тачка бисектриса унутрашњих углова из претходне теореме, докажимо следећи потребан и довољан услов да је нека права тангента круга:

Теорема 10.5.3. *Нека је T тачка круга $k(O, r)$. Права PT је тангента тог круга у тачки T ако и само ако је $PT \perp TO$.*



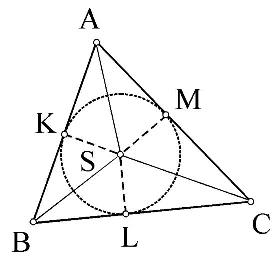
Слика 10.13.

Доказ. Нека је PT тангента круга k у тачки T. Ако угао $\measuredangle PTO$ није прав, један од углова који одређују праве PT и TO је оштар. Нека је то угао $\measuredangle OTX = \omega < R$ (Слика 10.13). Нека је l полуправа полуравни OTX са почетком у тачки O, таква да је $\measuredangle(OT, l) = 2R - 2\omega$. Ако је Y пресечна тачка полуправих TX и l, троугао ΔOTY је једнакокраки, па је $OT = OY = r$. То није могуће јер је PT тангента круга k, па са њим има само једну заједничку тачку. Дакле, угао $\measuredangle PTO$ је прав.

Обратно, нека је $PT \perp TO$. За сваку тачку T_1 праве PT, троугао ΔOTT_1 је правоугли са хипотенузом OT_1, па је $OT_1 > OT = r$. Дакле, произвољна тачка T_1 праве PT не припада кругу k, па је PT заиста тангента тог круга. □

Тачка S из Теореме 10.5.2., је дакле центар круга који садржи подножја управних K, L, M из тачке S на странице AB, C, CA троугла ΔABC (Слика 10.14). Осим тога праве одређене ивицама троугла су на основу претходно доказаног тангенте тог круга. Због тога се поменути круг зове уписани круг троугла, а према Теореми 10.5.2., у сваки троугао се може уписати круг.

Теорема 10.5.4. (О ортоцентру) *Праве одређене висинама троугла секу се у једној тачки.*

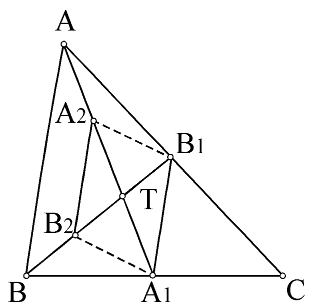


Слика 10.14.

Доказ. У апсолутној геометрији је доказано тврђење према коме праве одређене висинама троугла припадају истом прамену правих (Теорема 6.10.4.). Сада, с обзиром на то да праве одређене висинама троугла не могу бити паралелне, закључујемо да се ради о прамену конкурентних правих.

Теорема 10.5.5. *Центар описаног круга правоуглог троугла је средиште његове хипотенузе.*

Доказ. Означимо са O средиште хипотенузе AB правоуглог троугла ΔABC а са P средиште катете AC. ДужOP је средња линија овог троугла која одговара катети BC, одакле следи $OP \parallel BC$, тј. $OP \perp AC$. Троуглови ΔOPC и ΔOPA су подударни су подударни, одакле је $OC \cong OA$. Како је још $OB \cong OA$, следи да је тачка O центар описаног круга око троугла ΔABC. □



Слика 10.15.

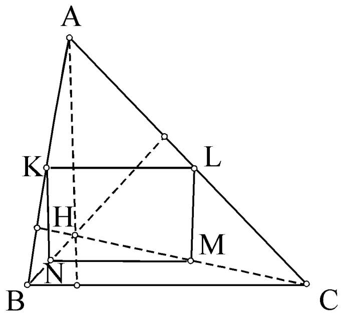
Дефиниција 10.5.1. Дуж, чије су крајне тачке теме и средиште наспрамне странице, називамо *тежишном дужи* троугла.

Из претходне теореме следе и следећа два тврђења:

Последица 10.5.1. *Тежишна дуж, која одговара хипотенузи, једнака је половини хипотенузе.*

Последица 10.5.2. *Угао над пречником је прав.*

Теорема 10.5.6. (О тежишту) *Тежишне дужи троугла* ΔABC *секу се у једној тачки* T*, која их дели у размери* $2:1$*, тј.* $AT = 2TA_1$*, где је* A_1 *средиште странице* BC*.*



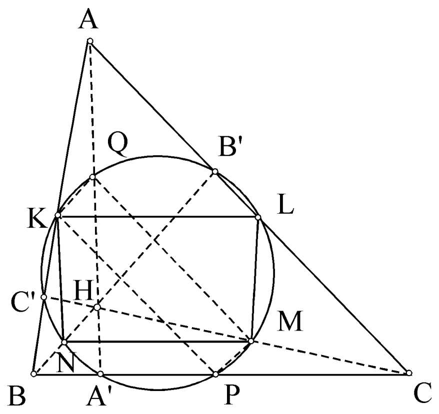
Слика 10.16.

Доказ. Нека су A_1, B_1, C_1 (Слика 10.15) средишта редом ивица BC, CA и AB троугла ΔABC. На основу Пашове аксиоме, тежишне дужи AA_1 и BB_1 се секу. Означимо са T њихову пресечну тачку. Означимо са A_2 и B_2 редом средишта дужи AT и BT. Тада је дуж A_1B_1 средња линија троугла ΔABC која одговара страници AB па је $A_1B_1 = 1/2\,AB$ и $A_1B_1 \parallel AB$. Дуж A_2B_2 је средња линија троугла ΔTAB па је $A_2B_2 = 1/2\,AB$ и $A_2B_2 \parallel AB$. Према томе, четвороугао $A_1B_1A_2B_2$ је паралелограм и његове дијагонале се полове у тачки T. Следи $AA_2 \cong A_2T \cong TA_1$ и $BB_2 \cong B_2T \cong TB_1$, одакле је $AT : TA_1 = BT : TB_1 = 2:1$. Треба још показати да и тежишна дуж из темена C садржи тачку T и да је $CT : TC_1 = 2:1$. Аналогно као у претходном случају можрмо показати да се тежишне дужи AA_1 и CC_1 секу у тачки T_1 тако да је $CT_1 : T_1C_1 = AT_1 : T_1A_1 = 2:1$. Како је $AT : TA_1 = 2:1$ следи $T_1 \equiv T$. □

Теорема 10.5.7. *Ако је* H *ортоцентар, а* K*,* L*,* M*,* N *редом средишта дужи* AB*,* AC*,* HC*,* HB*, тада је четвороугао* $KLMN$ *правоугаоник.*

Доказ. Дужи MN и KL су средње линије редом троуглова ΔHBC и ΔABC (Слика 10.16) које одговарају истој основици BC, па је $KL \cong MN \cong 1/2\,BC$ и $KL \parallel MN \parallel BC$. Дакле четвороугао $KLMN$ је паралелограм. Дуж KN је средња линија троугла ΔABH, па је $KN \parallel AH$. Како је још $AH \perp BC$, то је $KN \perp MN, KL$. Дакле четвороугао $KLMN$ је правоугаоник. □

Теорема 10.5.8. *Средишта страница, подножја висина и средишта дужи одређених ортоцентром и теменима троугла* ΔABC *припадају једном кругу.*



Слика 10.17.

Доказ. Означимо са K, P, L средишта страница AB, BC, CA; са A', B' и C' подножја висина редом из тачака A, B и C; а са Q, N и M средишта дужи AH, BH и CH редом (Слика 10.17). На основу претходне теореме четвороуглови $KLMN$ и $PMQK$ су правоугаоници. ДужKM је заједничка дијагонала ових правоугаоника и око њих се може описати заједнички круг над пречником KM. Дакле, тачке K, P, L, N, M и Q припадају кругу k над пречником KM. Остаје још да покажемо да тачке A', B' и C' припадају кругу k. Тачка A' припада кругу k јер је угао $\measuredangle PA'Q$ прав. Аналогно и тачке B' и C' припадају кругу k. □

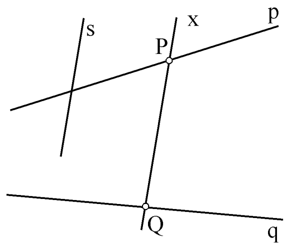
Дефиниција 10.5.2. Круг из претходне теореме назива се Ојлеров[1] круг или круг девет тачака.

[1] Л. Ојлер (1707-1783) доказао је 1765. године, да троугао одређен средиштима ивица и троугао одређен подножјима висина неког троугла имају заједнички описани круг.

10.6 Паралелно пројектовање и Талесова теорема у простору $\mathbf{E^n}$

Релација паралелности правих простора E^n омогућује да установимо појам паралелног пројектовања праве на праву.

Дефиниција 10.6.1. Нека су p и q две праве равни E^2 и s права која припада тој равни (Слика 10.18) и није паралелна ни са једном од њих. *Паралелним пројектовањем праве p на праву q* дефинисаним у односу на праву s називамо функцију $f : p \to q$ која свакој тачки P праве p додељује тачку Q праве q, при чему је $Q = x \cap q$ а x права која пролази кроз тачку P и паралелна је правој s. Праву q називамо пројекцијском правом, x пројекцијским зраком који одговара тачки P, а тачку Q паралелном пројекцијом тачке P дефинисане у односу на праву s.



Слика 10.18.

Навешћемо сада неке особине паралелног пројектовања праве у простору E^n.

Теорема 10.6.1. *Паралелно пројектовање f праве p на праву q дефинисано у односу на праву s је бијективно пресликавање.*

Теорема 10.6.2. *Паралелно пројектовање f праве p на праву q дефинисано у односу на праву s је уређено пресликавање.*

Другим речима ако су A, B , C тачке праве p такве да је $\mathcal{B}(A, B, C)$ тада је и $\mathcal{B}(f(A), f(B), f(C))$.

Дефиниција 10.6.2. Под *размером* двеју дужи подразумевамо количник њихових дужина у неком систему $\mathcal{L}$ мерења дужи. Једнакост двеју размера дужи називамо *сразмером* тих дужи.

Појам паралелног пројектовања нам омогућује да докажемо- једну од најстаријих теорема геометрије - Талесову теорему.

Теорема 10.6.3. (Талес[2]) *Нека су l и l' две праве равни E^2 и s права те равни која није паралелна ни са једном од правих l и l'. Тада паралелно пројектовање f које праву l пресликава у праву l' дефинисано у односу на праву s не мења размеру двеју дужи. Другим речима, ако при пројектовању f у односу на праву s разним тачкама P, Q, R и S праве l одговарају редом тачке P', Q', R' и S' праве l', тада је*

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{P'Q'}{R'S'}.$$

Доказ. Разликујемо два случаја:

(i) $l \parallel l'$ и (ii) $l \nparallel l'$.

(i) Ако је $l \parallel l'$ за сваке две разне тачке P, Q праве l и њима одговарајуће тачке $P' = f(P)$ и $Q' = f(Q)$ праве l' је $PQ \cong P'Q'$, па је f изометријско пресликавање праве l на праву l'.

(ii) Ако $l \nparallel l'$ тада се праве l и l' секу у тачки O. Свакој дужи XY праве l придружимо број $\mathcal{L}(XY)$ тако да је

$$\mathcal{L}(XY) = d_{\mathcal{L}}(f(X)f(Y)).$$

Доказаћемо да функција $\mathcal{L}$ дефинисана на тај начин задовољава следећа два услова

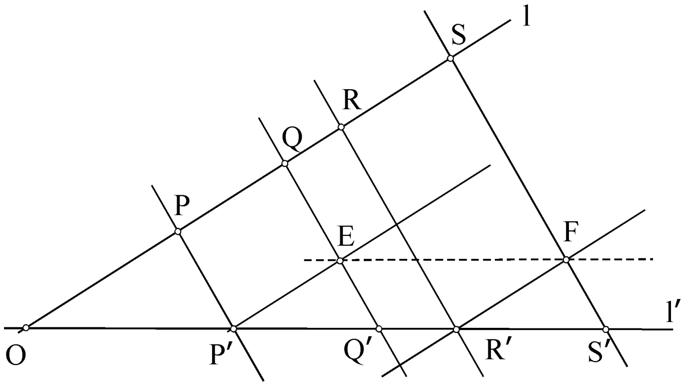
(1) Ако тачке P, Q, R, S задовољавају релацију $PQ \cong RS$, тада је $\mathcal{L}(PQ) = \mathcal{L}(RS)$,

(2) Ако су P, Q, R тачке праве l такве да је $\mathcal{B}(P, Q, R)$, тада је

$$\mathcal{L}(PQ) + \mathcal{L}(QR) = \mathcal{L}(PR).$$

У циљу доказа услова (1) за функцију $\mathcal{L}$ претпоставимо да су подударне дужи PQ и RS истосмерне (Слика 10.19). Означимо са P', Q', R', S' тачке које у функцији f одговарају одговарају редом тачкама P, Q, R и S, а са E и F тачке правих QQ' и SS' такве да су праве $P'E$ и $R'F$ паралелне са правом l. Тада су четвороуглови $PQEP'$ и $RSFR'$ паралелограми, па су дужи $P'E$ и $R'F$ подударне и истосмерне са дужима PQ и RS редом. Према томе и четвороугао $P'R'FE$ је паралелограм па су и дужи EF и $P'R'$ подударне и истосмерне. Сада је и четвороугао $Q'S'FE$ паралелограм па су дужи EF и $Q'S'$ подударне и истосмерне. Значи и дужи $P'R'$ и $Q'S'$ су подударне и истосмерне. Одавде следи да су и дужи $P'Q'$ и $R'S'$ подударне и истосмерне, па је услов (1) задовољен.

[2]Талес из Милета (624. пне - 547. пне) грчки математичар и државник.



Слика 10.19.

Како из $\mathcal{B}(P, Q, R)$ следи $\mathcal{B}(P', Q', R')$, имамо

$$d_{\mathcal{L}}(f(PQ)) + d_{\mathcal{L}}(f(QR)) = d_{\mathcal{L}}(f(PR))$$

односно

$$\mathcal{L}(PQ) + \mathcal{L}(QR) = \mathcal{L}(PR),$$

па је и услов (2) за функцију $\mathcal{L}$ задовољен.

На основу доказаног непосредно закључујемо да функција $\mathcal{L}$ представља систем мерења дужи. Према томе (Теорема 8.4.1.) постоји број $k \in \mathbb{R}^+$ такав да је за произвољне тачке $X, Y \in l$ и $X', Y' \in l'$ задовољено

$$\mathcal{L}(XY) = d_{\mathcal{L}}(X'Y') = k\, d_{\mathcal{L}}(XY)$$

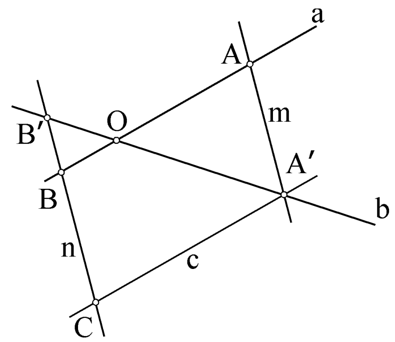
те стога паралелно пројектовање не мења размеру двеју дужи. $\square$

Сада ћемо навести једно значајно тврђене које представља последицу Талесове теореме.

Теорема 10.6.4. *Нека се праве a и b секу у тачки O и нека су m и n две праве исте равни које не садрже тачку O и секу праве a и b редом у тчкама A, A' и B, B'. Тада, ако су a и b међусобно паралелне праве, онда је*

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}.$$

Ако праве a и b нису међусобно управне онда важи и обратно. Ако су праве a и b међусобно управне, онда важи обратно тврђење под условом: $A, B \ddot{-} O$ ако и само ако $A', B' \ddot{-} O$.

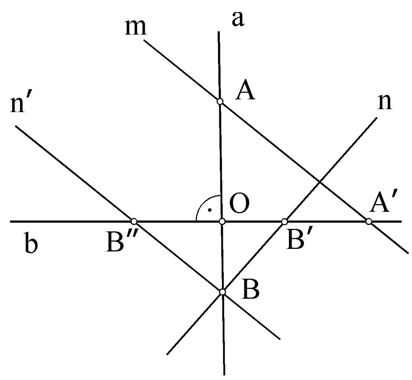


Слика 10.20.

Доказ. Нека су a и b међусобно паралелне праве. Тада прва једнакост следи директно из Талесове теореме. Остаје нам да докажемо другу.Означимо са c праву која садржи тачку A' и паралелна је правој a, а са C пресечну тачку правих c и n (Слика 10.20). Сада на основу Талесове теореме, посматрајући паралелно пројектовање праве b на праву n закључујемо да је

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{BC}{BB'}.$$

Како још важи $BC \cong AA'$, закључујемо да је задовољена и друга једнакост.



Слика 10.21.

Нека сада праве m и n нису паралелне. Тада постоји јединствена права n' која садржи тачку B и паралелна је правој m

(Слика 10.21). Означимо са B'' пресечну тачку правих b и n'. Тада је на основу доказаног дела теореме

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB''} = \frac{AA'}{BB''},$$

одакле следи $OB'' \cong OB'$ и $BB'' \cong BB'$. Ако је $B' \neq B''$ тада је $B', B'' \div O$ јер је $OB'' \cong OB'$. Како је још $BB'' \cong BB'$, то ће углови $\measuredangle BOB''$ и $\measuredangle BOB'$ бити подударни, а како су још и напоредни биће прави. $\square$

10.7 Угао између мимоилазних правих простора E^3

Када смо разматрали узајамни положај двеју правих, установили смо да две праве простора могу припадати једној равни или не. Уколико две праве припадају истој равни, тј. компланарне су, оне могу имати *једну заједничку тачку* или бити *дисјунктне.* Уколико не постоји раван која садржи две разне праве простора оне ће бити *мимоилазне.* Ако се две праве p и q секу у једној тачки, оне припадају једној равни и у тој равни одређују два пара унакрсних углова.

Дефиниција 10.7.1. Ако унакрсни углови између двеју правих нису прави, мањи од њих називамо *углом између тих двеју правих.*

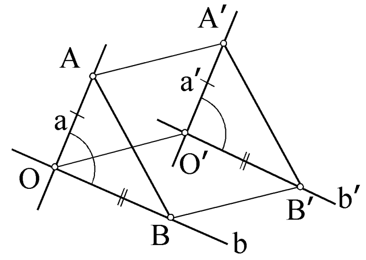
Можемо увести појам угла двеју мимоилазних правих следећом дефиницијом.

Дефиниција 10.7.2. Углом двеју мимоилазних правих p и q простора E^3 називамо угао који одређују њима паралелене праве a и b које се секу у некој тачки O. Специјално, ако је угао двеју мимоилазних правих у простору E^3 прав, тада кажемо да су праве p и q *управне* или *нормалне међу собом*, и то симболички означавамо са са $p \perp q$.

Јасно је да се при овако уведеној дефиницији мора установити да величина угла између двеју мимоилазних правих p и q не зависи од положаја тачке O у којој се секу њима паралелне праве a и b.

То непосредно следује из следећег тврђења.

Теорема 10.7.1. *Угао између двеју правих a и b које се секу у некој тачки O подударан је углу између њима паралелних правих a' и b' које се секу у некој другој тачки O'.*



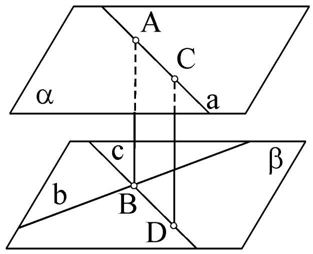
Слика 10.22.

Доказ. Како је тачка O различита од тачке O', важи најмање једна од релација $a \neq a'$ и $b \neq b'$. Претпоставимо да је нпр. $a \neq a$ (Слика 10.22). Означимо са A и B произвољне тачке правих a и b, различите од тачке O, затим, са A' тачку праве a' такву да је $OO' \parallel AA'$ а са B' тачку праве b' такву да је $AB \parallel A'B'$. Тада су четвороуглови $OO'A'A$ и $AA'B'B$ паралелограми, па је $OA \cong O'A'$ и $AB \cong A'B'$. Такође, дужи OO' и BB' су подударне и истосмерне са дужи AA', па и међу собом. Сада је $OB \cong O'B'$ стога је $AB \cong O'AB$. Дакле, троуглови ΔAOB и $A'O'B'$ су подударни према трећем ставу о подударности. Одавде следи $\measuredangle AOB = \measuredangle A'O'B'$ тј. $\measuredangle(a, b) \cong \measuredangle(a', b')$, а то је и требало доказати. □

Поменимо сада једно значајно тврђење које се односи на мимоилазне праве. То је тврђење *о заједничкој нормали двеју мимоилазних правих.*

Теорема 10.7.2. *Постоји јединствена права c која сече сваку од две мимоилазне праве a и b и нормална је на њих у пресечним тачкама.*

Доказ. Како су праве a и b мимоилазне, то постоји јединствена раван α која саджи праву a и паралелна је правој b, а такође постоји и јединствена раван β која сдржи праву b и паралелна је правој a. При томе је још задовољено $\alpha \parallel \beta$. Заиста, ако би се равни α и β секле по некој правој s, та права би била паралелна са сваком од правих a и b, те би и праве a и b биле паралелне међусобно, а то



Слика 10.23.

је супротно претпоставци. Дакле, равни α и β су паралелне медјусобно. Нека је C произвољна тачка праве a, и тачка D подножје нормале из тачке C на раван β. Означимо са c праву кроз тачку D паралелну правој a. Нека је B пресечна тачка правих b и c. Означимо са n праву нормалну на раван β у тачки B. Тада права n сече праву a у некој тачки A. Сада, права n је управна на равнима α и β одакле следи да је она управна и на правама a и b (Слика 10.22). На тај начин је доказана *егзистенција* заједничке нормале двеју мимоилазних правих a и b. Докажимо још да је права n *јединствена* права са особином да је управна на мимоилазне праве a и b. Пртпоставимо да постоји још једна права n' која сече мимоилазне праве a и b у тачкама A' и B' под правим угловима. Тада би обе праве n и n' биле управне на равни α и β, па према томе и компланарне. У том случају би и праве a и b биле компланарне, а то је супротно претпоставци. $\square$

Део 11

Изометријске трансформације равни $\mathbf{E}^2$ $(\mathbf{n} = \mathbf{2}, \mathbf{3})$

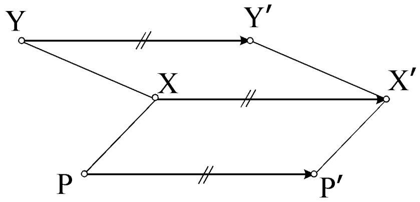
11.1 Специфична својства изометријских трансформација равни $\mathbf{E}^2$

Поред раније разматраних својстава која су важила у апсолутној геометрији, у Еуклидској геометрији важиће и неки специфични ставови који су директна последица аксиоме паралелности, нпр. то се односи на ставове о односу двеју правих, праве и равни или ставове о односу двеју равни, као и ставове који из њих проистичу. Такође ће важити и неке специфичности које престају да буду везане за базисне праве.

Теорема 11.1.1. *Две транслације $\tau_{\overrightarrow{PP'}}$ $\tau_{\overrightarrow{RR'}}$ исте равни E^2 међу собом су једнаке ако и само ако су дужи PP' и RR' међу собом подударне и истосмерне.*

Теорема 11.1.2. *Ако у транслацији $\tau_{\overrightarrow{PP'}}$ равни E^2 тачкама X и Y одговарају тачке X' и Y', тада су дужи XX' и YY' међу собом подударне и истосмерне.*

Доказ. Установимо најпре да су дужи PP' и XX' међу собом подударне и истосмерне. Ако обележимо са X_1' тачку такву да су дужи PP' и XX_1' подударне и истосмерне, према претходној теореми имамо да је $\tau_{\overrightarrow{PP'}} = \tau_{\overrightarrow{XX_1'}}$. Користећи ову једнакост налазимо



Слика 11.1.

да је (Слика 11.1)

$$X_1' = \tau_{\overrightarrow{XX_1'}}(X) = \tau_{\overrightarrow{PP'}}(X) = X'.$$

Стога су дужи PP' и XX' подударне и истосмерне. Истим поступком доказује се да су и дужи XX' и YY' подударне и истосмерне. □

Из претходних двеју теорема непосредно следи да је транслација равни S^2 једнозначно одређена било којим паром одговарајућих тачака. Штавише, ако у транслацији $\tau_{\overrightarrow{PP'}}$, равни S^2 тачкама A, B, C, D, ... одговарају респективно тачке A', B', C', D', ... биће

$$\tau_{\overrightarrow{PP'}} = \tau_{\overrightarrow{AA'}} = \tau_{\overrightarrow{BB'}} = \tau_{\overrightarrow{CC'}} = \tau_{\overrightarrow{DD'}} = \dots$$

Такође, могућа је комплетна изградња теорије централних ротација која није била извршена у апсолутној геометрији, јер није био решен проблем односа двеју дисјунктних правих, тј. производа одговарајућих рефлексија.

Теорема 11.1.3. *Скуп $G(\tau)$ који се састоји из идентичне трансформације и свих транслација равни E^2 представља подгрупу групе $G(\mathcal{I}^+)$ свих директних изометријских трансформација те исте равни.*

Доказ. Нека су $\tau_{\overrightarrow{AB}}$, $\tau_{\overrightarrow{CD}}$ две произвољне транслације из скупа $G(\tau)$. Ако је E тачка која у транслацији $\tau_{\overrightarrow{CD}}$ одговара тачки B имамо да је $\tau_{\overrightarrow{CD}} = \tau_{\overrightarrow{BE}}$. Ако затим обележимо са M и N средишта дужи AB и BE, и са M' тачку такву да је $\mathcal{S}_N(M) = M'$, биће

$$\tau_{\overrightarrow{CD}} \circ \tau_{\overrightarrow{AB}} = \tau_{\overrightarrow{BE}} \circ \tau_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M = \tau_{\overrightarrow{MM'}} \in \tau.$$

На тај начин, композиција сваке две трансформације из скупа τ представља такође трансформацију из тог скупа. Ако је $\tau_{\overrightarrow{PQ}}$ произвољна трансформација из скупа τ и R средиште дужи PQ, имамо да је

$$\tau^{-1}_{\overrightarrow{PQ}} = (\mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_R)^{-1} = \mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_Q = \tau_{\overrightarrow{QP}} \in \tau.$$

Стога инверзна трансформација било које трансформације из скупа τ представља такође трансформацију из скупа τ. С обзиром да трансформације из скупа τ представљају елементе из групе $G(\mathcal{I}^+)$, из доказаних својстава следи да скуп τ представља подгрупу те групе. □

Дефиниција 11.1.1. Групу установљену овом теоремом називамо *групом транслација равни* E^2, и симболички је обележавамо са $G(\tau)$.

Теорема 11.1.4. *Група транслација* $G(\tau)$ *равни* E^2 *је комутативна. Другим речима, за сваке две транслације* $\tau_{\overrightarrow{AB}}$ *и* $\tau_{\overrightarrow{CD}}$ *равни* E^2 *важи ралација*

$$\tau_{\overrightarrow{CD}} \circ \tau_{\overrightarrow{AB}} = \tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \tau_{\overrightarrow{CD}}.$$

Доказ. Нека је E тачка која у транслацији $\tau_{\overrightarrow{CD}}$ равни E^2 одговара тачки B. Према раније изведеној теореми имамо да је $\tau_{\overrightarrow{CD}} = \tau_{\overrightarrow{BE}}$. Ако обележимо са M и N средишта дужи AB и BE, применом Теореме 6.15.4. налазимо да је

$$\begin{aligned}
\tau_{\overrightarrow{CD}} \circ \tau_{\overrightarrow{AB}} &= \tau_{\overrightarrow{BE}} \circ \tau_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M,\\
\tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \tau_{\overrightarrow{CD}} &= \tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \tau_{\overrightarrow{BE}} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B.
\end{aligned}$$

Композиција $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N$ представља централну рефлексију, дакле инволуциону трансформацију. Стога квадрат те композиције представља инволуцију, наиме биће

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N = \varepsilon,$$

тј.

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M.$$

Одавде, на основу претходних двеју једнакости следи да је

$$\tau_{\overrightarrow{CD}} \circ \tau_{\overrightarrow{AB}} = \tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \tau_{\overrightarrow{CD}},$$

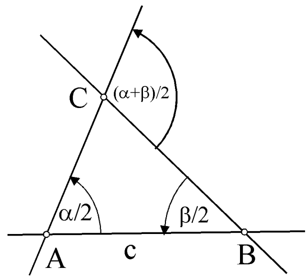
а то је и требало доказати. □

Теорема 11.1.5. *Композиција двеју централних ротација равни* E^2 *представља централну ротацију, транслацију или коинциденцију.*

Доказ. Нека су $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{B,\beta}$ две централне ротације равни E^2. Случај када је $A \equiv B$ разматран је у апсолутној геометрији.

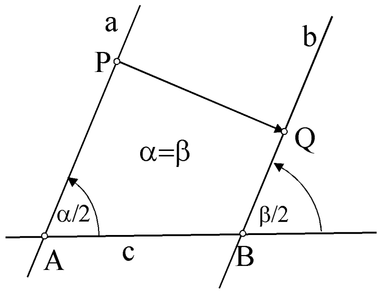
Нека је $A \neq B$. Означимо са c праву одређену тачкама A и B а са a и b праве такве да је $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a$ и $\mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c$. Тада је

$$\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a.$$



Слика 11.2.

У зависности да ли се праве a и b секу у некој тачки C или не, разматрана композиција представља централну ротацију око тачке C (Слика 11.2) за угао $\gamma = \alpha + \beta$ или неку транслацију за извесну дуж $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{PQ}$ (Слика 11.3). □



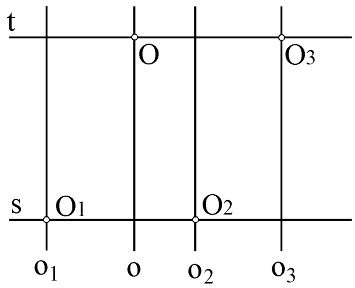
Слика 11.3.

Теорема 11.1.6. *Композиција непарног броја централних симетрија равни E^2 представља такође централну симетрију те равни.*

Доказ. Нека је дат непаран број централних симетрија

$$\mathcal{S}_{O_1},\ \mathcal{S}_{O_2},\ \ldots,\ \mathcal{S}_{O_n}, \quad \text{равни} \quad E^2.$$

Случај када тачке O_1, O_2, …, O_n припадају једној правој разматран је у апсолутној геометрији.



Слика 11.4.

Нека тачке O_1, O_2, …, O_n не припадају једној правој. Размотримо случај $n = 3$. Обележимо са s праву одређену тачкама O_1 и O_2, а са o_1, o_2 и o_3 праве које садрже редом тачке O_1, O_2 и O_3 и управне су на правој s. Нека је t права која садржи тачку O_3 и нема заједничких тачака са правом s (Слика 11.4). Тада је

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \mathcal{S}_{O_3} \circ \mathcal{S}_{O_2} \circ \mathcal{S}_{O_1} = \mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_{o_3} \circ \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_{o_1} \\ &= \mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_{o_3} \circ \mathcal{S}_{o_2} \circ \mathcal{S}_{o_1} = \mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_o = \mathcal{S}_O\end{aligned}$$

јер праве o_1, o_2 o_3 припадају једном прамену правих пошто су све три управне на правој s па је према томе композиција осних рефлексија $\mathcal{S}_{o_1}$, $\mathcal{S}_{o_2}$ и $\mathcal{S}_{o_3}$ такође осна рефлексија у односу на неку праву o која је управна на правој s. Како је права o управна на праву t у некој тачки O то је $\mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_o = \mathcal{S}_O$.

Случај када је $n > 3$ доказује се индукцијом. □

Теорема 11.1.7. *Композиција парног броја централних симетрија Еуклидске равни E^2 је транслација или коинциденција.*

У геометрији равни E^2 скуп свих транслација равни E^2 представља комутативну групу - групу транслација равни E^2 $G(\tau)$.

11.2 Класификација изометријских трансформација равни E^2

Класификацију изометријских трансформација равни E^2 први је дао Леонард Ојлер 1748. године у делу *Анализа бесконачних* *величина.* Класификација је изведена методом аналитичке геометрије те је имала аналитички карактер.

Геометријску класификацију изометријских трансформација равни E^2 дали су Бернули и Шал.

Теорема 11.2.1. (Бернули-Шала) *Свака директна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни E^2 представља коинциденцију, транслацију или централну ротацију.*

Доказ. Како је $\mathcal{I} : E^2 \to E^2$ директна изометријска трансформација то се она може представити као композиција двеју осних симетрија тог простора, тј. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$. У зависности од међусобног положаја правих p и q разликујемо три случаја:

(i) Ако је $p \equiv q$ онда је због инволутивности осне симетрије $\mathcal{I} = \varepsilon$.

(ii) Ако је $p \cap q = \emptyset$ тада су праве p и q управне на некој правој t па је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \tau_{\overrightarrow{MM'}}$ при чему тачке M и M' припадају правој t.

(iii) Ако се праве p и q секу у некој тачки O тада је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{R}_{O,\omega},$$

где је $\omega = 2\measuredangle(p,q)$. □

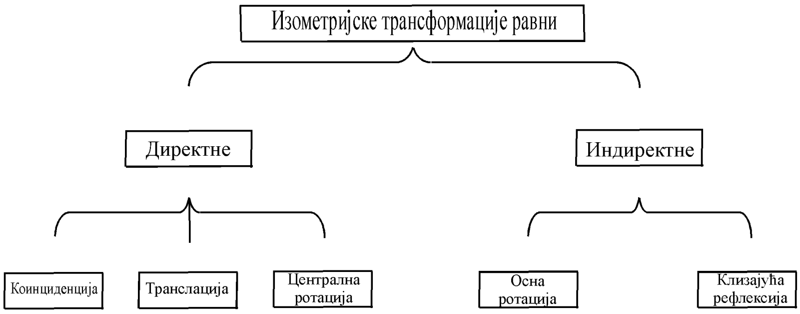
Теорема 11.2.2. (Бернули-Шала) *Свака индиректна изометријска трансформација равни E^2 представља осну или клизајућу рефлексију.*

Доказ. Нека трансформација $\mathcal{I}$ представља индиректну изометријску трансформацију равни E^2. Тада се њена оптимална изометријска репрезентација састоји од једне или три осне рефлексије.

(i) Ако је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p$ онда је у овом случају доказ завршен.

(ii) Нека је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r$ при чему осе тих рефлексија не припадају једном прамену правих. Према раније доказаном ставу $\mathcal{I}$ је клизајућа рефлексија, тј. $\mathcal{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{MM'}}$. □

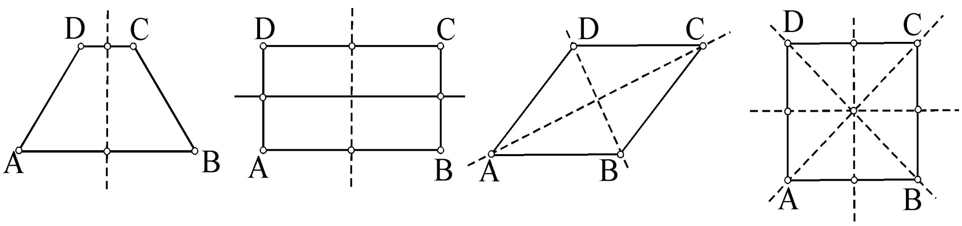
У складу са овим можемо дати шему изометријских трансформација равни E^2:



11.3 Симетрије ликова у равни E^2

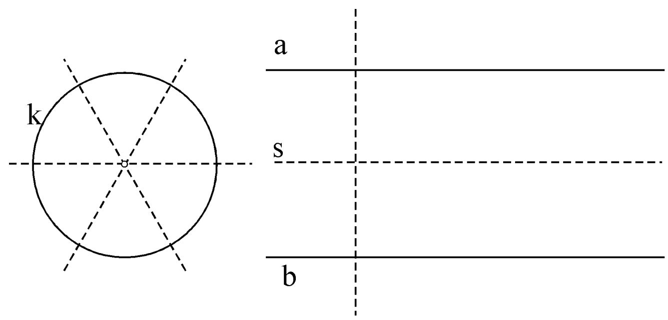
Претходним разматрањима установљене су све постојеће врсте изометријских трансформација равни E^2. То су: коинциденција, централна ротација, транслација, осна рефлексија и клизајућа рефлексија. Свакој од тих трансформација одговара специфична релација подударности дефинисана на скупу ликова у поменутој равни. Тако се долази до тзв. идентичне, обртне, транслаторне, осносиметричне и клизајуће подударности геометријских ликова. Ако је у некој равни E^2 лик Φ подударан лику Φ', тада по дефиницији постоји изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни E^2 таква да је $\mathcal{I}(\Phi) = \Phi'$. Према врсти изометријских трансформација $\mathcal{I}$ установљује се и врста релације подударности ликова Φ и Φ'.

Изометријску трансформацију $\mathcal{I}$ равни E^2 која преводи неки лик Φ на тај исти лик Φ називамо *симетријом* лика Φ. Будући да је идентична трансформација ε равни E^2 изометрија и да за сваки лик $\Phi \subset E^2$ важи релација $\varepsilon(\Phi) = \Phi$, то сваки лик $\Phi \subset E^2$ располаже најмање једном симетријом.



Слика 11.5.

Није тешко уверити се да у равни E^2 постоје ликови који располажу са више симетрија. Једнакокраки трапез $ABCD$ у равни E^2 (Слика 11.5) располаже не само коинциденцијом, већ и осном симетријом. Оса те симетрије одређена је средиштима паралелних страница AB и CD. Правоугаоник $ABCD$ у равни E^2 (Слика 11.5) располаже још већим бројем симетрија. То су две осне симетрије, централна симетрија и коинциденција. Ромб $ABCD$ у равни E^2 (Слика 11.5) располаже истим бројем симетрија. То су такође две осне симетрије, централна симетрија и коинциденција. Док су осе симетрија правоугаоника одређене средиштима наспрамних страница, осе симетрија ромба одређене су његовим дијагоналама. Квадрат $ABCD$ у равни E^2 (Слика 11.5) располаже још већим бројем симетрија. То су ротације око његовог средишта за углове R, $2R$, $3R$, $4R$, две осне симетрије којима су осе одређене средиштима наспрамних страница и две осне симетрије којима су осе одређене његовим дијагоналама.



Слика 11.6.

Свака од наведених фигура располаже коначним бројем симетрија. Није тешко утврдити да у равни E^2 постоје и фигуре које располажу са бесконачно много симетрија. Тако нпр. круг (Слика 11.6) располаже са бесконачно много симетрија, јер ротација око његовог средишта за било који угао представља ротациону симетрију тог круга, а права одређена било којим његовим дијаметром представља његову осну симетрију. Пантљика Φ (Слика 11.6) коју сачињава део равни E^2 између двеју разних паралелних правих a и b такође је фигура која располаже бесконачним бројем симетрија. Не само осна рефлексија $\mathcal{S}_s$ одређена релацијом $\mathcal{S}_s(a) = b$, већ и све транслације дуж праве s, све централне рефлексије којима су средишта на правој s, све осне рефлексије којима су осе управне на правој s, као и све клизајуће рефлексије са осом s представљају симетрије пантљике Φ.

Није тешко установити да скуп свих симетрија неког лика Φ у равни E^2 представља групу. Ту групу називамо *групом симетрија лика* Φ и симболички обележавамо $\mathcal{G}(\mathcal{I}_\Phi)$. Укупан број елемената групе $\mathcal{G}(\mathcal{I}_\Phi)$ називамо редом те групе симетрија.

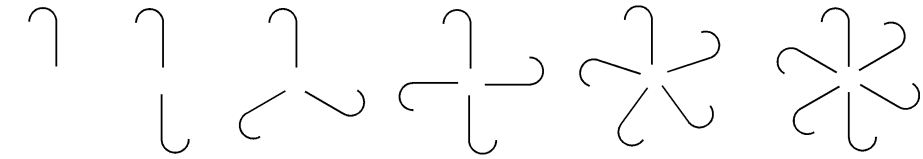
Ако је ред групе симетрија лика $\Phi \subset E^2$ једнак јединици, за лик Φ кажемо да је *асиметричан.* Ако је ред групе симетрије лика $\Phi \subset E^2$ већи од један, за лик Φ кажемо да је *симетричан.* Уколико је ред групе симетрија лика $\Phi \subset E^2$ већи утолико се сматра да је он *симетричнији.*

Из горе наведених примера закључујемо да у равни E^2 постоје ликови који располажу бесконачним групама симетрија. Природно је поставити питање како се установљују те групе и идентификују врсте симетрија. Приступ ка тој доста сложеној проблематици даје се постучно разматрањем најпре пунктуалних, затим линеарних, најзад планарних група симетрија. *Пунктуалном групом симетрија* називамо групу у којој све симетрије располажу најмање једном инваријантном тачком. *Линеарном групом симетрија* називамо групу у којој све симетрије немају заједничких инваријантних тачака али имају једну заједничку инваријантну праву. *Планарном групом симетрија* називамо групу у којој све симетрије немају нити заједничких инваријантних тачака, нити заједничких инваријантних правих. Нећемо изграђивати комплетну теорију тих група симетрија. Намера нам је да разоткријемо најбитније карактеристике пунктуалних група.

Из саме дефиниције непосредно следи да пунктуална група симетрија неког лика у равни E^2 може да располаже искључиво симетријама које имају инваријантних тачака. То су централне симетрије извесног реда и осне симетрије. Јасно је да у пункуалној групи централне симетрије морају имати заједничко средиште, уколико таква група располаже и осним симетријама, осе тих симетрија садрже поменуто средиште. Разликујемо две врсте пунктуалних група симетрија. То су тзв. *цикличке* и *диедарске групе.* *Цикличком групом* $\mathcal{C}_n$ називамо групу која располаже јединственим генератором реда n и таква група је увек реда n. Ако је g генератор те групе, биће

$$\mathcal{C}_n = \{g^1, g^2, g^3, g^4, \ldots, g^n\}.$$

Примери цикличких група $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_6$ презентирани су



Слика 11.7.

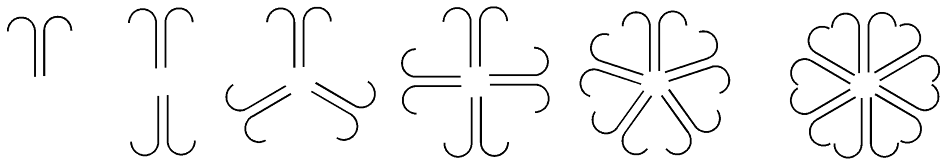
респективно на Слици 11.7.

Диедарском групом симетрија $\mathcal{D}_n$ називамо групу са два генератора g_1 и g_2 који задовољавају следеће услове

$$g_1^n = \varepsilon, \quad g_2^2 = \varepsilon, \quad (g_2 \circ g_1)^2 = \varepsilon.$$

Један од генератора те групе је реда n, други је реда два, док је сама група $\mathcal{D}_n$ реда $2n$. Шта више, биће

$$\mathcal{D}_n = \{g_1, g_1^2, \ldots, g_1^n,\ g_2 \circ g_1, g_2 \circ g_1^2, \ldots, g_2 \circ g_1^n\}.$$



Слика 11.8.

Из дефиниције непосредно закључујемо да диедарска група симетрија типа $\mathcal{D}_n$ увек располаже једном подгрупом $\mathcal{C}_n$. На Слици 11.8. презентиране су фигуре које респективно располажу диедарским групама симетрија типа $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_5$, $\mathcal{D}_6$.

Није тешко установити да правилан полигон Φ од n страница у равни E^2 располаже диедарском групом симетрија типа $\mathcal{D}_n$. Заиста, ако обележимо са O средиште тог полигона и са AB и CD било које две његове странице, биће $\Delta AOB \cong \Delta COD$ и $\Delta AOB \cong \Delta DOC$. Стога постоје две изометријске трансформације $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ равни E^2 од којих прва преводи ΔAOB на ΔCOD, а друга преводи ΔAOB

на ΔDOC. Штавише, биће $\mathcal{I}_1(\Phi)=\Phi$ и $\mathcal{I}_2(\Phi)=\Phi$, па је свака од изометрија $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ симетрија полигона. Будући да полигон Φ има n страница и да свакој од тих страница одговарају две симетрије тог полигона, полигон Φ располаже са $2n$ симетрија. Група симетрија полигона Φ има два генератора. То су централна симетрија реда n којој се центар поклапа са средиштем O тог полигона и осна симетрија $\mathcal{S}_s$ којој се оса поклапа са медијатрисом неке странице или симетралом неког унутрашњег угла. Будући са ови генератори задовољавају релације

$$\mathcal{R}^n_{O,\frac{4R}{n}}=\varepsilon, \quad \mathcal{S}_s^2=\varepsilon, \quad (\mathcal{S}_s\circ\mathcal{R}^n_{O,\frac{4R}{n}})^2=\varepsilon,$$

група симетрија полигона Φ је типа $\mathcal{D}_n$.

Већ смо поменули да пунктуална група симетрија $\mathcal{G}(\mathcal{I}_\Phi)$ лика $\Phi\subset E^2$ представља цикличку или диедарску групу. Доказ тог тврдјења нисмо извели, учинимо то само за случај када је пунктуална група симетрија коначна. Претпоставимо најпре да је група $\mathcal{G}(\mathcal{I}_\Phi)$ реда n и да располаже искључиво директним симетријама. Будући да те симетрије располажу заједничком инваријантном тачком O, оне представљају централне ротације са средиштем O. Ако је ω најмањи од углова који одговарају тим ротацијама, а централна симетрија $\mathcal{R}_{O,\omega}$ реда k, биће

$$\mathcal{R}_{O,\omega},\, \mathcal{R}^2_{O,\omega},\, \mathcal{R}^3_{O,\omega},\, \ldots,\, \mathcal{R}^k_{O,\omega}\in\mathcal{G}(\mathcal{I}_\Phi).$$

Докажимо да су то једине симетрије групе $\mathcal{G}(\mathcal{I}_\Phi)$ тј. да је $k=n$. У том циљу претпоставимо да у тој групи постоји још нека централна симетрија $\mathcal{R}_{O',\omega'}$. С обзиром да је група $\mathcal{G}(\mathcal{I}_\Phi)$ пунктуална, имамо да је $O=O'$. Стога угао ω' мора да буде различит од углова ω, 2ω, 3ω, $\ldots$, $k\omega$, те постоји цео позитиван број t такав да је $t\omega<\omega<(t+1)\omega$. У том случају имамо да је

$$\mathcal{R}_{O,\omega'}\circ\mathcal{R}^{-t}_{O,\omega}=\mathcal{R}_{O,\omega''}$$

и

$$\mathcal{R}_{O,\omega''}\in\mathcal{G}(\mathcal{I}_\Phi)$$

при чему је $\omega''<\omega$. Међутим, то је немогуће, јер је ω најмањи од углова који одговарају централним симетријама лика Φ у односу на тачку O. Овим закључујемо да је

$$\mathcal{G}(\mathcal{I}_\Phi)=\{\mathcal{R}_{O,\omega},\, \mathcal{R}^2_{O,\omega},\, \mathcal{R}^3_{O,\omega},\, \ldots,\, \mathcal{R}^n_{O,\omega}\}.$$

те је у разматраном случају $\mathcal{G}(\mathcal{I}_\Phi)$ циклична група типа $\mathcal{C}_n$.

Претпоставимо сад да група $\mathcal{G}(\mathcal{I}_\Phi)$ располаже сем поменутих централних симетрија и неком осном симетријом $\mathcal{S}_s$. С обзиром да је група $\mathcal{G}(\mathcal{I}_\Phi)$ пунктуална, имамо да је $O \in s$. Стога свака од композиција

$$\mathcal{S}_s \circ \mathcal{R}_{O,\omega} \, \mathcal{S}_s \circ \mathcal{R}^2_{O,\omega}, \, \ldots, \, \mathcal{S}_s \circ \mathcal{R}^n_{O,\omega}$$

представља осну симетрију лика Φ. Докажимо да су оне једине. Ако би сем тих осних симетрија постојала још нека осна симетрија $\mathcal{S}_{s'}$, тада би за неко $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ важила релација $\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_{s'} = \mathcal{R}^i_{O,\omega}$, дакле и релација $\mathcal{S}_{s'} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{R}^i_{O,\omega}$, што је супротно претпоставци. На тај начин, имамо да је

$$\mathcal{G}(\mathcal{I}_\Phi) = \{\mathcal{R}_{O,\omega}, \, \ldots, \, \mathcal{R}^n_{O,\omega}; \, \mathcal{S}_s \circ \mathcal{R}_{O,\omega}, \, \ldots, \, \mathcal{S}_s \circ \mathcal{R}^n_{O,\omega}\}$$

те је у разматраном случају $\mathcal{G}(\mathcal{I}_\Phi)$ диедарска група типа $\mathcal{D}_n$.

11.4 Класификација изометријских трансформација простора $\mathbf{E^3}$

У претходном излагању упознали смо више врста изометријских трансформација простора E^n. Природно се намеће питање да ли смо обухватили све изометријске трансформације простора. Одговор на то питање садржан је у две наредне теореме. У њима се одвојено изводе класификације директних и индиректних изометријских трансформација. Класификацију директних изометријских трансформација простора E^3 дао је М. Шал 1830. године.

Теорема 11.4.1. (Шал) *Свака директна изометријска трансформација простора E^3 представља коинциденцију, транслацију, осну ротацију или завојно кретање.*

Доказ. С обзиром да је $\mathcal{I} : E^3 \to E^3$ по претпоставци директна изометријска трансформација према познатој теореми она се може представити као композиција двеју осних рефлексија, тј. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m$. У зависности од узајамног положаја оса m и n тих рефлексија разликујемо следеће случајеве:

(i) Праве m и n се поклапају, тј. $m = n$. Тада је $\mathcal{I} = \varepsilon$.

(ii) Праве m и n су компланарне и дисјунктне. Означимо са π раван одређену правама m и n, а са μ и ν равни које садрже редом праве m и n а управне су на раван π. Тада је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu = \tau_{\overrightarrow{MM'}}.$$

(iii) Праве m и n секу се у некој тачки O. Означимо са π раван одређену правама m и n а са μ и ν равни које садрже праве m и n редом и управне су на равни π. Тада је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu = \mathcal{R}_{s,\omega},$$

при чему је s пресечна права равни μ и ν а $\omega = 2\measuredangle(\mu, \nu)$.

(iv) Праве m и n су мимоилазне. Тада постоји права s која је заједничка нормала на праве m и n. Означимо са M и N пресечне тачке праве s редом са правама m и n, а са π_1 и π_2 равни које су у тачкама M и N управне на праву s. Праве m и n припадају редом равнима π_1 и π_2. Нека су σ_1 и σ_2 равни одређене редом правама s, m и s, n. Тада, с обзиром на то да су равни σ_1 и σ_2 управне на π_1 и π_2 истовремено (јер су π_1 и π_2 паралелне), имамо

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_2} = \\ &= \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} \circ \mathcal{S}_{\sigma_2} = \tau_{\overrightarrow{MM'}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{Z}_{\overrightarrow{MM'},\omega}. \end{aligned}$$

тј. $\mathcal{I}$ је завојно кретање. □

Теорема 11.4.2. *Свака индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора E^3 представља равансκу, осноротациону или клизајућу рефлексију.*

Доказ. Како је $\mathcal{I}$ индиректна изометријска трансформација простора E^3 њена оптимална симетријска репрезентација састоји се из једне или из три раванске рефлексије.

(i) У првом случају је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi$, тј. $\mathcal{I}$ је раванска рефлексија простора E^3.

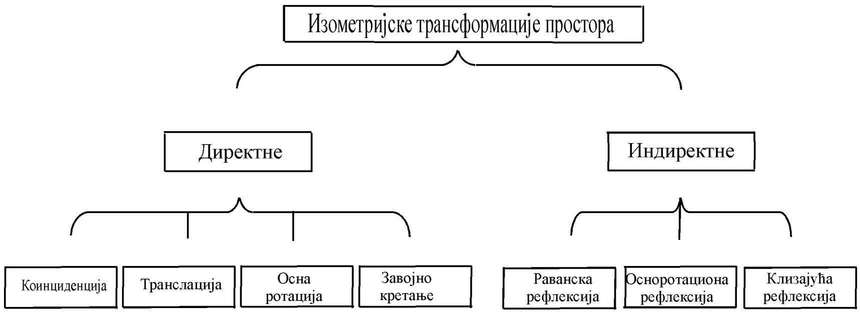
(ii) У другом случају је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\gamma$, при чему равни α, β и γ не припадају истом прамену равни. Наиме ако би ове равни припадале истом прамену, онда би $\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\gamma$ представљала раванску рефлексију, те би се случај (ii) свео на случај (i) .

Три равни α, β и γ у простору одређују један сноп равни. У простору E^3 постоје две врсте снопова равни: сноп конкурентних равни и ортогонални сноп равни.

(a) Ако равни α, β и γ припадају снопу конкурентних равни коме је средиште тачака O, тј. заједничка тачка равни α, β и γ, тада је тачка O инваријантна тачка композиције $\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\gamma$. У том случају изометрија $\mathcal{I}$ као индиректна изометријска трансформација са инваријантном тачком O представља ротациону рефлексију простора E^3, тј. $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{\pi;s,\omega}$.

(б) Ако равни α, β и γ припадају ортогоналном снопу равни, композиција $\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\gamma$ представља клизајућу рефлексију простора E^3, тј. $\mathcal{I} = \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{MM'}}$. $\square$

У складу с овим можемо дати шему изометријских трансформација простора E^3:



Напомињемо да се у изведеној класификацији изометријских трансформација еуклидског простора E^3 посебно не истичу осне симетрије реда n. Њих сврставамо међу осне ротације. Исто тако, нису посебно поменуте ни осноротационе симетрије реда n међу којима се налази и централна рефлексија простора. Њих сврставамо међу осноротационе рефлексије разматраног простора.

Класификације изометријских трансформација су до почетка XX века вршене на интуитивној основи. Наведени приступ класификацији изометријских трансформација заживео је шестдесетих година XX века.

11.5 Симетрије ликова у простору $\mathbf{E^3}$

Изометријске трансформације простора E^3 омогућују да у том простору изградимо геометријску теорију симетрија. Није нам циљ да овде у потпуности разрадимо ту теорију, већ ћемо само да изложити неке њене елементе.

Дефиниција 11.5.1. *Симетријом лика* Φ у простору E^3 називамо сваку изометријску трансформацију $\mathcal{I}$ те равни такву да је

$$\mathcal{I}(\Phi) = \Phi.$$

Није тешко установити да скуп свих симетрија лика Φ простора E^3 образује групу. Ту групу називамо *групом симетрија лика* Φ и симболички обележавамо са $G(\mathcal{I}_\Phi)$. Број елемената групе $G(\mathcal{I}_\Phi)$ називамо редом те групе. Идентична трансформација као специфична изометрија простора E^3 представља симетрију сваког лика Φ тог простора. Ако је ред групе $G(\mathcal{I}_\Phi)$ једнак јединици, лик Φ називамо *асиметричним*, ако је ред групе већи од један, лик Φ називамо *симетричним*. Узимајући у обзир оријентацију, разликујемо *директне симетрије* које не мењају оријентацију простора и *индиректне* које мењају његову оријентацију. Скуп директних симетрија неког лика Φ простора E^3 представља подгрупу групе $G(\mathcal{I}_\Phi)$. Ту подгрупу називамо *групом директних симетрија лика* Φ, и симболички је означавамо је са $G(\mathcal{I}+\Phi)$. С обзиром на то да разликујемо седам врста изометријских трансформација простора E^3, разликоваћемо и седам врста симетрија ликова простора E^3. То су: коинциденција, раванска симетрија, осна симетрија реда n, осноротациона симетрија реда n, транслациона симетрија, клизајућа симетрија и завојна симетрија. Са овако утврђеним постојећим врстама симетрија ликова простора E^3 може се приступити изналажењу постојећих група симетрија у простору E^3. Тај проблем веома је сложен, и ми га овде нећемо ни разматрати. Као и у геометрији равни E^2, и у геометрији простора E^3 проучавају се најпре пунктуалне групе симетрија, то су групе у којима све симетрије располажу најмање једном заједничком инваријантном тачком. Пунктуалне групе које се састоје искључиво из директних симетрија располажу једино коинциденцијом и осним симетријама, због чега се у литератури и називају групама ротација. Није тешко установити да нпр. група ротација правилне n-тостране пирамиде представља цикличку групу симетрија типа C_n. На пример група ротација правилне n-тостране призме представља диедарску групу симетрија типа D_n. Наредном теоремом установићемо групе симетрија правилних полиедара у простору E^3.

Теорема 11.5.1. *Укупан број симетрија правилног полиедра* Φ *у простору* E^3 *једнак је двоструком броју његових ивичних углова односно четвороструком броју његових ивица. Половину тих симетрија чине директне, а другу половину чине индиректне изометријске трансформације.*

Доказ. Ако обележимо са A, B, C и A', B', C' две тројке узастопних темена једне исте или двеју разних пљосни полиедра Φ и са O

средиште тог полиедра, биће четворке тачака O, A, B, C и O, A', B', C' некомпланарне. Шта више, важе релације

$$(O, A, B, C) \cong (O, A', B', C') \quad \text{и} \quad (O, A, B, C) \cong (O, C', B', A').$$

Дакле, постоје две изометријске трансформације простора E^3, обележимо их са $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$, од којих прва преводи тачке O, A, B, C редом у тачке O, A', B', C', а друга преводи тачке O, A, B, C редом у тачке O, C', B', A'. Будући да су тетраедри $OA'B'C'$ и $OC'B'A'$ супротно оријентисани, једна од изометријских трансформација $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ је директна а друга је индиректна. Није тешко доказати да свака од изометријских трансформација $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ представља симетрију полиедра Φ тј. да је $\mathcal{I}_1(\Phi) = \Phi$ и $I_2(\Phi) = \Phi$. Заиста, у трансформацији $\mathcal{I}_1$ пљосни $(ABC \cdots H)$ одговара пљосан $(A'B'C' \cdots H')$. Из подударности свих диедара и пљосни полиедра Φ следи да у трансформацији $\mathcal{I}_1$ пљоснима суседним са $(ABC \cdots H)$ одговарају пљосани суседне са $(A'B'C' \cdots H')$. Аналогно, закључујемо да у изометрији $\mathcal{I}_1$ наредним суседним пљоснима одговарају наредне суседне пљосни. Настављајући овај поступак, налазимо да је $\mathcal{I}_1(\Phi) = \Phi$. На исти начин добијамо да је $\mathcal{I}_2(\Phi) = \Phi$. Овим смо доказали да сваком ивичном углу полиедра Φ одговарају две разне симетрије тог полиедра од којих је једна директна а друга индиректна. Стога је укупан број свих симетрија полиедра Φ једнак двоструком броју његових ивичних углова, односно четвороструком броју његових ивица. Осим тога, једну половину тих симетрија чине директне, а другу половину чине индиректне изометријске трансформације. □

Ако правилан полиедар Φ има t темена, i ивица, p пљосни и ако свака пљосан има m страница а сваки рогаљ n ивица, из доказане теореме непосредно закључујемо да се ред групе $G_{\mathcal{I}}(\Phi)$ симетрија и ред групе $G_{\mathcal{I}^+}(\Phi)$ ротација тог правилног полиедра могу изразити следећим једнакостима:

$$red\, G_{\mathcal{I}}(\Phi) = 2\, red\, G_{\mathcal{I}^+}\Phi) = 2mp = 2nt = 4i.$$

Изведена својства омогућују да с обзиром на постојеће врсте правилних полиедара сачинимо следећу табелу:

Врста полиедра Φ	$red\, G_{\mathcal{I}}(\Phi)$	$red\, G_{\mathcal{I}^+}(\Phi)$
Правилан тетраедар	24	12
Правилан хексаедар	48	24
Правилан октаедар	48	24
Правилан додекаедар	120	60
Правилан икосаедар	120	60

Овим смо само установили колики је ред групе симетрија и ред групе ротација сваког од постојећих пет врста правилних полиедара. Природно је поставити питање којим врстама симетрија располажу групе. Без доказа наводимо врсте симетрија којима располажу правилан тетраедар и коцка.

Правилан тетраедар располаже са:

- **8** осних симетрија реда три које су дефинисане у оба смера у односу на праве одређене висинама тог тетраедра,
- **3** осне симетрија реда два које су дефинисане у односу на праве одређене средиштима наспрамних ивица,
- **1** идентична трансформација,
- **6** раванских симетрија дефинисаних у односу на симетралне равни унутрашњих диедара,
- **6** осноротационих симетрија реда четири дефинисаних у оба смера у односу на праве одређене средиштима наспрамних ивица.

Правилан хексаедар (коцка) располаже са:

- **6** осних симетрија реда четири дефинисаних у оба смера у односу на праве одређене средиштима наспрамних пљосни,
- **3** осне симетрије реда два дефинисане у односу на праве одређене средиштима наспрамних пљосни,
- **6** осних симетрија реда два дефинисаних у односу на праве одређене средиштима наспрамних ивица,
- **8** осних симетрија реда три дефинисаних у оба смера у односу на праве одређене наспрамним теменима,
- **1** идентична трансформација,
- **6** раванских симетрија дефинисаних у односу на симетралне равни унутрашњих диедара,
- **3** раванске симетрије дефинисане у односу на медијалне равни ивица,

- **6** осноротационих симетрија реда четири, дефинисаних у односу на праве одређене средиштима наспрамних пљосни,

- **8** осноротационих симетрија реда шест, дефинисаних у оба смера у односу на праве одређене наспрамних теменима,

- **1** централна симетрија.

Део 12

Сличност и хомотетија

12.1 Трансформације сличности простора $\mathbf{E}^n$

У овом одељку ћемо се упознати са трансформацијама сличности које представљају уопштење изометријских трансформација, тј. изометријске трансформације представљају само специјалан случај трансформација сличности.

Дефиниција 12.1.1. Нека је $k \in R^+$ произвољан позитиван реалан број и

$$\mathcal{P} : E^n \to E^n, \quad (n = 1, 2, 3)$$

бијективно пресликавање које сваке две тачке X, Y простора E^n преводи редом у тачке X', Y' простора E^n такве да је

$$X'Y' = k\, XY.$$

Тада пресликавање $\mathcal{P}$ називамо *трансформацијом сличности простора* E^n, са коефицијентом k.

Непосредно из дефиниције можемо закључити да изометријске трансформације представљају само специјалан случај трансформација сличности за $k = 1$. Сада ћемо навести неке особине трансформација сличности простора E^n.

Теорема 12.1.1. *Трансформација сличности $\mathcal{P}$ простора E^n колинеарне тачке A, B, C преводи у колинеарне тачке A', B', C'. Штавише, трансформација сличности простора E^n је уређена, тј. ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$ тада је $\mathcal{B}(A', B', C')$.*

Доказ. Нека је k коефицијент сличности трансформације $\mathcal{P}$. Тада је према дефиницији

$$A'B' = k\,AB, \quad B'C' = k\,BC, \quad A'C' = k\,AC.$$

Из ових једнакости и релације $\mathcal{B}(A, B, C)$ налазимо да је

$$A'B' + B'C' = k\,AB + k\,BC = k(AB + BC) = k\,AC = A'C'.$$

Одавде следи да су тачке A', B' и C' колинеарне и да важи распоред $\mathcal{B}(A', B', C')$. □

Теорема 12.1.2. *Трансформација сличности $\mathcal{P}$ подударне парове тачака пресликава на подударне парове тачака.*

Доказ. Нека су A,B,C и D тачке простора E^n такве да је $(A, B) \cong (C, D)$ и A', B' C' и D' њихове одговарајуће тачке у трансформацији $\mathcal{P}$. Ако је k коефицијент сличности трансформације $\mathcal{P}$, тада је $A'B' = k\,AB$ и $C'D' = k\,CD$. Према томе из $(A, B) \cong (C, D)$ следи $(A', B') \cong (C', D')$. □

Теорема 12.1.3. *Скуп свих трансформација сличности простора E^n представља некомутативну групу.*

Доказ. (i) Нека су $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ две произвољне трансформације сличности простора E^n са коефицијентима сличности редом k_1 и k_2. Нека су затим X и Y две произвољне тачке простора E^n, а X_1, Y_1, X_2, Y_2 тачке простора E^n такве да је

$$\mathcal{P}_1(X) = X_1, \quad \mathcal{P}_1(Y) = Y_1, \quad \mathcal{P}_2(X_1) = X_2, \quad \mathcal{P}_2(Y_1) = Y_2.$$

Тада је $X_1Y_1 = k_1\,XY$ и $X_2Y_2 = k_2\,X_1Y_1$ па је $X_2Y_2 = k_1k_2\,XY$. Дакле, композиција $\mathcal{P}_2 \circ \mathcal{P}_1$ представља трансформацију сличности простора E^n са коефицијентом $k = k_1k_2$, тј. производ две трансформације сличности простора E^n представља трансформацију сличности.

(ii) Нека је $\mathcal{P}$ трансформација сличности простора E^n са коефицијентом k. Тада сваком пару тачака $X, Y \in E^n$ одговара у тој трансформацији пар тачака X', Y' такав да је $X'Y' = k\,XY$. Тада је $XY = \frac{1}{k}\,X'Y'$, одакле следи да је $\mathcal{P}^{-1}$ трансформација сличности простора E^n са коефицијентом сличности $1/k$.

Из (i) и (ii) следи да да скуп трансформација сличности представјла подгрупу групе свих трансформација простора E^n, па према томе представља групу. Да је група трансформација сличности некомутативна следи из чињенице да она садржи некомутативну подгрупу $G(\mathcal{I})$ свих изометријских трансформација. $\square$

Дефиниција 12.1.2. Групу која се састоји из свих трансформација сличности простора E^n називамо *групом трансформација сличности* и симболички је обележавамо са $G(\mathcal{P})$.

Уочимо функцију $f : G(\mathcal{P}) \to \mathbb{R}^+$ која свакој трансформацији сличности $\mathcal{P} : E^n \to E^n$ кореспондира њен коефицијент сличности k. Није тешко проверити да f представља хомоморфизам групе $G(\mathcal{P})$ на мултипликативну групу позитивних бројева. Група $G(\mathcal{I})$ представља језгро тог хомоморфизма.

Није тешко установити да трансформација сличности $\mathcal{P}$ простора E^n као уређено пресликавање преводи једнако орјентисане ликове у једнако орјентисане ликове, а супротно орјентисане ликове у супротно орјентисане ликове. Самим тим разликујемо две врсте трансформација сличности: директне и индиректне.

Дефиниција 12.1.3. Трансформацију сличности простора E^n називамо *директном* или *индиректном* у зависности од тога да ли она чува или мења орјентацију тог простора.

У потпуности је јасно да композиција двеју директних или двеју индиректних трансформација сличности увек представља директну изометријску трансформацију сличности. Такође, композиција двеју трансформација сличности простора E^n од којих је једна директна а друга индиректна представља индиректну трансформацију сличности. На основу тога закључујемо да важи следећа теорема.

Теорема 12.1.4. *Скуп свих директних трансформација сличности простора E^n чини некомутативну подгрупу индекса два групе $G(\mathcal{P})$ свих трансформација сличности простора E^n.*

Дефиниција 12.1.4. Групу састављену од директних трансформација сличности простора E^n називамо *групом директних трансформација сличности* и симболички је означавамо са $G(\mathcal{P}^+)$.

Основу за даље проучавање својстава трансформација сличности чине извесне особине које се односе на паралелно пројектовање у простору E^n.

12.2 Појам вектора у простору $\mathbf{E^n}$ $(\mathbf{n = 1, 2, 3})$

Појам вектора игра изузетно важну улогу у решавању многих геометријскух задатака и проблема. Транслација простора E^n омогућује увођење појма вектора у простору E^n. Пре увођења појма вектора увешћемо помоћну релацију *еквиполенције* или *истозначности* уређених парова тачака.

Дефиниција 12.2.1. Нека су P, P', Q и Q' тачке простора E^n. Пар тачака (P, P') је *еквиполентан* пару тачака (Q, Q') ако постоји транслација простора E^n која тачке P и Q преводи редом у тачке P' и Q'.

Из дефиниције непосредно следи да су парови тачака (P, P') и (Q, Q') транслаторно подударни. То значи да су дужи PP' и QQ' истосмерне и подударне.

Није тешко утврдити да важи следећа теорема:

Теорема 12.2.1. *Релација еквиполенције дефинисана на скупу уређених парова тачака простора E^n је релација еквиваленције.*

Релација еквиполенције разбија скуп свих уређених тачака простора E^n на бесконачно много класа еквиваленције.

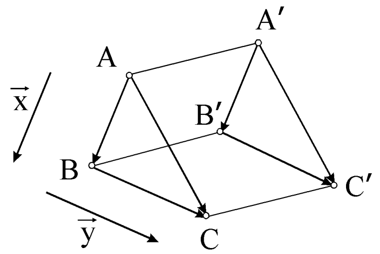
Дефиниција 12.2.2. Класу свих међу собом еквиполентних уређених парова тачака простора E^n називамо *вектором*.

Векторе најчешће означавамо: $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\cdots$ Како вектор $\overrightarrow{a}$ представља читаву класу еквиполентних парова тачака која је једнозначно одређена било којим паром (A, A') те класе, вектор можемо означавати и са $\overrightarrow{AA'}$. Тада тачка A представља почетак, а тачка A' крај вектора $\overrightarrow{AA'}$. Правац одређен правом AA' називамо правцем вектора $\overrightarrow{AA'}$, а смер одређен усмереном (орјентисаном) дужи $\overrightarrow{AA'}$ називамо смером вектора $\overrightarrow{AA'}$. Вектор $\overrightarrow{BA}$ је супротносмеран вектору $\overrightarrow{AB}$. Ако се почетак и крај неког вектора поклапају, онда за такав вектор кажемо да је нула вектор.

12.3 Линеарне операције над векторима

Над скупом вектора у простору E^n, $(n = 1, 2, 3)$ могуће је установити две врсте тзв. линеарних алгебарских операција. То су операције сабирања вектора и множења вектора са бројем. Установимо најпре операцију сабирања вектора.

Дефиниција 12.3.1. У простору E^n, $(n = 1, 2, 3)$ сваком уређеном пару вектора $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{BC}$ придружен је један вектор $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{AC}$ који називамо збиром вектора $\overrightarrow{x}$ и $\overrightarrow{y}$, и симболички обележавамо са $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$.



Слика 12.1.

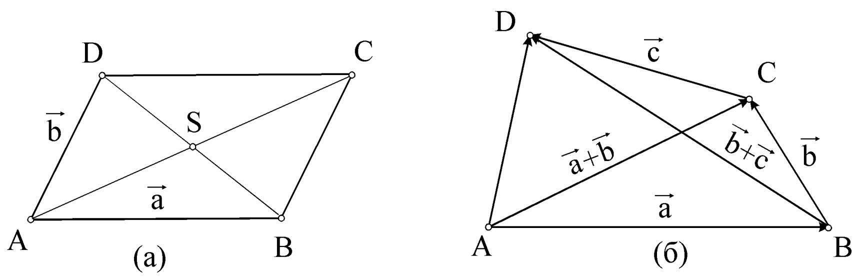
Није тешко доказати да збир два вектора $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{BC}$ не зависи од положаја тачке A (Слика 12.1). Заиста, ако обележимо са A' произвољну тачку простора E^n и са B', C' тачке такве да је $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{B'C'}$, биће оријентисане дужи AB и $A'B'$ подударне и истосмерне, па су и оријентисане дужи AA' и BB' подударне и истосмерне. Исто тако оријентисане дужи BC и $B'C'$ су подударне и истосмерне, па су и оријентисане дужи BB' и CC' подударне и истосмерне. Сад су оријентисане дужи AA' и BB' подударне и истосмерне, те су и оријентисане дужи AC и $A'C'$ подударне и истосмерне. Стога је $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$ и према томе $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$.

Од особина којима се одликује операција сабирања вектора истичемо најважније. Те особине смештене су у једној теореми која гласи:

Теорема 12.3.1. *За свака три вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ простора E^n важе следеће релације:*

(i) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ (*комутативност*),

(ii) $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$ (*асоцијативност*),
(iii) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$ (*неутрални елемент*),
(iv) $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$ (*инверзни елемент*).



Слика 12.2.

Доказ. (i) Означимо са O, A, B тачке такве да је $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ и са C тачку симетричну са тачком O у односу на средиште S дужи AB (Слика 12.2 (а)), имамо да је $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. Из ових једнакости следи да је $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$.
(ii) Ако обележимо са A, B, C, D, тачке такве да је $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{CD}$ (Слика 12.2 (б)), имамо да је

$$\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD},$$

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Из ових једнакости склади да је $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$.
(iii) Ако су A и B тачке такве да је $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, биће $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$, тј. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$.
(iv) Ако су A и B тачке такве да је $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, биће $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. □

С обзиром да је операција сабирања вектора у простору E^n асоцијативна, у изразима $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ и $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$ могу се изоставити заграде, те сваки од њих добија облик $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$. Индукцијом налазимо да се операција сабирања вектора може проширити и на већи број сабирака. Тако нпр. збир од n вектора $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \cdots, \overrightarrow{a}_n$ представља неки вектор $\overrightarrow{a}$ који можемо написати у облику $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_1 + \overrightarrow{a}_2 + \cdots + \overrightarrow{a}_n$. Збир два вектора $\overrightarrow{x}$ и $-\overrightarrow{y}$ представља неки вектор $\overrightarrow{z}$ који називамо разлика вектора $\overrightarrow{x}$ и $\overrightarrow{y}$, и симболички обележавамо са $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (-\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}$.

Сем унутрашње операције сабирања, на скупу вектора простора E^n може се дефинисати и једна спољашња операција коју називамо *множењем вектора са бројем.*

Дефиниција 12.3.2. Нека је $\overrightarrow{x} \in E^n$ и $k \in R$. Производом $k\overrightarrow{x}$ вектора $\overrightarrow{x}$ бројем k називамо вектор $\overrightarrow{y} \in E^n$ који задовољава следеће услове:

(i) Интензитет вектора $\overrightarrow{y}$ једнак је производу из апсолутне вредности броја k и интензитета вектора $\overrightarrow{x}$ тј. $|\overrightarrow{y}| = |k||\overrightarrow{x}|$,

(ii) Вектор $\overrightarrow{y}$ је истосмеран или супротосмеран с вектором $\overrightarrow{x}$ у зависности од тога да ли је $k > 0$ или $k < 0$. Из дефиниције непосредно следи да производ вектора $\overrightarrow{x}$ бројем k представља нула вектор ако и само ако је $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ или $k = 0$.

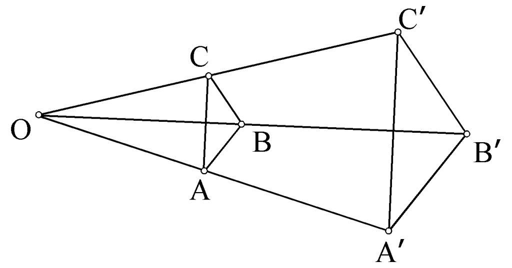
Теорема 12.3.2. *Ако су $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ произвољни вектори простора E^n и k, k_1, k_2 реални бројеви, тада је*

(i) $k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$,

(ii) $(k_1 + k_2)\overrightarrow{a} = k_1\overrightarrow{a} + k_2\overrightarrow{a}$,

(iii) $k_1(k_2\overrightarrow{a}) = (k_1k_2)\overrightarrow{a}$,

(iv) $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$.



Слика 12.3.

Доказ. (i) Ако је $k = 0$, тврђење следи непосредно из дефиниције. Размотримо случај када је $k \neq 0$ (Слика 12.3). Ако обележимо са A, B, C тачке простора E^n такве да је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$, са O тачку ван правих AB, BC, CA и са A', B', C' тачке такве да је $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC'} = k\overrightarrow{OC}$, тада важе следеће једнакости $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC}$. На тај начин имамо да је

$$\begin{aligned} k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) &= k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = k\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'} \\ &= \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} \\ &= k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}. \end{aligned}$$

(ii) Ако је неки од бројева k_1 и k_2 једнак нули или $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, тврђење следи непосредно. Разматрамо случај када бројеви k_1 и k_2 имају исти знак, док је $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. При томе су вектори $(k_1+k_2)\overrightarrow{a}$ и $k_1\overrightarrow{a}+k_2\overrightarrow{a}$ истог смера и једнаких интензитета. Прво од ових тврђења следи из чињенице што су оба та вектора за $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ истосмерни с вектором $\overrightarrow{a}$, а за $k_1 < 0$ и $k_2 < 0$ супротни су са вектором $\overrightarrow{a}$. Друго од поменутих тврђења такође важи, јер је

$$\begin{aligned} |(k_1 + k_2)\overrightarrow{a}| &= |k_1 + k_2||\overrightarrow{a}| = (|k_1| + |k_2|)|\overrightarrow{a}|, \\ |k_1\overrightarrow{a} + k_2\overrightarrow{a}| &= |k_1\overrightarrow{a}| + |k_2\overrightarrow{a}| = |k_1||\overrightarrow{a}| + |k_2||\overrightarrow{a}| \\ &= (|k_1| + |k_2|)|\overrightarrow{a}|. \end{aligned}$$

Дакле, према дефиницији једнакости вектора, имамо да је

$$(k_1 + k_2)\overrightarrow{a} = k_1\overrightarrow{a} + k_2\overrightarrow{a}.$$

Аналогно расуђивање примењује се и у случају када бројеви k_1 и k_2 имају супротне знаке, док је $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$.

(iii) Вектори $k_1(k_2\overrightarrow{a})$ и $(k_1k_2)\overrightarrow{a}$ су истог смера и једнаких интензитета. Прво од ових својстава следи непосредно, јер ако бројеви k_1 и k_2 имају исти знак, поменути вектори су истосмерни са вектором $\overrightarrow{a}$, ако бројеви k_1 и k_2 имају супротан знак, поменути вектори су супротносмерни с вектором $\overrightarrow{a}$. Друго својство следи из релација

$$\begin{aligned} |k_1(k_2\overrightarrow{a})| &= |k_1||k_2\overrightarrow{a}| = |k_1||k_2||\overrightarrow{a}| i |(k_1k_2)\overrightarrow{a}| = |k_1k_2||\overrightarrow{a}| \\ &= |k_1||k_2||\overrightarrow{a}|. \end{aligned}$$

Дакле, $k_1(k_2\overrightarrow{a}) = (k_1k_2)\overrightarrow{a}$.

(iv) Будући да су вектори $1 \cdot \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{a}$ истог смера и једнаких интензитета, имамо да је $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$. $\square$

12.4 Хомотетија простора E^n

Дефиниција 12.4.1. Нека је O произвољна тачка простора E^n и k реалан број различит од нуле. *Хомотетијом или дилатацијом са средиштем* O и коефицијентом k називамо трансформацију

$$\mathcal{H}_{O,k} : E^n \to E^n \qquad (n = 1, 2, 3)$$

која сваку тачку $X \in E^n$ преводи у тачку $X' \in E^n$ такву да је

$$\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}.$$

Из дефиниције непосредно следи да је хомотетија $\mathcal{H}_{O,k}$ бијективна трансформација и да је једнозначно одређена средиштем O и коефицијентом k. Штавише за $k \neq 1$ хомотетија $\mathcal{H}_{O,k}$ има јединствену инваријантну тачку - тачку O, за $k = 1$ представља коинциденцију а за $k = -1$ централну рефлексију $\mathcal{S}_O$.

Теорема 12.4.1. *Хомотетија $\mathcal{H}_{O,k}$ простора E^n представља трансформацију сличности са коефицијентом сличности $k' = |k|$.*

Доказ. Означимо са A и B две произвољне тачке простора E^n. Нека су A' и B' редом тачке које у хомотетији $\mathcal{H}_{O,k}$ одговарају тачкама A и B. Тада је $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$, па је

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}.$$

Одавде, за дужи AB и $A'B'$ следи $A'B' = |k|AB$. Дакле, хомотетија $\mathcal{H}_{O,k}$ представља трансформацију сличности са коефицијентом $|k|$. $\Box$

Лако се показује следећа теорема:

Теорема 12.4.2. *Трансформација сличности $\mathcal{P} : E^n \to E^n$ која преводи сваку праву у њој паралелну праву представља транслацију или хомотетију.*

Доказ. Нека трансформација сличности $\mathcal{P}$ произвољну праву m пресликава у њој паралелну праву n. Тада ће праве које спајају одговарајуће тачке правих m и n при трансформацији $\mathcal{P}$ бити паралелне или ће се сећи. Означимо са M и M' произвољне тачке праве m, а са N и N' редом њима одговарајуће тачке у трансформацији сличности $\mathcal{P}$. Ако су праве MN и $M'N'$ паралелне, онда је четвороугао $MNN'M'$ паралелограм, тј. дужи MM' и NN' ће бити подударне, па је $\mathcal{P}$ у овом случају изометрија. Нека се праве MN и $M'N'$ секу у тачки O. Тада, применом Талесове теореме закључујемо да је $\mathcal{P}$ хомотетија. □

Теорема 12.4.3. *Ако је $\mathcal{P} : E^n \to E^n$ трансформација сличности са коефицијентом k и O фиксирана тачка простора E^n тада постоје две и само две изометријске трансформације $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ простора E^n такве да је*

$$\mathcal{P} = \mathcal{I}_1 \circ \mathcal{H}_{O,k}, \qquad \mathcal{P} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}_2.$$

Доказ. Нека у трансформацији сличности $\mathcal{P}$ двема разним тачкама P, Q простора E^n одговарају редом тачке P', Q' простора E^n, а у хомотетији $\mathcal{H}_{O,k}$ тачкама P, Q одговарају тачке P'', Q'' простора E^n. Тада је $P'Q' = k\,PQ$ и $P''Q'' = k\,PQ$, одакле је $P'Q' \cong P''Q''$ и композиција $\mathcal{P} \circ \mathcal{H}_{O,k}^{-1}$ тачке P'', Q'' преводи у тачке P', Q' па представља неку изометријску трансформацију $\mathcal{I}_1$. Из $\mathcal{P} \circ \mathcal{H}_{O,k}^{-1} = \mathcal{I}_1$ следи да је $\mathcal{P} = \mathcal{I}_1 \circ \mathcal{H}_{O,k}$. Аналогно се доказује и други део теореме. □

Теорема 12.4.4. *Нека је $\mathcal{H}_{O,k}$ хомотетија простора E^n. Ако је n паран број тада хомотетија $\mathcal{H}_{O,k}$ представља директну трансформацију сличности, ако је n непаран број тада хомотетија $\mathcal{H}_{O,k}$ представља директну или индиректну трансформацију сличности у зависности од тога да ли је $k > 0$ или $k < 0$.*

Доказ. Размотримо најпре случај $n = 2$. Ако у хомотетији $\mathcal{H}_{O,k}$ тачкама P и Q неколинеарним с тачком O одговарају редом тачке P' и Q' тада за $k > 0$ углу $\measuredangle POQ$ одговара *тај исти угао*, а за $k < 0$ углу $\measuredangle POQ$ одговара њему централно симетричан угао $\measuredangle P'OQ'$. Одавде непосредно следи да у хомотетији $\mathcal{H}_{O,k}$ сваком углу одговара њему истосмеран угао, па је хомотетија $\mathcal{H}_{O,k}$ равни E^2 директна изометријска трансформација.

Нека је сада $n = 3$. Ако у хомотетији $\mathcal{H}_{O,k}$ тачкама P, Q, R некомпланарним с тачком O одговарају редом тачке P', Q', R', тада за $k > 0$ триедру O_{PQR} одговара тај исти триедар $O_{P'Q'R'}$, а за $k < 0$ триедру O_{PQR} одговара њему централно симетричан триедар $O_{P'Q'R'}$. Дакле хомотетија $\mathcal{H}_{O,k}$ за $k > 0$ не мења а за $k < 0$ мења орјентацију простора E^3. □

Теорема 12.4.5. *Скуп $\mathcal{H}_O$ свих хомотетија које имају заједничко средиште O представља комутативну групу.*

Доказ. Нека су $\mathcal{H}_{O,k_1}$ и $\mathcal{H}_{O,k_2}$ две произвољне хомотетије из скупа $\mathcal{H}_O$. Нека је X произвољна тачка простора E^n и нека су X_1 и X_2 тачке простора E^n такве да је $\mathcal{H}_{O,k_1}(X) = X_1$ и $\mathcal{H}_{O,k_2}(X_1) = X_2$. Тада је $\overrightarrow{OX_1} = k_1\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OX_2} = k_2\overrightarrow{OX_1}$, одакле је $\overrightarrow{OX_2} = k_1k_2\overrightarrow{OX}$. Дакле $\mathcal{H}_{O,k_2} \circ \mathcal{H}_{O,k_1} = \mathcal{H}_{O,k}$, где је $k = k_1k_2$.

Ако је $\mathcal{H}_{O,k}$ хомотетија из скупа $\mathcal{H}_O$, биће и $\mathcal{H}_{O,k}^{-1}$ хомотетија и скупа $\mathcal{H}_O$. Заиста, ако означимо са X произвољну тачку простора E^n и са X' тачку такву да је $\mathcal{H}_{O,k}(X) = X'$ онда је $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$, тј. $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OX'}$ одакле следи $\mathcal{H}_{O,k}^{-1} = \mathcal{H}_{O,\frac{1}{k}}$.

Будући да хомотетије из скупа $\mathcal{H}_O$ представља елементе групе $\mathcal{G}(\mathcal{P})$ свих трансформација сличности простора E^n, на основу доказаног следи да скуп $\mathcal{H}_O$ представља подгрупу групе $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. Комутативност следи непосредно из дефиниције хомотетије. $\square$

Дефиниција 12.4.2. Групу која се састоји из свих хомотетија простора E^n са заједничким средиштем O називамо *групом хомотетија* и симболички је означавамо са $\mathcal{G}(\mathcal{H}_{\mathcal{O}})$.

Теорема 12.4.6. *Група $\mathcal{G}(\mathcal{H}_{\mathcal{O}})$ је изоморфна мултипликативној групи $\mathcal{G}(R^*)$, где је $R^* = R\backslash\{O\}$.*

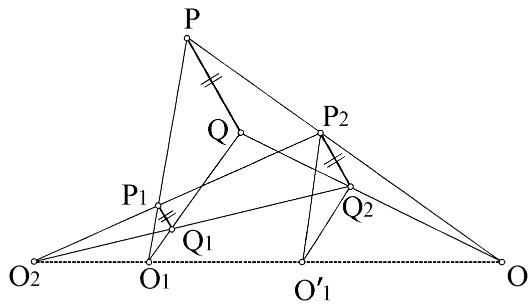
Теорема 12.4.7. *Ако су $\mathcal{H}_{O_1,k_1}$ и $\mathcal{H}_{O_2,k_2}$ две хомотетије простора E^n са разним средиштима O_1 и O_2 тада композиција $\mathcal{H}_{O_2,k_2} \circ \mathcal{H}_{O_1,k_1}$ представља:*
(i) *Хомотетију $\mathcal{H}_{O,k}$ ако је $k_1k_2 \neq 1$, при чему је $k = k_1k_2$ а O тачка праве O_1O_2 таква да је*

$$\overrightarrow{O_1O} : \overrightarrow{OO_2} = \frac{k_2 - 1}{k_2(k_1 - 1)},$$

(ii) *Транслацију $\tau_{\overrightarrow{PP_2}}$ ако је $k_1k_2 = 1$, при чему је*

$$PP_2 \parallel O_1O_2, \qquad \overrightarrow{PP_2} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2}.$$

Доказ. Означимо са P и Q две разне тачке простора E^n, са P_1 и Q_1 тачке простора E^n које у хомотетији $\mathcal{H}_{O_1,k_1}$ одговарају тачкама P и Q, а са P_2 и Q_2 тачке простора E^n које у хомотетији $\mathcal{H}_{O_2,k_2}$ одговарају тачкама P_1 и Q_1. Тада је $P_1Q_1 \parallel PQ$ и $P_2Q_2 \parallel P_1Q_1$, одакле следи $P_2Q_2 \parallel PQ$. Осим тога је $\overrightarrow{P_1Q_1} = k_1\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{P_2Q_2} = k_2\overrightarrow{P_1Q_1}$ одакле следи да је $\overrightarrow{P_2Q_2} = k\overrightarrow{PQ}$ где је $k = k_1k_2$.



Слика 12.4.

(i) Нека је $k \neq 1$. Праве PP_2 и QQ_2 се секу. Означимо са O њихову пресечну тачку (Слика 12.4). Тада је очигледно $\mathcal{H}_{O_2,k_2} \circ \mathcal{H}_{O_1,k_1} = \mathcal{H}_{O,k}$. Такође, тачке O, O_1 и O_2 су колинеарне. Заиста, ако обележимо са O_1' тачку која у хомотетији $\mathcal{H}_{O_2,k_2}$ одговара тачки O_1, тада у хомотетији $\mathcal{H}_{O,k}$ тачки O_1 одговара тачка O_1'. Дакле тројке тачака O_2, O_1, O_1' и O, O_1, O_1' су колинеарне, одакле следи да су тачке O, O_1 и O_2 колинеарне.

Тачка O је инваријантна тачка хомотетије $\mathcal{H}_{O,k}$, одакле следи

$$\mathcal{H}_{O_2,k_2} \circ \mathcal{H}_{O_1,k_1}(O) = O,$$

тј.

$$\mathcal{H}_{O_1,k_1}(O) = \mathcal{H}^{-1}_{O_2,k_2}(O) = O'$$

Из ових једнакости и релације

$$\overrightarrow{O_1O'} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O'}$$

налазимо

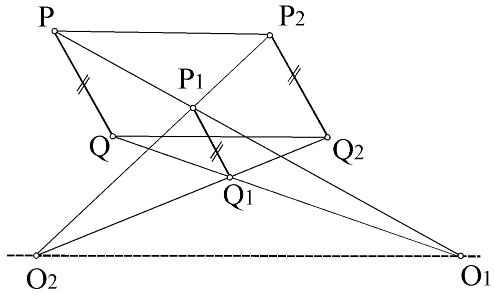
$$k_1\overrightarrow{O_1O} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OO_2} + \frac{1}{k_2}\overrightarrow{O_2O},$$

одакле је

$$\overrightarrow{O_1O} : \overrightarrow{OO_2} = \frac{k_2 - 1}{k_2(k_1 - 1)}.$$

(ii) За $k = 1$ праве PP_2 и QQ_2 су међу собом паралелне (Слика 12.5). Тада је

$$\mathcal{H}_{O_2,k_2} \circ \mathcal{H}_{O_1,k_1} = \tau_{\overrightarrow{PP_2}}.$$



Слика 12.5.

Важи $k_1 = \frac{1}{k_2}$ и $\overrightarrow{O_1P_1} : \overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_2P_1} : \overrightarrow{O_2P_2}$ одакле следи $PP_2 \parallel O_2O_1$, а такође и

$$\overrightarrow{PP_2} = (1 - \frac{1}{k_1})\overrightarrow{O_1O_2} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2}.$$

□

Теорема 12.4.8. *Ако је $\mathcal{H}_{O,k}$ хомотетија и $\mathcal{I}$ изометријска трансформација простора E^n, тада је*

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{H}_{\mathcal{I}(O),k}.$$

Доказ. Нека у хомотетији $\mathcal{H}_{O,k}$ тачки X простора E^n одговара тачка X' простора E^n, а у изометрији $\mathcal{I}$ тачкама O, X, X' простора E^n одговарају редом тачке O_1, X_1, X_1'. С обзиром на то да је $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ биће и $\overrightarrow{O_1X_1'} = k\overrightarrow{O_1X_1}$. Према томе у композицији $\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}^{-1}$ свакој тачки X_1 простора E^n одговара тачка X_1' простора E^n таква да је $\overrightarrow{O_1X_1'} = k\overrightarrow{O_1X_1}$. Према томе $\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{H}_{\mathcal{I}(O),k}$. □

Теорема 12.4.9. *Хомотетија $\mathcal{H}_{O,k}$ и изометрија $\mathcal{I}$ простора E^n су комутативне трансформације ако и само ако је средиште O хомотетије $\mathcal{H}_{O,k}$ инваријантна тачка изометрије $\mathcal{I}$, тј.*

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I} \Leftrightarrow \mathcal{I}(O) = O.$$

Доказ. Нека је најпре $\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}$, тј. $\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{H}_{O,k}$. Одавде применом претходне теореме непосредно следи $\mathcal{I}(O) = O$.

Обратно, ако је $\mathcal{I}(O) = O$. На основу претходне теореме је $\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{H}_{O,k}$, тј. $\mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{O,k} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{I}$. □

Није тешко доказати да важи и следећа теорема

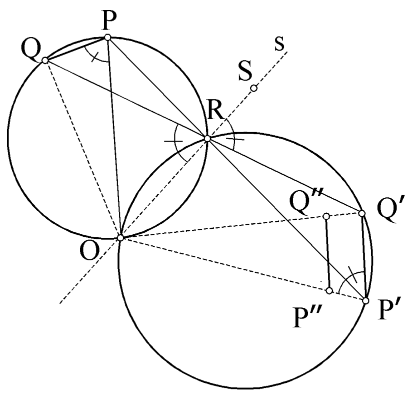
Теорема 12.4.10. *Ако је $\mathcal{S}_p$ осна рефлексија и $\mathcal{H}_{O,k}$ хомотетија равни E^2 тада је*

$$\mathcal{S}_p^{\mathcal{H}_{O,k}} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{H}_{O,k}^{-1} = \mathcal{S}_{\mathcal{H}_{O,k}(p)}.$$

12.5 Представљање трансформација сличности равни E^2 у канонском облику

Установили смо да се свака трансформација сличности $\mathcal{P}$ $(k \neq 1)$ може на бесконачно много начина представити као композиција једне хомотетије и једне изометријске трансформације те равни. Трансформације из којих је састављена та композиција у општем случају нису комутативне. Наш циљ биће да трансформацију сличности $\mathcal{P}$ представимо у облику композиције састављене из двеју комутативних трансформација од којих је једна хомотетија а друга изометрија. Такво представљање трансформације сличности називамо *канонским.* У циљу доказа могућности оваквог представљања, неопходно је најпре установити да трансформација сличности равни E^2, којој је коефицијент сличности $k \neq 1$, поседује јединствену инваријантну тачку.

Теорема 12.5.1. *Свака директна изометријска трансформација сличности равни E^2 којој је коефициент сличности $k \neq 1$ поседује јединствену инваријантну тачку.*

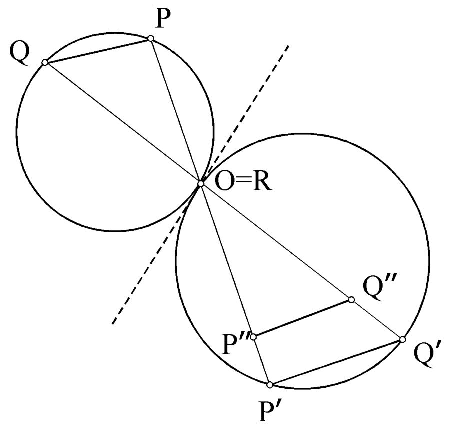


Слика 12.6.

Доказ. Установимо најпре да директна трансформација сличности $\mathcal{P}$ не може имати више од две инваријантне тачке. Ако би O_1 и O_2 биле две разне инваријантне тачке трансформације $\mathcal{P}$ тада би коефицијент сличности $k = O_1O_2 : O_1O_2$ био једнак јединици, што је искључено претпоставком.

Докажимо сада егзистенцију инваријантне тачке трансформације сличности $\mathcal{P}$. Нека у трансформацији сличности $\mathcal{P}$ двема разним тачкама P и Q одговарају тачке P' и Q'. Ако је при томе $P = P'$ или $Q = Q'$ тврђење следи непосредно.

Размотримо случај када је $P \neq P'$ и $Q \neq Q'$. Означимо са R пресечну тачку правих PP' и QQ' (Слика 12.6). Тачка R постоји јер би у супротном $\mathcal{P}$ била изометрија. Означимо са O другу пресечну тачку кругова описаних око троуглова ΔRPQ и $\Delta RP'Q'$. Специјално, ако се кругови додирују тачке R и O се поклапају (Слика 12.7).



Слика 12.7.

Тада важи

$$\measuredangle POQ \cong \measuredangle PRQ \cong \measuredangle P'RQ' \cong \measuredangle P'OQ',$$

тј. $\measuredangle POQ \cong \measuredangle P'OQ'$. Такође важи

$$\measuredangle QPO \cong \measuredangle QRO \cong \measuredangle SRQ' \cong \measuredangle Q'P'O,$$

тј. $\measuredangle QPO \cong \measuredangle Q'P'O$. Дакле углови троуглова ΔOPQ и $\Delta OP'Q'$ су подударни. То значи да постоји ротација $\mathcal{R}_{O,\omega}$ таква да полуправе

$[OP)$ и $[OQ)$ преводе редом у полуправе $[OP')$ и $[OQ')$. Нека је $\mathcal{R}_{O,\omega}(P) = P''$, $\mathcal{R}_{O,\omega}(Q) = Q''$. Тада имамо

$$\measuredangle OP'Q' = \measuredangle OPQ = \measuredangle OP''Q'',$$

одакле следи $P'Q' \parallel P''Q''$. То значи да постоји хомотетија $\mathcal{H}_{O,k}$ таква да је $\mathcal{H}_{O,k}(P'') = P'$, $\mathcal{H}_{O,k}(Q'') = Q'$, где је $k = \frac{OA'}{OA}$. Значи $\mathcal{P} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{R}_{O,\omega}$. Тачка O је инваријантна тачка трансформације сличности $\mathcal{P}$. □

Дефиниција 12.5.1. Јединствену инваријантну тачку директне трансформације сличности $\mathcal{P}$ равни E^2, којој је коефицијент $k \neq 1$, називамо *средиштем или центром* сличности те трансформације.

Теорема 12.5.2. *Свака директна трансформација сличности $\mathcal{P}$ равни E^2, која не представља изометрију нити хомотетију, може се на два и само два начина представити као композиција двеју комутативних трансформација од којих једна представља хомотетију а другаизометрију.*

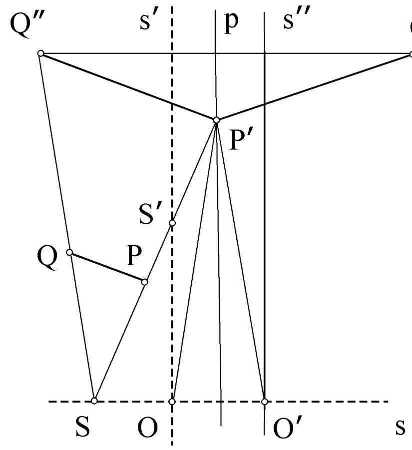
Доказ. Да би се трансформација сличности $\mathcal{P}$ могла представити као композиција двеју комутативних трансформација од којих једна представља хомотетију а друга изометрију потребно је и довољно да средиште те хомотетије буде инваријантна тачка те изометрије па према томе и трансформације $\mathcal{P}$. Будући да трансформација $\mathcal{P}$ са коефицијентом $k \neq 1$ поседује јединствену инваријантну тачку O, постоје две и само две хомотетије $\mathcal{H}_{O,k}^{-1}$ и $\mathcal{H}_{O,-k}^{-1}$ равни E^2 такве да композиције $\mathcal{P} \circ \mathcal{H}_{O,k}^{-1}$ и $\mathcal{P} \circ \mathcal{H}_{O,-k}^{-1}$ престављају изометријске трансформације. Обе изометријске трансформације су директне са инваријантном тачком O, те представљају централне ротације, означимо их са $\mathcal{R}_{O,\omega}$ и $\mathcal{R}_{O,\omega'}$. При томе су углови ω и ω' суплементни и супротносмерни, те знајући једну од тих ротација знамо и другу. На тај начин имамо да је $\mathcal{P} = \mathcal{R}_{O,\omega} \circ \mathcal{H}_{O,k}$ и $\mathcal{P} = \mathcal{R}_{O,\omega'} \circ \mathcal{H}_{O,-k}$. Оба ова израза су комутативна. □

Дефиниција 12.5.2. Репрезентације установљене претходном теоремом називамо *каноничким репрезентацијама* трансформације $\mathcal{P}$. Ону од тих репрезентација у којој хомотетија има позитиван коефицијент називамо *првом* или *непосредном каноничком репрезентацијом*, а ону у којој хомотетија има негативан коефицијент називамо *другом* или *посредном каноничком репрезентацијом* трансформације сличности $\mathcal{P}$.

Из дефиниције непосредно следи да је директна трансформација сличности $\mathcal{P}$ равни E^2 једнозначно одређена ако су јој познати средиште, угао и коефицијент сличности. Стога такву трансформацију симболички означавамо са $\mathcal{P}_{O,\omega,k}$

Теорема 12.5.3. *Свака индиректна трансформација сличности $\mathcal{P}$ равни E^2 којој је коефицијент сличност $k \neq 1$ поседује јединствену инваријантну тачку и две инваријантне праве које се секу у инваријантној тачки под правим углом.*

Доказ. Као и у случају директних трансформација сличности констатујемо да $\mathcal{P}$ не може имати две или више инваријантних тачака јер би у том случају било $k = 1$, што је искључено условом теореме. Докажимо још да $\mathcal{P}$ поседује инваријантну тачку и две инваријантне праве које се секу у тој тачки под правим углом.



Слика 12.8.

Нека у трансформацији сличности $\mathcal{P}$ двема разним тачкама P и Q одговарају редом тачке P' и Q', при чему је $P \neq P'$ и $Q \neq Q'$ (Слика 12.8). Означимо са $\mathcal{H}_{S,k}$ хомотетија равни E^2 у којој тачки P одговара тачка P', а са $\mathcal{S}_p$ осну рефлексију равни E^2 у којој тачки $\mathcal{H}_{S,k}(Q) = Q''$ одговара тачка Q'. Тада је $P'Q' \cong P'Q''$, одакле следи $P' \in p$. Како свака од индиректних изометријских трансформација $\mathcal{P}$ и $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{H}_{S,k}$ равни E^2 тачке P и Q преводи редом у тачке P' и Q', то је $\mathcal{P} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{H}_{S,k}$.

Ако би трансформација $\mathcal{P}$ поседовала инваријантну тачку O и ако би било $\mathcal{H}_{S,k}(O) = O'$ тада би било $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{H}_{S,k}(O) = O'$, тј. $\mathcal{P}(O) = O$, па би права p била медијатриса дужи OO' а самим тим би тачка O припадала правој s која садржи тачку S и управна је на правој p. Нека је S' тачка праве PP', таква да је $S'P' : S'P = -k$. Из релације $P'S' : S'P = P'O : PO$ следи да је права s' одређена тачкама O и S' симетрала угла $\measuredangle POP'$. Како су углови $\measuredangle POP'$ и $\measuredangle O'P'O$ наизменични са паралелним крацима OP и OP', симетрале s' и p тих углова међу собом су паралелне, па је $s \perp s'$. Према томе, ако постоји инваријантна тачка O трансформације $\mathcal{P}$ она се налази у пресеку правих s и s' одређених релацијама $S \in s \perp p$ и $S' \in s' \parallel p$.

Обратно, ако су s и s' праве одређене релацијама $S \in s \perp p$ и $S' \in s' \parallel p$, тачка $O = s \cap s'$ биће инваријанта трансформације $\mathcal{P}$. Заиста, из релације $s \perp s'$ следи да тачка O припада кругу l коме је дуж SS' пречник, па је $O'P' : PP' = k$. Ако у хомотетији $\mathcal{H}_{S,k}$ тачки O одговара тачка O', биће $O'P' : OP = k$, па је $OP' = O'P'$, и према томе $S_p(O') = O$. Дакле $\mathcal{P}(O) = O$.

Трансформација P поседује две инваријантне праве. То су праве s и s'. Заиста, како је $\mathcal{H}_{S,k}(s) = s$ и $\mathcal{S}_p(s) = s$ то је $\mathcal{P}(s) = s$. Ако је s'' права кроз тачку O' паралелна правој p, биће $\mathcal{H}_{S,k}(s') = s''$ и $\mathcal{S}_p(s'') = s'$ одакле следи $\mathcal{P}(s') = s'$. $\square$

Дефиниција 12.5.3. Јединствену инваријантну тачку O трансформације сличности $\mathcal{P}$ равни E^2, чији је коефицијент $k \neq 1$, називамо *центром или средиштем* трансформације $\mathcal{P}$. Инваријантне праве s и s' називамо осама трансформације $\mathcal{P}$.

Теорема 12.5.4. *Свака индиректна изометријска трансформација сличности $\mathcal{P}$ равни E^2 са коефицијентом $k \neq 1$ може се на два и само два начина представити као комутативна композиција хомотетије и изометрије.*

Доказ. Да би се трансформација сличности $\mathcal{P}$ могла представити као комутативна композиција хомотетије и изометрије потребно је и довољно према раније доказаној теореми да средиште те хомотетије буде инваријантна тачка поменуте изометрије те према томе и трансформације $\mathcal{P}$. С обзиром на то да трансформација $\mathcal{P}$ поседује јединствену инваријантну тачку O, то постоје тачно две хомотетије $\mathcal{H}_{S,k}^{-1}$ и $\mathcal{H}_{S,-k}^{-1}$ равни E^2 такве да композиције $\mathcal{P} \circ \mathcal{H}_{S,k}^{-1}$ и

$\mathcal{P}\circ\mathcal{H}_{S,-k}^{-1}$ представљају изометријске трансформације. Обе поменуте изометрије су индиректне са инваријантном тачком O те представљају осне рефлексије $\mathcal{S}_s$ и $\mathcal{S}_{s'}$ равни E^2 при чему осе s и s' садрже тачку O. Осе s и s' су једине инваријантне праве трансформације $\mathcal{P}$ па су истоветне са осама те трансформације. Према томе следи $\mathcal{P} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{H}_{O,k} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{S}_s$ и $\mathcal{P} = \mathcal{S}_{s'} \circ \mathcal{H}_{O,-k} = \mathcal{H}_{O,-k} \circ \mathcal{S}_{s'}$. □

Дефиниција 12.5.4. Репрезентације из претходне теореме називамо *каноничким репрезентацијама индиректне трансформације сличности* $\mathcal{P}$ равни E^2. Репрезентацију у којој хомотетија има позитиван коефицијент називамо *првом* или *непосредном каноничком репрезентацијом*, док репрезентацију у којој хомотетија има негативан кефицијент називамо *другом* или *посредном каноничком репрезентацијом трансформације сличности* $\mathcal{P}$. Тачка O, права s и број k представљају редом *средиште, осу и коефицијент сличности трансформације* $\mathcal{P}$.

Из изложеног непосредно следи да да је индиректна трансформација сличности $\mathcal{P}$ равни E^2 једнозначно одређена осом s, центром S и коефицијентом k. Из тог разлога такву трансформацију означавамо $\mathcal{P}_{O,s,k}$.

12.6 Сличност ликова у простору $\mathrm{E^n}$

Трансформација сличности простора E^n омогућује да на скупу ликова тог простора дефинишемо релацију сличности ликова.

Дефиниција 12.6.1. У простору E^n лик ϕ је *сличан лику* ϕ' ако постоји трансформација сличности $\mathcal{P}$ простора E^n таква да је $\mathcal{P}(\phi) = \phi'$. Ознака: $\phi \sim \phi'$.

Будући да постоје директне и индиректне трансформације сличности то разликујемо директне и индиректне сличности ликова.

Дефиниција 12.6.2. У простору E^n лик ϕ је *директно сличан* лику ϕ' ако постоји директна трансформација сличности која лик ϕ преводи у лик ϕ'. Ако је $\mathcal{P}$ индиректна трансформација сличности онда су ликови ϕ и ϕ' *индиректно слични.*

Навешћемо најважније особине релације сличности геометријских ликова простора E^n.

Теорема 12.6.1. *Релација сличности ликова је релација еквиваленције.*

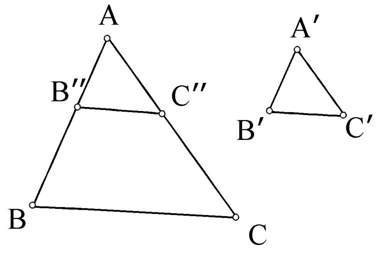
Доказ. (i) Идентичка трансформација је као изометрија и трансформација сличности, одакле следи рефлексивност релације сличности фигура.
(ii) Ако су ϕ и ϕ' два лика простора E^n таква да је $\phi \sim \phi'$ тада постоји трансформација сличности $\mathcal{P}$ таква да је $\mathcal{P}(\phi) = \phi'$. Како је инверзна трансформација $\mathcal{P}^{-1}$ трансформација сличности простора E^n, то из $\mathcal{P}^{-1}(\phi') = \phi$ следи да је $\phi' \sim \phi$, чиме је симетричност релације $\sim$ доказана.
(iii) Ако су ϕ, ϕ' и ϕ'' три лика простора E^n таква да је $\phi \sim \phi'$ и $\phi' \sim \phi''$, онда по дефиницији постоје трансформације сличности $\mathcal{P}'$ и $\mathcal{P}''$ такве да је $\mathcal{P}'(\phi) = \phi'$ и $\mathcal{P}''(\phi') = \phi''$. Како композиција $\mathcal{P} = \mathcal{P}'' \circ \mathcal{P}'$ представља такође трансформацију сличности простора E^n и како је $\mathcal{P}(\phi) = \mathcal{P}'' \circ \mathcal{P}'(\phi) = \phi''$ следи $\phi \sim \phi''$, па је релација $\sim$ и транзитивна. $\square$

С обзиром на то да је релација сличности геометријских ликова релација еквиваленције, то она омогућава разбијање скупа свих геометријских ликова простора E^n на класе еквиваленције међу собом сличних ликова. Таквих класа има бесконачно много, нпр. класе сличних троуглова, класе сличних четвороуглова, итд.

Дефиниција 12.6.3. Нека је Σ скуп свих ликова простора E^n. Елемент ϕ фактор скупа $\Sigma/_\sim$ релације сличности зовемо *формом* или *обликом*. За два лика ϕ_1 и ϕ_2 кажемо да имају исти облик или исту форму тј. да су еквиформни ако припадају истој класи скупа $\Sigma/_\sim$.

Услови из којих се утврђује да два лика имају исту форму или исти облик, тј. да су слична, нису увек дати на идеалан начин трансформацијом сличности $\mathcal{P}$ која један лик преводи на други. Ти услови се и код најједноставнијих геометријских ликова као што су троуглови могу изразити на више начина. То је и разлог увођења ставова о сличности троуглова којих има четири.

Теорема 12.6.2. (Први став о сличности троуглова) *Два троугла простора E^n $(n = 2, 3)$ су слична ако су две странице једног троугла пропорционалне одговарајућим страницама другог троугла, а углови захваћени тим страницама подударни.*



Слика 12.9.

Доказ. Нека су у простору E^n дата два троугла ΔABC и $\Delta A'B'C'$ (Слика 12.9.) таква да је $A'B' : AB = A'C' : AC = k$ и $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$ Ако у хомотетији $\mathcal{H}_{A,k}$ тачкама B и C одговарају тачке B'' и C'', биће $\Delta AB''C'' \cong \Delta A'B'C'$. Значи постоји изометрија $\mathcal{I}$ простора E^n која тачке A, B'', C'' преводи редом у тачке A', B' и C'. Тада, у трансформацији сличности $\mathcal{P} = \mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{A,k}$ тачкама A, B, C одговарају редом тачке A', B' и C', одакле следи $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. □

Теорема 12.6.3. (Други став о сличности троуглова) *Два троугла простора E^n $(n = 2, 3)$ су слична ако су два угла једног троугла подударна одговарајућим угловима другог троугла.*

Доказ. Нека су ΔABC и $\Delta A'B'C'$ троуглови простора E^n, $(n = 2, 3)$ такви да је $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$ и $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$. Ако у хомотетији $\mathcal{H}_{A,k}$ простора E^n, где је $A'B' : AB = k$, тачкама B и C одговарају тачке B'' и C'' онда ће бити $\Delta AB''C'' \cong \Delta A'B'C'$, што значи да постоји изометрија $\mathcal{I}$ простора E^n која тачке A, B'', C'' преводи у тачке A', B' и C'. Тада, у трансформацији сличности $\mathcal{P} = \mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{A,k}$ тачкама A, B, C одговарају редом тачке A', B' и C', одакле следи $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. □

Теорема 12.6.4. (Трећи став о сличности троуглова) *Два троугла простора E^n $(n = 2, 3)$ су слична ако су све странице једног троугла пропорционалне одговарајућим страницама другог троугла.*

Доказ. Нека су у простору E^n дата два троугла ΔABC и $\Delta A'B'C'$ таква да је $A'B' : AB = A'C' : AC = BC : B'C' = k$. Ако у хомотетији $\mathcal{H}_{A,k}$ простора E^n тачкама B и C одговарају тачке B'' и C'' онда је $\Delta AB''C'' \cong \Delta A'B'C'$, па постоји изометрија $\mathcal{I}$ простора E^n која тачке A, B'', C'' преводи редом у тачке A', B' и C'. Према томе у трансформацији сличности $\mathcal{P} = \mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{A,k}$ тачкама A, B, C одговарају редом тачке A', B' и C', одакле следи $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. □

Теорема 12.6.5. (Четврти став о сличности троуглова) *Два троугла простора E^n ($n = 2, 3$) су слична ако су две странице једног троугла пропорционалне одговарајућим страницама другог троугла, углови наспрам двеју од тих одговарајућих страница подударни, а углови наспрам других двеју одговарајућих страница оба оштра, оба права или оба тупа.*

Доказ. Нека су у простору E^n дата два троугла ΔABC и $\Delta A'B'C'$ таква да је $A'B' : AB = A'C' : AC = k$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$, а углови $\measuredangle C$ и $\measuredangle C'$ оба оштра, оба права или оба тупа. Ако у хомотетији $\mathcal{H}_{A,k}$ простора E^n тачкама B и C одговарају тачке B'' и C'' онда је $\Delta AB''C'' \cong \Delta A'B'C'$, па постоји изометрија $\mathcal{I}$ простора E^n која тачке A, B'', C'' преводи редом у тачке A', B' и C'. Према томе у трансформацији сличности $\mathcal{P} = \mathcal{I} \circ \mathcal{H}_{A,k}$ тачкама A, B, C одговарају редом тачке A', B' и C', одакле следи $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. □

12.7 Анхармонијске и хармонијске четворке тачака, правих и равни

При решавању разноврсних геометријских задатака честу примену имају хармонијски спрегнути елементи: тачке, праве и равни. Поред примене у Еуклидској геометрији хармонијски спрегнути елементи имају велики значај и примену у пројективној геометрији.

Дефиниција 12.7.1. *Дворазмером* или двојним односом $\mathcal{R}(A, B; C, D)$ простора E^n називамо број λ такав да је

$$\mathcal{R}(A, B; C, D) = \frac{\mathcal{R}(A, B; C)}{\mathcal{R}(A, B; D)} = \lambda,$$

односно

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}},$$

где $\mathcal{R}(A, B; C)$ означава просту размеру $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$. Специјално ако је $\lambda = -1$ дотичну дворазмеру називамо *хармонијском* а ако је $\lambda \neq -1$ *анхармонијском.* У случају $\lambda = -1$ уместо $\mathcal{R}(A, B; C, D)$ пишемо $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

Извешћемо најважнија својства уведене релације хармонијски спрегнутих тачака на правој.

Теорема 12.7.1. *Ако су A, B, C, D четири хармонијске тачке, тј. ако је $\mathcal{H}(A,B;C,D)$, тада важе и релације $\mathcal{H}(A,B;D,C)$ и $\mathcal{H}(C,D;A,B)$.*

Доказ. Користећи дефиницију хармонијски спрегнутих тачака на правој добијамо

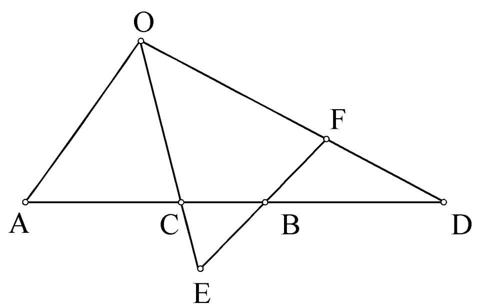
$$\begin{aligned}\mathcal{H}(A,B;C,D) &\Rightarrow \overrightarrow{AC}:\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD}:\overrightarrow{BD}\\ &\Rightarrow \overrightarrow{AD}:\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{BC}\\ &\Rightarrow \mathcal{H}(A,B;D,C);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(A,B;C,D) &\Rightarrow \overrightarrow{AC}:\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD}:\overrightarrow{BD}\\ &\Rightarrow \overrightarrow{CA}:\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{CB}:\overrightarrow{DB}\\ &\Rightarrow \mathcal{H}(C,D:A,B);\end{aligned}$$

□

Теорема 12.7.2. *Ако су A, B, C, D четири разне тачке неке праве, O тачка ван те праве, а E и F тачке у којима права кроз тачку B паралелна правој OA сече праве OC и OD, тада је*

$$\mathcal{H}(A,B;C,D) \Longleftrightarrow \mathcal{S}_B(E) = F.$$



Слика 12.10.

Доказ. Ако је $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ (Слика 12.10.) тада је $\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD}:\overrightarrow{BD} = k$. Одавде налазимо да је $\mathcal{H}^{-1}_{D,-k}\circ\mathcal{H}_{C,k} = \mathcal{S}_B$, при чему је $\mathcal{S}_B(E) = F$. Обратно, ако је $\mathcal{S}_B(E) = F$ и $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{BC} = k$, тада у композицији $\mathcal{H}_{C,k} \circ \mathcal{S}_B$ тачкама B и F одговарају тачке A и O, па је $\mathcal{H}_{C,k} \circ \mathcal{S}_B = \mathcal{H}_{D,-k}$. Одавде следи да је $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{BD} = k$, тј. $\mathcal{H}(A, B; C, D)$. □

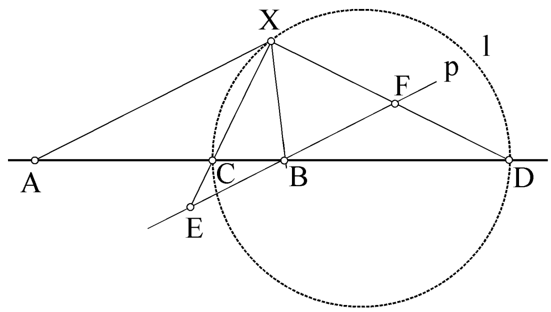
Теорема 12.7.3. (О Аполонијевом[1] кругу) *Нека су A и B две дате тачке неке равни, а m и n ($m \neq n$) две дате дужи. Тада скуп свих тачака X таквих да је $AX : XB = m : n$ представља круг над пречником CD, при чему су C и D тачке праве AB такве да је $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{DB} = m : n$.*

Доказ. Означимо са l круг над пречником CD, са X произвоилну тачку посматране равни, са p праву која садржи тачку B и паралелна је правој AX а са E и F пресечне тачке праве p редом са правама CX и DX. Како је $\mathcal{H}(A, B; C, D)$, то на основу Теореме 12.7.2. следи да је тачка B средиште дужи EF.

Нека је $AX : XB = m : n$. Тада је

$$AX : XB = AX : BE = AC : CB = AX : BF = m : n,$$

одакле следи $BE \cong BF \cong XB$. Према томе, троугао ΔEXF је правоугли, тј. угао $\measuredangle CXD \equiv \measuredangle EXF$ је прав (Слика 12.11.). Дакле, тачка X припада кругу l над пречником CD.



Слика 12.11.

Обратно, нека тачка X припада кругу l над пречником CD. Тада је угао $\measuredangle CXD$ прав, као угао над пречником CD, одакле следи да

[1] Аполоније из Перге (III-II век пре нове ере)

је и угао $\measuredangle EXF$ прав, па је $BX \cong BE \cong BF$. На основу Талесове теореме следи:

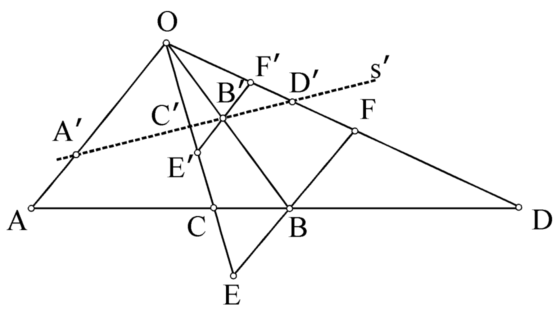
$$AX : XB = AX : BE = AC : CB = m : n,$$

чиме је теорема доказана. □

Дефиниција 12.7.2. Круг l из теореме 12.7.3. назива се *Аполонијев круг.*

Дефиниција 12.7.3. За четири праве a, b, c, d неког прамена правих кажемо да су *хармонијски спрегнуте* ако постоји права p која их сече редом у хармонијским тачкама A, B, C и D. Ознака је $\mathcal{H}(a, b; c, d)$. Аналогно, за четири равни α, β, γ и δ једног снопа равни каже се да су *хармонијски спрегнуте* и симболички означава $\mathcal{H}(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ ако постоји права која их продире у хармонијски спрегнутим тачкама.

Теорема 12.7.4. (Папос[2]) *Ако нека права s сече четири хармонијске праве a, b, c и d равни E^2 у разним тачкама A, B, C и D тада је $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.*



Слика 12.12.

Доказ. Праве a, b, c и d су хармонијски спрегнуте па стога припадају истом прамену правих $\aleph$ и постоји права s' која их сече редом

[2]Папос (III век нове ере) грчки математичар из Александрије, писац Математичког зборника у 8 књига (сачувано 6), у којима су сачувана достигнућа старих грчких математичара и астронома, као и радови самог Папоса (Папосове геометријске теореме, и др.)

у хармонијски спрегнутим тачкама A', B', C' и D'. Нека је $\aleph$ прамен конкурентних правих са средиштем у тачки O. Означимо са E и F тачке у којима права кроз тачку B паралелна правој a сече праве c и d, а са E' и F' (Слика 12.12.) тачке у којима права кроз тачку B' паралелна правој a сече праве c и d. Нека је $k = \overrightarrow{OB'} : \overrightarrow{OB}$. Тада у хомотетији $\mathcal{H}_{O,k}$ тачкама B, E и F одговарају тачке B', E' и F'. Према доказаној теореми тачка B' је средиште дужи $E'F'$ па је и B средиште дужи EF. Према истој теореми је $\mathcal{H}(A, B; C, D)$. Случај када је $\aleph$ прамен паралелних правих лако се показује. $\square$

Аналогно се доказује и следећа теорема

Теорема 12.7.5. (Талесова теорема) *Свака права продире хармонијске равни у хармонијски спергнутим тачкама при чему она не сече осу поменутог снопа равни.*

Део 13

Геометрија круга и сфере

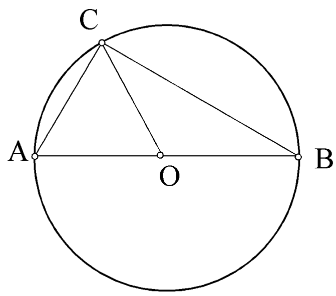
13.1 Централни и периферијски углови круга

Круг и сфера имају значајну улогу у геометрији од самог њеног настанка, па је то један од разлога што ћемо ово поглавље посветити управо њима.

Напоменимо да се у литератури често уместо термина круг користи термин кружница или кружна линија, док се термин круг користи за кружну површ.

Сада ћемо увести неколико веома важних појмова који се тичу круга.

Тетива круга је дуж која спаја две његове тачке. Најдужа тетива неког круга је *пречник* или *дијаметар* тог круга.



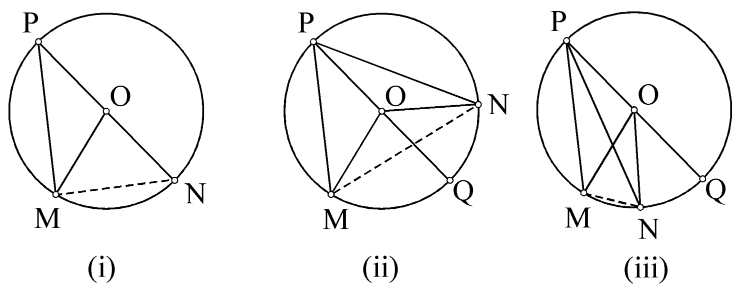
Слика 13.1.

Нека су A и B две тачке неког круга. Део круга AB као и његов комплемент зваћемо луковима тог круга. Угао $\measuredangle AOB$ је централни угао посматраног круга. Ако је M прозвољна тачка круга различита од тачака A и B, угао $\measuredangle AMB$ је периферијски над луком AB. Рећи ћемо да је лук захваћен периферијским углом ако се налази унутар тог угла.

Теорема 13.1.1. *Ако је AB пречник круга $k(O,r)$ и C произвољнатачка круга тада је угао $\measuredangle ACB$ прав.*

Доказ. Троуглови (Слика 13.1.) ΔAOC и ΔBOC су једнакокраки. Дакле важи $\measuredangle OCA = \measuredangle A$ и $\measuredangle OCB = \measuredangle B$, одакле је $\measuredangle ACB = \measuredangle OCA + \measuredangle OCB = \measuredangle A + \measuredangle B = R$, где смо са R означили прав угао. □

Теорема 13.1.2. *Централни угао круга $k(O,r)$ над луком MN је два пута већи од одговарајућег периферијског угла $\measuredangle MPN$ тог круга.*

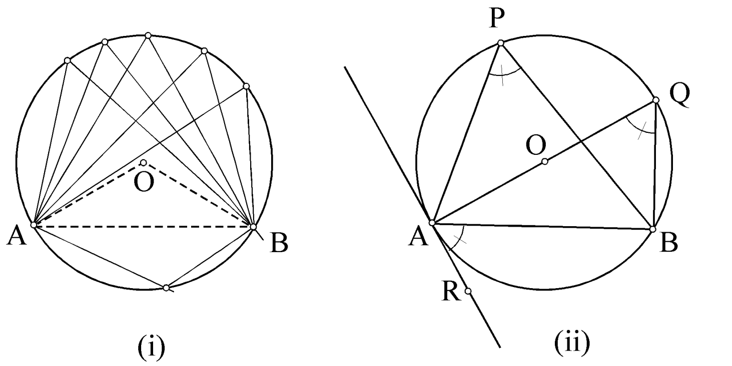


Слика 13.2.

Доказ. Означимо са P произвољну тачку лука MN. Треба показати да је $\measuredangle MON = 2\measuredangle MPN$. Могу наступити три случаја.
(i) Центар O круга k припада једном од кракова угла $\measuredangle MPN$. Не умањујући општост, претпоставимо (Слика 13.2 (i)) да је $O \in PN$. У том случају троугао ΔOPM је једнакокраки, па је $\measuredangle OPM = \measuredangle OMP$. Како је угао $\measuredangle MON$ спољашњи несуседни за углове $\measuredangle P$ и $\measuredangle M$ троугла ΔOPM, то важи $\measuredangle MON = \measuredangle P + \measuredangle M$, тј. $\measuredangle MON = 2\measuredangle MPN$.
(ii) Центар O припада унутрашњости угла MPN. Означимо са Q (Слика 13.2 (ii)) другу заједничку тачку праве PO и круга k. Према доказаном делу (i) следи $\measuredangle MOQ = 2\measuredangle MPQ$ и $\measuredangle NOQ = 2\measuredangle NPQ$. Сада је $\measuredangle MON = \measuredangle MOQ + \measuredangle NOQ = 2\measuredangle MPQ + 2\measuredangle NPQ = 2\measuredangle MPN$.

(iii) Тачка O припада спољашњости угла $\measuredangle MON$. Означимо са Q (Слика 13.2 (iii)) пресечну тачку праве PO и круга k. Према доказаном делу (i) следи $\measuredangle MOQ = 2\measuredangle MPQ$ и $\measuredangle NOQ = 2\measuredangle NPQ$. Сада је $\measuredangle MON = \measuredangle MOQ - \measuredangle NOQ = 2\measuredangle MPQ - 2\measuredangle NPQ = 2\measuredangle MPN$. □

Последица 13.1.1. (i) *Периферијски углови круга над истом тетивом* (*Слика* 13.3 (i))*, чија су сва темена са исте стране праве одређене том тетивом су подударни међусобно.*
(ii) *Периферијски углови круга над истом тетивом, чија су темена са разних страна праве одређене том тетивом* (*Слика* 13.3 (i))*, су суплементни.*



Слика 13.3.

Теорема 13.1.3. *Угао одређен тангентом и тетивом у једној од крајњих тачака тетиве, подударан је одговарајућем периферијском углу тог троугла.*

Доказ. Нека је у равни дат круг $k(O, r)$ и тачке A, B и P на кругу k. Нека је AR тангента у тачки A на круг k, при чеми су тачке P и R са разних страна праве AB (Слика 13.3 (ii)). Означимо са Q другу заједничку тачку праве AO са кругом k. Углови $\measuredangle RAB$ и $\measuredangle AQB$ су подударни као углови са нормалним крацима. На основу последице 13.1.1. углови $\measuredangle APB$ и $\measuredangle AQB$ су такође подударни, одакле следи тврђење теореме. □

Дефиниција 13.1.1. *Углом* који захватају два круга који се секу у равни зваћемо угао између њихових тангената у пресечној тачки.

Аналогно углом који захватају права и круг који се секу, зваћемо угао између праве и тангенте на круг у једној од пресечних тачака.

Дефиниција 13.1.2. Права и круг, односно два круга, су *ортогонални* (управни, нормални) ако захватају прав угао.

Није тешко уочити да ће права бити управна на круг ако и само ако садржи његов центар. Такође два круга су ортогонална ако и само ако тангента једног садржи средиште другог.

13.2 Тангентни четвороугао

Дефиниција 13.2.1. Четвороугао чије су све ивице тангенте неког круга назива се *тангентни* четвороугао.

У вези са тангентним четвороугловима постоји критеријум за утврђивање да ли је четвороугао тангентни или не. Пре формулације поменутог критеријума, доказаћемо став о подударности *тангентних дужи.*

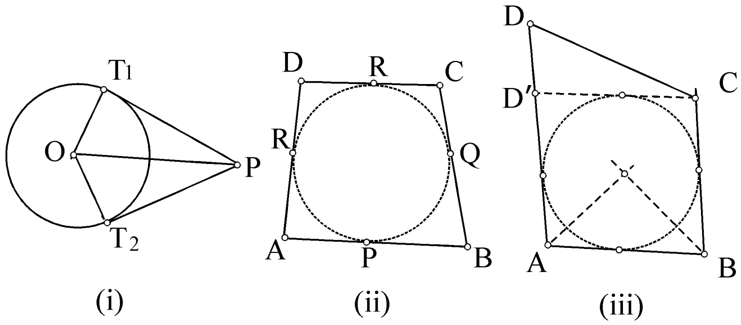
Дефиниција 13.2.2. Одсечак тангенте на круг од дате тачке из које је она конструисана, до додирне тачке тангенте и круга називамо *тангентном дужи.*

Теорема 13.2.1. *Тангентне дужи конструисане из исте тачке на дати круг су међусобно подударне.*

Доказ. Нека су PT_1 и PT_2 тангентне дужи из тачке P (Слика 13.4 (i)) на круг $k(O,r)$. Из подударности правоуглих троуглова ΔOPT_1 и ΔOPT_2 следи подударност тангентних дужи PT_1 и PT_2. $\square$

Теорема 13.2.2. (Основна теорема о тангентном четвороуглу) *Четвороугао је тангентни ако и само ако су му збирови наспрамних страница једнаки.*

Доказ. Нека је $ABCD$ тангентни четвороугао и нека су P, Q, R и S додирне тачке редом ивица AB, BC, CD и DA са кругом k (Слика 13.4 (ii)) уписаним у тај четвороугао. На основу теореме о једнакости тангентних дужи важи $AS \cong AP$, $BP \cong BQ$, $CQ \cong CR$ и $DR \cong DS$. Дакле, $AB + CD = AP + BP + CR + DR = AS + BQ + CQ + DS = AD + BC$.



Слика 13.4.

Обратно, нека су код четвороугла $ABCD$ збирови наспрамних страница једнаки, тј. нека је $AB + CD = AD + BC$. Означимо са k (Слика 13.4 (iii)) круг који додирује редом странице AB, BC и AD четвороугла $ABCD$. Такав круг постоји и његов центар је пресечна тачка симетрала углова $\measuredangle A$ и $\measuredangle B$ четвороугла $ABCD$. Означимо са D' пресечну тачку тангенте из темена C на круг k са правом AD. За тачке A, D и D' може важити тачно једна од три могућности: (i) $\mathcal{B}(A, D', D)$, $\mathcal{B}(A, D, D')$ или $D \equiv D'$.

(i) Нека је најпре $\mathcal{B}(A, D', D)$. Тада је према претпоставци $AB + CD = AD + BC$, и како је још четвороугао $ABCD'$ тангентни, то је $AB + CD' = AD' + BC$. Из претходне две релације следи $CD' - CD = D'A - DA$, тј. $CD' = CD + D'A - DA$, а одавде $CD = CD' + DD'$, што је немогуће јер су CD, CD' и DD' странице троугла $\Delta CDD'$. Дакле, не важи $\mathcal{B}(A, D', D)$.

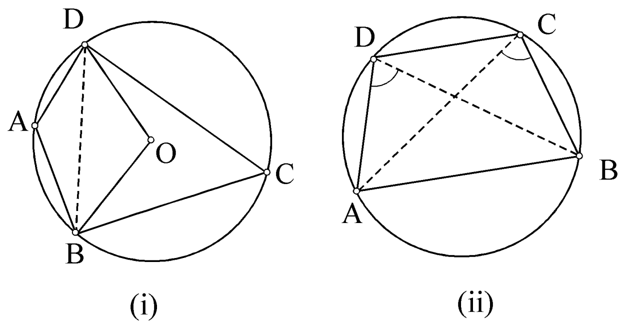
(ii) Аналогно се долази до контрадикције и у другом случају, тј. не важи $\mathcal{B}(A, D, D')$.

(iii) Према томе, мора бити $D \equiv D'$, тј. четвороугао $ABCD$ је тангентни. $\square$

13.3 Тетивни четвороугао

Дефиниција 13.3.1. Четвороугао чије су све ивице тетиве неког круга назива се *тетивни* четвороугао.

Теорема 13.3.1. *Конвексни четвороугао је тетивни ако и само ако су му наспрамни углови суплементни.*



Слика 13.5.

Доказ. Нека је четвороугао $ABCD$ тетивни (Слика 13.5 (i)). Како је четвороугао $ABCD$ конвексан, темена A и C су са разних страна дијагонале BD, одакле следи на основу последице 13.1.1. да су углови $\measuredangle BAD$ и $\measuredangle BCD$ суплементни.

Обратно, нека су наспрамни углови четвороугла $ABCD$ суплементни и нека је круг k описан око троугла ΔABD. Тада се из четвртог темена C тетива BD види под углом који је суплементан углу код темена A, што значи на основу последице 13.1.1. да и тачка C припада кругу k. □

Понекад је у пракси лакше искористити следећу теорему за утврђивање да ли је четвороугао тетиван (Слика 13.5 (ii)):

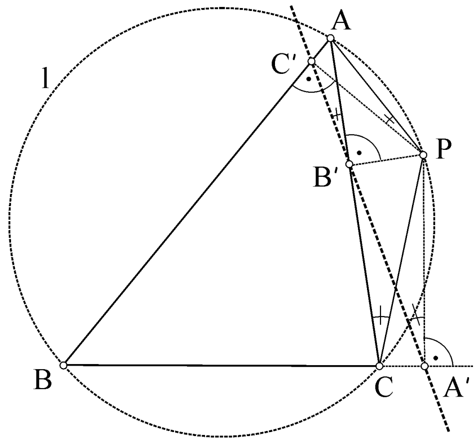
Теорема 13.3.2. *Ако је четвороугао $ABCD$ конвексан и ако је $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$ тада је тај четвороугао тетиван.*

13.4 Карактеристичне теореме о кругу и троуглу

Теорема 13.4.1. (Симпсонова теорема) *Подножја нормала кроз било коју тачку круга описаног око неког троугла на правама које су одређене страницама тог троугла припадају једној правој. Доказати.*

Доказ. Нека је P произвољна тачка круга l. Ако се P поклапа са неким од темена троугла доказ је тривијалан.

Претпоставимо да се тачка P не поклапа ни са једним од темена A, B, C троугла ΔABC. Тада тачка P припада неком од лукова



Слика 13.6.

$\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ или $\overset{\frown}{CA}$ круга l. Нека тачка P припада луку $\overset{\frown}{AC}$ коме не припада тачка B (Слика 13.6). Конструишимо нормале из тачке P редом на праве одређене страницама BC, CA и AB и означимо са A', B' и C' њихова подножја.

Тачке P, A, B и C припадају кругу l па је четороугао $PABC$ тетиван, одакле следи да је $\measuredangle B + \measuredangle APC = 2R$.

Четвороугао $PC'BA'$ је такође тетиван јер је $\measuredangle PC'B = \measuredangle BA'P = R$ па тачке A' и C' припадају кругу чији је пречник BP. Одавде следи $\measuredangle B + \measuredangle A'PC' = 2R$. Дакле

$$\measuredangle APC = \measuredangle A'PC', \tag{13.1}$$

као допуне истог угла $\measuredangle B$ до $2R$. Одавде следи

$$\measuredangle C'PA = \measuredangle CPA' \tag{13.2}$$

као допуне угла $\measuredangle CPC'$ до једнаких углова из (13.1).

Четвороугао $PB'AC'$ је тетиван јер се дуж AP види из тачака B' и C' под правим углом. Значи тачке B' и C' припадају кругу над пречником AP. Сада је

$$\measuredangle C'PA = \measuredangle C'B'A \tag{13.3}$$

као периферијски углови над истим луком $\overset{\frown}{C'A}$.

Четвороугао $PB'CA'$ је такође тетиван јер се дуж PC види под правим углом из тачака A' и B'. Сада је

$$\measuredangle C'PA' = \measuredangle CB'A' \tag{13.4}$$

као периферијски углови над истим луком $\overset{\frown}{CA'}$.

Из једнакости (13.2), (13.3), (13.4) следи

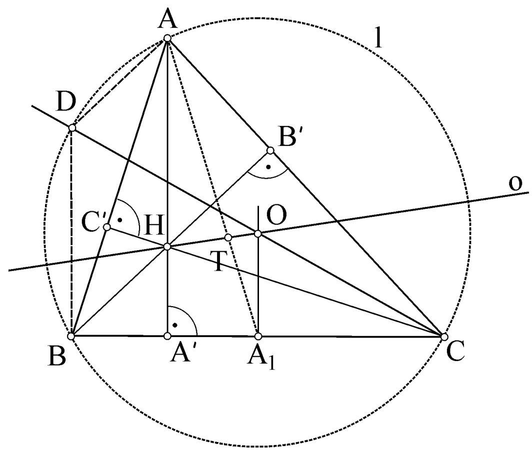
$$\measuredangle C'B'A = \measuredangle CB'A'.$$

Како су због положаја тачке P ова два угла једнака и истосмерна, краци $B'A$ и $B'C$ припадају истој правој AC, то ће и краци $B'C'$ и $B'A'$ припадати истој правој, а то значи да ће тачке A', B' и C' бити колинеарне. □

Теорема 13.4.2. (Ојлерова теорема) *Ако је H ортоцентар, T тежиште, O центар круга l описаног око троугла ΔABC и A_1 средина странице BC доказати да је:*

а) *дуж OA_1 паралелна дужи AH и $OA_1 = \frac{1}{2}AH$,*

б) *тачке O, T и H припадају једној правој при чему је $HT = 2 \cdot TO$.*



Слика 13.7.

Доказ. а) Означимо са D још једну заједничку тачку праве OC и круга l. Угао $\measuredangle CBD$ је прав, као угао над пречником CD. Сада је $DB \perp BC$ и $AH \perp BC$, одакле следи

$$BD \parallel AH. \tag{13.5}$$

Тачке O и A_1 су средишта редом дужи CD и BC, одакле следи да је дуж OA_1 средња линија троугла ΔDBC па важи

$$OA_1 \parallel BD \quad \text{и} \quad OA_1 = \frac{1}{2}BD. \tag{13.6}$$

Из (13.5) и (13.6) следи $OA_1 \parallel AH$.

На исти начин је $DA \perp AC$ и $BH \perp AC$ одкле је $DA \parallel BH$. Сада, за четвороугао $BDAH$ важи $DA \parallel BH$ и $AH \parallel BD$ па је он паралелограм па су му наспрамне странице једнаке, тј. $AH = BD$. Следи

$$OA_1 = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AH.$$

б) Тачка T је тежиште троугла ΔABC па је $AT = 2 \cdot TA_1$.

Из $AH \parallel OA_1$ и $AT \equiv TA_1$ следи

$$\measuredangle HAT = \measuredangle OA_1T,$$

као углови са паралелним крацима. Сада из $AH = 2 \cdot OA_1$ и $AT = 2 \cdot TA_1$ на основу *Талесове теореме* следи $HT = 2 \cdot TO$ и $HT \parallel TO$.

Праве HT и TO су паралелне и имају заједничку тачку T одакле следи $HT \equiv TO$, тј тачке O, T и H су колинеарне. □

Дефиниција 13.4.1. Права одређена тачкама O, T и H назива се *Ојлерова права.*

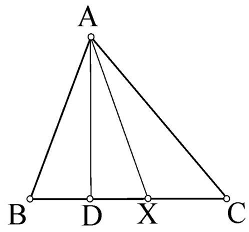
Теорема 13.4.3. (Аполонијева теорема) *Ако је X тачка странице BC троугла ΔABC таква да су дужи BX и XC сразмерне двема датим дужима m и n, тј. $BX : XC = m : n$, тада је*

$$(m+n)AX^2 = n(AB^2 - BX^2) + m(AC^2 - CX^2).$$

Доказ. Означимо са D подножје нормале из тачке A на праву BC. Тада могу наступити следећи случајеви: (i) $D \equiv X$, (ii) $D \neq X$.

(i) Ако је $D \equiv X$ онда су троуглови ΔABX и ΔACX правоугли, па применом Питагорине теореме добијамо

$$AX^2 = AB^2 - BX^2 \quad \text{и} \quad AX^2 = AC^2 - CX^2.$$



Слика 13.8.

Множењем прве једнкости са n а друге са m и сабирањем добијамо тражену формулу.

(ii) Нека је сада $D \neq X$ и претпоставимо да важи $\mathcal{B}(B, D, X, C)$ (Слика 13.8). Сада, применом Питагорине теореме на правоугле троуглове ΔABD и ΔAXD имамо:

$AB^2 - BD^2 = AX^2 - DX^2$, тј. $AB^2 - (BX - DX)^2 = AX^2 - DX^2$ одакле је $AB^2 - BX^2 + 2BX \cdot DX - DX^2 = AX^2 - DX^2$, тј.

$$AX^2 = AB^2 - BX^2 + 2BX \cdot DX. \tag{13.7}$$

На исти начин применом Питагорине теореме на троуглове ΔACD и ΔAXD добијамо

$$AX^2 = AC^2 - CX^2 - 2CX \cdot DX. \tag{13.8}$$

Множењем једнакости (13.7) са n а (13.8) са m и сабирањем добијамо

$$(m+n)AX^2 = n(AB^2 - BX^2) + m(AC^2 - CX^2) + 2nBX \cdot DX - 2mCX \cdot DX,$$

и како је још $BX : XC = m : n$, тј. $n\,BX = 2m\,CX$ на крају добијамо

$$(m+n)AX^2 = n(AB^2 - BX^2) + m(AC^2 - CX^2),$$

а то је и требало доказати. □

Напомена: Израз из Аполонијеве теореме се може трансформисати у облик погоднији за памћење и примену, тј.

$$n\,AB^2 + m\,AC^2 = (m+n)\,AX^2 + n\,BX^2 + m\,CX^2.$$

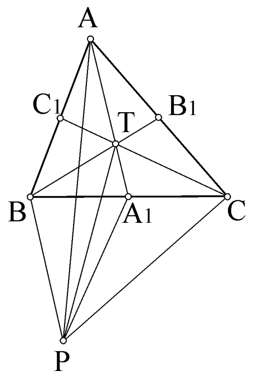
Теорема 13.4.4. (Стјуартова теорема) *Ако је X тачка странице BC троугла ΔABC тада је*

$$BC \cdot AX^2 = XC \cdot AB^2 + BX \cdot AC^2 - BX \cdot XC \cdot BC.$$

Доказ. Директна последица Аполонијеве теореме. $\square$

Теорема 13.4.5. (Лајбницова теорема) *Ако је T тежиште троугла ΔABC и P произвољна тачка доказати да је*

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = TA^2 + TB^2 + TC^2 + 3 \cdot PT^2.$$



Слика 13.9.

Доказ. У троуглу ΔABC тежиште дели тежишну дуж AA_1 у односу $AT : TA_1 = 2 : 1$. Применом Аполонијеве теореме редом на троуглове ΔPAA_1, ΔPBC и ΔTBC добијамо (Слика 13.9.)

$$PA^2 + 2 \cdot PA_1^2 = 3 \cdot PT^2 + 1 \cdot AT^2 + 2 \cdot TA_1^2, \tag{13.9}$$

$$PB^2 + PC^2 = 2 \cdot PA_1^2 + 1 \cdot BA_1^2 + 1 \cdot CA_1^2, \tag{13.10}$$

$$TB^2 + TC^2 = 2 \cdot TA_1^2 + 1 \cdot BA_1^2 + 1 \cdot CA_1^2. \tag{13.11}$$

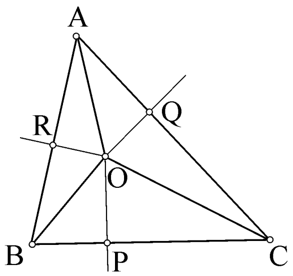
Сабирањем једнакости (13.9) и (13.10) уз коришћење услова (13.11) добијамо

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = TA^2 + TB^2 + TC^2 + 3 \cdot PT^2.$$

$\square$

Теорема 13.4.6. (Карноова теорема) *Ако је ΔABC произвољан троугао а P, Q и R тачке правих BC, CA и AB, доказати да је потребан и довољан услов да се нормале у тачкама P, Q и R на праве BC, CA и AB редом секу у једној тачки изражен релацијом*

$$BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR^2 - RB^2 = 0. \tag{13.12}$$



Слика 13.10.

Доказ. Нека се нормале у тачкама P, Q и R на странице BC, CA и AB троугла ΔABC секу у тачки O (Слика 13.10). Применом Питагорине теореме добијамо

$$OB^2 - BP^2 = OC^2 - PC^2 \Longrightarrow BP^2 - PC^2 = OB^2 - OC^2,$$

$$OC^2 - CQ^2 = OA^2 - QA^2 \Longrightarrow CQ^2 - QA^2 = OC^2 - OA^2,$$

$$OA^2 - AR^2 = OB^2 - RB^2 \Longrightarrow AR^2 - RB^2 = OA^2 - OB^2.$$

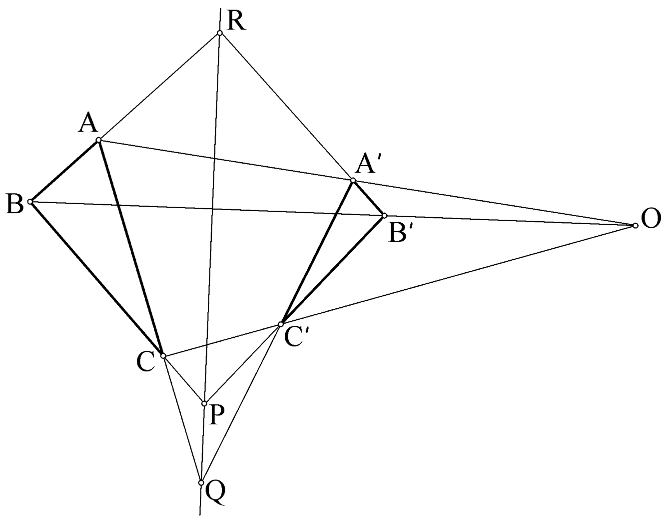
Сабирањем последњих трију једнакости добијамо једнакост (13.12).

Обратно, претпоставимо да важи једнакост (1) и докажимо да се нормале у тачкама P, Q и R на странице BC, CA и AB секу у тачки O. Нека је O пресечна тачка нормала у тачкама P и Q редом на странице BC и AC. Означимо са R' подножје нормале из тачке O на праву AB. Сада се тачка O налази у пресеку нормала P, Q и R' из тачке O на странице BC, CA и AB, одакле према доказаном делу задатка имамо

$$BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR'^2 - R'B^2 = 0. \tag{13.13}$$

Из (13.12) и (13.13) следи $\overline{AR}^2 - \overline{RB}^2 = \overline{AR'}^2 - \overline{R'B}^2$ а одавде $\overline{AR} - \overline{RB} = \overline{AR'} - \overline{R'B}$, тј. $\overline{RR'} = \overline{R'R}$, а то је могуће само ако је $R \equiv R'$. $\square$

Теорема 13.4.7. (Дезаргова теорема) *Два троугла ΔABC и $\Delta A'B'C'$ припадају истој равни. Нека су P, Q, R пресечне тачке редом правих BC и $B'C'$, CA и $C'A'$, AB и $A'B'$. Доказати да се праве AA', BB' и CC' секу у једној тачки ако и само ако тачке P, Q и R припадају једној правој.*



Слика 13.11.

Доказ. Нека се праве AA', BB' и CC' секу у тачки O (Слика 13.11.). Применем Менелајеве теореме на троугао:

ΔOBC и праву $B'C'$ добијамо $$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{C'O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{B'B}} = -1, \quad (13.14)$$

ΔOAC и праву $A'C'$ добијамо $$\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{C'C}} = -1, \quad (13.15)$$

ΔOAB и праву $A'B'$ добијамо $$\frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{B'O}} \cdot \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{A'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1. \quad (13.16)$$

Множењем одговарајућих страна једнакости (13.14), (13.15) и (13.16) добијамо

$$(-1)^6 \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1, \quad \text{тј.} \quad \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1,$$

а то значи да су тачке P, Q и R колинеарне.

Обратно, нека су тачке P, Q и R колинеарне. Означимо са O пресечну тачку правих BB' и CC' и докажимо да тачка O припада и правој AA'.

Уочимо троуглове $\Delta RBB'$ и $\Delta QCC'$. Праве RQ, BC и $B'C'$ секу се у једној тачки P, па су посматрани троуглови перспективни из тачке P, одакле према доказаном делу Дезаргове теореме закључујемо да су тачке $A = RB \times QC$, $O = BB' \times CC'$ и $A' = RB' \times QC'$ колинеарне, тј. тачка O припада правој AA'. □

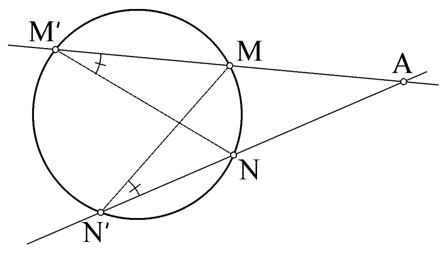
Лема 13.4.1. *Тачке M, M', N и N' припадају истом кругу ако и само ако важи релација*

$$AM \cdot AM' = AN \cdot AN', \tag{13.17}$$

где је A пресечна тачка правих MM' и NN'.

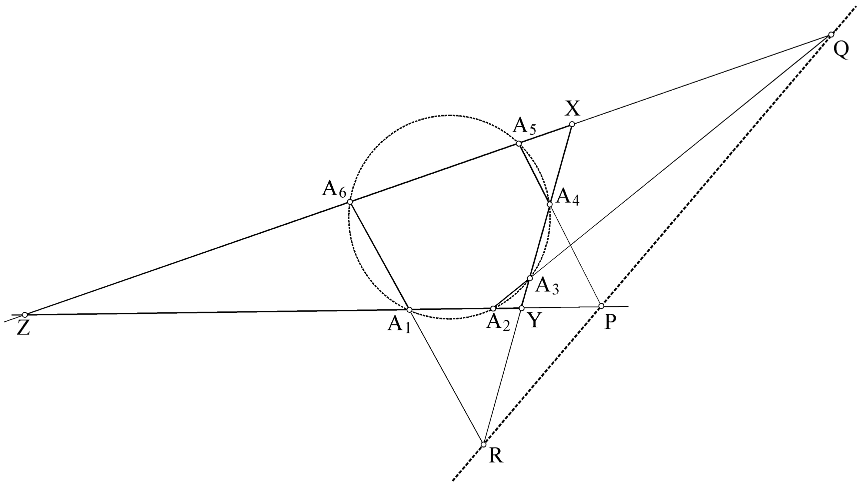
Доказ. Нека тачке M, N, M' и N' припадају истом кругу (Слика 13.12). Тада су троуглови $\Delta AM'N$ и $\Delta AN'N$ слични па је $AN' : AM' = AM : AN$, тј. $AM \cdot AM' = AN \cdot AN'$.

Обратно, нека важи једнакост (13.17) и означимо са k круг одређен тачкама M, N и N'. Докажимо да тада и тачка M' припада кругу k. Из (1) следи $AM : AN = AN' : AM'$ па су троуглови $\Delta AM'N$ и $\Delta AMN'$ слични. Одавде следи да је $\measuredangle AM'N = \measuredangle AN'M$. Тачке M' и N' су са исте стране праве MN, одакле закључујемо да и тачка M' припада кругу k одређеном тачкама M, N и N'. □



Слика 13.12.

Теорема 13.4.8. (Паскалова теорема) *Ако је $A_1A_2\dots A_6$ тетиван шестоугао коме наспрамне странице нису паралелне, доказати да тачке P, Q и R у којима се секу праве одређене наспрамним страницама A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1 припадају једној правој.*



Слика 13.13.

Доказ. Означимо са X, Y и Z пресечне тачке редом правих A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1 (Слика 13.13). Применом Менелајеве теореме на троугао ΔXYZ и редом праве A_4A_5, A_2A_3 и A_1A_6 добијамо

$$\frac{\overrightarrow{ZP}}{\overrightarrow{PY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YA_4}}{\overrightarrow{A_4X}}\cdot\frac{\overrightarrow{XA_5}}{\overrightarrow{A_5Z}}=-1,\quad \frac{\overrightarrow{ZA_2}}{\overrightarrow{A_2Y}}\cdot\frac{\overrightarrow{YA_3}}{\overrightarrow{A_3X}}\cdot\frac{\overrightarrow{XQ}}{\overrightarrow{QZ}}=-1,\quad \frac{\overrightarrow{ZA_1}}{\overrightarrow{A_1Y}}\cdot\frac{\overrightarrow{YR}}{\overrightarrow{RX}}\cdot\frac{\overrightarrow{XA_6}}{\overrightarrow{A_6Z}}=-1.$$

Множењем одговарајућих страна последње три једнакости добијамо добијамо

$$\frac{\overrightarrow{ZP}}{\overrightarrow{PY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YA_4}}{\overrightarrow{A_4X}}\cdot\frac{\overrightarrow{XA_5}}{\overrightarrow{A_5Z}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZA_2}}{\overrightarrow{A_2Y}}\cdot\frac{\overrightarrow{YA_3}}{\overrightarrow{A_3X}}\cdot\frac{\overrightarrow{XQ}}{\overrightarrow{QZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZA_1}}{\overrightarrow{A_1Y}}\cdot\frac{\overrightarrow{YR}}{\overrightarrow{RX}}\cdot\frac{\overrightarrow{XA_6}}{\overrightarrow{A_6Z}}=-1. \quad (13.18)$$

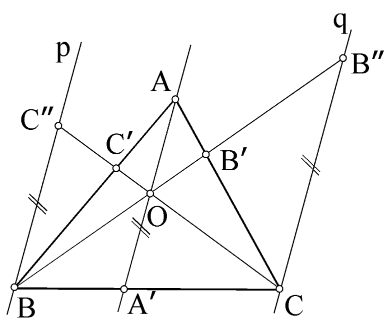
Тачке A_1, A_2, ... , A_6 припадају истом кругу па према Леми 13.4.1. имамо $\overrightarrow{XA_5}\cdot\overrightarrow{XA_6}=\overrightarrow{XA_3}\cdot\overrightarrow{XA_4}$, $\overrightarrow{YA_1}\cdot\overrightarrow{YA_2}=\overrightarrow{YA_3}\cdot\overrightarrow{YA_4}$, $\overrightarrow{ZA_1}\cdot\overrightarrow{ZA_2}=\overrightarrow{ZA_5}\cdot\overrightarrow{ZA_6}$. Заменом последње три једнакости у (13.18) добијамо

$$\frac{\overrightarrow{ZP}}{\overrightarrow{PY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YR}}{\overrightarrow{RX}}\cdot\frac{\overrightarrow{XQ}}{\overrightarrow{QZ}}=-1,$$

одакле према Менелајевој теореми следи да су тачке P, Q и R колинеарне. $\square$

Теорема 13.4.9. (Ван-Обелова теорема) *Ако су A', B', C' тачке правих BC, CA, AB троугла ΔABC такве да се праве AA', BB' и CC' секу у једној тачки O, доказати да је*

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C}.$$



Слика 13.14.

Доказ. Конструишимо праве $CB'' \equiv q$ и $BC'' \equiv p$ такве да је $CB'' \parallel BC'' \parallel AA'$, $C'' \in CC'$, $B'' \in BB'$ (Слика 13.14). Доказ даље изводимо коришћењем сличности. Из

$$\Delta AOC' \sim \Delta BC''C \quad \text{следи} \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{AO}{C''B}. \tag{13.19}$$

Аналогно

$$\Delta AOB' \sim \Delta CB''B \quad \text{па је} \quad \frac{AB'}{B'C} = \frac{AO}{B''C}. \tag{13.20}$$

Сабирањем једнакости (13.19) и (13.20) добијамо

$$\frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = AO \cdot \left(\frac{1}{C''B} + \frac{1}{B''C}\right). \tag{13.21}$$

Сада из

$$\Delta BCC'' \sim \Delta A'CO \quad \text{следи} \quad \frac{OA'}{C''B} = \frac{CA'}{CB}. \tag{13.22}$$

Аналогно

$$\Delta BA'O \sim \Delta BCB'' \quad \text{па је} \quad \frac{OA'}{B''C} = \frac{A'B}{CB}. \tag{13.23}$$

Сабирањем једнакости (13.22) и (13.23) добијамо

$$\frac{OA'}{C''B} + \frac{OA'}{B''C} = \frac{CA'}{CB} + \frac{A'B}{CB} = \frac{CA' + A'B}{CB} = \frac{CB}{CB} = 1.$$

Сада је

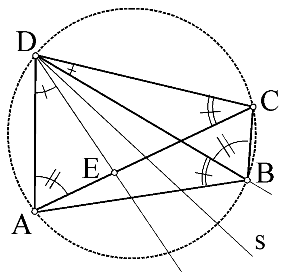
$$OA' \cdot \left(\frac{1}{C''B} + \frac{1}{B''C} \right) = 1, \quad \text{тј.} \quad \frac{1}{C''B} + \frac{1}{B''C} = \frac{1}{OA'}. \tag{13.24}$$

Заменом (13.24) у (13.21) добијамо

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C},$$

а то је и требало доказати. □

Теорема 13.4.10. (Птоломејева теорема) *Ако је $ABCD$ конвексан и тетиван четвороугао, доказати да је производ његових дијагонала једнак збиру производа његових наспрамних страница.*



Слика 13.15.

Доказ. Четвороугао $ABCD$ је конвексан па му се дијагонале секу, тј. дијагонала BD сече дијагоналу AC у тачки која је на дијагонали AC, па ће полуправа симетрична дијагонали BD у односу на симетралу s угла $\measuredangle CDA$ сећи дијагоналу AC у унутрашњој тачки, обележимо је са E. Дакле важи $\measuredangle ADE = \measuredangle CDB$ и $\measuredangle CDE = \measuredangle ADB$.

Уочимо троуглове ΔADE и ΔBDC. Они су слични јер је

$$\measuredangle ADE = \measuredangle CDB \quad \text{и} \quad \measuredangle DAE \equiv \measuredangle DAC = \measuredangle DBC.$$

Из њихове сличности следи

$$\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{BC}, \quad \text{па је} \quad AD \cdot BC = AE \cdot BD. \tag{13.25}$$

Аналогно, троуглови ΔCDE и ΔADB су слични јер је

$$\measuredangle CDE = \measuredangle ADB \quad \text{и} \quad \measuredangle DCE \equiv \measuredangle DCA = \measuredangle DBA.$$

Из њихове сличности следи

$$\frac{BD}{CE} = \frac{BD}{AB}, \quad \text{па је} \quad AB \cdot DC = CE \cdot BD. \tag{13.26}$$

Сабирањем једнакости (13.25) и (13.26) добијамо

$$AD \cdot BC + AB \cdot DC = (AE + CE) \cdot BD = AC \cdot BD,$$

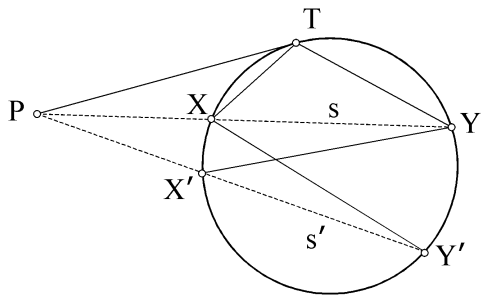
тј. $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot DC$, а то је и требало доказати □

13.5 Потенција тачке у односу на круг и сферу

Трансформације сличности простора E^n омогућују у геометрији ликова тог простора разоткривање разних метричких својстава тих ликова. Од посебног су интереса својства везана за круг и сферу. Уз помоћпотенције тачке у односу на круг и сферу извешћемо неке од тих особина. Пре увођења дефиниције потенције тачке у односу на круг и сферу, неопходно је најпре доказати следећу теорему.

Теорема 13.5.1. *Ако су у равни задати круг k и тачка P, тада за сваку праву s која сече круг k у тачкама X и Y и пролази кроз тачку P важи $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} = const$. Ако је тачка P ван круга k и T додирна тачка једне од тангената из тачке P ван круга k, тада је $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PT}^2$.*

Доказ. Нека је тачка P ван круга k и нека су s и s' две разне праве кроз тачку P (Слика 13.16.) и секу круг k, прва у тачкама X и Y а друга у тачкама X' и Y'. Тада је $\Delta PXY' \sim \Delta PX'Y$ према другом ставу о сличности троуглова, па је $PX : PY' = PX' : PY$, а одавде је $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PX'} \cdot \overrightarrow{PY'}$. Случајеви када је тачка P на кругу k је тривијалан а када је тачка P унутар круга k разматра се аналогно првом случају. Специјално у случају када је тачка P изван круга k и T додирна тачка једне од тангената из тачке P на круг k, имамо да је $\Delta PXT \sim \Delta PTY$, одакле је $PX : PT = PT : PY$, тј. $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PT}^2$. □



Слика 13.16.

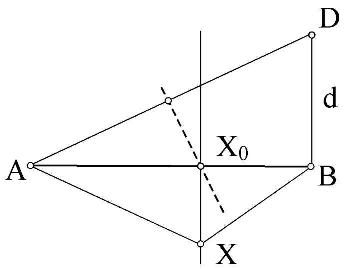
13.5.1 Потенција тачке у односу на круг

Дефиниција 13.5.1. Константан производ $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY}$ уведен претходном теоремом називамо *потенција тачке P у односу на круг k*, и означавамо са $p(P,k)$.

Из дефиниције непосредно следи да је потенција $p(P,k)$ мања од нуле ако је $OP < r$, једнака нули ако је $OP = r$ и већа од нуле ако је $OP > r$.

Означимо са $OP = d$ а са A и B пресечне тачке праве PO и круга k. Тада је $p(P,k) = d^2 - r^2$.

Лема 13.5.1. *Ако су A и B две тачке неке равни и d дуж, тада скуп тачака X те равни таквих да је $AX^2 - BX^2 = d^2$ представља праву управну на правој AB.*

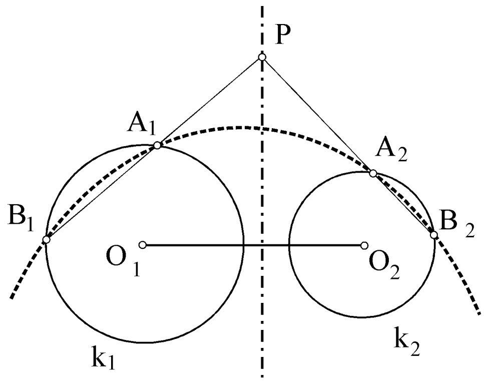


Слика 13.17.

Доказ. Уочимо тачку D (Слика 13.17.) у равни тачака A, B и X такву да је $BD \cong d$ и $DB \perp AB$. Означимо са X_0 пресечну тачку праве AB и медијатрисе дужи AD. У том случају важи $AX_0^2 - BX_0^2 = DX_0^2 - BX_0^2 = DB^2 = d^2$. Применом Питагорине теореме, тражени скуп тачака је права управна на правој AB у тачки X_0. □

Теорема 13.5.2. *Скуп свих тачака равни E^2 којима су потенције у односу на два ексцентрична круга $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ међу собом једнаке представља једну праву управну на правој O_1O_2.*

Доказ. Нека је P тачка у равни кругова k_1 и k_2 (Слика 13.18.) таква да је $p(P, k_1) = p(P, k_2)$. Тада је $O_1P^2 - r_1^2 = O_2P^2 - r_2^2$, тј. $O_1P^2 - O_2P^2 = r_1^2 - r_2^2 = const$. На основу претходне леме следи да тачка P припада правој p која је управна на праву O_1O_2 у тачки Q за коју $O_1Q^2 - O_2Q^2 = r_1^2 - r_2^2$. □



Слика 13.18.

Дефиниција 13.5.2. Скуп свих тачака равни чије су потенције једнаке у односу на два ексцентрична круга k_1 и k_2 називамо *потенцијалном или радикалном осом* тих кругова.

Нека су дати кругови k_1 и k_2. Конструишимо потенцијалну осу тих кругова. Могу наступити три случаја:

(i) Кругови k_1 и k_2 се секу у тачкама A и B. У том случају свака од тачака A и B има потенцију нула. У овом случају потенцијална оса је права AB.

(ii) Кругови k_1 и k_2 се додирују. Тада је потенцијална оса њихова заједичка тангента.

(iii) Кругови k_1 и k_2 немају заједничких тачака. Конструкцију потенцијалне осе вршимо уз помоћдоказане леме. Други начин је конструкција помоћног круга који сече кругове k_1 и k_2 редом у тачкама A_1, B_1 и A_2, B_2. Пресечна тачка P правих A_1B_1 и A_2B_2 припада потенцијалној оси поменутих кругова.

Поменимо још неке појмове везане за потенцију тачке у односу на круг.

Дефиниција 13.5.3. Скуп свих кругова неке равни од којих свака два имају за потенцијалну осу исту праву p, назива се *прамен кругова* или *систем коаксијалних кругова*, а права p *потенцијална оса* тог прамена.

Теорема 13.5.3. *Потенцијалне осе трију кругова припадају истом прамену правих.*

Доказ. Нека су кругови k_1, k_2 и k_3 такви да не припадају истом прамену и никоја два нису концентрична. Тада посматрајући их пар по пар одређујемо три потенцијалне осе. Тачка која има исту потенцију у односу на сва три круга припада свакој од три поменуте потенцијалне осе.

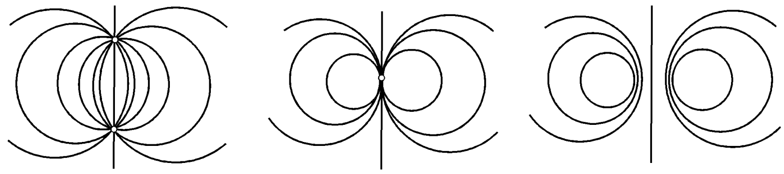
Обратно, тачка пресека било које две од три потенцијалне осе има исту потенцију у односу на сва три круга па мора припадати и трећој потенцијалној оси. Ако су две од тих потенцијалних оса паралелне онда је и трећа оса њима паралелна. □

Дефиниција 13.5.4. Тачку O у којој се секу потенцијалне осе трију кругова називамо *потенцијалним* или *радикалним средиштем тих* кругова.

Није тешко доказати следећу теорему:

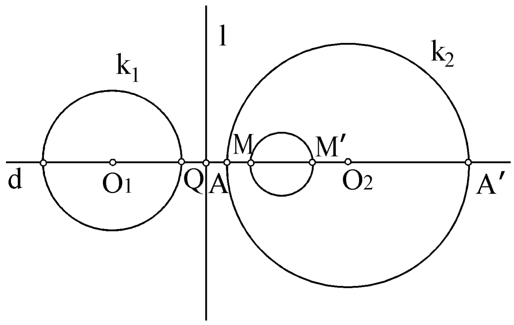
Теорема 13.5.4. (i) *Ако се у једном прамену кругова два круга секу у тачкама A и B онда се свака два круга тог прамена секу у тачкама A и B.*
(ii) *Ако се у неком прамену кругова два круга додирују у тачки C, онда се свака два круга тог прамена додирују у тачки C.*
(iii) *Ако два круга неког прамена кругова немају заједничких тачака, онда никоја два круга тог прамена немају заједничких тачака.*

Наведене особине омогућују да у геометрији равни E^2 разликујемо три прамена кругова (Слика 13.19).



Слика 13.19.

Дефиниција 13.5.5. Прамен кругова у равни E^2 је *елиптички* ако се кругови тог прамена секу у двема различитим тачкама, *параболички* ако се додирују и *хиперболички* ако немају заједничких тачака.

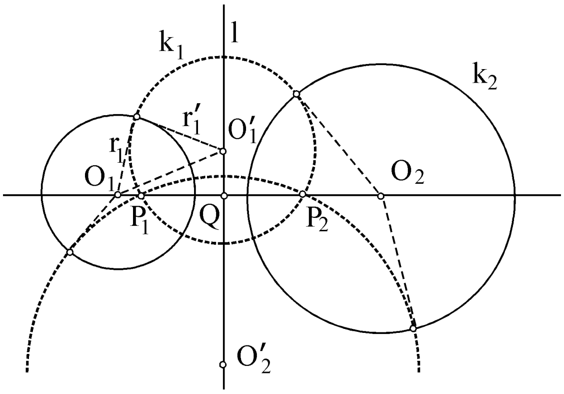


Слика 13.20.

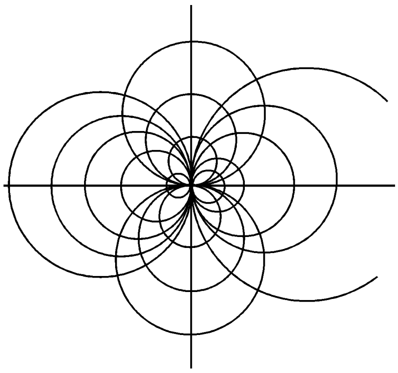
Теорема 13.5.5. *За свака два круга постоји тачно један прамен кругова коме они припадају.*

Доказ. У случају када се кругови секу или се додирују доказ је тривијалан. Нека кругови $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ (Слика 13.20.) немају заједничких тачака. Означимо са l њихову потенцијалну осу, а са Q пресечну тачку праве l са правом $d = O_1O_2$. Нека су A и A' пресеци круга k_2 са правом d. Тада је производ $\overrightarrow{QA'} \cdot \overrightarrow{QA}$ исти за све кругове прамена. Нека су M и M' пресечне тачке произвољног круга k_3 посматраног прамена са правом d. Тада је задовољен услов $\overrightarrow{QA'} \cdot \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{QM'} \cdot \overrightarrow{QM}$, којим је и одређен круг прамена. Ако се тачке M и M' поклапају онда је круг k_3 дегенерисан у тачку.

Ако су кругови k_1 и k_2 концентрични, онда се договорно хиперболички прамен, одређен тим круговима, састоји од свих кругова



Слика 13.21.

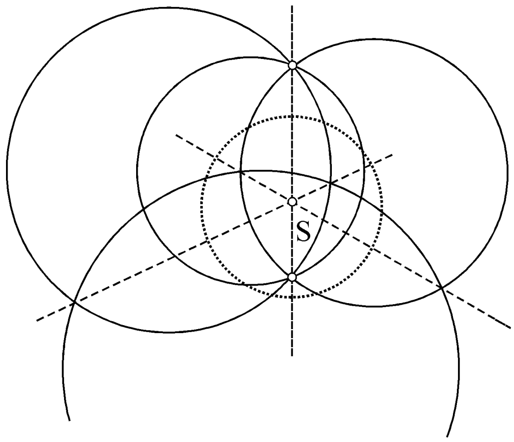


Слика 13.22.

који су концентрични са датим круговима. У том случају потенцијалну осу представља бесконачно далека права равни посматраних кругова. □

Теорема 13.5.6. *Скуп кругова ортогоналних на све кругове датог прамена представља опет прамен кругова. У том случају потенцијална оса првог прамена садржи средишта кругова другог прамена.*

Доказ. Нека је први прамен задат круговима $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$. Нека је l потенцијална оса кругова k_1 и k_2 а O_1' и O_2' тачке праве l које су изван кругова k_1 и k_2. Те две тачке имају исту потенцију у односу на кругове k_1 и k_2 па према томе представљају средишта



Слика 13.23. Елиптички сноп кругова

кругова који ортогонално секу дате кругове. Како је ортогоналност узајамна, то тачка O_1 има исту потенцију r_1^2 у односу на кругове са центрима O_1' и O_2'. Заиста, то следи из чињенице да је полупречник r_1 истовремено и одсечак тангенте из тачке O_1 на кругове са центрима у тачкама O_1' и O_2'. Аналогно, тачка O_2 има исту потенцију r_2^2 у односу на наведене кругове. Одавде следи да је права O_1O_2 потенцијална оса прамена одређеног круговима са центрима редом у тачкама O_1' и O_2'. Означимо са Q пресечну тачку правих O_1O_2 и $O_1'O_2'$. Према Питагориној теореми следи

$$O_1O_1'^2 = QO_1^2 + QO_1'^2 = r_1^2 + r_1'^2,$$

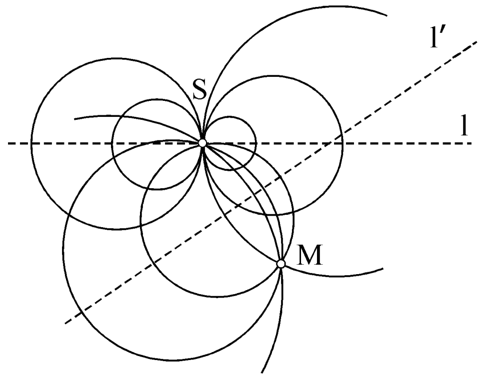
тј.

$$QO_1^2 - r_1^2 = -(QO_1'^2 - r_1'^2).$$

Одавде следи да ако је потенција тачке Q у односу на један прамен позитивна, онда је она негативна у односу на други прамен. То значи да се тачка Q налази унутар кругова једног, а ван кругова другог прамена. Другим речима, ако је један прамен елиптички (Слика 13.21), онај други је хиперболички и обрнуто.

Очигледно је да ако је први прамен параболички, онда је исти такав и онај други (Слика 13.22.). □

Дефиниција 13.5.6. Праменови кругова из претходне теореме називају се *ортогоналним*.



Слика 13.24. Параболички сноп кругова

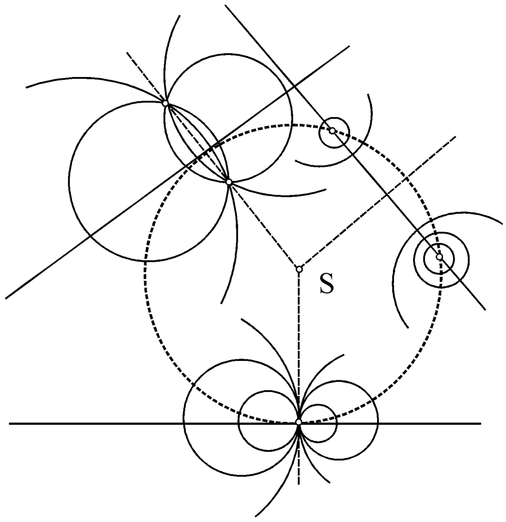
Дефиниција 13.5.7. Скуп кругова равни E^2 од којих свака три имају исти радикални центар називамо *сноп кругова.* Потенција радикалног центра у односу на све кругове снопа назива се *потенција снопа.* Ако је потенција снопа негативна онда тај сноп зовемо *елиптичким* (Слика 13.23.), ако је потенција снопа нула онда такав сноп зовемо *параболичким* (Слика 13.24.) а ако је потенција снопа позитивна онда такав сноп зовемо *хиперболичким* (Слика 13.25.).

Није тешко закључити да важе следећа тврђења

Теорема 13.5.7. (i) *Радикално средиште елиптичког снопа налази се унутар свих кругова снопа.*
(ii) *Сви кругови параболичког снопа пролазе кроз радикално средиште.*
(iii) *Радикално средиште хиперболичког снопа налази се ван свих кругова снопа.*

Теорема 13.5.8. (i) *Постоји један и само један круг који кругови неког елиптичког снопа секу у дијаметрално супротним тачкама* (Слика 13.23.).
(ii) *Постоји један и само један круг који је ортогоналан на све кругове неког хиперболичког снопа* (Слика 13.24.).

Доказ. Очигледно је да наведени кругови имају центар у тачки S која представља радикални центар поменутих снопова и да су им полупречници једнаки p ($-p^2$ и p^2 су потенције снопа).



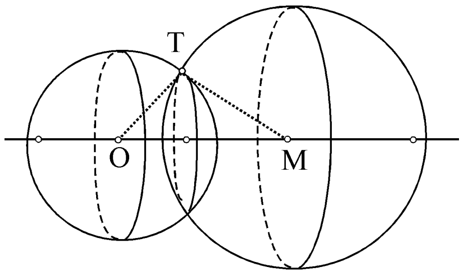
Слика 13.25. Хиперболички сноп кругова

Можемо уочити да у састав елиптичког снопа улазе само елиптички праменови, у састав параболичког снопа елиптички и параболички праменови, док у састав хиперболичког снопа улазе елиптички, параболички и хиперболички праменови. □

13.5.2 Потенција тачке у односу на сферу

Све што је речено о круговима у равни E^2 може се пренети и на сферу у простору E^3. Нека је у простору дата сфера $S(O,r)$ и права s која пролази кроз тачку M и продире сферу у тачкама A и B. Потенцијом тачке M у односу на сферу S називамо константан производ $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$. Ако сферу пресечемо произвољном равни α која садржи тачку M, онда није тешко закључити да је потенција тачке M у односу на песечни круг равни α и сфере S једнака потенцији тачке M у односу на сферу S. За тачке ван сфере потенција је позитивна, за тачке на сфери је једнака нули док је за тачке унутар сфере потенција негативна. Као и у случају потенције у односу на круг, потенција тачке M у односу на сферу $S(O,r)$ једнака је $p^2 = MO^2 - r^2$. Ако је тачка M ван сфере $S(O,r)$, онда је сфера са средиштем у тачки M и полупречником p ортогонална на сферу S.

На пример (Слика 13.26.) нека су у равни дати ортогонални



Слика 13.26.

кругови $k(O,r)$ и $l(M,p)$ и нека је T једна од њихових заједничких тачака. Ротацијом тефигуре око праве OM кругови k и l описују сфере редом са средиштима у тачкама O и M. Равни које пролазе редом кроз праве OT и OM а ортогоналне су на раван одредјену тачкама O, T и M, представљају тангентне равни поменутих сфера. Како је угао између тих двеју равни управо угао $\measuredangle OTM$, то су поменуте равни ортогоналне, тј. ортогоналне су одговарајуће сфере.

Такође важи теорема коју наводимо без доказа

Теорема 13.5.9. *Скуп свих тачака простора које имају исте потенције у односу на две задате сфере $S_1(O_1,r_1)$ и $S_2(O_2,r_2)$ јесте раван ортогонална на праву O_1O_2*

Дефиниција 13.5.8. Скуп свих тачака простора чије су потенције једнаке у односу на две задате сфере назива се *радикална* или *потенцијална раван.*

Теорема 13.5.10. *Ако су центри трију сфера три неколинеарне тачке, онда се три радикалне равни датих сфера секу по једној правој.*

Доказ. Како су средишта трију датих сфера три неколинеарне тачке, то никоје две радикалне равни поменутих сфера нису паралелне. Нека се две од поменутих трију равни секу по правој l. Све тачке праве l имају једнаке потенције у односу на све три дате сфере, одакле следи да и трећа радикална раван садржи праву l.$\square$

Дефиниција 13.5.9. Скуп тачака простора E^3 које имају једнаке потенције у односу на три дате сфере назива се *радикална оса* тих сфера.

Теорема 13.5.11. *Ако центри четири различите сфере не припадају истој равни, тада шест радикалних равни тих сфера имају једну заједничку тачку.*

Доказ. Нека су O_1, O_2, O_3 и O_4 центри поменутих сфера. Радикалне осе сфера са центрима O_1, O_2, O_3 и O_1, O_3, O_4 припадају једној те истој равни и то радикалној равни сфера са центрима O_1 и O_2. Пресек S тих радикалних оса има једнаке потенције у односу на све четири сфере. Одатле следи да тачку S садрже и преостале радикалне осе, а такође и све радикалне равни тих сфера. $\square$

Дефиниција 13.5.10. Пресечну тачку свих радикалних оса четири сфере чији центри не припадају истој равни називамо *радикалним центром* тих кругова.

Дефиниција 13.5.11. Скуп сфера од којих сваке две имају исту радикалну раван називамо *праменом сфера.* Ако радикална раван сече све сфере прамена онда такав прамен називамо елиптичким, ако их додирује параболичким а ако нема са њима заједничких тачака хиперболичким праменом сфера.

Све врсте поменутих праменова можемо добити ротацијом одговарајућих праменова кругова око праве одређене средиштима тих кругова. У том случају кругови прамена описују сфере а њихова радикална оса радикалну раван сфера.

Дефиниција 13.5.12. Скуп свих сфера од којих сваке три имају исту радикалну осу називамо *снопом сфера.* У зависности од тога да ли оса сече, додирује или нема заједничких тачака са сваком од поменутих сфера сноп је редом *елиптички*, *параболички* или *хиперболички.*

Представу о снопу сфера лако добијамо посматрањем одговарајућег снопа кругова (Слике 13.23, 13.24 и 13.25) где сваки круг можемо замислити као дијаметрални пресек сфере, а радикалну осу као нормалу на раван цртежа у центру снопа кругова.

Дефиниција 13.5.13. Скуп сфера од којих сваке четри имају исто радикално средиште назива се *мрежа сфера.* Заједничку потенцију радикалног центра сфера називамо центром мреже. Мрежа је *елиптичка* ако центар припада унутрашњости свих сфера мреже, *параболичка* ако све сфере мреже садрже радикални центар а *хиперболичка* ако је радикални центар ван свих сфера мреже.

13.6 Инверзија у односу на круг и сферу

13.6.1 Инверзија у односу на круг

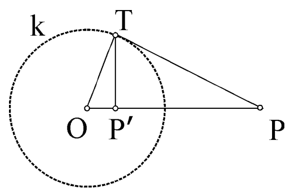
Потенција тачке у односу на круг омогућује да у геометрији равни E^2 установимо специфичну трансформацију коју називамо *инверзијом* у односу на круг који се налази у тој равни.

Дефиниција 13.6.1. Нека је $k(O, r)$ произвољан круг равни E^2 и $E^2_* = E^2 \setminus \{O\}$. *Инверзијом у односу на круг* k називамо трансформацију $\psi_k : E^2_* \to E^2_*$ која сваку тачку $P \in E^2_*$ преводи у тачку P' полуправе OP такву да је $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2$. Тачку O називамо центром или средиштем инверзије, дуж r - полупречником инверзије, величину r^2 - степеним коефицијентом, круг k - кругом инверзије ψ_k а E^2_* - Гаусовом равни.

Из дефиниције непосредно следи да је инверзија у односу на круг бијективна трансформација. То није трансформација целе равни E^2 већ само њеног дела E^2_*, јер у њој није дефинисана слика тачке O, нити је тачка O слика неке тачке равни E^2.

Инверзију у односу на круг могуће је разматрати и у такозваној конформној равни, тј. Еуклидској равни E^2 проширеној бесконачно далеком тачком ∞. Тада је $\psi_k(\infty) = O$ и $\psi_k(O) = \infty$.

Теорема 13.6.1. *Инверзија у односу на круг је инволуциона трансформација.*



Слика 13.27.

Доказ. Нека је $\psi_k : E^2_* \to E^2_*$ инверзија у односу на круг $k(O, r)$. Ако је $P \in E^2_*$ произвољна тачка, тада тачка $P' = \psi_k(P)$ припада полуправој OP (Слика 13.27.) при чему је $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2$. Тада и тачка P припада полуправој OP' и важи $\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OP} = r^2$, па је $\psi_k(P') = P$. Дакле, заиста је $\psi_k^2 = \varepsilon$. $\square$

Теорема 13.6.2. *У инверзији $\psi_k : E^2_* \to E^2_*$ тачка X је инваријантна ако и само ако X припада кругу k.*

Доказ. Ако је $X \in E^2_*$ инваријантна имамо да $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX} = r^2$ па је $OX = r$, тј. тачка X припада кругу k.

Обратно, ако $X \in k$, тада тачка $X' = \psi_k(X)$ припада полуправој OX и важи $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX'} = r^2$. Одавде је $OX' = r$, тј. тачке X и X' се поклапају. □

Теорема 13.6.3. *У инверзији $\psi_k : E^2_* \to E^2_*$ тачки X која се налази у кругу k одговара тачка X' која се налази изван круга k и обратно тачки X која се налази изван круга k одговара тачка X'која се налази у кругу k.*

Доказ. Нека је O средиште и r полупречник инверзије ψ_k. Ако је X у кругу k тада је $OX < r$ па из релације $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX'} = r^2$ следи да је $OX' > r$, тј. тачка X је изван круга k.

Обратно, ако је X изван круга k тада је $OX > r$, одакле на исти начин као малопре следи да је $OX' < r$, односно тачка X' је унутар круга k. □

Теорема 13.6.4. *Композиција двеју инверзија ψ_{k_1} и ψ_{k_2} дефинисаних у односу на концентричне кругове $k_1(O, r_1)$ и $k_2(O, r_2)$ представља хомотетију $\mathcal{H}_{O,\frac{r_2^2}{r_1^2}}$.*

Доказ. Кругови k_1 и k_2 су концентрични па припадају истој равни E^2. Нека је $X \in E^2_*$ произвољна тачка и $X_1, X_2 \in E^2_*$ тачке такве да је

$$\psi_{k_1}(X) = X_1, \qquad \psi_{k_2}(X_1) = X_2.$$

Тада је

$$(\psi_{k_2} \circ \psi_{k_1})(X) = X_2.$$

Тачке X_1 и X_2 припадају редом полуправама OX и OX_1 па је и тачка X_2 на полуправој OX. Из релација $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX_1} = r_1^2$ и $\overrightarrow{OX_1} \cdot \overrightarrow{OX_2} = r_2^2$ следи $\overrightarrow{OX_2} : \overrightarrow{OX} = r_2^2 : r_1^2$, тј. у хомотетији са центром у тачки O и коефицијентом $r_2^2 : r_1^2$ тачки X одговара тачка X_2. Према томе следи да је

$$\psi_{k_2} \circ \psi_{k_1} = \mathcal{H}_{O,\frac{r_2^2}{r_1^2}}.$$

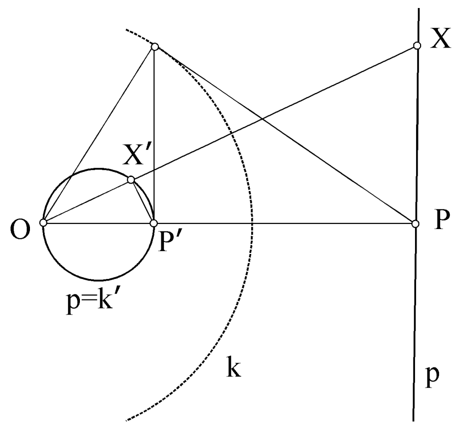
□

Дефиниција 13.6.2. Лик Ω равни E^2_* је *инверзан* лику Ω' равни E^2_* ако постоји инверзија $\psi_k : E^2_* \to E^2_*$ која лик Ω преводи у лик Ω'.

Теорема 13.6.5. *Нека су у равни E^2 дати круг $k(O, r)$ и права p. Тада:*
(i) *Ако права p садржи тачку O тада је $\psi_k(p\backslash\{O\}) = p\backslash\{O\}$,*
(ii) *Ако права p не садржи тачку O тада лик $\psi_k(p)$ представља круг без тачке O.*

Доказ. (i) Нека права p садржи тачку O, и нека је $X = E^2\backslash\{O\}$ и $X' = \psi_k(X)$. Ако тачка X припада правоуј $p\backslash\{O\}$, онда тачка X' припада полуправој OX па самим тим и правој $p\backslash\{O\}$.

Обратно, нека $X' \in p\backslash\{O\}$. Тада је $X = \psi_k(X)$ па тачка X припада полуправој OX', па самим тим $X \in p\backslash\{O\}$.



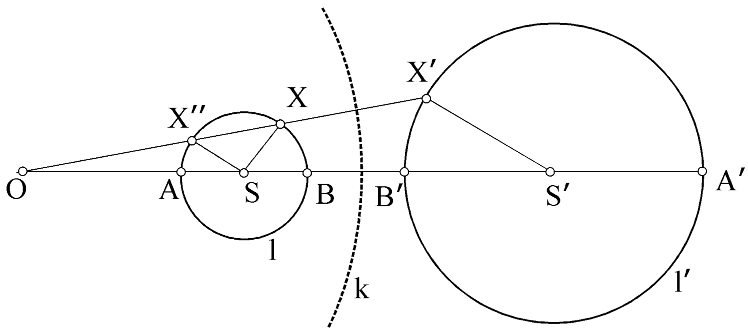
Слика 13.28.

(ii) Права p не садржи тачку O. Означимо са P подножје управне из тачке O (Слика 13.28.) на правој p, са X произвољну тачку праве p различиту од тачке P а са P' и X' тачке које у инверзији ψ_k одговарају редом тачкама P и X. Тада је $\measuredangle POX = \measuredangle X'OP'$ и $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OX'}$. Одавде следи да су троуглови ΔPOX и $\Delta X'OP'$ слични, па је и $\measuredangle OPX = \measuredangle OX'P'$. Како је угао $\measuredangle OPX$ прав то је и угао $\measuredangle OX'P'$ прав па тачка X' припада кругу k' чији је пречник дужOP'.

Обратно, нека тачка $X' \neq O$, P' припада кругу k' над пречником OP'. Тада је $\measuredangle OX'P'$ прав, па су правоугли троуглови ΔPOX и $\Delta X'OP'$ слични, одакле следи $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OX'}$, тј у изометрији ψ_k тачки X одговара тачка X'. $\square$

Теорема 13.6.6. *Нека су равни E^2 дати кругови $k(O,r)$ и $l(S,\rho)$. Тада важе следећа тврђења:*
(i) *Ако тачка O припада кругу l тада је $\psi_k(l\backslash\{O\})$ права l'.* (ii) *Ако тачка O не припада кругу l тада у инверзији ψ_k кругу l одговара неки круг l'.*

Доказ. (i) Нека је $\psi_k(l\backslash\{O\}) = l'$. Према претходној теореми закључујемо да је l' права.



Слика 13.29.

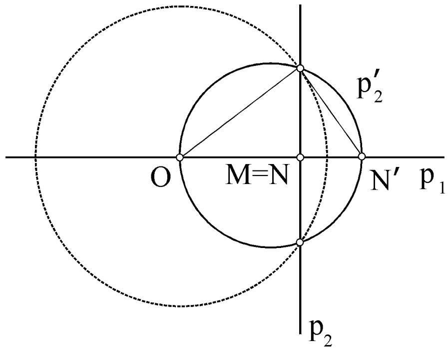
(ii) Нека је X произвољна тачка круга l, X' тачка која у инверзији ψ_k одговара тачки X а X'' друга заједничка тачка круга l и праве OX (Слика 13.29.). Означимо са t степен инверзије ψ_k а са p потенцију тачке O у односу на круг l. Тада је $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX'} = t$ и $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX''} = p$. Из последње две релације добијамо да је

$$\frac{\overrightarrow{OX'}}{\overrightarrow{OX''}} = \frac{t}{p}.$$

Према томе тачка X' припада кругу l' који у хомотетији $\mathcal{H}_{O,\frac{t}{p}}$ одговара кругу l.

Обратно, нека је X' произвољна тачка круга l', $\mathcal{H}^{-1}_{O,\frac{t}{p}}(X')$ и X друга заједничка тачка праве OX'' са кругом l. Означимо као и малопре са t степен инверзије ψ_k а са p потенцију тачке O у односу на круг l. Тада је $\frac{\overrightarrow{OX}}{\overrightarrow{OX''}} = \frac{t}{p}$ и $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX''} = p$. Из последње две једнакости следи $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX'} = t$ а одавде је $X' = \psi_k(X)$. □

Теорема 13.6.7. (i) *Инверзија ψ_k чува углове међу правама, тј. угао између две праве једнак је углу који заклапају њихове слике.*



Слика 13.30.

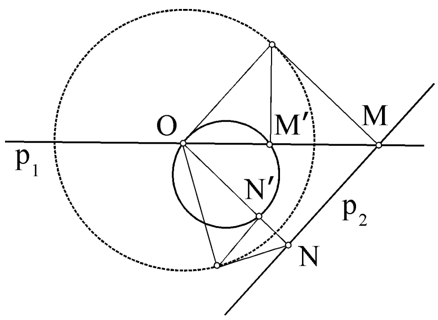
(ii) *Инверзија* ψ_k *је конформно пресликавање, тј. угао под којим се секу две линије* p *и* q *равни* E^2 *у пресечној тачки* S *једнак је углу под којим се секу њима инверзне криве* p' *и* q' *у тачки* S'.

Доказ. (i) Нека је $k(O,r)$ круг инверзије и нека су p_1 и p_2 две праве у равни круга инверзије, $p_1' = \psi_k(p_1)$ и $p_2' = \psi_k(p_2)$. Тада могу наступити неколика случаја:

а) Праве p_1 и p_2 садрже центар инверзије. У том случају доказ је тривијалан.

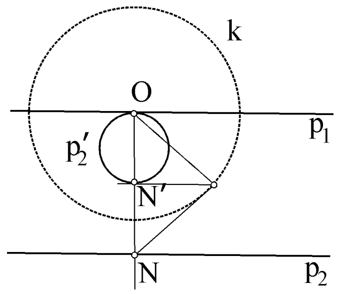
б) $O \in p_1$, $O \notin p_2$, $p_1 \cap p_2 = \{M\}$. Нека је N подножје нормале из тачке O на p_2.

Ако је $M = N$ (Слика 13.30.), тада је p_2' круг над пречником ON', $N' = \psi(N)$, па је $\measuredangle(p_1, p_2) = \pi/2 = \measuredangle(p_1, p_2')$.



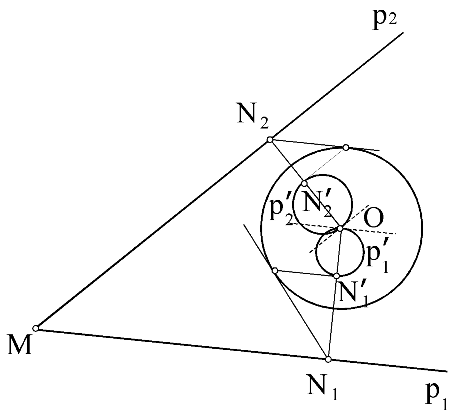
Слика 13.31.

Ако $M \neq N$, тада је $\measuredangle(p_1,p_2) = \pi/2 - \measuredangle MON$ (Слика 13.31.) а $\measuredangle(p_1,p_2')$ као угао између тангенте и тетиве једнак периферијском углу над тетивом, $\measuredangle ON'M' = \pi/2 - \measuredangle M'ON' = \pi/2 - \measuredangle MON$. Имајући у виду да је и у овом случају $p_1 = p_1'$, закључујемо да тврђење важи.



Слика 13.32.

ц) $O \in p_1$, $O \notin p_2$, $p_1 \parallel p_2$ (Слика 13.32.). У том случају је $\measuredangle(p_1,p_2) = 0$. С друге стране p_2' је круг који додирује праву p_1 у тачки O. Према томе $\measuredangle(p_1,p_2') = 0$.



Слика 13.33.

д) $O \notin p_1$, $O \notin p_2$, $p_1 \cap p_2 = \{M\}$. Нека су N_1 и N_2 (Слика 13.33.) подножја нормала из тачке O редом на правама p_1 и p_2.

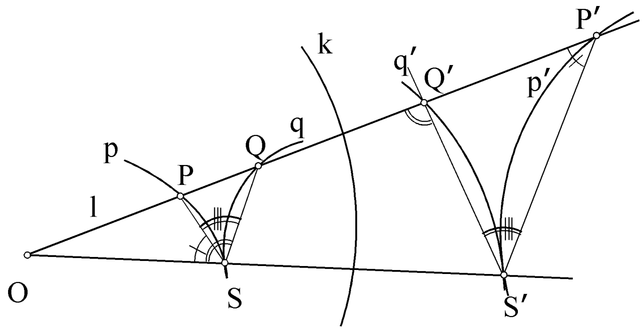
Ако је $M = N_1$ (Дакле $M \neq N_2$), тада је $\measuredangle(p_1,p_2) = \pi - \measuredangle MON$ и $\measuredangle(p_1',p_2') = \pi - \measuredangle M'ON'$ (Углови са нормалним крацима и осна симетрија у односу на симетралу дужи OM'). Случај $M = N_2$ разматра се аналогно. Нека је сада $M \neq N_1$ и $M \neq N_2$. У том случају је $\measuredangle(p_1, p_2) = \pi - \measuredangle N_1ON_2$. С друге стране је $\measuredangle(p_1', p_2') = \pi - \measuredangle N_1'ON_2'$, одакле следи $\measuredangle(p_1', p_2') = \measuredangle(p_1, p_2)$.

е) $O \notin p_1$, $O \notin p_2$, $p_1 \parallel p_2$. Тада је $\measuredangle(p_1, p_2) = 0$, а p_1' и p_2' представљају кругове који се додирују у тачки O. Према томе $\measuredangle(p_1', p_2') = 0$, па тврђење важи и у овом случају.

(ii) Нека је O средиште инверзије ψ_k и l права која садржи тачку O и сече линије p и q редом у тачкама P и Q (Слика 13.34.) и нека је S пресечна тачка линија p и q. Нека је затим $P' = \psi_k(P)$, $Q' = \psi_k(Q)$ и $S' = \psi_k(S)$. Из

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OS'},$$

следи да су четвороуглови $PP'S'S$ и $QQ'S'S$ тетивни, одакле је $\measuredangle OSP \cong \measuredangle S'P'P$ и $\measuredangle OSQ \cong \measuredangle S'Q'Q$.



Слика 13.34.

Тада је $\measuredangle PSQ \cong \measuredangle P'S'Q'$. Смањивањем угла између правих l и SS' тачке P и Q крећу се по кривама p и q ка тачки S. Истовремено, тачке P' и Q' се приближавају тачки S' крећући се по линијама p' и q'. У граничном случају сечице SP и SQ представљају тангенте линија p и q у тачки S, док сечице $S'P'$ и $S'Q'$ представљају тангенте линија p' и $'$ у пресечној у тачки S'. Дакле, угао који одређују тангенте на линије p и q у пресечној тачки S једнак је углу који одређују тангенте на линије p' и q' у пресечној тачки S'. $\square$

13.6.2 Инверзија у односу на сферу

По аналогији у односу на инвезију у односу на круг у равни можемо увести појам инверзије у односу на сферу у простору.

Дефиниција 13.6.3. Нека је $S(O, r)$ сфера простора E^3 и нека је $E^3_* = E^3 \backslash \{O\}$. *Инверзијом у односу на сферу* S називамо трансформацију $\psi_S : E^3_* \to E^3_*$ која сваку тачку $P \in E^3_*$ преводи у тачку P' полуправе OP такву да је $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2$. Тачку O називамо центром или средиштем инверзије, дуж r - полупречником инверзије, величину r^2 - степеним коефицијентом, сферу S - сфером инверзије ψ_k а E^3_* - Гаусовим простором.

Из дефиниције непосредно следи да је и инверзија у односу на сферу бијективна трансформација. То није трансформација целог простора E^3 већсамо њеног дела E^3_*, јер у њој није дефинисана слика тачке O, нити је тачка O слика неке тачке простора E^3.

Инверзију у односу на сферу могуће је разматрати и у такозваном конформном простору, тј. Еуклидској простору E^3 проширеном бесконачно далеком тачком ∞. Тада је $\psi_k(\infty) = O$ и $\psi_k(O) = \infty$.

Као и код инверзије у односу на круг, могу се доказати следеће особине

Теорема 13.6.8. *Инверзија у односу на сферу је инволуциона трансформација.*

Теорема 13.6.9. *У инверзији* $\psi_S : E^3_* \to E^2_*$ *тачка* X *је инваријантна ако и само ако* X *припада сфери инверзије* S.

Теорема 13.6.10. *У инверзији* $\psi_S : E^3_* \to E^3_*$ *тачки* X *која се налази унутар сфере* S *одговара тачка* X' *која се налази изван сфере* S *и обратно тачки* X *која се налази изван сфере* S *одговара тачка* X' *која се налази унутар сфере* S.

13.7 Аполонијеви проблеми о додиру кругова

Сада ћемо размотрити Аполонијеве проблеме о додиру круга који се применом инверзије у односу на круг могу елегантно решити. Ради се о проблемима следећег облика:

Конструисати круг који задовољава три услова од којих сваки има један од облика:

(а) *садржи дату тачку,* (б) *додирује дату праву,* (в) *додирује дати круг.*

Наравно, све тачке, праве и кругови из поменутих услова припадају истој равни. Неки од тих проблема се могу веома лако решити, док за неке то није случај.

Лако је закључити да Аполонијевих проблема има десет:

1. Конструисати круг који садржи три дате тачке.
2. Конструисати круг који садржи две дате тачке и додирује дату праву.
3. Конструисати круг који садржи две дате тачке и додирује дати круг.
4. Конструисати круг који садржи дату тачку и додирује две дате праве.
5. Конструисати круг који садржи дату тачку и додирује дату праву и дати круг.
6. Конструисати круг који садржи дату тачку и додирује два дата круга.
7. Конструисати круг који додирује три дате праве.
8. Конструисати круг који додирује две дате праве и дати круг.
9. Конструисати круг који додирује дату праву и два дата круга.
10. Конструисати круг који додирује три дата круга.

Означимо дате параметре на следећи начин:

тачке A, B, C; праве p_1, p_2, p_3; кругове O_1, O_2, O_3.

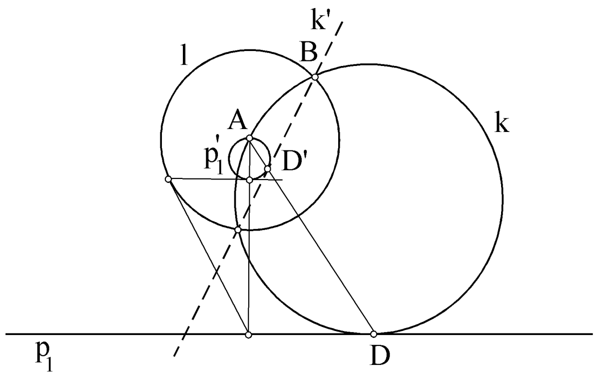
Тада Аполонијеве проблеме шематски можемо приказати на следећи начин:

1. A, B, C	6. A, O_1, O_2
2. A, B, p_1	7. p_1, p_2, p_3
3. A, B, O_1	8. p_1, p_2, O_1
4. A, p_1, p_2	9. p_1, O_1, O_2
5. A, p_1, O_1	10. O_1, O_2, O_3

Први и седми проблем су тривијални. Такође и сви остали Аполонијеви проблеми могу се решити без примене инверзије. Међутим инверзија даје један општи метод за њихово решавање. Он се заснива на чињеници да се у одређеном случају, као што смо видели, круг пресликава у праву и обрнуто.

2. *Конструисати круг који садржи две дате тачке* A *и* B *и додирује дату праву* p_1.

Анализа. Нека круг k садржи две дате тачке A и B и додирује дату праву p_1 у тачки D. При инверзији у односу на круг $l(A, AB)$ правој p_1 одговара круг p_1' (Слика 13.35.) који пролази кроз тачку A а кругу k одговара права k'.



Слика 13.35.

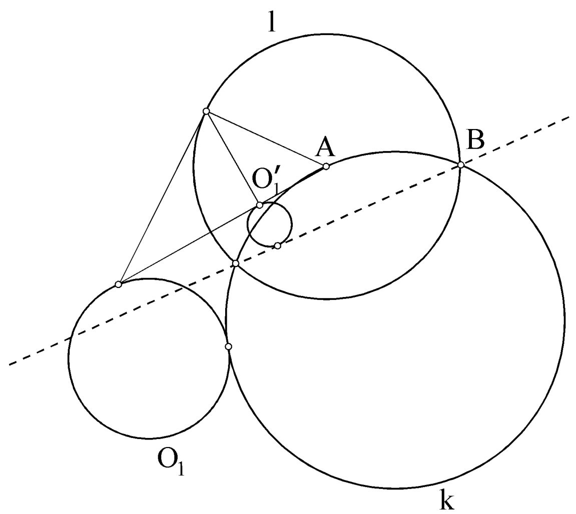
Како тачка B припада кругу инверзије l то ће се она пресликати у саму себе. Права p_1 са кругом k има једну заједничку тачку тећe исто важити и за њихове слике при инверзији, тј. права k' ће додиривати круг p_1'. Круг k садржи тачку B која се при овој инверзији пресликава у саму себе, одакле следи да ће и његова слика, права k', садржати тачку B. Према томе, ми најпре треба да конструишемо круг p_1' који је инверзна слика праве p_1 у односу на круг $l(A, AB)$, затим праву k' кроз тачку B која је тангента на круг p_1', а затим круг k као инверзну слику праве k' у односу на круг l.

Конструкција. Нека су дате две тачке A и B и права p_1, тако да су тачке A и B са исте стране праве p_1. Конструишимо затим круг $l(A, AB)$ и инверзну слику праве p_1 у односу на круг l. То ће бити круг p_1' који пролази кроз центар инверзије A. Из тачке B конструишимо тангенту k' на круг p_1'. Конструишимо затим инверзну слику праве k' у односу на круг $l(A, AB)$. То ће бити тражени круг k. Докажимо то.

Доказ. Круг k као инверзна слика праве k' пролази кроз центар инверзије A. Такође круг k садржи и тачку B као инваријантну тачку посматране инверзије, па је задовољен и други услов. Круг k додирује праву p_1 јер и њихове инверзне слике k' и p_1' имају једну заједничку тачку.

Дискусија. Под условом да су тачке A и B са исте стране праве p_1 задатак има два решења јер се из тачке B могу конструисати две тангенте на круг p_1'.

3. *Конструисати круг који садржи две дате тачке A и B и додирује дати круг O_1.*

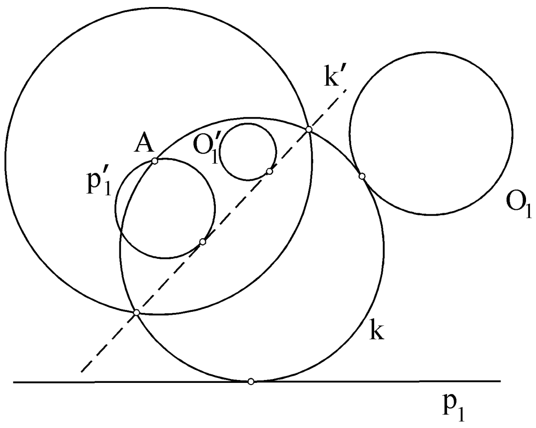


Слика 13.36.

Нека круг k пролази кроз тачке A и B и додирује дати круг O_1. Конструишимо круг $l(A, AB)$. У инверзији у односу на дати круг $l(A, AB)$ (Слика 13.36.), круг k ће се сликати у неку праву k' која пролази кроз тачку B, а круг O_1 у неки круг O_1' при чему ће права k' бити тангента круга O_1', јер се кругови k и O_1 додирују. Према томе, можемо најпре конструисати круг O_1' који је инверзан кругу O_1 у односу на круг $l(A, AB)$, па онда тангенту k' из тачке B на круг O_1' и на крају инверзну слику праве k' у односу на $l(A, AB)$, која ће бити тражени круг k.

5. *Конструисати круг који садржи дату тачку A и додирује дату праву p_1 и дати круг O_1.*

Нека је k тражени круг. При инверзији у односу на круг $m(A, r)$, где је r произвољна дуж, правој p_1 одговара неки круг p_1' (Слика 13.37.), кругу O_1 одговара неки круг O_1' а траженом кругу k права k' која додирује кругове p_1' и O_1'.



Слика 13.37.

Дакле, потребно је најпре конструисати кругове p_1' и O_1' инверзне линијама p_1 и O_1 у односу на круг $m(A, r)$, затим заједничку тангенту k' кругова p_1' и O_1', (у општем случају их има четири) и на крају круг k инверзан правој k' у односу на круг инверзије $m(A, r)$.

Можемо закључити, да у решавању овог проблема није било од значаја да ли су p_1 и O_1 башправа и круг, већда су њихове инверзне слике p_1' и O_1' кругови. Међутим, p_1' и O_1' би били кругови и у случају да су p_1 и O_1 две праве и $A \notin p_1, O_1$.

Закључујемо да се четврти и шести Аполонијев проблем решавају на исти начин као и пети. Осми, девети и десети Аполонијев роблем своде се редом на четврти, пети и шести.

Део 14

Разложива и допунска једнакост ликова. Мерење фигура

14.1 Разложива и допунска једнакост ликова у геометрији

У математици разликујемо три врсте једнакости: коначну, граничну и приближну. У геометрији разликујемо две врсте коначних једнакости ликова:
- разложиву једнакост
- и допунску једнакост.

Дефиниција 14.1.1. Каже се да је лик Φ простора E^n *разложиво једнак* лику Φ' простора E^n простора E^n, што симболички означавамо $\Phi \stackrel{R}{=} \Phi'$, ако се лик Φ може разложити на коначан број ликова $\Phi_1, \ldots \Phi_m$ а лик Φ' на коначан број ликова $\Phi'_1, \ldots \Phi'_m$, при чему је $\Phi_i \cong \Phi'_i$ за свако $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$.

Дефиниција 14.1.2. Лик Φ простора E^n је *допунски једнак* лику Φ' простора E^n, што означавамо $\Phi \stackrel{D}{=} \Phi'$, ако се лик Φ може допунити коначним бројем ликова $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$, а лик Φ' истим бројем ликова $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_m$ при чему је $\Phi_i \cong \Phi'_i$ за свако $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ а ликови $\bar{\Phi}$ и $\bar{\Phi}'$ који се састоје редом од ликова $\Phi, \Phi_1 \cdots \Phi_m$ и $\Phi', \Phi'_1 \cdots \Phi'_m$ су разложиво једнаки, тј. $\bar{\Phi} \stackrel{R}{=} \bar{\Phi}'$.

Овако уведене релације разложиве и допунске једнакости фигура намећу читав низ проблема од изузетног значаја. Тако се одмах намеће питање: *"Ако су два лика разложиво једнака да ли су и допунски једнака и да ли важи и обрнуто".* Ово су изузетно сложена питања која су једноставна само у геометрији полигона и полиедара где су на њих дати одговори. Међутим друга слична питања нису решена ни у раванском случају. У равни је доказана еквивалентност разложиве једнакости и допунске једнакости ликова. Доказ су дали Фаркаш Бољаи 1832. и Гервин, аустријски математичар из Граца, 1833., независно један од другог, при чему је поменута теорема позната под називом Теорема Бољаи-Гервина. За случај просторних ликова, тј. у геометрији полиедара то је чувени *трећи Хилбертов проблем* изнет 1900. године на другом међународном конгресу математичара. Већ 1903. проблем је решио, мада веома сложено његов асистент Макс Ден. Исти проблем решио је руски математичар Кавен 1905., а знатно простије решио га је 1946. швајцарски математичар Хуго Хадингер.

Даље важи следећа теорема:

Теорема 14.1.1. *Ако су две фигуре Φ_1 и Φ_2 разложиво једнаке некој трећој фигури Φ_3 оне су и међусобно разложиво једнаке. Ако су две фигуре допунски једнаке некој трећој фигури, оне су и међусобно допунски једнаке.*

Доказ. На основу претпоставке може се уочити по једно разлагање фигура Φ_1 и Φ_2, тако да свако од ових разлагања одговара разлагању фигуре Φ_3 на фигуре подударне одговарајућим фигурама разлагања Φ_1 и Φ_2. Оба ова разлагања фигуре Φ_3 се додатним разлагањима појединих фигура могу довести до поклапања. Извршимо сада додатна разлагања фигура Φ_1 и Φ_2 тако да одговарају последњем разлагању фигуре Φ_3. То значи да су све фигуре разлагања фигура Φ_1 и Φ_2 подударне одговарајућим фигурама разлагања Φ_3. Због транзитивности подударности фигура следи да су све фигуре разлагања Φ_1 подударне одговарајућим фигурама разлагања Φ_2, тј. фигуре Φ_1 и Φ_2 су разложиво једнаке. Доказ другог дела обавља се без тешкоћа. $\square$

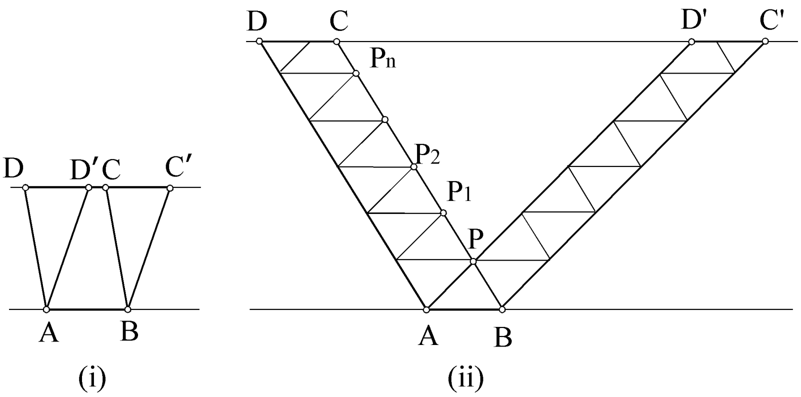
Коришћењем претходне теореме није тешко доказати да важе:

Теорема 14.1.2. *Релација разложиве једнакости ликова простора E^n је релација еквиваленције.*

Теорема 14.1.3. *Релација допунске једнакости ликова простора E^n је релација еквиваленције*

14.2 Разложива једнакост паралелограма и троуглова

Теорема 14.2.1. *Два паралелограма са једнаким основицама и једнаким висинама разложиво су једнака.*



Слика 14.1.

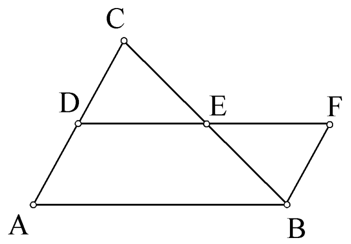
Доказ. Нека су $ABCD$ и $ABC'D'$ два паралелограма са једнаким основицама и једнаким одговарајућим висинама. Ако страница паралелограма AD' нема заједничких тачака страницом BC, троуглови $\Delta ADD'$ и $\Delta BCC'$ биће подударни, па ће самим тим и паралелограми $ABCD$ и $ABC'D'$ бити разложиво једнаки (Слика 14.1 (i)).

Нека је сада P заједничка тачка страница AD' и BC. Означимо са P_1, P_2,..., P_n тачке странице BC такве да је $\mathcal{B}(B, P, P_1, P_2, ..., P_n)$, $BP \cong PP_1 \cong P_1P_2 \cong ... \cong P_{n-1}P_n$ и $P_nC < BP$. Конструишимо кроз тачке P, P_1, P_2,..., P_n праве p, p_1, p_2,..., p_n паралелне правој AB (Слика 14.1 (ii)). Оне разлажу сваки од паралелограма $ABCD$ и $ABC'D'$ на $n + 2$ паралелограма. Они ће опет одговарајућим дијагоналама паралелним правама AD' и BC бити разложени на троуглове подударне троуглу ΔABP, и уколико је тачка P_n различита од тачке C на још два међусобно подударна троугла и два међусобно подударна четвороугла. Према Архимедовој аксиоми непрекидности, број n је коначан, па су по дефиницији паралелограми $ABCD$ и $ABC'D'$ разложиво једнаки. □

Такође интересантно је следеће тврђење

Теорема 14.2.2. *Сваки троугао разложиво је једнак известном паралелограму са истом основицом, и висином једнаком половини висине посматраног троугла.*

Доказ. Нека је дат троугао ΔABC (Слика 14.2) и нека су D и E редом средишта дужи AC и BC. Означимо са F тачку праве DE такву да је $\mathcal{B}(D,E,F)$. Тада су троуглови ΔDCE и ΔFBE подударни па су троугао ΔABC и паралелограм $ABFD$ разложиво једнаки. □



Слика 14.2.

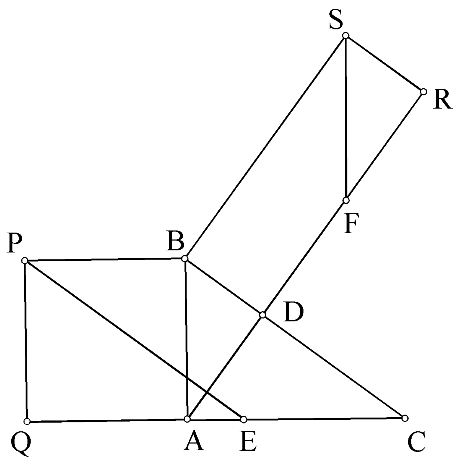
Као директну последицу теорема 14.2.1. и 14.2.2. добијамо

Теорема 14.2.3. *Два троугла са једнаким основицама и једнаким одговарајућим висинама су међу собом разложиво једнака.*

Интересантна је и следећа теорема

Теорема 14.2.4. *Квадрат, чија је једна страница AB катета правоуглог троугла ΔABC разложиво је једнак правоугаонику чија је једна страница подударна хипотенузи BC тог троугла, а друга страница је нормална пројекција катетее AB на хипотенузу BC.*

Доказ. Означимо са D подножје нормале из тачке A на хипотенузу BC. Нека су још $ABPQ$ и $BDRS$ разматрани квадрат и правоугаоник. Означимо са E тачку у којој права кроз тачку P паралелна правој BC сече праву AC, а са F тачку у којој права кроз тачку S паралелна правој AB сече праву AD (Слика 14.3). Тада



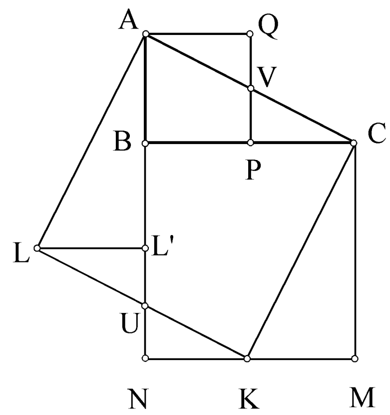
Слика 14.3.

су паралелограми $ABPQ$ и $CBPE$ разложиво једнаки према теореми 14.2.1., а паралелограми $CBPE$ и $ABSF$ подударни. Такође, паралелограми $ABSF$ и $BDRS$ су разложиво једнаки. Дакле, закључујемо да су квадрат $ABPQ$ и правоугаоник $BDRS$ разложиво једнаки. □

Теорему 14.2.4. називамо *Еуклидовом теоремом о разложивој једнакости.* Из ње непосредно следи једна од најстаријих и најзначајнијих теорема геометрије, Питагорина теорема о разложивој једнакости:

Теорема 14.2.5. *Квадрат чија је страница хипотенуза правоуглог троугла разложиво је једнак унији квадрата чије су странице катете тог троугла.*

Доказ. Нека је ΔABC правоугли троугао са правим углом код темена B. Не умањујући општост доказа, претпоставимо да је $AB \leq BC$ (Слика 14.4). Нека су затим $ACKL$, $BCMN$ и $ABPQ$ квадрати који се редом налазе са оних страна правих AC, BC и AB са којих су редом тачке B, K и C. Означимо са L' подножје нормале из тачке L на праву AN, а са U и V тачке у којима се секу парови правих KL и BN, PQ и CA редом. Тада су троуглови ΔUNK и ΔVPC, ΔAQV и $\Delta LL'U$, ΔCMK и $\Delta AL'L$ међусобно транслаторно подударни. Одатле по дефиницији следи да је квадрат $ACKL$ разложиво једнак унији квадрата $ABPQ$ и $BCMN$. □



Слика 14.4.

Теорема 14.2.6. *За произвољан троугао, а самим тим и за произвољан прост полигон, увек се може конструисати правоугли троугао који има једну катету 1, и који је са троуглом, односно полигоном, разложиво једнак.*

Доказ овог тврђења следи на основу теорема 14.2.3., 14.1.1. и Талесове теореме.

14.3 Мерење фигура у равни $\mathbf{E^2}$

Дефиниција 14.3.1. *Системом мерења равних фигура* називамо функцију s која свакој фигури ω неке колекције $\mathcal{K}$ равних фигура, придружује реалан број $s(\omega)$, при чему важи:

(i) Ако је $\omega \in \mathcal{K}$, онда је $s(\omega) \geq 0$,

(ii) Ако $\omega_1,\ \omega_2 \in \mathcal{K}$ и $\omega_1 \cong \omega_2$, тада је $s(\omega_1) = s(\omega_2)$,

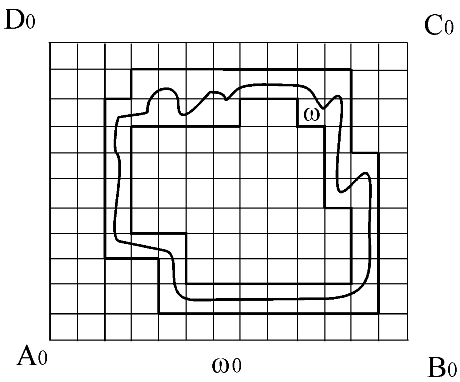
(iii) Ако $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathcal{K}$ и $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, онда $s(\omega_1) = s(\omega_2) + s(\omega_3)$,

(iv) Постоји квадратна површ ω_0 таква да је $s(\omega_0) = 1$.

Број $s(\omega)$ који у систему мерења s одговара фигури ω називамо *мером* или *површином фигуре* ω у систему s. Квадратну површ ω_0 називамо *јединичном.* Услове (i), (ii), (iii), (iv) називамо респективно условима: *ненегативности, инваријантности, адитивности и нормираности.*

Услови (i), (ii), (iii) и (iv) представљају аксиоме, а сама дефиниција је аксиоматска дефиниције површине неке површи. Осим аксиоматске постоји и конструктивна дефиниција мерења површи. Наиме, аксиоматска дефиниција не даје могућност налажења, тј. конструкције функције s која представља систем мерења равних фигура. Стога је неопходно приступити једном специфичном поступку којим се добија функција s. Аксиоматска дефиниција, којом се у геометрији уводи систем мерења равних фигура, има строго описни карактер. Њоме се једино истиче да је систем мерења равних фигура извесна функција s која испуњава извесне услове односно аксиоме (i) -(iv). Том приликом није било речи о егзистенцији функције s, о начину њеног конструисања нити о условима када је она једнозначно одређена.

Задатак је конструисати такву функцију s уколико она постоји и установити критеријуме мерљивости (квадрибилности) равних фигура у равни E^2.



Слика 14.5.

На слици 14.5 је представљена произвољна фигура ω равни E^2 ограничена простом затвореном линијом. Уочене су све квадратне површи које су унутар те линије и све квадратне површи које са тим ликом имају заједничких унутрашњих тачака.

Нека су у равни E^2 дати ограничена фигура ω и квадратна површ $\omega_0 = [A_0B_0C_0D_0]$. Поделомо сваку од суседних страница A_0B_0 и A_0D_0 површи ω_0 на једнак број, нпр. 10^k подударних дужии кроз деоне тачке конструишимо праве паралелне страницама те квадратне површи. Конструисане праве разлажу лик ω_0 на 10^{2k} међу собом подударних квадратних површи.

Нека је $\omega_k = [A_kB_kC_kD_k]$ било која од њих. Конструишимо у равни E^2 два система паралелних правих, таквих да је растојање између две суседне праве сваког система једнако страници квадратне површи ω_k и да праве одређене страницама те квадратне површи припадају тим системима правих. Добијена два система правих одређују једну квадратну мрежу $\mathcal{M}_k$ коју ћемо звати мрежом ранга k. Та мрежа разлаже раван E^2 на неограничено много квадратних површи које су подударне површи ω_k. Означимо са m_k укупан број квадратних површи мреже ω_k садржаних у фигури ω, а са m'_k укупан број квадратних површи мреже $\mathcal{M}_k$ које са површи ω имају заједничких унутрашњих тачака. Ако броју k дајемо респективно вредности $0, 1, \cdots$ у могућности смо да формирамо два бројна низа

$$m_0, \frac{m_1}{100}, \frac{m_2}{100^2}, \cdots \tag{14.1}$$

$$m'_0, \frac{m'_1}{100}, \frac{m'_2}{100^2}, \cdots \tag{14.2}$$

С обзиром да је $m_{i+1} \geq 100 m_i$ и $m'_{i+1} \leq 100 m'_i$ добијамо релације

$$m_0 \leq \frac{m_1}{100} \leq \frac{m_2}{100^2} \leq \cdots$$

$$m'_0 \geq \frac{m'_1}{100} \geq \frac{m'_2}{100^2} \geq \cdots$$

Према томе, (14.1) је неопадалући, а (14.2) нерастући низ. Осим тога је

$$\frac{m_i}{100^i} \leq \frac{m'_j}{100^j} \quad \text{za svako} \quad i, j = 0, 1, 2, \cdots \tag{14.3}$$

Заиста! Ако је $i = j$ тврђење следи непосредно. Ако је $i < j$ тада је $m_i \leq m_j \leq m'_j$, па је (14.3) у овом случају задовољено. Ако је $i > j$, тада је $m_i \leq m'_i \leq m'_j$, те релација (14.3) важи и у овом случају.

Дакле, низ (14.1) је ограничен са горње, а низ (14.2) са доње стране. Према томе, низови (14.1) и (14.2) су конвергентни. Нека је

$$\lim_{i \to \infty} \frac{m_i}{100^i} = s, \qquad \lim_{i \to \infty} \frac{m'_i}{100^i} = s'.$$

Дефиниција 14.3.2. Број s називамо *унутрашњом* а број s' *спољашњом мером фигуре* ω.

Из (14.3) следи да је $s \leq s'$. У општем случају s може бити и мање од s'. Од посебног је интереса искључиво случај $s = s'$.

Дефиниција 14.3.3. Фигура $\omega \in E^2$ је *квадрибилна* (*мерљива*) у Жордановом смислу ако за њу важи $s = s'$. У том случају број s називамо *мером* фигуре ω. Такође број s називамо *Жордановом мером* или *површином* фигуре ω.

Из дефиниције непосредно следи да је равна фигура ω квадрибилна у Жордановом смислу само ако је $s - s' = 0$ тј. ако је

$$\lim_{i\to\infty} \frac{m_i' - m_i}{100^i} = 0.$$

На тај начин је доказана следећа теорема

Теорема 14.3.1. *На класи квадрибилних фигура у равни E^2 постоји функција s која задовољава аксиоме* (1) – (4).

Та функција је у ствари функција која је горе конструисана. Фигури $\omega \subset E^2$ за коју је $s = s'$ додељујемо број $s(\omega)$ за који утврдјујемо да задовољава аксиоме (1)-(4).

Теорема 14.3.2. *Ако су a и b дужине страница неке правоугаоне површи $\omega \in E^2$ тада је $s(\omega) = ab$.*

Доказ. Без умањења општости претпоставимо да су странице правоугаоне површи $\omega = ABCD$ паралелне страницама квадратне површи $\omega_0 = A_0B_0C_0D_0$. Нека је μ_i мрежа равни E^2 дефинисана у односу на површ ω_0. Мрежа μ_i одређена је правама AB и AD и представља градијацију ранга i. Означимо са a_i и b_i бројеве одсечака градијације μ_i који припадају страницама AB и AD а са a_i' и b_i' бројеве одсечака које са страницама AB и AD имају унутрашњих заједничких тачака. Тада је $a_i' \leqslant a_i + 2$ и $b_i' \leqslant b_i + 2$. Ако означимо са m_i укупан број квадратних површи мреже μ_i које припадају површи ω а са m_i' укупан број мреже μ_i' које са површи ω имају заједничких унутрашњих тачака биће $m_i = a_ib_i$, $m_i' = a_i'b_i'$ и

$$\frac{m_i' - m_i}{100^i} \leqslant \frac{(a_i+2)(b_i+2) - a_ib_i}{100^i} \leqslant \frac{2}{10^i}(a + b + \frac{2}{10^i}).$$

Тада је
$$\lim_{i\to\infty}\frac{m_i'-m_i}{100^i}=0$$
па је површ ω квадрибилна у Жордановом смислу. Такође важи
$$\frac{a_i}{10^i}\leqslant a\leqslant\frac{a_i'}{10^i},\qquad \frac{b_i}{10^i}\leqslant b\leqslant\frac{b_i'}{10^i}.$$
Одавде је
$$\frac{a_ib_i}{100^i}\leqslant ab\leqslant\frac{a_i'b_i'}{100^i}.$$
Преласком на граничне вредности кад $i\to\infty$ налазимо да је $s(\omega)=ab$. □

На тај начин можемо одредити површину било које полигонске површи разлагањем на троугаоне површи.

Дефиниција 14.3.4. Геометријски лик $\omega\subset E^2$ је *квадрибилан* ако за свако $\varepsilon>0$ постоје полигонске површи ω' и ω'' такве да је
$$\omega'\subset\omega\subset\omega''\quad\text{и}\quad s(\omega'')-s(\omega')<\varepsilon.$$

Наведена дефиниција представља општу дефиницију квадрибилности произвољног геометријског лика ω у равни E^2. У овом случају поставља се питање одређивања површине произвољног геометријског лика у равни E^2.

Дефиниција 14.3.5. Означимо са μ' скуп свих полигонских површи ω' које припадају лику ω а са μ'' скуп свих полигонских површи ω'' које садрже лик ω. површином лика ω називамо број $s(\omega)$ при чему је
$$s(\omega)=\underset{\omega'\in\mu'}{sup}\ s(\omega')=\underset{\omega''\in\mu''}{inf}\ s(\omega'').$$
Број $\underset{\omega'\in\mu'}{sup}\ s(\omega')$ називамо доњом или унутрашњом Жордановом мером површи ω, док број $\underset{\omega''\in\mu''}{inf}\ s(\omega'')$ називамо горњом или спољашњом Жордановом мером површи ω.

Дакле број $s(\omega)$ ће представљати површину лика ω само ако су доња и горња Жорданова мера лика ω једнаке. Није тешко установити да је претходна дефиниција специјалан случај ове дефиниције која омогућује да установимо квадрибилност и одредимо површину било ког лика равни E^2.

14.4 Мерење фигура у простору $\mathbf{E}^3$

Дефиниција 14.4.1. *Системом мерења просторних фигура* називамо функцију v која свакој фигури Φ неког скупа $\mathcal{K}$ фигура простора E^3 придружује реалан број $v(\Phi)$ при чему важи:

(i) Ако је $\Phi \in \mathcal{K}$, онда је $v(\Phi) \geq 0$,

(ii) Ако $\Phi_1,\ \Phi_2 \in \mathcal{K}$ и $\Phi_1 \cong \Phi_2$, тада је $v(\Phi_1) = v(\Phi_2)$,

(iii) Ако $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \in \mathcal{K}$ и $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$, онда $v(\Phi_1) = v(\Phi_2) + v(\Phi_3)$,

(iv) Постоји коцка $\Phi_0 \in \mathcal{K}$, таква да је $v(\Phi_0) = 1$.

Број $s(\Phi)$ који у систему мерења v одговара фигури Φ називамо мером или запремином фигуре Φ у систему v. Коцку Φ_0 називамо *јединичном.* Услове (i), (ii), (iii), (iv) називамо респективно условима: ненегативности, инваријантности, адитивности и нормираности.

Аналогно поступку у E^2 изводи се конструкција функције v у простору E^3. У разматраним низовима ће се уместо 10^2 појављивати 10^3, док су докази аналогни. Запремину налазимо конструктивним поступком решетака у простору E^3. Читав тај поступак представља у ствари дефинисање функције v конструктивним путем за разлику од претходно дефинисаног аксиоматског заснивања функције v при чему питања егзистенције и ефективног поступка конструкције нису обухваћена аксиоматском дефиницијом.

Конструисање функције v омогућава одређивање запремина паралелепипеда и призме, док се запремина пирамиде не може тако добити, већсе добија универзалнијом методом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, *Основания геометрии*, Издательство Наука, Москва, 1987.

[2] Т. Анђелић, *Елементарна геометрија*, Техничка књига, Београд, 1965.

[3] С. Л. Анатольевич *Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца*, ГИФМЛ, Москва, 1961.

[4] И. Я. Бакельман, *Вышая геометрия*, Издательство Просвещение, Москва, 1967.

[5] С. В. Бахвалов, *Основания геометрии*, Вышая школа, Москва, 1972.

[6] K. Borsuk and W. Szmielew, *Fondations of Geometry*, North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1960.

[7] В. Варићак, *Први оснивачи нееуклидске геометрије*, Рад. Југ. Акад. Знан. Ум. 169(1907), 110–194.

[8] H. Weil, *Symmetry*, Princeton university Press, 1952.

[9] H. W. Guggenheimer, *Plane geometry and its groups*, Holden-Day, San Francisko, 1967.

[10] Еуклид, *Еуклидови елементи*, Прва књига, превод А. Билимовић, Научна књига, Београд, 1949.

[11] Еуклид, *Еуклидови елементи*, Друга књига, превод А. Билимовић, Научна књига, Београд, 1950.

[12] Н. В. Ефимов, *Вышая геометрия*, издание пятое, Наука, Москва, 1971.

[13] Н. В. Јефимов, *Виша геометрија*, Научна књига, Београд, 1948.

[14] P. Yale, *Geometry and Symmetry*, Holden-Day, 1968.

[15] Д. Лопандић, *Геометрија*, Научна књига, Београд, 1979.

[16] Д. Лопандић, *Збирка задатака из основа геометрије са решењима*, Природно-математички факултет у Београду, 1980.

[17] З. Лучић, *Еуклидска и хиперболичка геометрија*, Графити и Математички факултет Београд, 1994.

[18] С. Минтаковић, *Аксиоматска изградња геометрије*, Школска књига, Загреб, 1962.

[19] С. Минтаковић, *Нееуклидска геометрија Лобачевског*, Школска књига, Загреб, 1972.

[20] А. В. Погорелов, *Предавања из основа геометрије*, Завод за издавање уџбеника, Београд, 1963.

[21] А. В. Погорелов, *Элементарная геометрия*, Издательство Наука, Москва, 1977.

[22] М. Првановић, *Нееуклидске геометрије*, Универзитет у Новом Саду, Нови Сад, 1974.

[23] М. Првановић, *Основи геометрије*, Грађевинска књига, Београд, 1987.

[24] Пуцељ Иван, *Неевклидичне геометрије*, Љубљана, 1969.

[25] М. Радојчић, *Општа математика*, Научна књига, Београд, 1950.

[26] М. Радојчић, *Елементарна геометрија*, Научна књига, Београд, 1961.

[27] М. Станковић, *Основи геометрије*, Природно-математички факултет, Ниш, 2006.

[28] М. Станковић, М. Златановић, *Нееуклидске геометрије*, Природно-математички факултет, Ниш, 2006.

[29] Р. Тошић, В. Петровић, *Збирка задатака из основа геометрије*, Грађевинска књига, Београд, 1982.

[30] А. И. Фетисов, *О еуклидској и нееуклидским геометријама*, Школска књига, Загреб, 1981.

[31] Д. Хилберт, *Osnove geometrije*, Математички институт САНУ, Београд, 1957.

[32] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry revisited*, Toronto-New York, 1967.

[33] H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Fourth ed., Springer, Berlin Heidelberg New York, 1980.

[34] Н. Чепинац, *Геометрија за више разреде гимназије, Стереометрија*, Знање, Београд, 1951.

ИНДЕКС ПОЈМОВА