DISKRETNA MATEMATIKA

Završni ispit, 10.09.2019.

NAPOMENA. Potrebno je osvojiti minimalno 17 poena na zadacima označenim sa $*$.

1. a)*(1) Definisati permutacije bez ponavljanja skupa od n elemenata;
b)*(1) Napisati sve permutacije sa ponavljanjem familije $\{a, a, c, c\}$;
c) (2) Odrediti 96. permutaciju bez ponavljanja u leksikografskom poretku skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;
d) *(1) Napisati sve kompozicije broja 4.

2. Navesti formulu i dati odgovarajući dokaz za :
a)(4) Broj kombinacija sa ponavljanjem $k-te$ klase skupa od n elemenata;
b) (4) Ukupan broj kompozicija broja n.

3. Dopuni:
a)* (1) Za broj $p > 1$ kažemo da je prost ako
b)* (1) Ceo broj a je deljiv celim brojem b ($b \neq 0$) ako
c)* (1) Neka je $m > 1$ prirodan broj. Celi brojevi a i b su kongruentni po modulu m ako
d) Neka je $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ i $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$, $\alpha_i, \beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Tada je

i) *(1) $(a, b) =$
ii) *(1) $[a, b] =$
iii) *(1) $\tau(a) =$
(gde je $\tau(a)$ ukupan broj svih pozitivnih delilaca broja a).

4. Dokazati:

a)(4) Ako je $(a, m) = 1$, tada je $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ (Ojlerovu teorema)

b)(4) $ax \equiv ay \pmod{m}$ ako i samo ako je $x \equiv y \pmod{\frac{m}{(a,m)}}$.

5. a)*(2) Dati definiciju regularnog i kompletnog grafa;
b)*(4) Nacrtati grafove P_5, C_5, $K_{3,3}$, K_5 i odrediti hromatski broj svakog od njih;
c)*(1) Dati definiciju Hamiltonovog puta (konture);
d)*(3) Utvrditi da li su grafovi K_4, $K_{2,3}$ i $K_{1,3}$ Ojlerovi.

6. Dopuniti:
a) *(2) (Ojlerova teorema za planarne grafove) Povezan planaran graf G deli ravan na $f = \ldots$
b)*(1) Ako se u stablo uključi proizvoljna grana između nesusednih čvorova, dobija se graf ...
c)*(2) Zbir stepena svih čvorova grafa jednak je ...

7. Dokazati:
a)(4) U povezanom planarnom grafu postoji bar jedan čvor stepena manjeg od 6.
b)(4) Ako je graf G nepovezan graf, tada je njegov komplement $\overline{G}$ povezan, tj. bar jedan od grafova G i $\overline{G}$ je povezan.