

LINEARNE DIOFANTOVE JEDNAČINE

Diofant iz Aleksandrije bio je starogrčki matematičar koji je živio sredinom 3. veka nove ere. Proučavao je jednačine sa celobrojnim (racionalnim koeficijentima) čija su rešenja celi brojevi. Njegovo najznačajnije delo, **Aritmetika**, sastojala se od 13 knjiga, od kojih je samo šest sačuvano, i bila je verovatno najstariji naučni tekst u kome se sistematski izlažu različita znanja iz aritmetike (teorije brojeva). Nazivaju ga "ocem aritmetike", jer je mnogo doprineo napretku algebre (pre svega aritmetike) upotrebom simbola za veličine, matematičke operacije i odnose, a pre toga su ove veličine bile opisivane rečima.

Postoji zadatak koji kao rešenje daje broj Diofantovih godina, a to je upisano na njegovom grobu:

"Putniče! Ovde je sahranjen Diofant. Brojevi govore koliko je bio dug njegov život. Šestinu njegovog života čini prekrasno detinjstvo, a dvanaestinu čini njegova mladost. Sedminu svog života Diofant je proveo u braku bez dece. Prošlo je još pet godina dok mu bog braka i sreće nije podario sina. Sudbina je htela da sin poživi dva puta manje od svog oca. Još četiri godine poživio je starac u dubokom bolu za izgubljenim sinom. Koliko je živio Diofant?"

Linearna Diofantova jednačina sa dve promenljive je oblika

$$ax + by = c, \quad a, b, c \in \mathbf{Z}, \quad ab \neq 0.$$

ZADACI

1. Rešiti jednačinu $39x - 22y = 10$ u skupu celih brojeva.
2. Odrediti sva rešenja jednačine $27x + 59y = 20$ ako su x i y celi brojevi.
3. Na koliko načina se pomoću sudova od 2 i 7 litara može napuniti bure čija je zapremina 1234 litara? Koji je najbrži, a koji najsporiji način da se to uradi?
4. Devojka Šeherezada je iz noći u noć sultanu pričala po 3 ili po 5 bajki. Za koliko je najviše noći mogla da ispriča 1001 bajku? Koliko različitih rešenja postoji?
5. Na skladištu se nalaze ekseri upakovani u sanduke od 16, 17 i 40 kilograma. Kako, ne otvarajući sanduke, isporučiti kupcu tačno 100 kg eksera?
6. U jednoj knjižari olovka košta pola dinara, sveska jedan dinar, a knjiga pet dinara. Na koliko načina se za 100 dinara može kupiti tačno sto predmeta (olovaka, sveski ili knjiga)?
7. U skupu celih brojeva rešiti jednačine:
a) $18x^2 - 33y^2 = 44444$ b) $7x^2 - 3y^2 = 17$
8. Odrediti prirodne brojeve x i y tako da je:
a) $x^2 + 4y^2 = 244$ b) $5x^2 + 3y^2 = 1033$
9. Dokazati da se kocka sa ivicom dužine 13 može iseći na 1995 manjih kocki sa ivicama dužine 1, 2 i 3. Koliko se pri tome dobija manjih kocki sa ivicom dužine 3?
10. U sobi se nalaze stolice sa 3 ili sa 4 noge. Kada na stolice sednu ljudi, u sobi je ukupno 69 nogu. Koliko u sobi ima ljudi?

11. U xOy koordinatnoj ravni data je prava $4x + 7y = 1998$. Koliko tačaka na datoj pravoj imaju obe koordinate celobrojne i pripadaju prvom kvadrantu koordinatne ravni?
12. Tačka $A(32, 76)$ spojena je sa koordinatnim početkom O . Koliko tačaka na duži AO ima obe koordinate koje su prirodni brojevi?
13. Data je jednačina $8x + 3y = 2013$. Neka su $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ parovi prirodnih brojeva koji zadovoljavaju datu jednačinu. Izračunaj zbir $x_1 + x_2 + \dots + x_n$.