



УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ



ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Вишекритеријумска оптимизација

Хеуристичке методе оптимизације

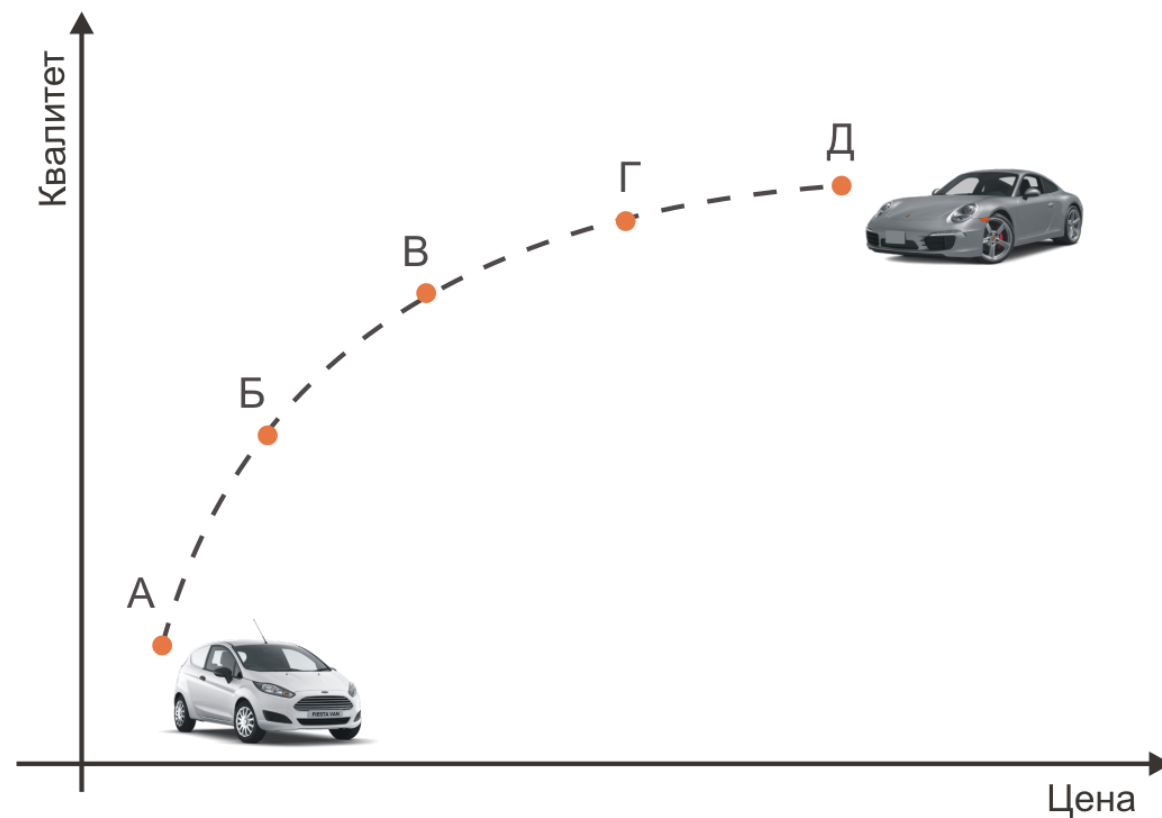
ПРВИ ДЕО

УВОД

ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКА ОПТИМИЗАЦИЈА - ВКО

Истовремена оптимизација неколико несамерљивих и често супротстављених циљева.

Одређивање једног или више оптималних решења оваквих проблема, назива се вишекритеријумска оптимизација - ВКО (Multiobjective Optimization Problems- MOPs).



КЛАСИЧАН ПРИСТУП

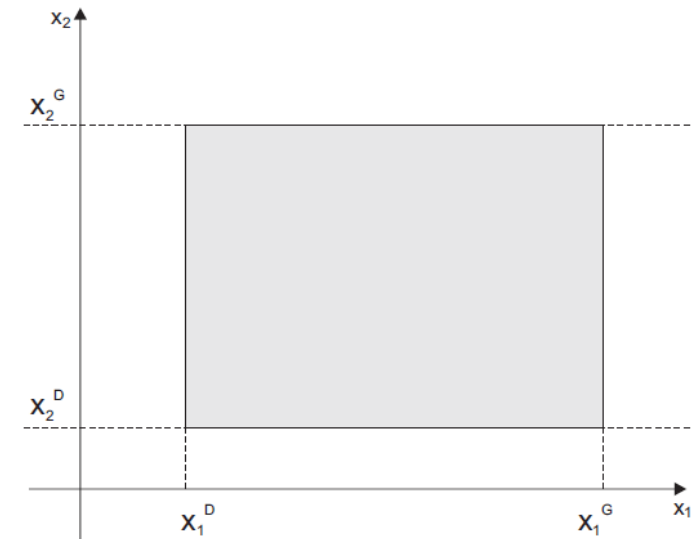
- Вештачко свођење на проблеме једнокритеријумске оптимизације.
- Један од следећа два приступа:
 - све функције циља се комбинују у једну функцију коришћењем знања о проблему који се решава,
 - једна функција се задржава на месту функције циља, а остале функције циља се премештају у скуп ограничења.
- Кључни недостаци:
 - зависност решења проблема од приоритета додељеним функцијама циља.
 - само једно оптимално решењем.
- Важно је наћи што је више могуће таквих оптималних решења која представљају компромис између различитих циљева оптимизације.

ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКА ОПТИМИЗАЦИЈА (ВКО)

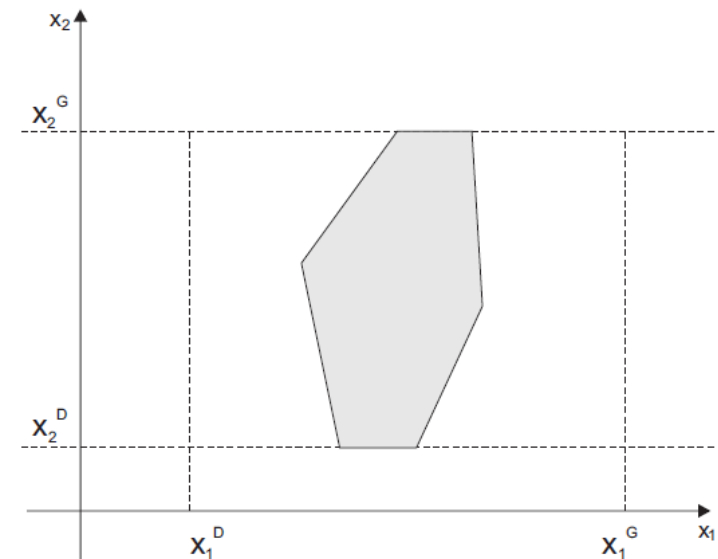


ФОРМУЛАЦИЈА ПРОБЛЕМА ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКЕ ОПТИМИЗАЦИЈЕ

$$\begin{array}{lll} \text{Одредити } \min / \max & f_m(\mathbf{x}) & m = 1, 2, \dots, M \\ \text{тако да} & g_j(\mathbf{x}) \leq 0 & j = 1, 2, \dots, J \\ & h_k(\mathbf{x}) = 0 & k = 1, 2, \dots, K \\ & x_i^D \leq x_i \leq x_i^G & i = 1, 2, \dots, n \end{array}$$



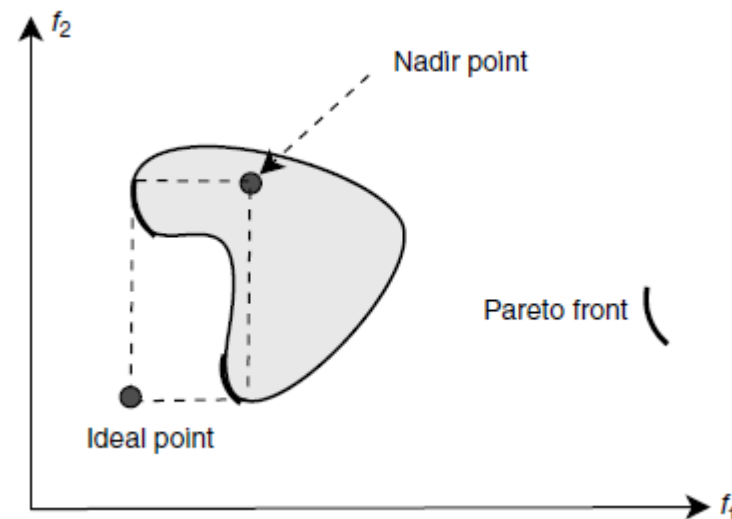
a)



ИДЕАЛНА И НАДИР ТАЧКА

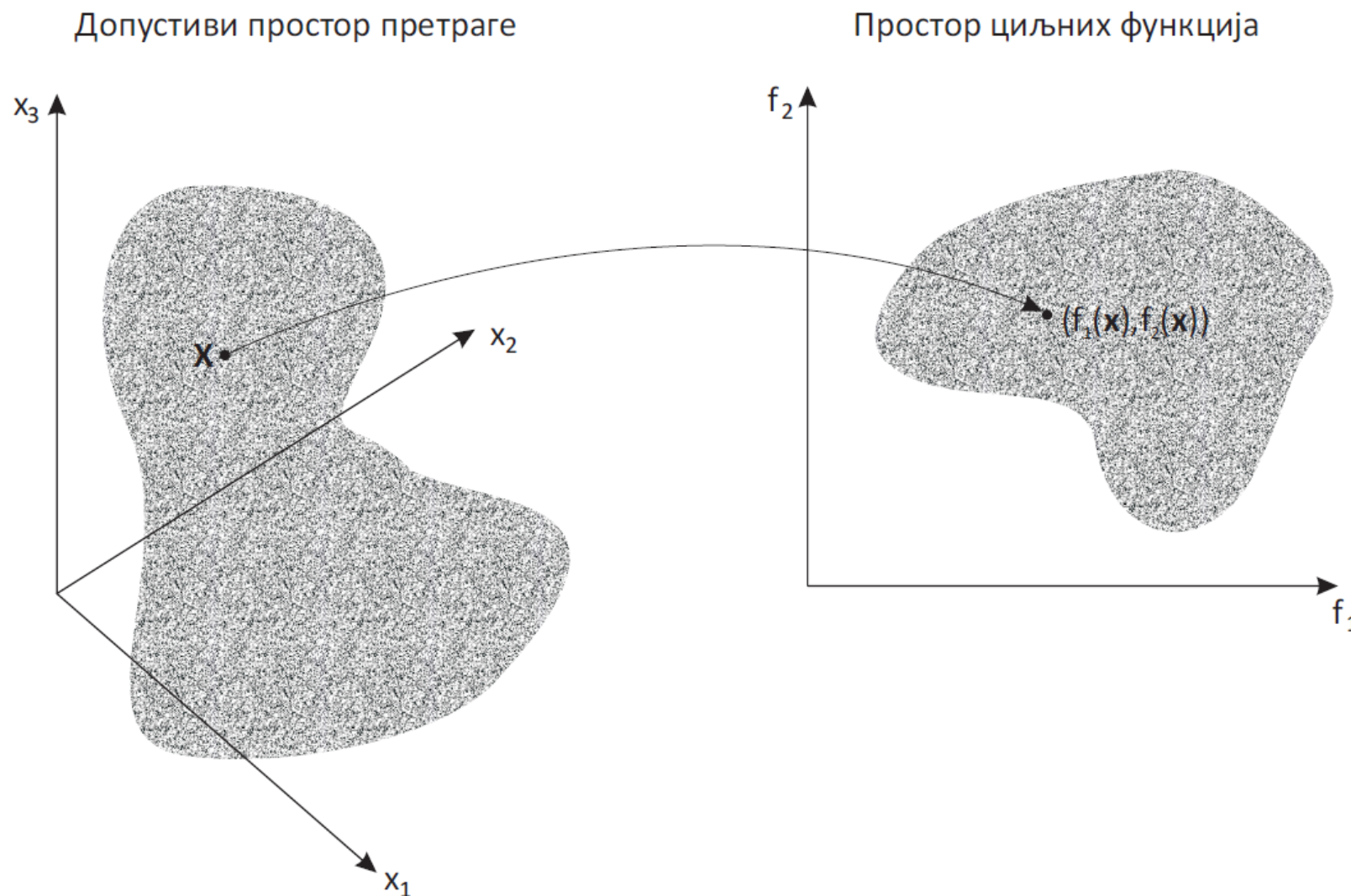
Идеална тачка. Тачка $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_M^*)$ је идеални вектор ако минимизује сваку циљну функцију f_m тако да је $y_m^* = \min f_m(x) \ m = \overline{1, M}$

Надир* тачка. Тачка $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_M^*)$ је надир тачка ако максимизује сваку циљну функцију f_m за тачке из Парето скупа тако да је $y_m^* = \max f_m(x), x \in \mathcal{P}^*, m = \overline{1, M}$

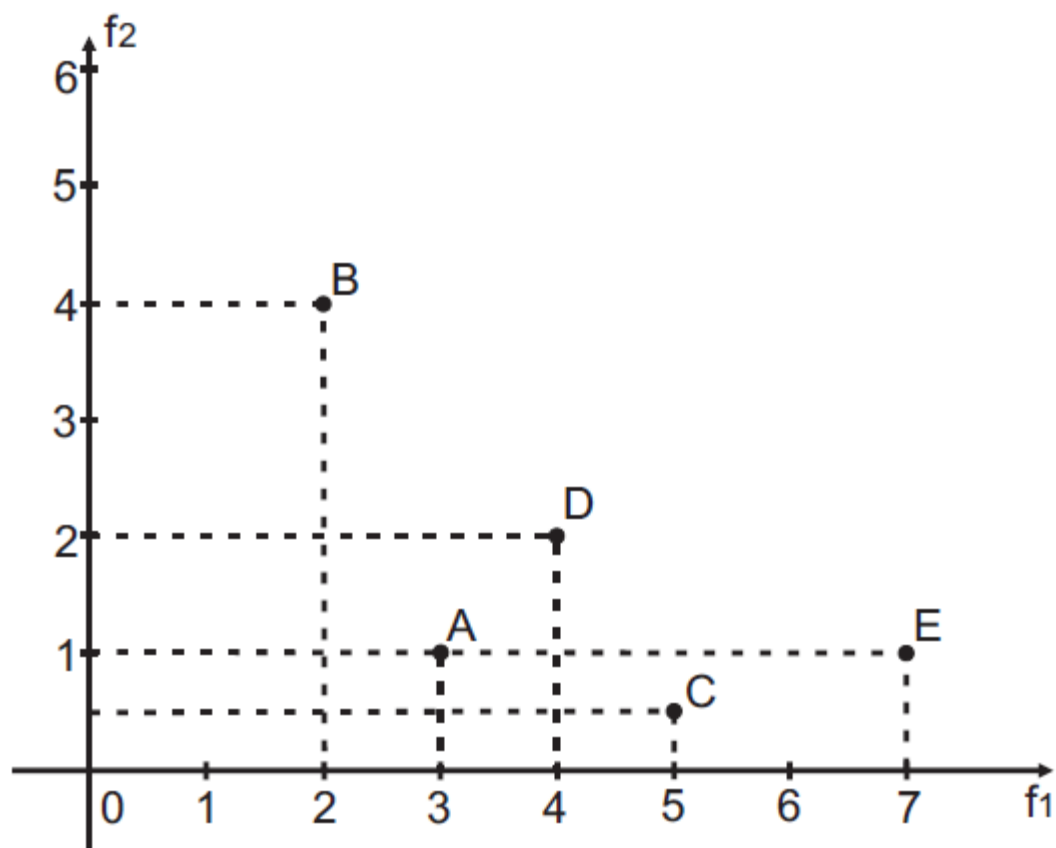


*In topography, a nadir is a point on a surface that is lower in elevation than all points immediately adjacent to it.

ПРЕСЛИКАВАЊЕ ДОПУСТИВОГ ПРОСТОРА ПРЕТРАГЕ У ЦИЉНИ ПРОСТОР



ПРИМЕР

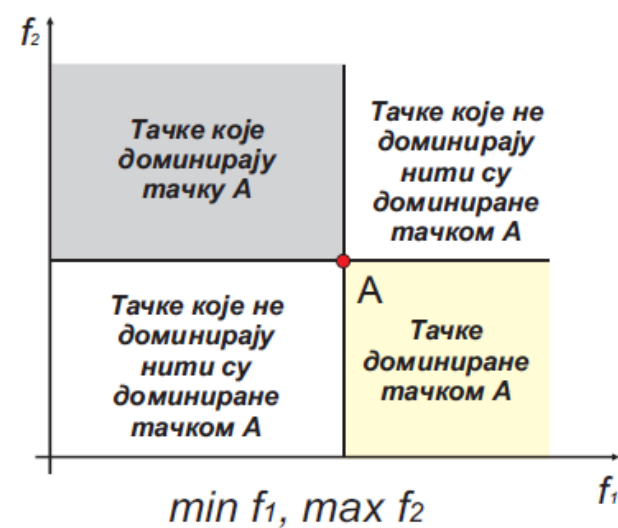
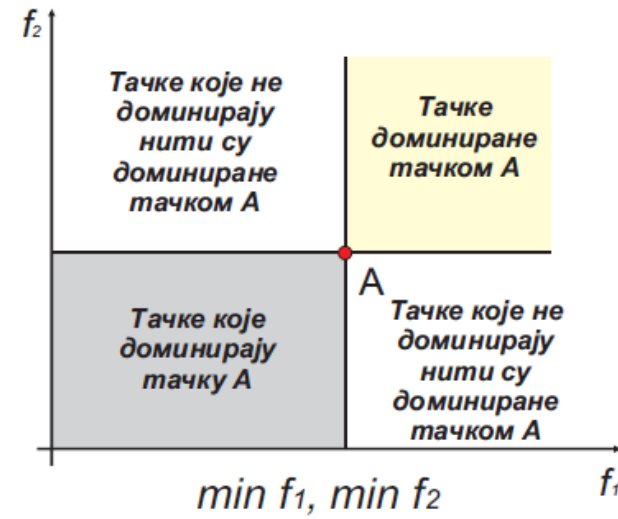
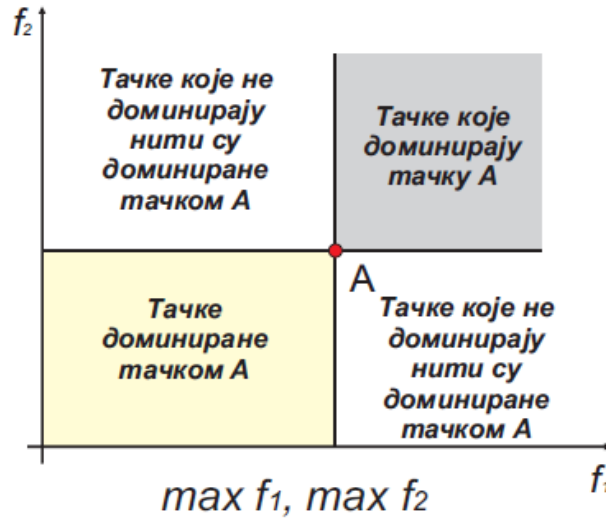


Дефиниција 1 (Релација доминације) Вектор $\vec{x}_1$ доминира вектор $\vec{x}_2$ (у ознаци $\vec{x}_1 \succ \vec{x}_2$) ако је за сваку функцију циља вектор $\vec{x}_1$ бар подједнако добар као вектор $\vec{x}_2$ и ако постоји бар једна функција циља за коју је вектор $\vec{x}_1$ строго бољи него вектор $\vec{x}_2$.

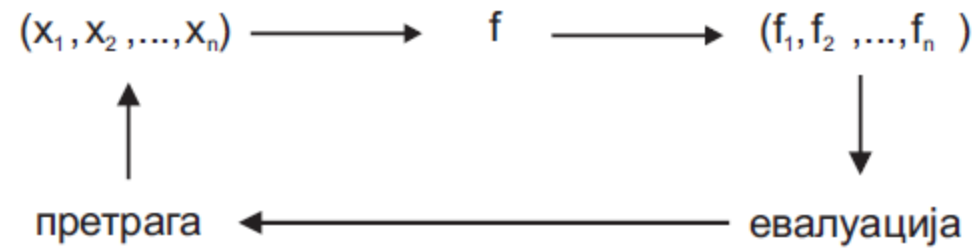
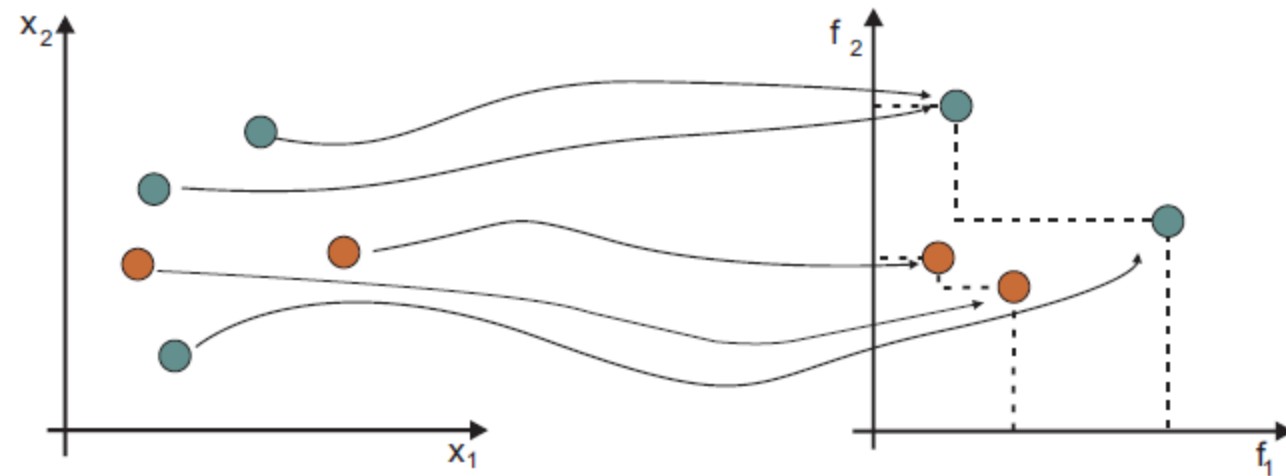
Дефиниција 2 (Недоминирани скуп) У скупу решења P , подскуп недоминираних решења P' чине она решења из P која нису доминирана ни једним чланом скупа P .

Дефиниција 3 (Глобални Парето оптимални скуп) Недоминирани скуп решења читавог допустивог простора претраге је глобални Парето оптимални скуп.

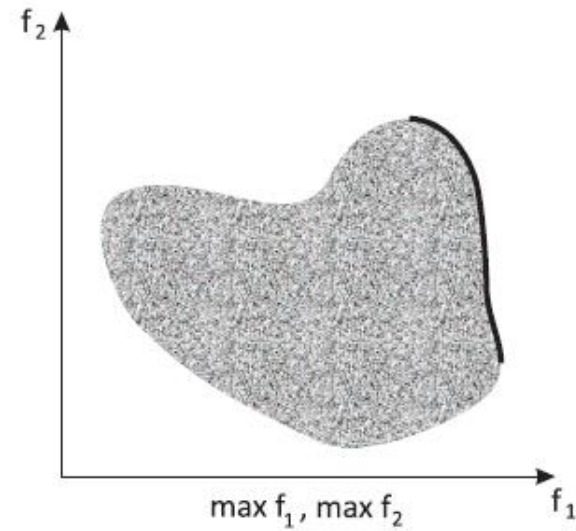
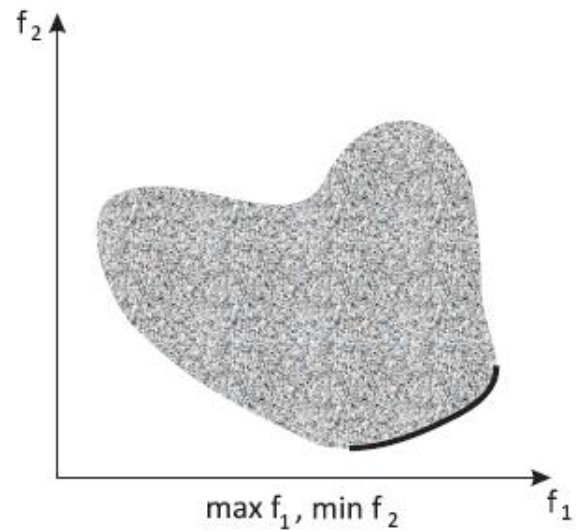
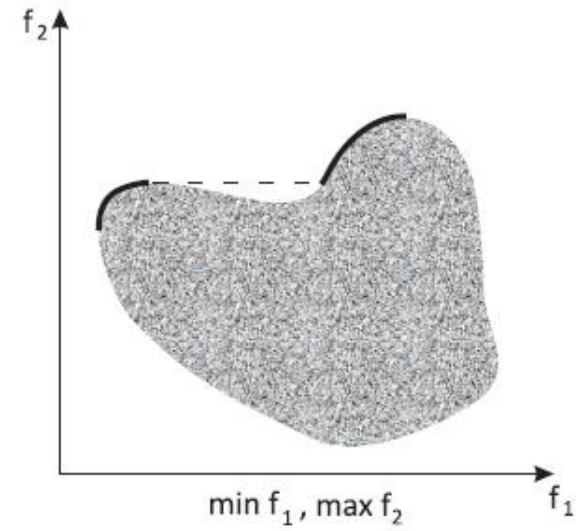
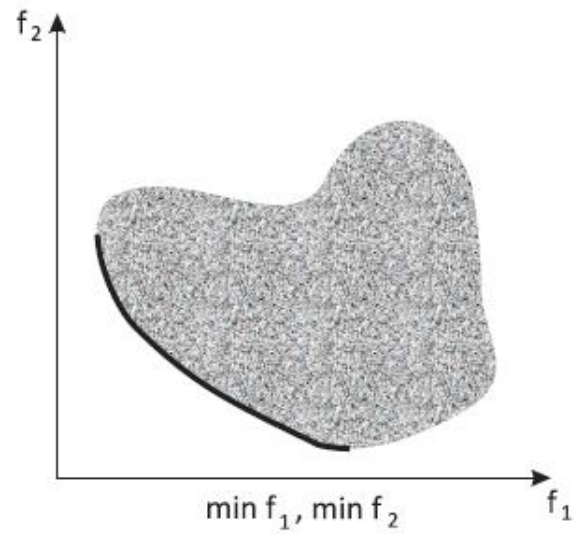
ПОЛОЖАЈ ОБЛАСТИ ДОМИНАЦИЈЕ



Парето скуп ● Парето фронт
 Апроксимација Парето скупа ● Апроксимација Парето фронта



ПАРЕТО ОПТИМАЛНА РЕШЕЊА ЗА ЧЕТИРИ МОГУЋЕ КОМБИНАЦИЈЕ ДВЕ ЦИЉНЕ ФУНКЦИЈЕ



ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКИ ГЕНЕТСКИ АЛГОРИТМИ – ВКГА

- Ефективан и поуздан метод за решавање сложених оптимизационих проблема
- Одређивање оптималних решења се заснива на природној селекцији
- ВКГА (*Multiobjective GA - MOGA*) настају прилагођавањем класичног ГА за решавање проблема ВКО
- Током једног извршавања може да пронађе читав скуп Парето оптималних решења

- Приликом развоја ВКГА јављају се два кључна проблема:
- Одабир функције прилагођености и селекције јединки, којима би се претрага решења усмеравала према Парето-оптималном скупу.
- Одржавање различитости у популацији да би се спречила превремена конвергенција и постигло широко простирање недоминираног скупа решења као и равномерна распоређеност решења унутар скупа.

СТРАТЕГИЈЕ ЕВАЛУАЦИЈЕ ЈЕДИНКИ У ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКИМ ГЕНЕТСКИМ АЛГОРИТМИМА

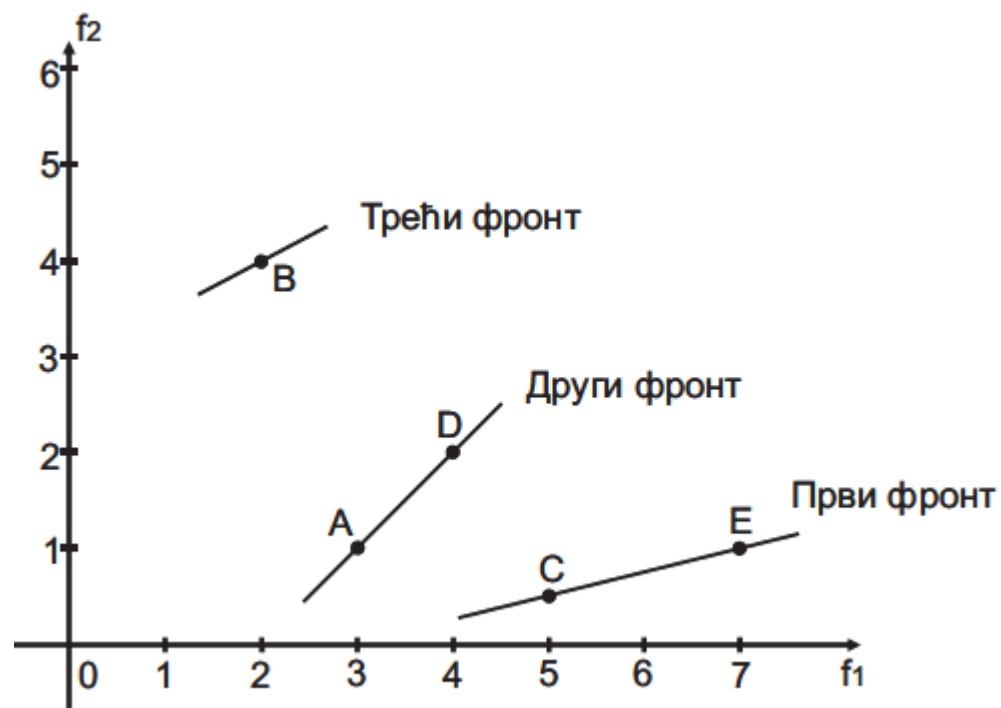
- Агрегацијска стратегија

$$\min z = w_1 z'_1(x) + w_2 z'_2(x) + \dots + w_K z'_K(x)$$

- Критеријумска стратегија

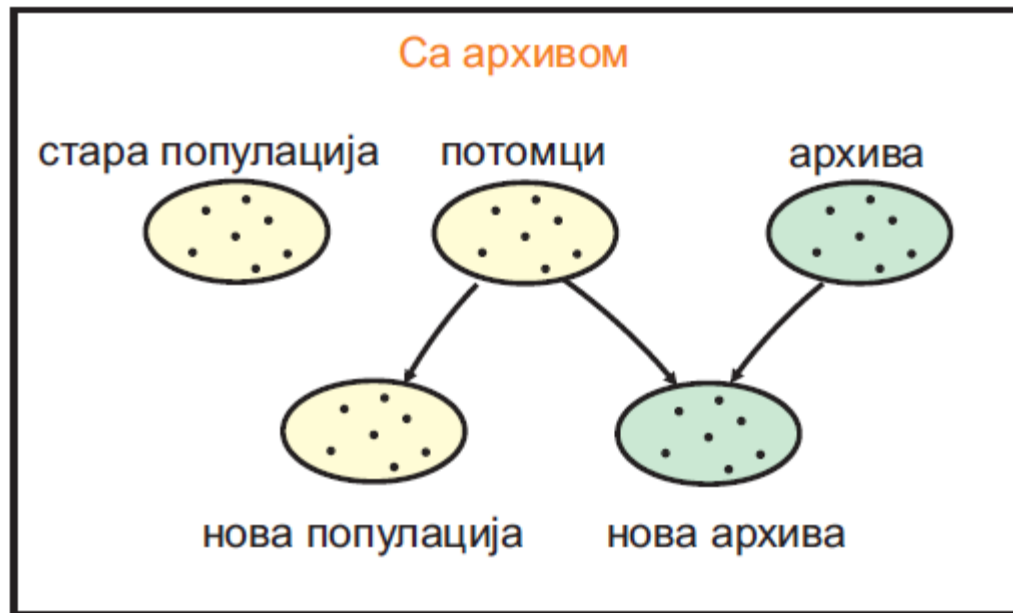
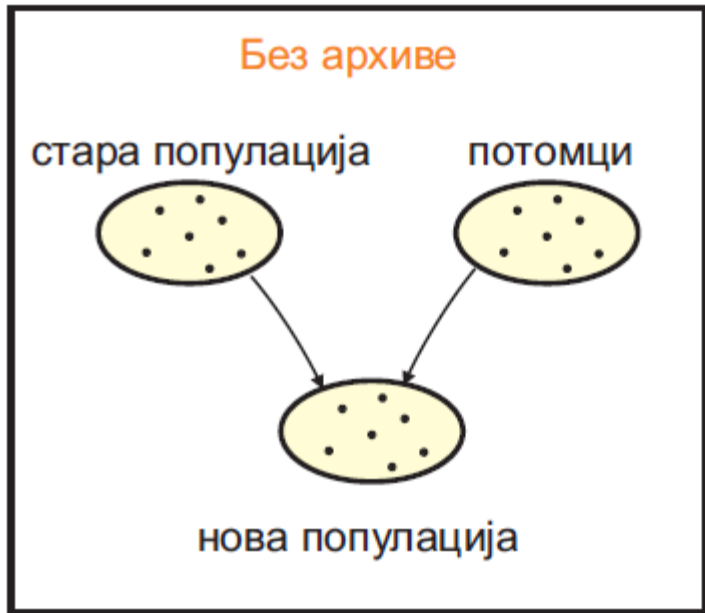
VEGA (Vector Evaluated GA)

- Парето рангирање



- Елитизам представља копирање одређеног броја најбољих јединки из тренутне у наредну генерацију чиме се решава проблем губљења добрих решења услед особине оператора селекције да насумично одабира решења за укрштање.
- Код ВКО имамо скуп елитних Парето оптималних решења, који често може да буде готово исте величине као и цела популација.
- Рани ВКГА нису примењивали елитизам, међутим резултати истраживања указују да ВКГА који користе елитистичке стратегије имају тенденцију да надмаше своје неелитистичке пандане.

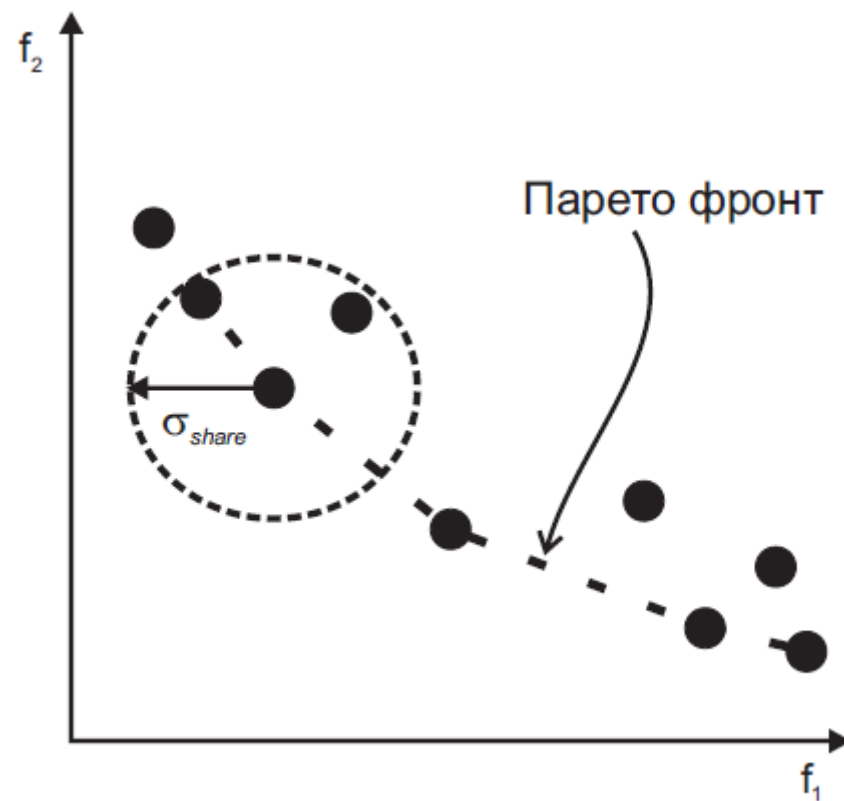
ДВА МОГУЋА НАЧИНА ЗА ПРИМЕНУ ЕЛИТИЗМА



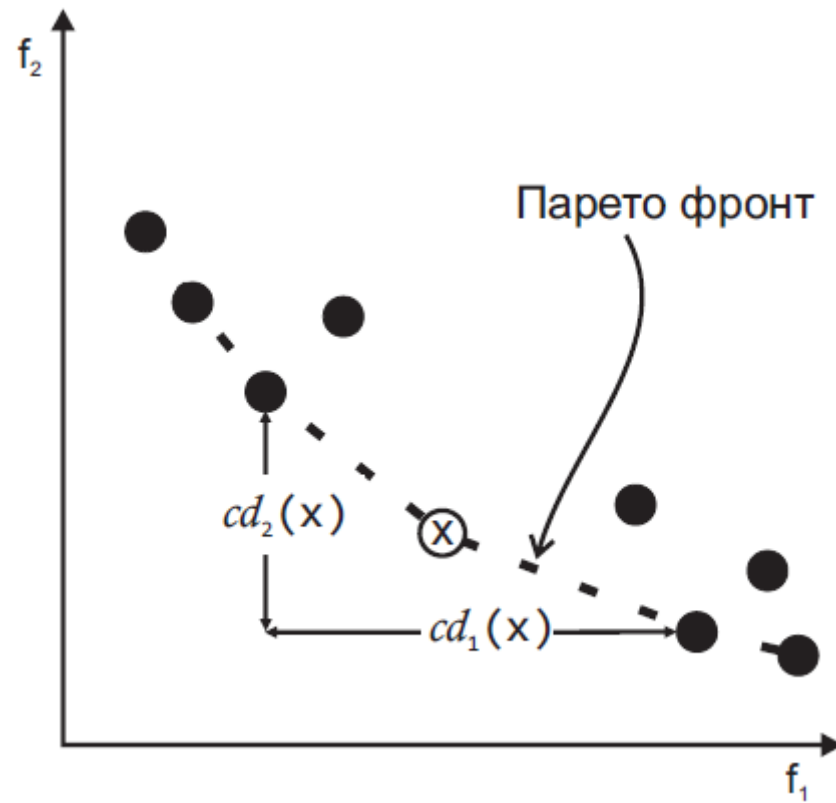
ОДРЖАВАЊЕ РАЗНОЛИКОСТИ РЕШЕЊА У ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКИМ ГЕНЕТСКИМ АЛГОРИТМИМА

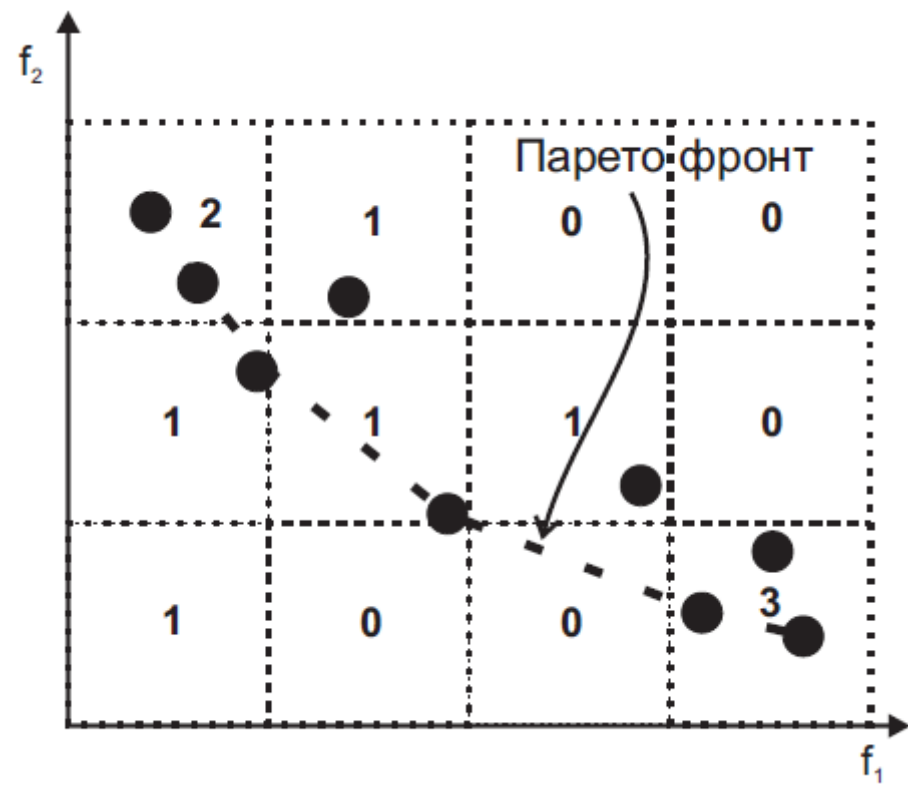
- Дељење степена прилагођености (Fitness sharing)
- Растојање до нагомилавања (Crowding distance)
- Густина ћелија

ДЕЉЕЊЕ СТЕПЕНА ПРИЛАГОЂЕНОСТИ (FITNESS SHARING)



РАСТОЈАЊЕ ДО НАГОМИЛАВАЊА (CROWDING DISTANCE)





NSGA-II АЛГОРИТАМ

- Non-dominated Sorting Genetic Algorithm
- Генетски алгоритам заснован на сортирању на основу недоминираности решења (број II означава да је реч о модификацији NSGA алгоритма)
- NSGA-II алгоритам је осмишљен са циљем да се превазиђу три особине његовог претходника које су биле критиковане:
 - $O(MN^3)$ временска сложеност (где је M број функција циља, а N величина популације),
 - неелитистички приступ
 - потреба да корисник одређује параметар σ_{share}

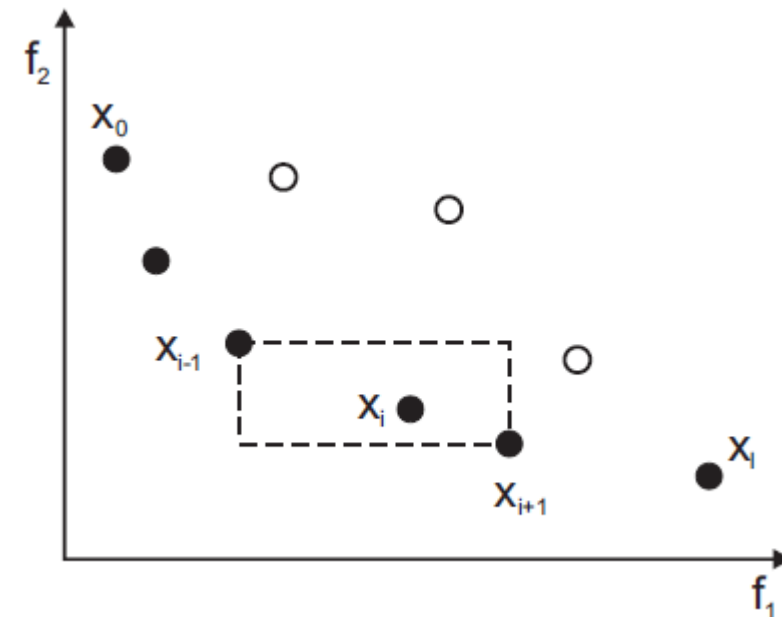
СОРТИРАЊЕ ПОПУЛАЦИЈЕ ПО СКУПОВИМА НЕДОМИНИРАНИХ РЕШЕЊА

```
1 Za svako resenje  $x_i \in P$ 
2 {
3    $n_i := 0, S_i := \emptyset$ 
4
5   Za svako resenje  $x_j \in P, j \neq i$ 
6   {
7     Ako  $(x_i \preceq x_j)$  onda
8        $S_i := S_i \cup x_j$ 
9     U suprotnom
10       $n_i := n_i + 1$ 
11   }
12   Ako  $(n_i = 0)$  onda
13      $F_1 := F_1 \cup x_i$ 
14   }
15  $k := 1$  //brojac frontova
16
```

```
17 Dok je  $F_k \neq \emptyset$ 
18 {
19    $P' := \emptyset$ 
20   za svako  $x_i \in F_k$ 
21     za svako  $x_j \in S_i, j \neq i$ 
22        $n_j := n_j - 1$ 
23       ako  $(n_j = 0)$  onda
24          $P' := P' \cup x_j$ 
25    $k := k + 1$ 
26    $F_k := P'$ 
27 }
```

РАСТОЈАЊЕ ДО НАГОМИЛАВАЊА

```
1  $l = |F|$  //broj resenja u skupu  $F$ 
2 Za svako resenje  $x_i \in F$ 
3 {
4    $d_i = 0, i = \overline{1, l}$  //inicijalizovati rastojanja svih resenja
5 }
6 Za svaku funkciju cilja  $f_m, m = \overline{1, M}$ 
7 {
8    $I_m = \text{sort}(F, f_m, \text{ascending})$  /* Skup  $F$  sortirati u rastuci poredak po
9   svakoj funkciji cilja, formirajuci tako vektore indeksa  $I^m$ , gde ce
10   svaki
11   vektor sadrzati indekse svih resenja iz  $F$  u redosledu koji odgovara
12   rastucem
13   vrednosti funkcije cilja  $f_m$  za resenja iz  $F$  */
14    $d_{I_1^m} = d_{I_l^m} = \infty$  /*Resenju ciji je indeks prvi clan vektora
15    $I_m$  kao i resenju ciji je indeks poslednji clan vektora  $I_m$  dodeliti
16   najvece
17   rastojanje do nagomilavanja*/
18   za  $j = 2$  do  $l - 1$ 
19   {
20      $d_{I_j^m} = d_{I_{j-1}^m} + \frac{f_m^{(I_{j+1}^m)} - f_m^{(I_{j-1}^m)}}{f_m^{\max} - f_m^{\min}}$ 
21   }
```



Поредбени оператор пореди два решења и враћа боље решење и то коришћењем следећих особина сваког решења x_i :

- ранга недоминираности решења у популацији, у ознаци r_i
- растојања решења до нагомилавања у популацији, у ознаци d_i

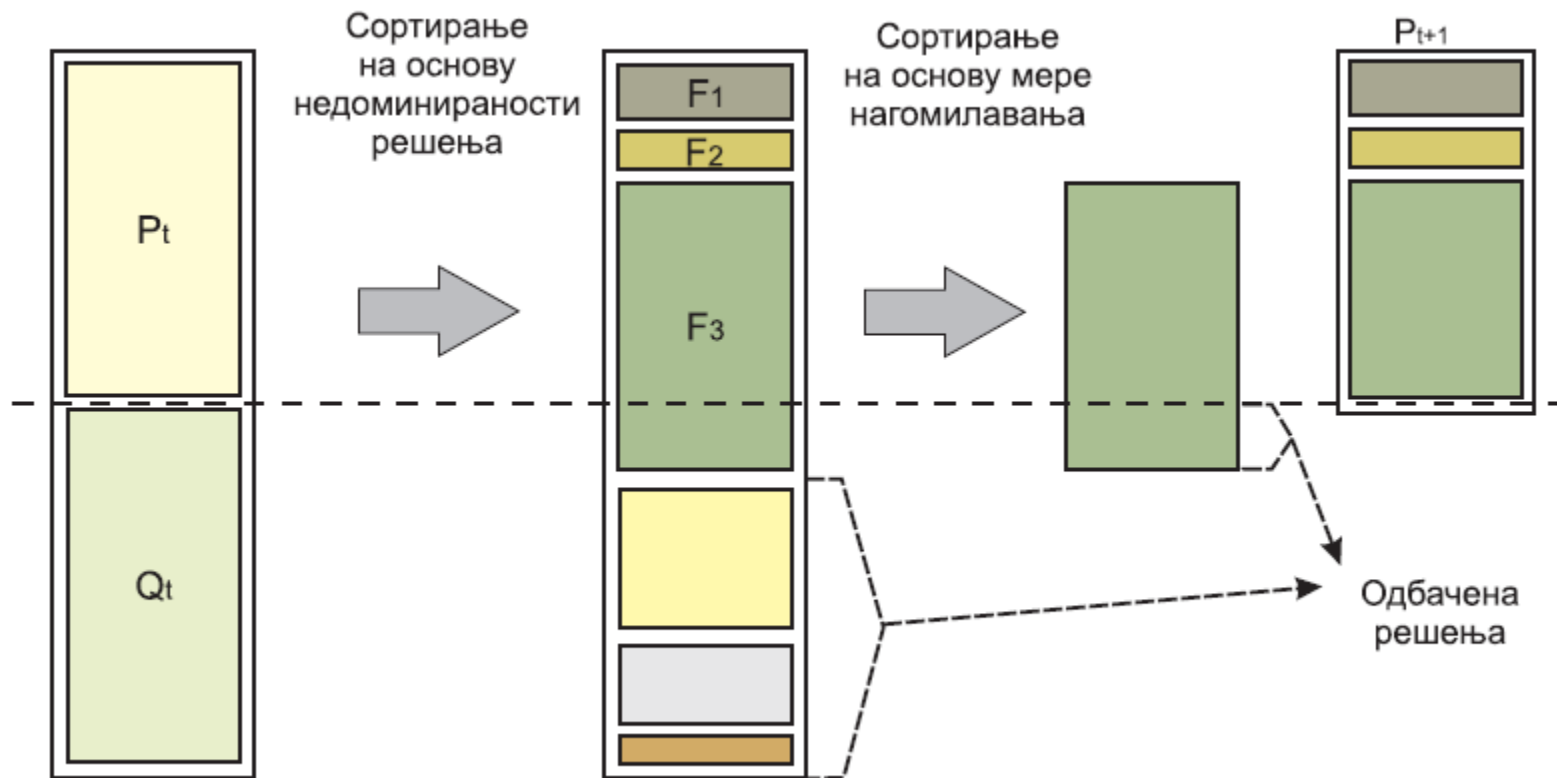
ПОРЕДБЕНИ ОПЕРАТОР ЗАСНОВАН НА МЕРИ РАСТОЈАЊА ДО НАГОМИЛАВАЊА (CROWDED COMPARISON OPERATOR, $<_c$)

Поредбени оператор заснован на мери растојања до нагомилавања се дефинише на следећи начин

Дефиниција 4 Решење x_i је победник турнирске селекције над решењем x_j ако важи било који од следећа два услова:

1. Решење x_i је боље рангирано од решења x_j , то јест $r_i < r_j$
2. Оба решења су истог ранга али решење x_i има веће растојање до нагомилавања у популацији од решења x_j , то јест $r_i = r_j$ и $d_i > d_j$.

ТОК NSGA-II АЛГОРИТМА



NSGA-II АЛГОРИТМ

```
1  $t := 0$ ,  $P_0 := \text{napravi\_pocetnu\_populaciju}$ ,  $|P_0| = N$ 
2  $Q_0 := \text{napravi\_populaciju\_potomaka}(P_0)$ ,  $|Q_0| = N$ 
3 Sve dok (!kriterijum_za_zaustavljanje)
4 {
5    $R_t = P_t \cup Q_t$ 
6    $(F_1, F_2, \dots, F_k) := \text{brzo\_sortiranje\_po\_nedominiranim\_frontovima}(R_t)$ 
7    $P_{t+1} := \emptyset$ ,  $i = 0$ 
8   Dok je  $|P_{t+1}| + |F_i| < N$ 
9   {
10     $P_{t+1} := P_{t+1} \cup F_i$ 
11     $i := i + 1$ 
12  }
13   $\text{Sort}(F_i, <_c)$ 
14   $P_{t+1} := P_{t+1} \cup F_i[0 : N - |P_{t+1}|]$  //u populaciju  $P_{t+1}$  dodati
15 prvih  $N - |P_{t+1}|$  resenja iz sortiranog fronta
16  $Q_{t+1} := \text{napravi\_populaciju\_potomaka}(P_{t+1})$  //Primeniti binarnu
17 turnirsku selekciju baziranu na operatoru  $<_c$ , ukrstanje i mutaciju i
18 formirati populaciju potomaka
19  $t = t + 1$ 
20 }
21 return  $P_t$ 
```