Моделирање у настави математике

6. вежбе

Експоненцијална и логаритамска функција

1. **а)** Ако је Ана уложила 1 000 евра са каматном стопом од 10%, која се обрачунава годишње, полугодишње, квартално, месечно и дневно, колико ће новца подићи након 1 године?

   б) Ако је Ана уложила 1 000 евра са каматном стопом 6% која ће бити непрекидно обрачунавана, колико ће новца подићи након 5 година?

   в) Ана жели да отвори рачун у другој банци, па је посетила три банке како би сазнала њихове каматне стопе на тржишту новца. Банка А нуди годишњу каматну стопу од 6% са дневним обрачуном камате, банка Б нуди 6,02% са кварталним обрачуном камате, а банка Ц нуди 5,98% са непрекидним обрачуном камате. Коју би банку Ана требало да одабере?

   г) Ана је ипак одлучила да уложи известан новац у банку Ц. Колико ће времена бити потребно да се њена инвестиција удвостручи, а колико да се утростручи у вредности?

2. **а)** Колеру, цревну болест, узрокују бактерије које се размножавају деобом тако што се на сваких сат времена број бактерија увећава за 138,6%. Колико бактерија ће бити у цревима зараженог након 5 сати, а колико након 12 од заражавања једном бактеријом?

   б) Колонија бактерија расте у складу са моделом $P(t) = 100e^{0,045t}$, где је P изражено у грамима, а t у данима.

   1) Одредити почетну количину бактерија.
   2) Која је стопа раста бактерија?
   3) Колика ће колонија бити након 5 дана?
   4) Колико времена ће бити потребно да колонија достигне 140 грама?
   5) За колико дана ће се колонија удвостручити?

3. Колонија неке бактерије расте у складу са законом несметаног раста.
   а) Ако се број бактерија у овој колонији удвостручи за 3 сата, описати раст колоније.
   б) Колико ће времена бити потребно да се величина колоније утростручи?

4. Све радиоактивне супстанце имају специфично време полураспада, што је време потребно да се половина радиоактивне супстанце распадне. Код одређивања старости угљеником користи се чињеница да сви живи организми садрже две врсте угљеника: угљеник-12 (стабилан угљеник) и угљеник-14 (радиоактиван угљеник са временом полураспада од 5600 година). Док је организам жив, однос угљеника-12 и угљеника-14 је константан. Међутим, када организам умре, првобитна количина угљеника-12 остаје непромењена, док количина угљеника-14 почиње да опада. Ова промена у количини угљеника-14 у односу на угљеник-12 омогућава израчунавање времена када је организам умро. Трагови спаљеног дрвета заједно са древним каменим алатима пронађени у археолошком ископавању у Чилеу садржали су приближно 1,67% првобитне количине угљеника-14. Ако је време полураспада угљеника-14 5600 година, када је отприлике дрво посечено и спаљено?

5. Објекат је загрејан на 100°C и затим остављен да се хлади у просторији чија је температура ваздуха 30°C.

   а) Ако је температура објекта 80°C након 5 минута, када ће његова температура бити 50°C?
   б) Одредити време које је прошло пре него што температура објекта достигне 35°C.

6. Концентрација алкохола у крви (КАК) је мера количине алкохола у крвотоку особе. КАК од 0,04% значи да особа има 4 дела алкохола на 10.000 делова крви у телу. Релативни ризик је дефинисан као вероватноћа да се један догађај деси подељена вероватноћом да се други догађај деси. На пример, ако је особа са КАК од 0,02% укључена у саобраћајну несрећу 1,4 пута вероватније од особе која није пила, релативни ризик несреће са КАК од 0,02% је 1,4.

   а) Недавна медицинска истраживања сугеришу да се релативни ризик R од саобраћајне несреће може моделирати једначином облика $R = e^{kx}$, где је x проценат концентрације алкохола у крви, а k константа. Ако је релативни ризик да особа има несрећу са КАК од 0,02% једнак 1,4, одредити k.
   б) Колики је релативни ризик ако је концентрација алкохола у крви 0,17%?
   в) Која КАК одговара релативном ризику од 100?
   г) Ако закон прописује да било ко са релативним ризиком од 5 или више не сме управљати возилом, при којој концентрацији алкохола у крви возач треба бити ухапшен и оптужен за вожњу под утицајем алкохола?

7. Снага земљотреса повезана је с количином енергије која се ослободила потресом. Она се мери на Рихтеровој скали. На Рихтеровој скали магнитуде од 1 до 5 означавају слабији потрес, док потрес магнитуде од 5 до 8 доводи до материјалне штету, а јачи потреси, магнитуде веће од 8 су разорни.
   а) Пре неколико година се у Ирану, на око 200 km од Катара догодио земљотрес магнитуде 5,7. У Србији су два најјача земљотреса икада, била интензитета 5,9 степени по Рихтеру 1927. године у Горњем Милановцу и 1980. године на Копаонику. Колико су пута били јачи земљотреси у Србији од оног који се десио у Ирану?
   б) Ако је амплитуда најјачег земљотреса у Катару 2008. године измерена у тренутку потреса, 25 119 пута већа од најслабије амплитуде коју мери сеизмограф, одредити разорност најјачег земољотреса у Катару? Можемо ли одредити колика је ослобођена енергија при том потресу? Ако је на другом крају света, при земљотресу ослобођено $3{\cdot}10^{10}$J, који земљотрес је био разорнији?
8. Концентрација водоникових јона у некој супстанци одређују њену киселост односно базност. Пошто концентрације водоникових јона доста варирају, користе се логаритми да би се направила такозвана pH скала, одређена са: $pH = -\log\,[H^+]$, где је $[H^+]$ (моларна) концентрација водоникових јона, тј. број молова по литру супстанце. Чиста вода има $pH = 7$ и она је неутрална. Супстанце које имају pH вредност мању од 7 сматрају се киселим, док се супстанце чија је pH вредност већа од 7 сматрају базним.
   а) Ако је $[H^+] = 2{,}83 \cdot 10^{-7}$ млека, сирћа $[H^+] = 9{,}32 \cdot 10^{-4}$, а морске воде $[H^+] = 4{,}63 \cdot 10^{-9}$ утврдити да ли су ове супстанце киселе или базне.
   б) У многим језерима широм света изумире живи свет јер се повећава киселост воде због такозваних киселих киша које су последица ослобађања сумпор диоксида из индустријских постројења. Ако је pH узорка киселе кише 5,2, одредити концентрацију водоникових јона. Ако се узме у обзир да је pH вредност нормалне кише приближно једнака 5,7, колико пута је у поменутом узорку киселе кише повећана концентрација водоникових јона?