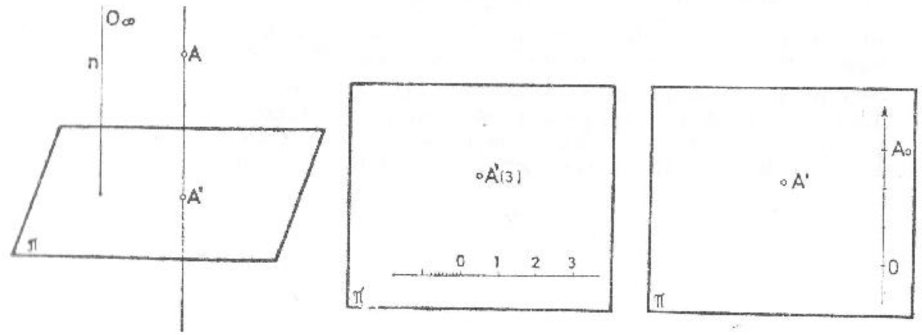
II. NORMALNO PROJEKTOVANJE NA JEDNU RAVAN METODA ODSTOJANJA

1. Tačka

Objekte prostora projektujemo na jednu *projekcijsku ravan* π proizvoljnog položaja u prostoru zracima iz centra O_∞, gde je O_∞ beskonačno daleka tačka prave n normalne na π. Projekcijski zraci su, prema tome, međusobno paralelni i normalni na ravan π. Tako određenu projekciju objekta prostora nazivamo *normalna projekcija*.

Prema tome, ako je A proizvoljna tačka prostora, tada je (prema I.3):

Definicija 1. Projekcijski zrak $O_\infty A$, koji je normalan na ravan π, prodire ravan π u tački A' koja je *normalna projekcija tačke* A (sl. 41a).



sl. 41

Normalnu projekciju tačke označavamo istim slovom kojim i tačku, dodajući crtu kao gornji indeks. Oznaka za normalnu projekciju tačke A je A' (A prvo, A crta, A prim).

Stav 1. Svakoj tački A prostora odgovara u projekcijskoj ravni *samo jedna tačka* koja je njena normalna projekcija.

Dokaz. Kroz tačku A postoji samo jedan zrak normalan na π i njegova prodorna tačka je A', projekcija tačke A.

Ma kojoj tački ravni π izabranoj za projekciju tačke prostora, npr. tački A',

ka $O_\infty A'$ kroz izabranu tačku A' koji je na π normalan. Iz ovoga sledi da nije dovoljna samo jedna projekcija tačke za određivanje položaja tačke u prostoru. Dodajmo zato i odstojanje tačke od projekcijske ravni.

Odstojanje tačke od projekcijske ravni, duž AA', zadajemo ili *mernim brojem odstojanja — kotom* u odnosu na izabranu jedinicu merenja (sl. 41b) ili *podudarnom duži* OA_0 (sl. 41c).

Jedinica merenja se predstavlja u projekcijskoj ravni π tzv. merilom (sl. 41b). Na pravoj je data izabrana jedinica merenja, duž 01, jediničnom duži konstruisane tačke 2, 3, 4, . . , kao i jedinična duž podeljena na 10 jednakih delova. Dužina duži je pozitivan broj, ali da bismo razlikovali poluprostore u odnosu na ravan π, označavamo pozitivnim brojem kote tačaka jednog poluprostora, a negativnim kote tačaka drugog poluprostora. Ako je mera odstojanja tačke A tri jedinice i ako tačke poluprostora u kome je A imaju pozitivno označene kote, tada se broj +3 ili samo 3 upisuje uz oznaku za projekciju, tj. A'(3) (sl. 41b).

Uobičajeno je, ako je ravan π horizontalnog položaja, da se odstojanja nazivaju visinama i da tačke gornjeg poluprostora imaju pozitivno označene kote; ako je ravan π vertikalna, frontalnog položaja, tačke prednjeg poluprostora imaju pozitivno označene kote.

Odstojanje AA' tačke A predstavlja se u projekcijskoj ravni π podudarnom duži OA_0 na tzv. liniji odstojanja (sl. 41c). Linija odstojanja je prava u ravni π na kojoj je označena početna tačka O kojom je prava podeljena na dve poluprave, gde svaka poluprava odgovara jednom od poluprostora koje određuje ravan π. Odstojanje je predstavljeno jednom duži OA_0 čija je jedna krajnja tačka O, a druga krajnja tačka A_0 na jednoj od polupravih. Odstojanja tačaka istog poluprostora predstavljaju se na liniji odstojanja na istoj polupravoj, dakle, sa iste strane tačke O. Ako se linija odstojanja orijentiše, tada na njoj konstruisane duži od tačke O u naznačenom smeru predstavljaju odstojanja tačaka kojima odgovaraju pozitivne kote. Na osnovu ovoga dokazujemo sledeći stav:

Stav 2. Položaj tačke u prostoru određen je ako je poznata normalna projekcija i *odstojanje* tačke od projekcijske ravni, kao i oznaka za poluprostor u kome je tačka, a koji je određen projekcijskom ravni π.

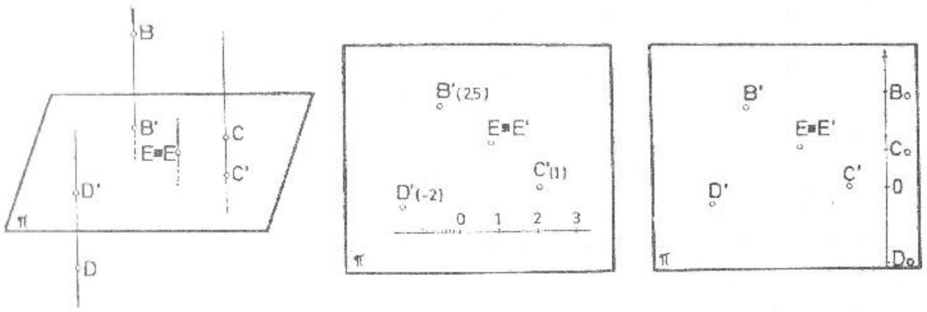
Dokaz. Neka je u projekcijskoj ravni π zadata tačka A' i duž kojoj je jednako odstojanje tačke A od projekcijske ravni π, tj. duž OA_0 na liniji odstojanja sa određene strane tačke O (ili njen merni broj). Odgovarajuća tačka A u prostoru određuje se tako što se na pravoj $O_\infty A'$, tj. na normali kroz A' na ravan π, sa određene strane ravni π, tj. sa određene strane tačke A', konstruiše duž AA' podudarna datoj duži OA_0. Krajnja tačka A ove duži je tražena tačka. Dakle, tačka A je u prostoru jednoznačno određena.

Na slici 42a predstavljene su tačke B, C, D, i E različitih položaja prema projekcijskoj ravni π. Odstojanja tačaka B i C su pozitivna (sl. 42b), odnosno, na liniji odstojanja predstavljena su sa iste strane tačke O (sl. 42c). Dakle, tačke B i C su u istom poluprostoru. Tačke B i D su u različitim poluprostorima, jer je odstojanje tačke D negativno, odnosno, na liniij odstojanja nije sa iste strane tačke O sa koje je odstojanje tačke B.

Tačka E pripada projekcijskoj ravni π (sl. 42), pa projektujući zrak tačke E prodire ravan π u istoj tački, tj. $E = E'$. Dakle, ako tačka pripada projekcijskoj ravni π, ona se poklapa sa svojom normalnom projekcijom na ravan π.

Uspostavljena korespondencija među tačkama prostora i tačkama projekcijske ravni π u kojoj tački prostora odgovara par elemenata: tačka ravni π i jedna duž, ili njen merni broj, sa oznakom poluprostora na koje ravan π deli prostor je, kao što smo dokazali, stavovima 1. i 2., *obostrano jednoznačna*. Prema tome, utvrdili smo da npr. tački A prostora dodeljujemo u projekcijskoj ravni π projekciju A' i odstojanje OA_0 na liniji odstojanja sa određene strane tačke O, ili merni broj odstojanja pozitivno ili negativno označen, što pišemo $A(A', OA_0)$ ili $A(A'(+3))$. Prema tome, navedimo definiciju:

Definicija. Ako objekat prostora, koji smatramo skupom tačaka, predstavimo u ravni π projekcijama i odstojanjima potrebnog broja njegovih tačaka, tada je objekat predstavljen u projekcijskoj ravni π *metodom odstojanja.* Specijalno, ako su odstojanja predstavljena mernim brojevima, tada se metoda naziva *metoda kotirane projekcije.*



sl. 42

2. Prava

N o r m a l n a p r o j e k c i j a p r a v e. Projektujući zraci svih tačaka prave prolaze kroz centar O_∞, koji pripada pravoj $n \perp \pi$, među sobom su paralelni i normalni na ravan π. Zato je prema (I.3):

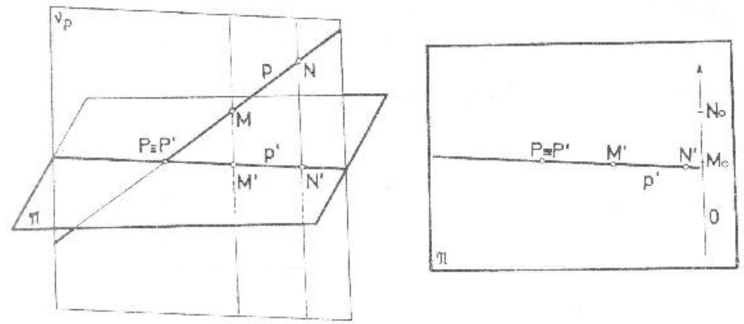
Definicija 2. Ako su projektujući zraci tačaka prave normalni na π, skup projekcija tačaka prave nazivamo *normalna projekcija prave.*

Ravan $(O_\infty, p) = \nu_p$ je projektujuća ravan prave p i kako ona sadrži projektujuće zrake tačaka prave koji su normalni na π, ona je normalna na π (sl. 43a).

Prema poznatom stavu u (I.3), iskažimo odgovarajući stav za normalno projektovanje prave:

Stav 3. Normalna projekcija prave p, koja nije normalna na projekcijsku ravan π, je presečna prava projekcijske ravni π i projektujuće ravni ν_p koja je na π normalna.

Projekciju prave označavamo istim slovom kojim i pravu dodajući crtu kao gornji indeks. Npr. p' je normalna projekcija prave p (sl. 43).



sl. 43

T a č k a n a p r a v o j. Kako projekcijski zraci svih tačaka prave p prodiru kroz ravan π u tačkama projekcije p', *projekcija ma koje tačke prave p pripada projekciji p' te prave* (I.3). Na primer, projekcija M' tačke M prave p pripada projekciji p' prave p (sl. 43).

Prema prethodnom, ako je projektujuća ravan ν_p prave p normalna na π, kroz pravu p prolazi *samo jedna* ravan ν_p koja u preseku sa π određuje projekciju p' prave p. Dakle, važi stav:

Stav 4. Pravoj p prostora odgovara samo jedna prava p' u ravni π kao njena normalna projekcija.

Obratno, ako se proizvoljna prava projekcijske ravni π izabere za projekciju, prava, koja joj u prostoru odgovara, nije jednoznačno određena. Npr. pravoj p' odgovara u prostoru svaka prava projektujuće ravni ν_p koja sadrži pravu p' i normalna je na ravan π (sl. 43a). Prema tome, položaj prave u prostoru nije određen samo jednom normalnom projekcijom. Kako je prava u prostoru određena dvema tačkama, važi:

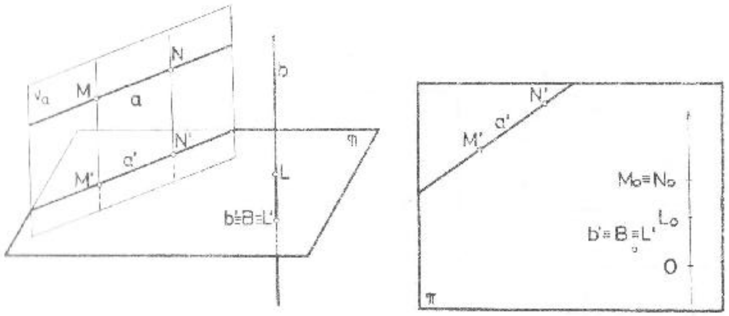
Stav 5. Položaj prave prema projekcijskoj ravni određen je ako su u projekcijskoj ravni π date *projekcije i odstojanja bilo kojih dveju tačaka te prave.*

Na sl. 43b predstavljena je u ravni π jedna prava određenog položaja u prostoru jer su poznate projekcije i odstojanja njenih dveju tačaka M i N.

T r a g p r a v e. Ako prava nije paralelna ravni π, ona sa njom ima jednu zajedničku tačku, odnosno, prava prodire kroz ravan π.

Definicija 3. Tačku u kojoj prava prodire kroz projekcijsku ravan π nazivamo *trag prave.*

Pravu i njen trag obeležavamo istim slovom, pri čemu se prava obeležava malim, a trag velikim slovom. Npr. tačka P je trag prave p (sl. 43). Kako je trag prave tačka u ravni π, ona se poklapa sa svojom projekcijom, tj. $P = P'$ (II.1).



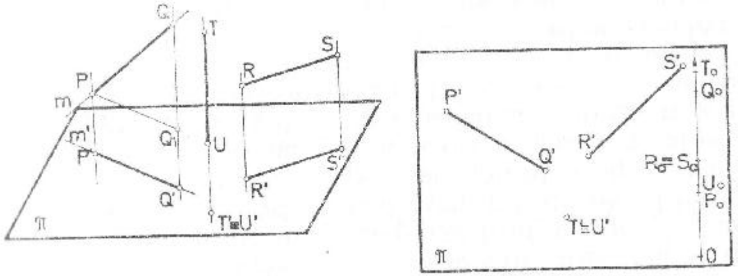
sl. 44

S p e c i j a l n i p o l o ž a j i p r a v e. Ako je prava paralelna projekcijskoj ravni π, presek projektujuće ravni prave i ravni π je njoj paralelna prava. Prema tome, *projekcija prave koja je paralelna ravni π je prava paralelna toj pravoj,* tj. ako je $a \parallel \pi$ tada je $a' \parallel a$ (sl. 44a). U projekcijskoj ravni zadajemo je projekcijama dveju tačaka jednakih odstojanja od ravni π (sl. 44b). Ova prava nema traga, ili je njen trag beskonačno daleka tačka prave a'.

Ako je prava normalna na projekcijsku ravan π, projektujući zraci svih tačaka prave poklapaju se sa njom i prodiru kroz ravan π u jednoj tački, u tragu prave. Prema tome, *projekcija prave koja je normalna na ravan π je tačka u kojoj ona prodire kroz ravan π.* Dakle, ako je $b \perp \pi$, projekcija b' je tačka $B = b'$ (sl. 44a). Prava normalna na π zadaje se dvema tačkama čije se projekcije poklapaju, a odstojanja su im različita (sl. 44b).

P r o j e k c i j a d u ž i. Dve tačke P i Q na pravoj m određuju duž PQ (sl. 45). Kako su projekcije P' i Q' tačka P i Q na projekciji m' prave m, a projekcije ostalih tačaka duži PQ na pravoj m' između tačaka P' i Q', *projekcija duži PQ je duž $P'Q'$* prave m'. Ako prava m ima kos položaj prema ravni π, P' i Q' su različite tačke i projekcija je duž $P'Q'$.

Ako je $PP' < QQ'$ konstruišimo u projektujućoj ravni prave m kroz tačku P pravu $PQ_1 \parallel P'Q'$, gde je Q_1 presek ove prave i zraka QQ'. Kako je četvorougao $PP'Q'Q_1$ pravougaonik, jednake su suprotne stranice $P'Q'$ i PQ_1. U pravouglom trouglu PQ_1Q kateta je manja od hipotenuze, dakle, $PQ_1 < PQ$. Prema tome je $P'Q' < PQ$, tj. *ako duž ima kos položaj prema projekcijskoj ravni, njena normalna projekcija je manja od ove duži* (sl. 45).



sl. 45

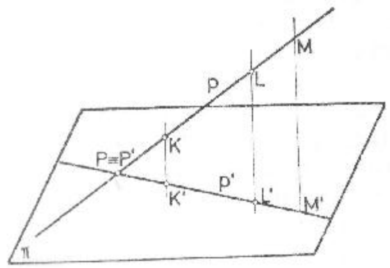
Ako duž RS pripada pravoj paralelnoj ravni π, tada je $R'S' \parallel RS$ (sl. 45). Kako su i projekcijski zraci RR' i SS' paralelni, četvorougao $RR'S'S$ je paralelogram, pa je i $R'S' = RS$. Najzad, ako je duž TU na pravoj $b \perp \pi$, projekcija $T'U'$ duži TU je tačka $T' = U'$ (sl. 45).
Prema tome, dokazali smo:

Stav 6. Normalna projekcija duži je tačka ili duž koja je manja ili jednaka duži u prostoru.

R a z m e r a t r i j u t a č a k a j e d n e p r a v e. Neka su K, L, M tri proizvoljne tačke prave p i K', L', M', njihove normalne projekcije na projekciji p' (sl. 46). Kraci ugla MPM' presečeni su paralelnim pravim, projekcijskim zracima KK', LL', MM'. Na osnovu poznatog glavnog stava sličnosti sledi da su odsečci na kracima ugla određeni u preseku sa paralelnim pravim proporcionalni tj. $K'L' : L'M' = KL : LM$. Dakle, važi:

Stav 7. Razmera projekcija triju tačaka jedne prave jednaka je razmeri tih triju tačaka prave u prostoru.

Razmera triju tačaka jedne prave je, prema tome, invarijanta normalnog projektovanja.



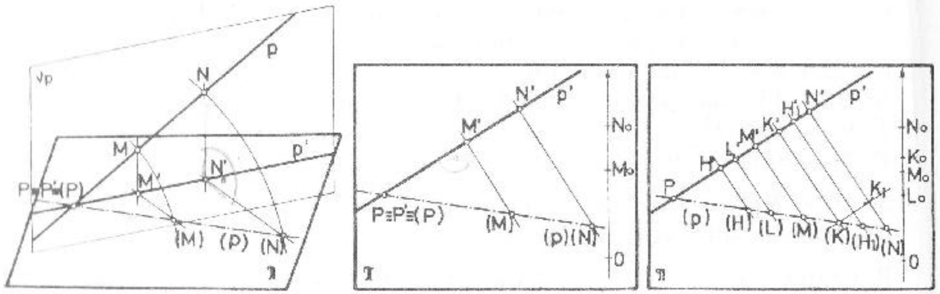
sl. 46

Posledica 1. Središte L duži KM projektuje se u središte L' projekcije K'M'.

Ako je tačka L središte duži KM, tj. KL = LM, iz prethodnog stava sledi da je i K'L' = L'M', tj. L' je središte duži K'M'.

Posledica 2. Jednake duži jedne prave projektuju se u jednake duži.

O b a r a n j e p r a v e. Rotacijom ravni ν_p oko ose p' dovodi se ravan ν_p do poklapanja sa ravni π, čime se u projekcijskoj ravni π dobijaju svi geometrijski oblici ravni ν_p u istom međusobnom položaju u kome su oni u ravni ν_p, tj. u prostoru (sl. 47a). Rotirani položaj ravni ν_p u ravan π omogućuje da se u ravni π izvedu sve konstrukcije koje se izvode u ravni ν_p. Njima se dovode u vezu tačke prave p i njihove projekcije i odstojanja od projekcijske ravni π, duži na pravoj p i njihove projekcije, određuje se nagibni ugao prave p prema projekcijskoj ravni u pravoj veličini. Uvedimo definicijom ovu prostornu konstrukciju, a zatim izvedimo odgovarajuću konstrukciju u ravni π.



sl. 47

Definicija 4. Rotacija projektujuće ravni ν_p prave p oko ose p' kojom se ravan ν_p dovodi do poklapanja sa projekcijskom ravni π naziva se *obaranje prave p.* Položaj prave dobijen u ravni π rotacijom nazivamo oboreni položaj prave i označavamo [p], (p), {p} ili p_0.

Smer rotacije je proizvoljan. Kako je ravan $\nu_p \perp \pi$, ugao rotacije je prav.
Oboreni položaj (p) prave p određuje se u ravni π iz projekcije p', oborenim položajem njenih dveju tačaka (sl. 47b). Konstruišimo zato iz poznatih tačaka M' i N' normale na p' i na njima odredimo redom tačke (M) i (N) tako da je $M'(M) = OM_0$ i $N'(N) = ON_0$. Prave M'(M) i N'(N) jesu projekcijski zraci u oborenom položaju. Tačke (M) i (N) jesu oboreni položaji tačaka M i N i one određuju pravu p u oborenom položaju, tj. (M)(N) = = (p). Oboreni položaj prave ucrtavamo isprekidanom linijom (sl. 47b). Kako su tačke M i N sa iste strane projekcijske ravni π, konstruišemo (M) i (N) sa iste strane prave p'. Ovom konstrukcijom obaranja prave rešavamo više elementarnih zadataka. Navedimo neke:

Data je prava p projekcijama i odstojanjima svojih dveju tačaka $M(M',OM_0)$ i $N(N',ON_0)$. Konstruisati:

a) trag prave p (sl. 47b);

b) pravu veličinu duži MN (sl. 47b);

c) pravu veličinu nagibnog ugla prave p prema projekcijskoj ravni π (sl. 47b);

d) tačku H' na p' tako da je MH jednako datoj duži (sl. 47c);

e) odstojanje tačke L, duž LL' ako je data projekcija L' na pravoj p' (sl. 47c);

f) na pravoj p' tačku K' tako da je odstojanje tačke K jednako datoj duži OK_0 (sl. 47c);

Pošto se navedenom konstrukcijom u ravni π dobije prava (M)(N) = (p), dobijaju se rešenja navedenih zadataka:

a) Trag P prave p je presek pravih p' i (p).

b) Oboreni položaj (MN) duži MN određen je rotacijom duži oko njene prve projekcije, pa kažemo da je (MN) *prava veličina* duži MN.

c) Oštar ugao prave p i njene normalne projekcije p' naziva se nagibni ugao prave p prema projekcijskoj ravni π. Oboreni položaj ovoga ugla određuje se rotacijom oko p', pa kažemo da je ugao pravih (p) i p' *prava veličina* nagibnog ugla prave p.

d) Na oborenoj pravoj (M)(N) = (p) odredimo tačke (H) i (H_1) sa raznih strana tačke (M) tako da su duži (MH) i (MH_1) jednake datoj duži. Zracima iz (H) i (H_1) koji su normalni na p' određuju se u preseku sa p' tačke H' i H_1', odnosno, projekcije M'H' i $M'H_1'$ duži jednakih datoj duži, pa kažemo da su to projekcije duži čija je prava veličina poznata.

e) Kako je na p' data projekcija L' tačke L prave p, konstruišimo u π iz L' normalan zrak na p' koji u preseku sa (p) određuje (L). Kako je L'(L) = L'L, duž L'(L) jednaka je odstojanju tačke L od projekcijske ravni π ili, duž L'(L) je prava veličina odstojanja tačke L.

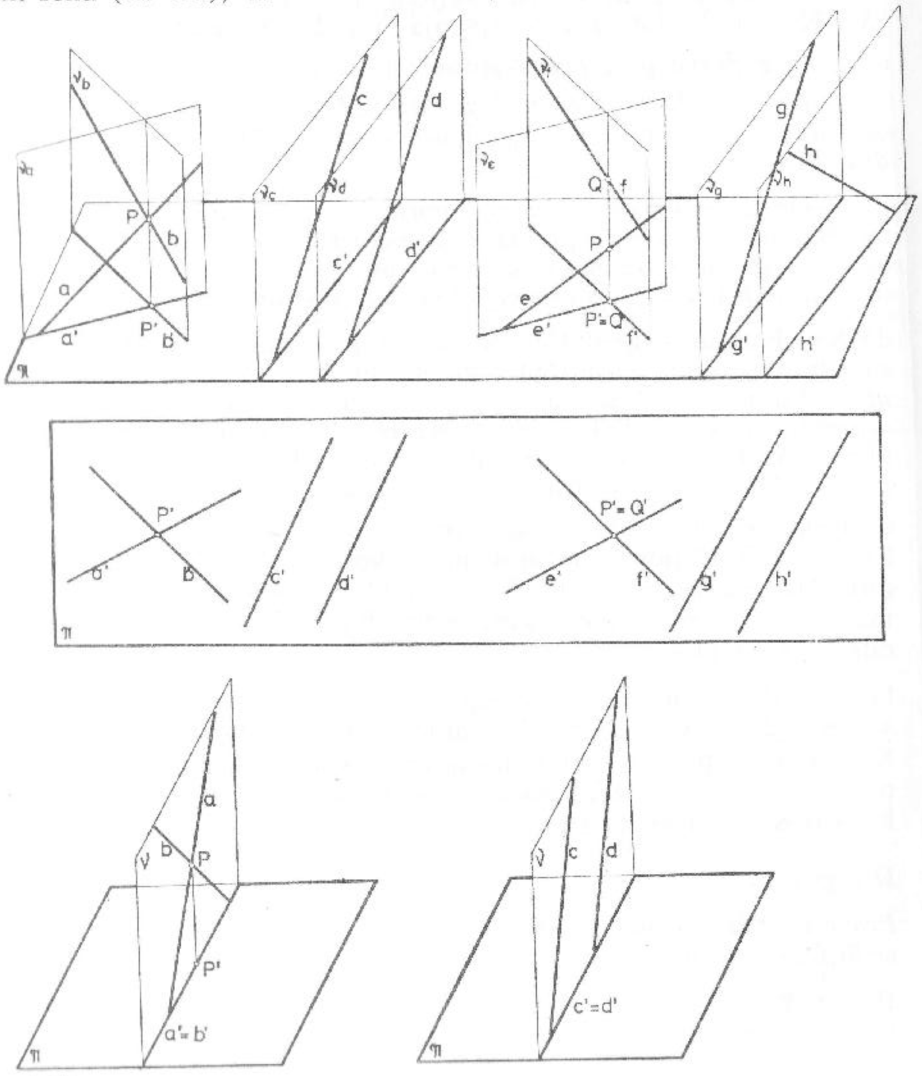
f) Na jednoj normali na p', npr. na N'(N) konstruišimo $N'K_1 = = OK_0$ gde je OK_0 dato odstojanje tražene tačke K. Prava kroz K_1 paralelna p' seče (p) u tački (K). Normalan zrak iz (K) na p' seče p' u tački K'. Kako je $(K)K' = N'K_1 = OK_0$, odstojanje konstruisane tačke K jednako je datoj duži OK_0 (sl. 47c).

Dve prave

Prave se seku. — Stav 8a. Ako se prave a i b seku u tački P, tada se njihove projekcije a' i b' seku u tački P' (sl. 48a).

Dokaz. Pošto tačka P pripada pravoj a, P' pripada a', i pošto tačka P pripada pravoj b, P' pripada b' (I.2). Dakle, prave a' i b' seku se u tački P'.

Isti zaključak možemo izvesti koristeći se projektujućim ravnima ν_a i ν_b pravih a i b. Ravni ν_a i ν_b su normalne na ravan π, pa kako imaju zajedničku tačku P, one se seku po pravoj kroz P koja je normalna na π. Ova presečena prava je projektujući zrak tačke P, zrak PP′. Tačka P′ je tada zajednička tačka triju ravni ν_a, ν_b i π, dakle, P′ pripada presečnoj pravoj ravni ν_a i π, pravoj a′ i presečnoj pravoj ravni ν_b i π, pravoj b′. Prema tome, projekcije a′ i b′ imaju zajedničku tačku P′, projekciju zajedničke tačke P pravih a i b. Ako su u ravni π date samo dve prave koje se seku, npr. a′ i b′, a odstojanja potrebnog broja tačaka ovih pravih od ravni π nisu data, tada se odgovarajuće prave a i b, ne moraju seći u prostoru, jer pravoj a′ odgovara u prostoru svaka prava ravni ν_a koja prolazi kroz a′ i normalna je na π, a pravoj b′ svaka prava ravni ν_b koja prolazi kroz b′ i normalna je na π. Prave a i b se tada u prostoru ili seku (sl. 48a), ili su mimoilazne (sl. 48c).



sl. 48

Pravima a′ i b′ odgovaraju u prostoru dve određene prave a i b samo ako su poznate projekcije i odstojanja po dve tačke na svakoj pravoj, ili ukupno triju tačaka, ukoliko je jedna od datih tačaka presečna tačka.

Paralelne prave. — Stav 8b. Ako su prave c i d paralelne, tada su njihove projekcije c′ i d′ paralelne (sl. 48b).

Dokaz. Projektujuće ravni ν_c i ν_d pravih c i d sadrže projekcijske zrake tačaka ovih pravih koji su paralelni, pa kako su i prave c i d paralelne, sledi da su ravni ν_c i ν_d paralelne. Paralelne ravni ν_c i ν_d seku ravan π po paralelnim pravim, pa kako je presek ν_c i π projekcija c′ i presek ν_d i π projekcija d′ sledi da su projekcije c′ i d′ pravih c i d paralelne.
Kao u prethodnom i ovde možemo zaključiti da dvema izabranim paralelnim pravim u ravni π, npr. projekcijama c′ i d′, odgovaraju u prostoru ili dve prave koje su paralelne (sl. 48b) ili dve mimoilazne prave (sl. 48d). Odgovarajuće prave u prostoru su određenog položaja ako su poznate projekcije i odstojanja po dve tačke na svakoj pravoj.

Mimoilazne prave. — Stav 8c. Ako se dve prave mimoilaze, tada se njihove projekcije ili seku ili su paralelne.
Dokaz. Kao što smo videli, projektujuće ravni ovih pravih se ili seku, ν_e i ν_f (sl. 48c) ili su paralelne, ν_g i ν_h (sl. 48d). Prema tome, projekcije pravih se ili seku, e′ i f′, ili su paralelne, g′ i h′. Samo ako su poznate projekcije i odstojanja po dve tačke svake prave, može se zaključiti da li im u prostoru odgovaraju mimoilazne prave ili ne.
Ukoliko se projekcije pravih seku, a u prostoru im odgovaraju mimoilazne prave, npr. e′ i f′ se seku, njihova presečna tačka je projekcija dveju različitih tačaka P i Q u prostoru a koje imaju isti projekcijski zrak, i jedna tačka pripada pravoj e, a druga pravoj f (sl. 48c).

Ukoliko dve prave pripadaju istoj projektujućoj ravni, dakle ravni normalnoj na ravan π, projekcije pravih se poklapaju. To je moguće u slučaju kada se prave u prostoru seku ili su paralelne (sl. 48e, 48f). Dve mimoilazne prave ne pripadaju jednoj ravni, dakle, projekcije mimoilaznih pravih se ne poklapaju.

3. Ravan

N o r m a l n a p r o j e k c i j a r a v n i. Projektujući zraci svih tačaka ravni prolaze kroz centar projektovanja O_∞, koji pripada pravoj $n \perp \pi$, pa su među sobom paralelni i normalni na projekcijsku ravan π. Zato je, prema (I.3):

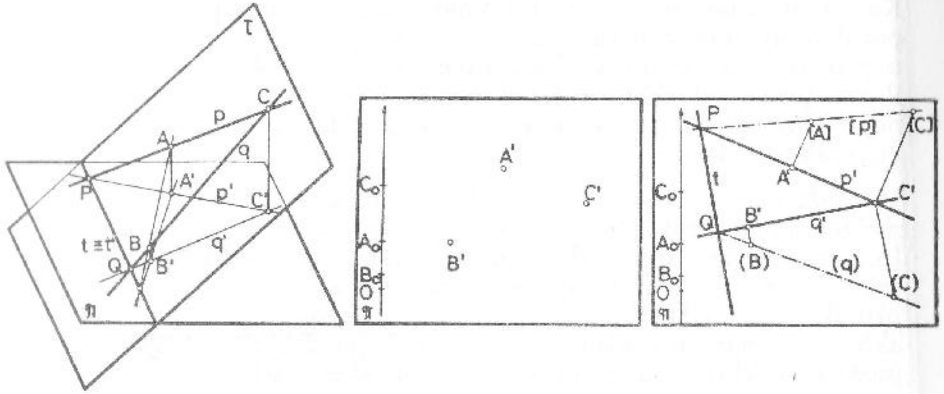
Definicija 5. Ako su projektujući zraci tačaka ravni normalni na proj. ravan π, skup njihovih prodornih tačaka naziva se *normalna projekcija ravni.*

Snop paralelnih projektujućih zrakova sa centrom O_∞, normalan je na projekcijsku ravan π i perspektivno afino preslikava ravno polje tačaka τ na polje tačaka ravni π. Prema dokazu u (I.3) ovo preslikavanje je obostrano jednoznačno i ravan π je projekcija τ' ravnog polja tačaka τ. Prema tome važi stav:

Stav 9. Normalna projekcija τ' ravnog polja tačaka τ, koje je u kosom položaju prema π, je ravno polje tačaka τ' u π.

Ravan je određena trima tačkama koje ne pripadaju jednoj pravoj. Zato ravan određenog položaja prema π predstavljamo njihovim projekcijama.

Npr. projekcijama i odstojanjima tačaka A, B, C predstavljena je ravan τ (sl. 49b). Kako kroz tri tačke možemo postaviti dve prave koje se seku, npr.: $AC = p$, $BC = q$ (sl. 49c) ili dve paralelne prave, npr. $AC = p$ i kroz tačku B pravu $r \parallel p$, ravan je određena i projekcijama ovih pravih.



sl. 49

T r a g r a v n i. Ravan koja nije paralelna ravni π seče π po pravoj.

Definicija 6. Presečna prava ravni sa projekcijskom ravni π naziva se trag ravni (sl. 49a).

Trag ravni τ obeležavamo t. Kako je prava t u ravni π, ona se poklapa sa svojom projekcijom, tj. $t = t'$.

P r a v a u r a v n i. Prava pripada ravni ako sa njom ima dve zajedničke tačke. Npr. prava p pripada ravni τ jer sa njom ima dve zajedničke tačke A i C (sl. 49). Ako se proizvoljna prava ravni seče sa tragom ravni, tada je ova tačka zajednička tačka prave i ravni π, dakle, ta tačka je trag prave. Kako je trag ravni skup svih zajedničkih tačaka ravni τ i π, sleduje:

Stav 10. Ako prava pripada ravni, trag prave pripada tragu ravni. Npr. trag P prave p pripada tragu t ravni τ (sl. 49).

Zadatak. — Konstruisati trag t ravni τ ako su date projekcije i odstojanja njenih triju tačaka A, B, C (sl. 49c).

Konstruišimo oboreni položaj [p] prave $p = AC$. Presečna tačka pravih [p] i p' je trag P prave p. Konstruišimo zatim oboreni položaj (q) prave $q = BC$ i presečnu tačku pravih (q) i q', trag Q prave q. Kako prave p i q pripadaju ravni τ, njihovi tragovi P i Q pripadaju tragu t ravni τ. Prema tome, tačkama P i Q određena je prava t, trag ravni τ.

Definicija 7. Prava s u ravni τ koja je paralelna tragu t ravni, naziva se sutražnica, ili glavna linija ili visinska linija ravni (sl. 50a). Kako je $s \parallel t$, sleduje da je $s' \parallel t'$ (sl. 50b). Kako je $s \parallel t$ i t pripada ravni π, sleduje da je $s \parallel \pi$. Dakle, odstojanja tačaka sutražnice s od π su jednaka. Prema tome, sutražnica jedne ravni određena je ako su poznati projekcija i odstojanje jedne njene tačke. Dokazan je, dakle, stav:

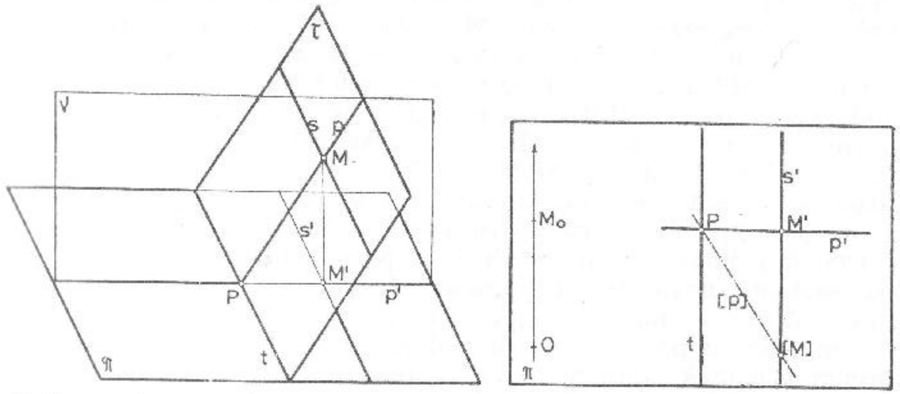
Stav 11. Sutražnica s je prava u ravni τ paralelna tragu t, pa je ona paralelna π, i njena projekcija s' je paralelna tragu t ravni τ i tačke sutražnice imaju jednaka odstojanja od ravni π.

Definicija 8. Prava u ravni τ normalna na trag t naziva se linija najvećeg pada ili samo linija pada ravni ili nagibnica (sl. 50a).

Među pravima jedne ravni najveći nagibni ugao prema ravni π je ugao pravih normalnih na trag ravni. Zato se one i zovu linije najvećeg pada. Neka je p jedna linija pada ravni τ (sl. 50). Trag P prave p pripada tragu t ravni τ. Neka je M proizvoljna tačka prave p. Tragom P i projekcijom M' određena je projekcija p' prave p. Kako je $MM' \perp \pi$ i $p \perp t$, na osnovu tzv. stava o trima normalama je $p' \perp t$. Dakle, važi stav:

Stav 12. Linija pada p ravni τ normalna je na trag t i na sutražnicu s ove ravni, pa je njena projekcija p' normalna na trag t i na projekciju s' sutražnice.

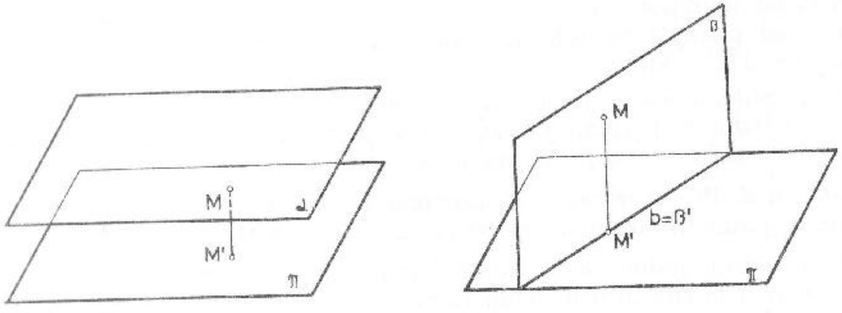
Nagibni ugao linije pada ravni τ prema projekcijskoj ravni π naziva se nagibni ugao ravni τ prema projekcijskoj ravni π (sl. 50a). Zato se prava p naziva i nagibnica ravni. Ako je ravan τ data tragom t i tačkom M, tada se u ravni π konstruiše prava veličina nagibnog ugla ravni τ obaranjem linije pada p ravni τ koja prolazi kroz tačku M (sl. 50b). Presek pravih p' i t je trag P prave p. Koristeći se tačkama P i M konstruišimo oboreni položaj $P[M] = [p]$ prave p. Tražena prava veličina nagibnog ugla je ugao pravih [p] i p', jer je $\sphericalangle [M]PM' = \sphericalangle MPM'$.



sl. 50

S p e c i j a l n i p o l o ž a j i r a v n i. Ako je ravan $\alpha \parallel \pi$, tada su odstojanja svih njenih tačaka od projekcijske ravni π jednaka (sl. 51a).

Ako je ravan $\beta \perp \pi$, tada projektujući zraci svih tačaka ravni β pripadaju ravni β i prodiru kroz projekcijsku ravan π u tačkama traga b ravni β. Prema tome, sve tačke ravni β projektuju se u tačke traga b, tj. $\beta' \equiv b$ (sl. 51b).



sl. 51

4. Obaranje ravni

Definicija 9. Rotacija ravni τ oko traga t kojom se ravan τ dovodi do poklapanja sa projekcijskom ravni π naziva se obaranje ravni.

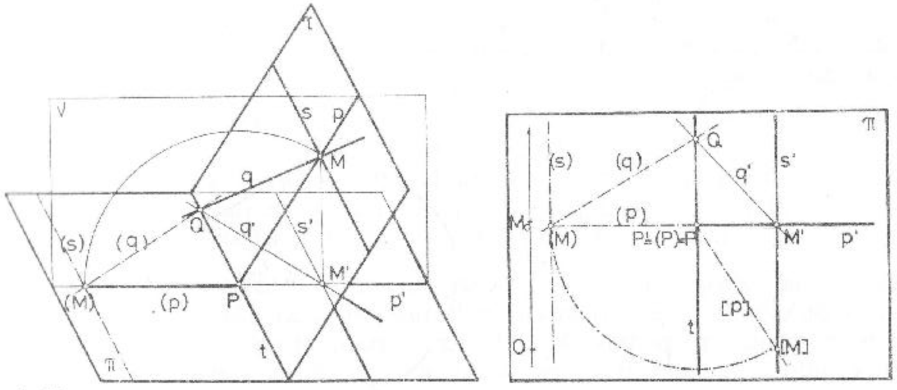
Prema tome, osa rotacije je trag ravni, ugao rotacije je nagibni ugao ravni, ili njemu suplementan, zavisno od izabranog smera rotacije, koji može biti proizvoljan. Položaj ravni τ dobijen navedenom rotacijom nazivamo oboreni položaj i obeležavamo (τ) $[\tau]$ ili $\{\tau\}$ (sl. 52).

Proizvoljna tačka M ravni τ opisuje luk kruga koji pripada ravni normalnoj na osu rotacije, trag t. Ova je ravan, prema tome, normalna na ravni τ i π, pa seče τ po pravoj $p \perp t$, po liniji pada, a π po pravoj $p' \perp t$, projekciji prave p. Trag P prave p pripada tragu t i P je centar, a MP poluprečnik kruga rotacije tačke M. Položaj tačke M u ravni π određen rotacijom nazivamo oboreni položaj i obeležavamo (M), [M], {M} ili M°. Poluprečnik kruga rotacije je duž MP normalna na t, pa se rotacijom dobija $(M)P \perp t$ i $(M)P = MP$. Prava (M)P je oboreni položaj (p) linije pada p. Kako je M' na p' i $M'P \perp t$, sledi da su tačke (M), P, M' na istoj normali na trag t kroz tačku P. U pravouglom trouglu MM'P je $M'P < MP$ pa je $M'P < (M)P$ (sl. 52).

Trougao MP(M) je jednakokraki i pripada projektujućoj ravni prave p koja je normalna na osu rotacije. Spoljašnji ugao pri vrhu P trougla je nagibni ugao φ ravni τ, pa je unutrašnji ugao nalegao na osnovicu, ugao M(M)P jednak $\varphi/2$. Ovaj ugao je nagibni ugao prave M(M) prema projekcijskoj ravni π. Dakle, tačka M ravni τ i njen oboreni položaj (M) pripadaju pravoj čiji je nagibni ugao jednak polovini nagibnog ugla ravni τ, a normalna projekcija ove prave je prava (M)M' koja je normalna na trag t ravni τ.

Da bismo iz M' dobili (M) treba odrediti duž MP u pravoj veličini. Zato oborimo pravu p kojoj duž MP pripada, rotirajući projektujuću ravan prave p. Trag $P \equiv [P]$ i oboreni položaj [M] tačke M

određuju [p]. Kako je $PM = P[M]$, tačku (M) dobijamo na pravoj normalnoj na t iz tačke M' konstruišući $(M)P = [M]P$ (sl. 52b) pomoću oborenog položaja kruga rotacije tačke M koji pripada projektujućoj ravni linije pada p.



sl. 52

Neka je q proizvoljna prava ravni τ kroz tačku M. Trag Q prave q pripada tragu t ravni τ (sl. 52). Kako je tačka Q na osi rotacije i u ravni π, ona se poklapa sa svojim oborenim položajem i sa projekcijom, tj. $Q \equiv (Q) \equiv Q'$. Prema tome je $(M)Q = (q)$. Pravougli trouglovi MPQ i M'PQ imaju zajedničku katetu PQ i $M'P < MP$, dakle $\sphericalangle M'QP < \sphericalangle MQP$, odnosno, $\sphericalangle M'QP < \sphericalangle (M)QP$, tj. projekcija oštrog ugla prave q ravni τ prema tragu t manji je od njegove prave veličine, dakle, manji je od ovog ugla u oborenom položaju. Iz istih pravouglih trouglova zaključujemo dalje da je $\sphericalangle QM'P > \sphericalangle QMP$ ili $\sphericalangle QM'P > \sphericalangle Q(M)P$, tj. projekcija oštrog ugla prave q ravni τ prema liniji pada p te ravni veći je od njegove prave veličine ili od tog ugla u oborenom položaju (sl. 52).

Iz ovoga zaključujemo da se prav ugao dveju pravih ravni τ ne projektuje u prav ugao, nego, ako kraci pravog ugla seku trag ravni, njegova je projekcija tup ugao, a ako jedan krak pravog ugla ne seče trag ravni, njegova je projekcija oštar ugao.

Izuzetno, ako jedan krak pravog ugla pripada liniji pada ravni, a drugi krak pripada sutražnici, prav ugao se projektuje u prav ugao, jer kao što smo dokazali, projekcija linije pada normalna je na trag ravni i na projekciju sutražnice (sl. 50).

Neka je s sutražnica ravni τ kroz tačku M. Da bismo konstruisali oboreni položaj (s) ove sutražnice, dovoljno je da odredimo oboreni položaj (M) njene presečne tačke M sa linijom pada p. Prava kroz (M) paralelna tragu t je sutražnica s u oborenom položaju (s) (sl. 52).

5. Perspektivno afino preslikavanje pri obaranju ravni

Prema definiciji projektovanja tačaka ravni τ na tačke ravni π (I.3) normalno projektovanje je obostrano jednoznačno preslikavanje tačaka ravnih polja $\tau(M)$ i $\tau'(M')$ kojim se tački M polja

$\tau(M)$ dodeljuje u ravni π tačka M' polja $\tau'(M')$ projekcijskim zrakom MM' normalnim na π. Dakle, preslikavanje se izvodi paralelnim zracima sa zajedničkim centrom afinosti O_∞. Pravoj polja τ odgovara njena projekcija u polju τ', dakle, preslikavanje je kolinearno. Svaka tačka prave t, po kojoj se τ i π seku, preslikava se u samu sebe, npr. $P \equiv P'$, pa se prava t preslikava u samu sebe identički, tj. $t \equiv t'$, dakle, ona je osa preslikavanja. Prema tome, dokazali smo stav:

Stav 13. Preslikavanje tačaka ravnih polja $\tau(M)$ i $\tau'(M')$ projekcijskim zracima normalnog projektovanja na π je perspektivno afino preslikavanje u kome su zraci afinosti projekcijski zraci, tačka M ravni τ i njena projekcija M' u ravni π par odgovarajućih tačaka preslikavanja, a osa afinosti je trag t ravni τ.

Obaranje ravni definiše se rotacijom ravni τ oko ose t. Kao što smo dokazali, tačka M ravni τ i njen položaj (M) određen rotacijom pripadaju pravoj $M(M)$ čiji je položaj prema ravni π utvrđen nagibnim uglom i tragom ravni τ. Dakle, izvedena rotacija je obostrano jednoznačno preslikavanje tačaka ravnih polja τ i $\pi \equiv (\tau)$ kojim se tački M polja τ dodeljuje tačka (M) polja (τ) zrakom $M(M)$. Dakle, preslikavanje se izvodi paralelnim zracima čija je zajednička beskonačno daleka tačka S_∞ centar afinosti. Pravoj polja τ odgovara njen oboreni položaj u polju (τ), dakle, preslikavanje je kolinearno. Svaka tačka prave t, koja je osa rotacije, preslikava se u istu tačku, npr. $P \equiv (P)$, pa se prava t preslikava u samu sebe identički, tj. $t \equiv (t)$. Prema tome, prava t je osa preslikavanja. Time smo dokazali sledeći stav:

Stav 14. Preslikavanje tačaka ravnih polja τ i (τ) zracima paralelnim pravoj $M(M)$, čiji nagibni ugao prema π pripada ravni normalnoj na trag t ravni τ i jednak je polovini nagibnog ugla ravni τ, jeste perspektivno afino preslikavanje u kome su zraci paralelni pravoj $M(M)$, tačka M ravni τ i tačka (M) u ravni π su odgovarajuće tačke preslikavanja, a osa afinosti je trag t ravni τ.

Prema tome, ravan π je nosilac dvaju polja tačaka τ' i (τ). Kako su preslikavanja tačaka polja τ i τ' kao i τ i (τ) perspektivno kolinearna sa centrom O_∞, odnosno S_∞, sleduje na osnovu stava I.5.3 da je i preslikavanje u ravni π polja tačaka τ' i (τ) perspektivno kolinearno. Centar kolineacije je tačka u kojoj prava $O_\infty S_\infty$ prodire kroz ravan π i ona pripada pravoj $M'(M)$, gde je M' i (M) par odgovarajućih tačaka preslikavanja. Kako je $O_\infty S_\infty$ beskonačno daleka prava, njena tačka prodora kroz ravan τ je beskonačno daleka tačka S_∞' prave $M'(M)$. Kao što smo dokazali, prava $M'(M)$ je normalna na trag t, pa kako je centar beskonačno daleka tačka S_∞' ove prave, preslikavanje je afino i zraci afinosti su paralelni pravoj $(M)M'$, odnosno, oni su normalni na trag t. Osa afinosti je trag t ravni τ, jer se ova prava preslikava u samu sebe identički, tj. $t' \equiv (t)$. Tako smo dokazali stav:

Stav 15. Preslikavanje u ravni π tačaka ravnih polja (τ) i τ' je perspektivno afino preslikavanje u kome su zraci afinosti prave normalne na trag t, tačka ravni τ u oborenom položaju (M) i njena

projekcija M' par odgovarajućih tačaka preslikavanja, a osa afinosti je trag t ravni τ.

Ako je ravan τ paralelna projekcijskoj ravni π, tada, prema stavu 13, ravno polje tačaka τ preslikava se u ravni π u polje tačaka τ' perspektivno afino, pri čemu je centar preslikavanja beskonačno daleka tačka zrakova projektovanja, a osa preslikavanja je beskonačno daleka prava, presečna prava ravni τ i π. Preslikavanje je tada translacija u pravcu zraka afinosti, tj. zraka projektovanja, i kao što je dokazano u I.6., likovi ravni τ preslikavaju se u translatorno podudarne likove u projekcijskoj ravni π.

6. Projekcija ravnog lika

Kako je oboreni položaj ravnog lika dobijen rotacijom ravni toga lika, on je podudaran liku u prostoru, pa kažemo da je oboreni položaj *prava veličina* datog lika. Prema dokazanom stavu 15., ravan lik, koji pripada ravni τ, konstruiše se u oborenom položaju, tj. u pravoj veličini, iz njegove projekcije navedenim perspektivno afinim preslikavanjem. I obratno, istim se preslikavanjem konstruiše projekcija lika iz oborenog položaja. Kako se projekcija ravnog lika dobija kao njegova perspektivno afina slika, sleduje da se od osobina koje lik ima u prostoru u projekciji zadržavaju samo one koje su invarijantne u odnosu na perspektivno afino preslikavanje, a to su paralelnost i razmera trojke tačaka jedne prave.

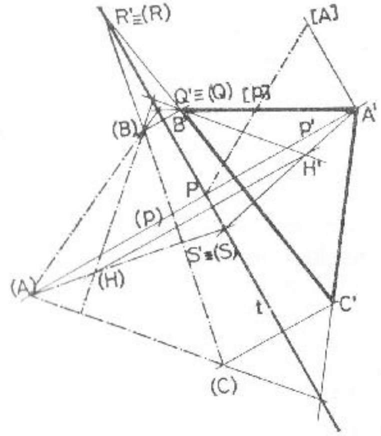
Ako je ravan τ paralelna projekcijskoj ravni π, projekcija lika koji pripada ovoj ravni je translatorno podudaran lik, tj. njegova projekcija konstruiše se u projekcijskoj ravni π u pravoj veličini.

Primer 1. Data je projekcija ravni $\tau(t, A', OA_0)$ i trougla ABC koji joj pripada. Odrediti projekciju presečne tačke visina trougla ABC (sl. 53).

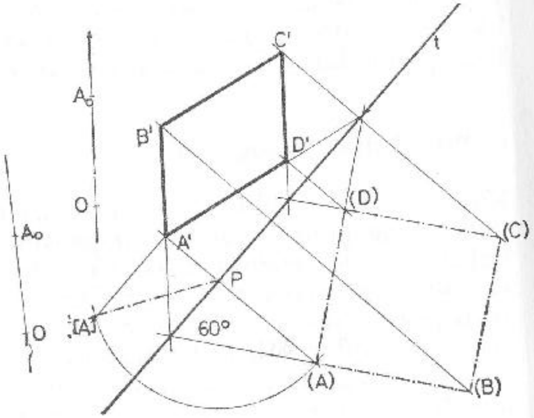
Kako je visina normalna na stranicu trougla i kako se prav ugao, u opštem slučaju, ne projektuje u prav ugao, jer normalnost dveju pravih nije invarijanta perspektivno afinog preslikavanja, konstrukciju visina trougla izvodimo u oborenom položaju ravni τ.

Da bismo konstruisali prvo oboreni položaj (A) tačke A ravni τ, odredimo odstojanje AP tačke A od traga t u pravoj veličini. Konstruišimo zato kroz A' projekciju p' tako da je $p' \perp t$, trag P prave p u preseku p' sa t, a zatim oborenu pravu $[p] = P[A]$, obaranjem projektujuće ravni prave p. Prava veličina duži PA je duž $P[A]$. Oboreni položaj (A) tačke A pri rotaciji τ oko t određujemo na normali iz A' na t tako da je $(A)P = [A]P$ i da su tačke (A) i A' sa različitih strana tačke P, dakle, sa različitih strana traga t (sl. 53).

Kako su ovom konstrukcijom određeni osa, zrak i par odgovarajućih tačaka perspektivno afinog preslikavanja polja τ' i (τ), temena (B) i (C) konstruišemo na osnovu osobina ovog preslikavanja. Prava $A'B'$ seče osu t u tački $Q' \equiv (Q)$, pa se tačka (B) dobija na pravoj $(A)(Q)$ u preseku sa zrakom afinosti iz B', tj. normalom $B'(B)$ na trag t. Slično se na pravoj $(B)(R)$, gde je $(R) \equiv R'$ presek ose t sa $B'C'$, određuje (C) u preseku sa normalom iz C' na t. Trougao (ABC) je prava veličina trougla ABC. Presečna tačka (H) visina trougla (ABC) je zajednička tačka normala konstruisanih iz temena na naspramne stranice trougla (ABC). Presečna tačka (S) ≡ S' prave (A)(H) i ose t određuje sa A' projekciju S'A' prave SA. Presek S'A' sa zrakom afinosti iz (H) je projekcija H' tražene tačke.



sl. 53



sl. 54

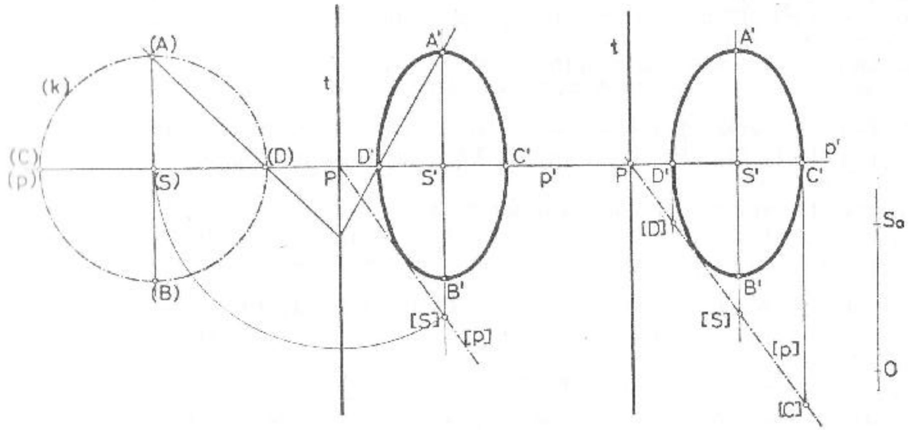
Primer 2. Konstruisati projekciju kvadrata ABCD koji pripada ravni τ ako je poznata projekcija ravni τ (t,A',OA₀), prava veličina stranice AB kvadrata i ugao ∢ (AB,t) = 60° (sl. 54).

Kao u prethodnom primeru, konstruišimo tačku (A) dobijenu obaranjem ravni τ prethodno odredivši pravu veličinu odstojanja AP tačke A od t. Konstruišimo zatim pravu (A)(B) tako da je ∢ ((A)(B),t) = 60° i na njoj stranicu (A)(B) kvadrata u pravoj veličini, i najzad konstruišimo kvadrat (ABCD). Kako je poznata osa t, zrak AA' i par odgovarajućih tačaka A, A' perspektivno afinog preslikavanja, konstruišimo kvadratu (ABCD) perspektivno afin četvorougao A'B'C'D' (I.7). Pomenimo da je, na osnovu poznatih osobina perspektivno afinog preslikavanja, četvorougao A'B'C'D' paralelogram.

Primer 3. Data je projekcija ravni τ (t,S',OS₀). Konstruisati projekciju kruga k koji pripada datoj ravni, centar je data tačka S, a poluprečnik je jednak datoj duži r (sl. 55).

Pošto odredimo (S) iz S', kao u prvom primeru, konstruišimo krug k u oborenom položaju (k), u pravoj veličini, sa centrom (S) i datim poluprečnikom r (sl. 55a). Krug (k) preslikavamo perspektivno afinim preslikavanjem njegovih dvaju normalnih prečnika, izaberimo prečnike (AB) || t i (CD) ⊥ t. Kako je prava (AB) paralelna osi t i sadrži (S), odgovarajuća prava A'B' takođe je paralelna osi t i sadrži S'. Prava (CD) seče t u tački (P) ≡ P' i sadrži (S), pa je C'D' na pravoj PS' koja je takođe normalna na osu t. Konjugovani prečnici A'B' i C'D' su uzajamno normalni, dakle, velika i mala osa elipse k' koja je tražena projekcija kruga k.

Isti zaključak da su A'B' i C'D' ose elipse dobijamo na osnovu sledećih osobina. Prečnik AB kruga k paralelan je tragu t, dakle, paralelan je i ravni π, pa je njegova projekcija A'B' = AB i A'B' || t. Prečnik AB kruga se projektuje u pravoj veličini u duž A'B'. Prečnik CD je normalan na trag t, pripada liniji najvećeg pada ravni τ, pa je C'D' ⊥ t i C'D' < CD, pri čemu je skraćenje linije pada najveće i C'D' je najmanji prečnik elipse. Prečnici A'B' i C'D' su uzajamno normalni, dakle, to su velika i mala osa elipse.



sl. 55

Pošto smo dokazali da je velika osa A'B' elipse paralelna tragu ravni i A'B' = AB i da je mala osa C'D' projekcija prečnika CD kruga koji pripada liniji pada ravni τ, projekciju kruga možemo konstruisati i ne obarajući ravan τ (sl. 55b). Na pravoj kroz S' paralelnoj tragu t konstruišemo A'B' = AB, veliku osu elipse. Na oborenoj liniji pada koja sadrži S, tj. na pravoj [p] = P[S] konstruišemo u pravoj veličini prečnik [CD] kruga tako da je [S] središte duži [CD]. Projekcija C'D' na p' je tada mala osa elipse.

Zadaci za vežbu

Rešiti metodom odstojanja sledeće zadatke:

1. Predstaviti u projekcijskoj ravni π metodom odstojanja dve tačke M i K čija su odstojanja od π jednaka, ako su:
a) tačke M i K sa raznih strana ravni π;
b) tačke M i N sa iste strane ravni π.

2. Predstaviti pravu p u projekcijskoj ravni π ako je data dvema tačkama A(A',OA₀) i B(B',OB₀). Odrediti projekciju tačke L prave p ako je:
a) L središte duži AB,
b) L tačka duži AB i AL : LB = 2 : 3,
c) L na pravoj AB i AB = BL.

3. Rešiti zadatak 2. ako je prava p = AB:
a) paralelna projekcijskoj ravni π,
b) normalna na projekcijsku ravan π.

4. Predstaviti pravu p u projekcijskoj ravni π ako je data dvema tačkama $A(A', OA_0)$ i $B(B', OB_0)$ i odrediti:
a) trag prave p,
b) pravu veličinu duži AB,
c) pravu veličinu nagibnog ugla prave prema projekcijskoj ravni π,
d) projekciju H' tačke H prave p ako je AH jednako datoj duži MN,
e) odstojanje tačke L ako je L središte duži AB,
f) projekciju K' tačke K prave p ako je odstojanje OK_0 tačke K dva puta veće od odstojanja OA_0 tačke A.

5. Date su projekcije paralelnih pravih $p(P, A', OA_0)$ i $q(B', OB_0)$. Konstruisati:
a) trag Q prave q,
b) projekciju C' tačke C na pravoj q ako su odstojanja tačaka C i A jednaka, tj. $OC_0 = OA_0$.
c) trag t ravni τ određene pravim p i q,
d) sutražnicu kroz tačku A ravni određene pravim p i q.

6. Date su tačke $A(A', OA_0)$, $B(B', OB_0)$, $C(C', OC_0)$. Konstruisati:
a) projekciju D' tačke D na pravoj BC čije je odstojanje od π jednako odstojanju tačke A,
b) trag t ravni τ određene tačkama A, B, C,
c) liniju pada kroz tačku A ravni τ određene tačkama A, B, C,
d) pravu veličinu nagibnog ugla ravni τ određene tačkama A,B,C.

7. Date su dve mimoliazne prave $e(E, A', OA_0)$ i $f(F, B', OB_0)$. Konstruisati:
a) odstojanja tačaka P prave e i Q prave f čije se projekcije poklapaju, tj. $P' = Q'$,
b) nagibne uglove pravih e i f,
c) trag t ravni τ koja je određena pravom e i pravom $g \parallel f$ ako g sadrži tačku P.

8. Date su dve prave a i b koje se seku u tački M. Konstruisati trag t i nagibni ugao ravni τ određene pravim a i b ako je:
a) $a(A, M', OM_0)$, $b \parallel \pi$,
b) $a(A, M', OM_0)$, $b \perp \pi$,
c) $a(A, M', OM_0)$, $b \parallel \pi$, pri čemu je a linija pada ravni.

9. Date su dve paralelne prave m i n koje su paralelne π: $m(M', OM_0)$ i $n(N', ON_0)$. Odrediti trag t i nagibni ugao ravni određene pravim m i n.

10. Konstruisati trag ravni koja sadrži datu pravu $a(A, M', OM_0)$ i čiji je nagibni ugao prema π jednak 30°.

11. Data je ravan τ tačkama $P(P', OP_0)$, $Q(Q', OQ_0)$, $R(R', OR_0)$. Konstruisati:
a) projekciju težišta T trougla PQR,
b) projekciju opisanog kruga oko trougla PQR,
c) projekciju upisanog kruga u trougao PQR.

12. Konstruisati projekciju pravougaonika ABCD koji pripada ravni τ ako je dato: trag t, stranica AB (A', OA_0, B', OB_0) i ako je $AD = 2AB$.

13. Date su dve prave p i q koje se seku u tački A : $p(P, A', OA_0)$ i $q(Q, A' OA_0)$. Odrediti:
a) pravu veličinu ugla pravih p i q,
b) projekciju jednakokrakog trougla ABC čiji kraci AB i AC pripadaju redom pravim p i q i jednaki su datoj duži,
c) projekciju jednakokrakog trougla ABC čiji kraci pripadaju redom pravim p i q i teme B je u projekcijskoj ravni π.

14. Date su tačke $A(A', OA_0)$, $B(B', OB_0)$, $H(H', OH_0)$. Konstruisati projekciju trougla ABC za koji je AB stranica i:
a) H je presečna tačka visina trougla ABC,
[illegible] kruga u trougao ABC.

15. Date su prava $p(P, Q', OQ_0)$ i tačka $S(S', OS_0)$ koja joj ne pripada. Konstruisati:
a) projekciju jednakostraničnog trougla STU čija stranica TU pripada pravoj p,
b) projekciju pravilnog šestougla ABCDEF ako stranica AB pripada pravoj p i S je centar kruga opisanog oko šestougla,
c) projekciju kruga k ako je S središte i p tangenta kruga,
d) projekciju romba STUV ako stranica TU pripada pravoj p i ako je ugao STU jednak 60°.

16. Data je ravan τ tragom t i pravom $p(P, Q', OQ_0)$. Konstruisati:
a) projekciju kruga k koji dodiruje prave t i p u tački Q,
b) projekciju pravilnog šestougla ABCDEF ako je Q centar opisanog kruga i stranica AB pripada tragu t,
c) projekciju kruga k ako je Q centar i t tangenta kruga,
d) projekciju kruga k ako je Q centar i t sečica koja seče krug pod uglom od 60°.

17. Data je duž AB paralelna ravni π. Konstruisati projekciju:
a) pravilnog šestougla čija je jedna stranica duž AB i nagibni ugao ravni šestougla je 60°,
b) kvadrata čija je jedna stranica duž AB i nagibni ugao ravni kvadrata je 45°,
c) pravilnog petougla čija je jedna stranica duž AB i nagibni ugao ravni petougla je 30°,
d) pravilnog petougla čija je jedna stranica duž AB i ravan petougla je: i) paralelna proj. ravni π, ii) normalna na π.

18. Data je duž AB $(A', OA_0; B', OB_0)$. Konstruisati:
a) projekciju kvadrata ABCD tako da je jedna njegova stranica duž AB i da kvadrat pripada ravni čiji je nagibni ugao 30°,
b) projekciju pravilnog petougla čija je jedna stranica duž AB i nagibni ugao ravni petougla je 45°,
c) projekciju pravilnog petougla čija je jedna stranica duž AB i ravan petougla je normalna na ravan π.

19. Konstruisati projekciju kruga ako je prečnik kruga data duž PQ koja je paralelna ravni π, a nagibni ugao ravni τ kruga je:
a) 60°, b) 45°, c) $\tau \parallel \pi$, d) $\tau \perp \pi$.

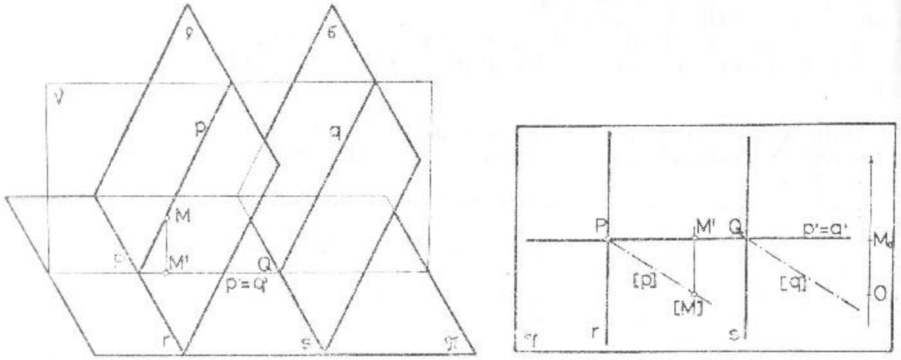
20. Date su paralelne prave $p(P, R', OR_0)$ i $q(Q)$. Konstruisati projekciju:
a) kruga ako su p i q tangente,
b) kvadrata čije su suprotne stranice na pravim p i q,
c) pravilnog šestougla čije su suprotne stranice na pravim p i q.

7. Dve ravni

Paralelne ravni. Dve ravni ρ i σ su paralelne ako su u ravni ρ dve prave koje se seku paralelne dvema pravima koje se seku u ravni σ. Uočimo tragove i linije pada ovih ravni (sl. 56). Kako su ravni ρ i σ paralelne, presečne prave ovih ravni sa ravni π su paralelne, dakle, *tragovi r i s su paralelne prave.* Neka je p jedna linija pada ravni ρ i neka je ν projektujuća ravan prave p. Ravan ν seče σ po pravoj q, koja je paralelna, pravoj p. Ravan ν je zajednička projektujuća ravan pravih p i q i ona seče π po projekciji $p' = q'$ pravih p i q. Kako je $r \parallel s$ i $p \parallel q$ i kako je $\sphericalangle(p,r)$ prav, sledi da je i $\sphericalangle(q,s)$ prav. Dakle, q je linija pada ravni σ. Prema tome, *linije pada paralelnih ravni paralelne su, pa su i njihove projekcije paralelne ili se poklapaju.* Na osnovu pokazanih osobina zaključujemo da važi:

Stav 16. Ako su dve ravni paralelne, paralelni su tragovi i paralelne su linije pada ovih ravni kao i njihove projekcije.

Kako su linije pada p i q ravni ρ i σ paralelne, jednaki su i nagibni uglovi ovih ravni. Da bismo ovu osobinu naznačili u projekcijskoj ravni π, oborimo zajedničku projekcijsku ravan ovih pravih (sl. 56b). Tada su uglovi $\sphericalangle([p],p')$ i $\sphericalangle([q],q')$ jednaki i sa iste su strane prave $p' = q'$. Oni predstavljaju pravu veličinu nagibnih uglova paralelnih ravni ρ i σ.



sl. 56

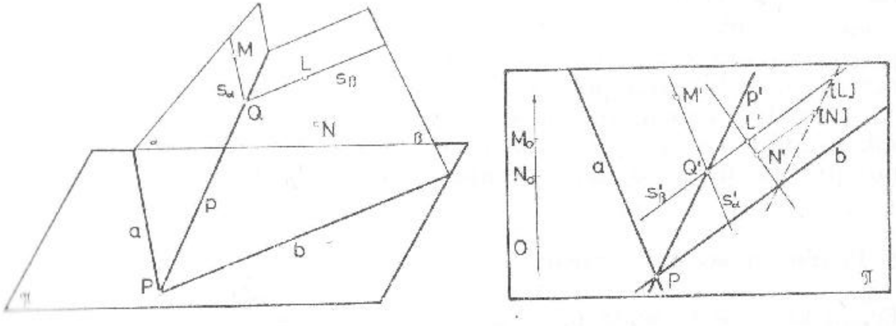
Zadatak. Datoj ravni $\sigma(s, ([q],q'))$ konstruisati paralelnu ravan ρ kroz datu tačku $M(M',OM_0)$ (sl. 56b).

Predstavimo ravan σ tragom s i oborenim položajem datog nagibnog ugla ravni, pri čemu biramo onu liniju pada q ravni σ čija projektujuća ravan sadrži datu tačku M. Tada q' sadrži M' i $q' \perp s$ (sl. 56b). Obaranjem projektujuće ravni prave q dobijamo [q] pod datim uglom prema q' i [M] na pravoj $[M]M' \perp q'$ i $[M]M' = OM_0$. Konstruišimo kroz tačku M pravu $p \parallel q$ i odredimo njen trag P. Prema prethodnom je $p' = q'$, [p] sadrži [M] i $\sphericalangle([p],p') = \sphericalangle([q],q')$. Prava p je linija pada tražene ravni, pa kroz njen trag P, koji je presek pravih p' i [p], prolazi trag r tražene ravni i $r \parallel s$. Tragom r i linijom pada p određena je ravan ρ.

R a v n i s e s e k u. Dve ravni koje nisu paralelne seku se. Presečna prava se određuje dvema zajedničkim tačkama ovih ravni. Neka su dve ravni date projekcijama njihovih tragova i po jedne tačke: $\alpha(a,M)$ i $\beta(b,N)$.

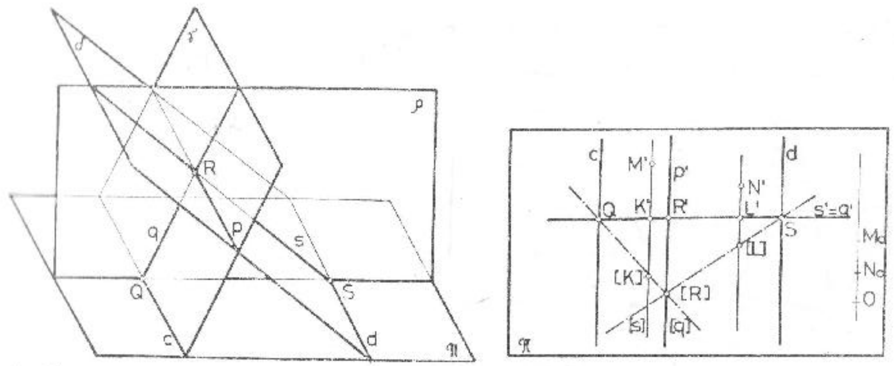
1. Ako tragovi ravni nisu paralelne prave, jedna zajednička tačka ovih ravni je presečna tačka P tragova a i b. Za određivanje još jedne zajedničke tačke ravni konstruišimo u ovim ravnima po jednu sutražnicu koje obe pripadaju istoj ravni $\sigma \parallel \pi$, npr. kroz tačku M. Presečna tačka Q ovih sutražnica je zajednička tačka ravni α i β i ona sa tačkom P određuje presečnu pravu p ravni α i β (sl. 57a).

U projekcijskoj ravni π projekciju sutražnice s'_α ravni α konstruišemo kroz tačku M' paralelno tragu a. Odstojanja tačaka sutražnice s_β u ravni β jednaka su odstojanju tačke M. Zato na projekciji linije pada p' ravni β, koja sadrži poznatu tačku N', konstruišimo projekciju L' tačke L tako da je $LL' = MM'$. Kroz L' konstruišimo zatim $s_\beta \parallel b$. Presečna tačka Q' projekcija s'_α i s'_β i tačka P određuju projekciju $p' = PQ'$ presečne prave p ravni α i β (sl. 57b).



sl. 57

Ukoliko tragovi ravni nisu dati, može se navedenom konstrukcijom odrediti još jedan par sutražnica u proizvoljnoj ravni $\rho \parallel \pi$, različitoj od σ i odrediti njihova presečna tačka R. Tačke Q i R određuju tada presečnu pravu $QR = p$ datih ravni.



sl. 58

2. Ukoliko ravni $\gamma(c,M)$ i $\delta(d,N)$ nisu paralelne, ali su im tragovi c i d paralelni, njihova je presečna prava p paralelna tragovima c i d jer prolazi kroz zajedničku tačku tragova koja je beskonačno daleka tačka P_∞. (sl. 58). Za konstrukciju prave p dovoljno je odrediti jednu zajedničku tačku ravni γ i δ. Izaberimo zato novu ravan $\rho \perp \pi$, i normalnu na c i d. Konstruišimo presečne prave q i s ravni γ i δ sa ρ. Kroz presečnu tačku R pravih q i s, zajedničku tačku ravni γ, δ i ρ, prolazi prava p. Kako se projekcije q' i s' poklapaju, jer su u istoj ravni $\rho \perp \pi$, njihovu presečnu tačku konstruišimo obaranjem ravni ρ. Prethodno na pravoj q odredimo sutražnicom kroz M tačku K i na pravoj s odredimo sutražnicom kroz N tačku L. Tada je $KK' = MM'$ i $LL' = NN'$. Obaranjem dobijamo pravu $[q] = Q[K]$ i $[s] = S[L]$ i njihovu presečnu tačku [R]. Kroz projekciju R' prolazi prava p' paralelna tragovima c i d.

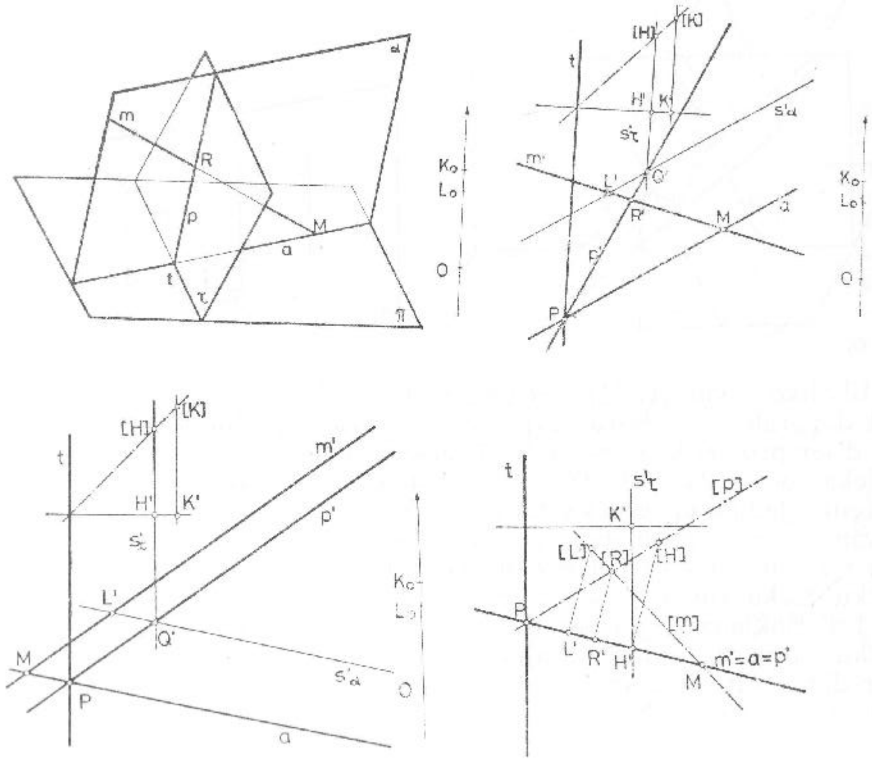
Kako su prave q i s linije pada ravni γ i δ, nagibni uglovi ovih pravih konstruisani su u oborenom položaju u pravoj veličini. U opštem slučaju oni su različiti, pa zaključujemo da linije pada ravni γ i δ imaju paralelne projekcije, ali da one u prostoru nisu paralelne.

Pomoćna ravan ρ ne mora biti izabrana u specijalnom položaju prema π, kao što je to učinjeno. Ravan ρ može biti izabrana u proizvoljnom kosom položaju preema π, a zadatak se rešava kao u prethodnom primeru, tj. konstruiše se zajednička tačka presečnih pravih ove treće ravni sa prvim dvema jer ona pripada traženoj presečnoj pravoj datih dveju ravni.

8. Prodor prave kroz ravan

Prava koja ne pripada datoj ravni ima sa njom jednu zajedničku tačku. Ako je zajednička tačka beskonačno daleka, prava je paralelna ravni, i paralelna je svakoj pravoj te ravni određenoj ovom beskonačno dalekom tačkom.

Prodornu tačku prave m kroz ravan τ konstruišemo tako što kroz pravu m postavljamo pomoćnu ravan α, konstruišemo zatim presečnu pravu p ravni τ i α. Prave m i p pripadaju obe ravni α



sl. 59

i seku se u tački R. Ako je R beskonačno daleka tačka, tada je $m \parallel p$, prema tome je $m \parallel \tau$. Ako je R konačna tačka, ona je tražena prodorna tačka prave m kroz ravan τ (sl. 59a).

Izvedimo odgovarajuću konstrukciju u projekcijskoj ravni π ako je ravan τ data tragom t i tačkom $K(K',OK_0)$ i prava m data tragom M i tačkom $L(L',OL_0)$ (sl. 59b).

Trag a pomoćne ravni α koja sadrži pravu m je proizvoljna prava koja sadrži trag M prave m (II.2). Projekciju p' presečne prave p ravni τ i α konstruišemo kao u II.6, određujući presek P tragova a i t i presek Q' projekcija sutražnica ravni τ i α koje su na odstojanju od π jednakom odstojanju tačke L. Prava $PQ' = p'$ i m' seku se u tački R', projekciji tražene prodorne tačke (sl. 59b). Ukoliko su m i p paralelne, prava m ne prodire kroz ravan τ, ona je paralelna ravni τ (sl. 59c).

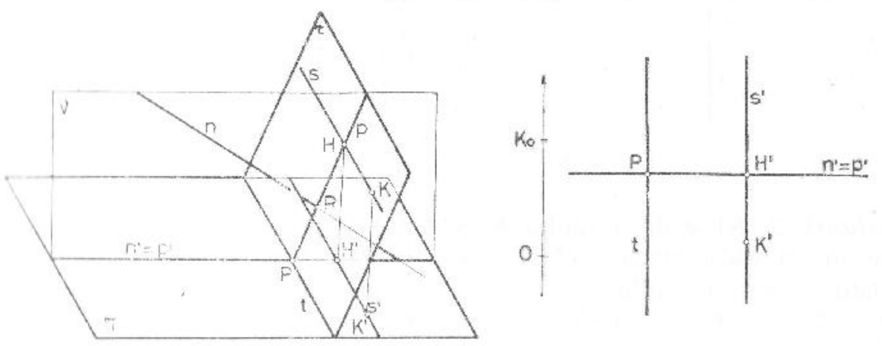
Pomoćna ravan α kroz pravu m može biti i projektujuća ravan prave m (sl. 59d). Sa projekcijom m' poklapa se tada i trag a ravni α i projekcija p' presečne prave p ravni τ i α. Kako je prava p u ravni τ, njen trag P je na tragu t i određen je u preseku sa p'. Na p' odredimo tačku H' u preseku sa projekcijom s' sutražnice ravni τ kroz K'. Tada je $HH' = KK'$. Kako se projekcije m' i p' poklapaju, presečnu tačku R pravih m i p konstruišimo u oborenom položaju ravni α kao presek pravih $[m] = M[L]$ i $[p] = P[H]$, koristeći osobinu da obe prave imaju istu projektujuću ravan ν. Projekcijskim zrakom iz $[R]$ normalno na m' dobijamo R', projekciju tražene prodorne tačke.

9. Normalnost pravih i ravni

P r a v a i r a v a n. Neka je prava n normalna na ravan τ. Dokažimo da za njihove projekcije važi:

Stav 15. Ako je prava n normalna na ravan τ, projekcija n' prave n normalna je na trag t ravni τ i na projekciju s' sutražnice ravni τ (sl. 60a).

Neka je ν projektujuća ravan prave n. Ona seče ravan τ po pravoj p. Kako je $n \perp \tau$, sledi da je $n \perp p$. Kako su n i p u istoj



sl. 60

projektujućoj ravni, njihove se projekcije poklapaju, tj. $n' = p'$. Ravan ν je projektujuća ravan prave n pa je normalna na π, a kako sadrži $n \perp \tau$, ona je normalna i na τ. Prema tome, ravan ν je normalna i na presečnu pravu t ravni τ i π i seče ravni τ i π redom po pravima p i $n' = p'$ koje su normalne na t.

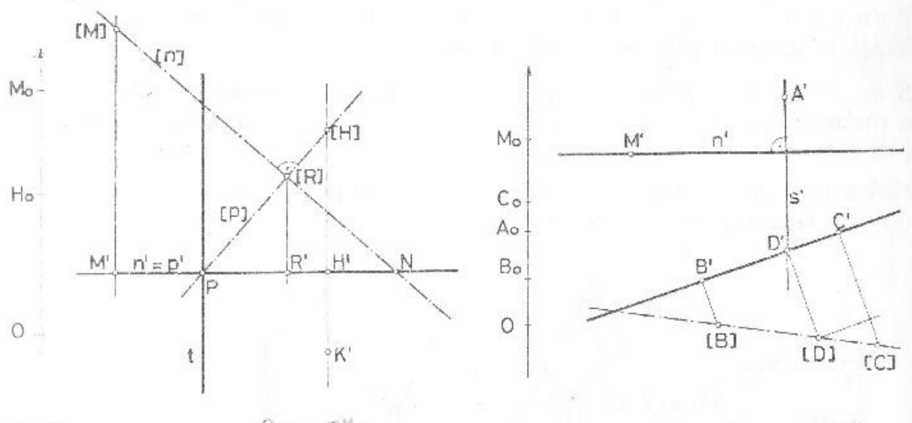
Dokazali smo, dakle, da je $n' \perp t$, da je p linija pada ravni jer je $p \perp t$ i da je $n \perp p$.

Kako je sutražnica ravni paralelna tragu ravni, tj. $s \parallel t$, odnosno $s' \parallel t$, sleduje da je $n' \perp s'$. Dakle, *projekcija n′ normale n na ravan τ normalna je na projekciju s′ sutražnice s te ravni* (sl. 60b).

Zadatak 1. Date su ravan $\tau(t,K',OK_0)$ i tačka $M(M',OM_0)$ koja joj ne pripada. Odrediti odstojanje tačke M od ravni τ (sl. 61a).

Konstruišimo kroz M pravu $n \perp \tau$ i odredimo prodornu tačku R prave n kroz τ. Duž MR je traženo odstojanje. U projekcijskoj ravni π konstruišemo kroz M′ pravu $n' \perp t$, zatim odredimo projekciju presečne prave p projektujuće ravni ν prave n i ravni τ, tj. $p' = n'$. Presečnu tačku R pravih p i n odredimo u oborenom položaju, gde je $[n] \perp [p]$, određujući [R] u preseku pravih [p] i [n], a zatim njenu projekciju R′ na n′ (II.7). Duž [M][R] na [n] je odstojanje tačke M od ravni τ u pravoj veličini.

Ako nije dat trag ravni, već je ravan τ data projekcijama i odstojanjima svojih triju tačaka A, B, C, tada prvo konstruišemo ili trag ravni, ili jednu sutražnicu ravni. Konstruišimo npr. sutražnicu s kroz tačku A (sl. 60b). Obaranjem prave BC konstruišemo na pravoj B′C′ projekciju D′ tačke D koja ima isto odstojanje od π kao i tačka A. Dakle je $DD' = AA'$, tj. $D'[D] = OA_0$. Tada je $A'D' = s'$. Dalje rešavamo zadatak isto kao i prethodni, konstruišući kroz tačku M′ pravu n′ normalnu na projekciju s′ sutražnice.



sl. 61

$OH_0 = OK_0$

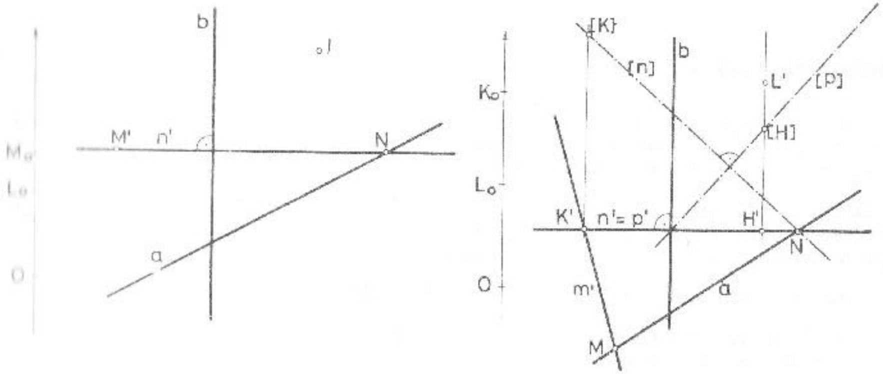
Zadatak 2. Kroz datu tačku $K(K',OK_0)$ konstruisati ravan τ normalnu na datu pravu $n(N,M',OM_0)$ (sl. 61a).

Pošto je $\tau \perp n$, sleduje da je $t \perp n'$ i $s' \perp n'$, gde je s sutražnica ravni τ. Konstruišimo zato kroz K′ pravu $s' \perp n'$ i presečnu tačku H′ pravih s′ i n′, gde je H prodor prave s kroz projektujuću ravan ν prave n. Linija pada p tražene ravni τ kroz tačku H je u

projektujućoj ravni ν prave n, pa je $p' = n'$ i u oborenom položaju je $[p] \perp [n]$. Tačkom K i pravom p određena je ravan τ. Njen trag t normalan je na p′ i prolazi kroz trag P prave p, gde je P presek pravih p′ i [p].

Dve ravni. Za konstrukciju ravni α koja je normalna na ravan β koristimo poznatu osobinu: *ravan α normalna je na ravan β ako i samo ako sadrži jednu pravu n normalnu na ravan β.*

Neka je $n(N,M',OM_0)$ prava normalna na ravan $\beta(b,L',OL_0)$ (sl. 62a). Tada je $n' \perp b$. Kako ravan α sadrži pravu n, njen trag a sadrži trag N prave n. Dakle, svaka ravan određena pravom n i tragom koji sadrži N, normalna je na ravan β. Ravni koje sadrže pravu n obrazuju pramen sa osom n. Jedna od ravni ovog pramena je ravan α određena pravom n i tragom a koji je proizvoljna prava kroz tačku N (sl. 62a).



sl. 62

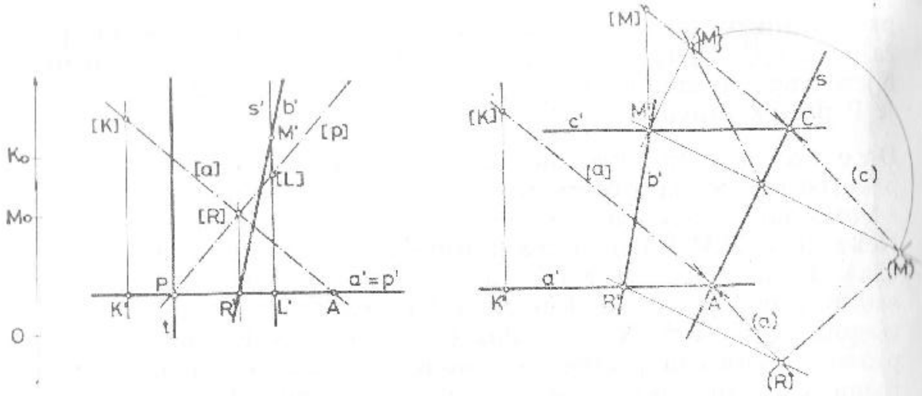
Zadatak 3. Kroz datu pravu m postaviti ravan α normalnu na ravan β (sl. 62b).

Neka su date prava $m(M,K'OK_0)$ i ravan $\beta(b,L'OL_0)$. Konstruišimo pravu n koja je normalna na β i seče m u proizvoljnoj tački, npr. u tački K. Prema prethodnom, prave m i n određuju traženu ravan α. U projekcijskoj ravni π konstruišemo projekciju n′ normalno na b kroz K′. Konstruišemo zatim trag ravni α. Odredimo zato obaranjem prave n njen trag N. Tragovi M i N pravih m i n određuju trag a tražene ravni α.

Zadatak 4. Kroz datu tačku $M(M',OM_0)$ konstruisati pravu b normalnu na datu pravu $a(A,K',OK_0)$ (sl. 63).

a) Konstruišimo u projekcijskoj ravni π, kao u zadatku 2, projekciju ravni τ kroz tačku M koja je normalna na pravu a i odredimo projekciju prodorne tačke R prave a kroz ravan τ. Prava a je normalna na sve prave ravni τ koje prolaze kroz njenu prodornu tačku R kroz ravan τ. Prema tome, MR je tražena prava b. (sl. 63a).

b) Zadatak se može rešiti i na drugi način, postavljanjem ravni σ kroz pravu a i tačku M. Tražena prava b pripada ravni σ i kako je ugao pravih a i b prav, konstruišemo ga prvo u oborenom položaju ravni σ (sl. 63b).



sl. 63

Zadaci za vežbu

1. Date su projekcije triju paralelnih pravih $a(A,M',OM_0)$, $b(N',ON_0)$, $c(L',OL_0)$ koje ne pripadaju jednoj ravni. Konstruisati trag ravni koja sadrži pravu c i paralelna je ravni određenoj pravim a i b.

2. Date su dve prave koje se seku $c(P',OP_0,Q',OQ)$ i $d(P',OP_0, R',OR_0)$. Kroz datu tačku $M(M',OM_0)$ postaviti ravan paralelnu ravni pravih c i d i konstruisati trag i nagibni ugao ove ravni.

3. Date su ravni $\alpha(a,M',OM_0)$ i $\beta(p\|q\|\pi)$. Odrediti presečnu pravu ovih ravni.

4. Data je ravan $\tau(t,K',OK_0)$ i prava $a(P',OP_0;Q',OQ_0)$. Konstruisati prodornu tačku prave a kroz ravan τ.

5. Data je ravan α tragom a i tačkom K i ravan β dvema pravim koje se seku. Konstruisati presečnu pravu ovih dveju ravni.

6. Data je ravan $\tau(t,K',OK_0)$ i tačka $M(M',OM_0)$. Konstruisati: a) tački M simetričnu tačku N u odnosu na ravan τ, b) ravni τ simetričnu ravan u odnosu na tačku M.

7. Date su paralelne ravni $\mu(m,K',OK_0)$ i $\nu(n)$. Konstruisati rastojanje ovih ravni.

8. Data je ravan τ pravima $a(A,P',OP_0)$ i $b(P',OP_0,Q',OQ_0)$. Na datom odstojanju od ravni τ određene pravim a i b konstruisati ravan paralelnu ravni τ.

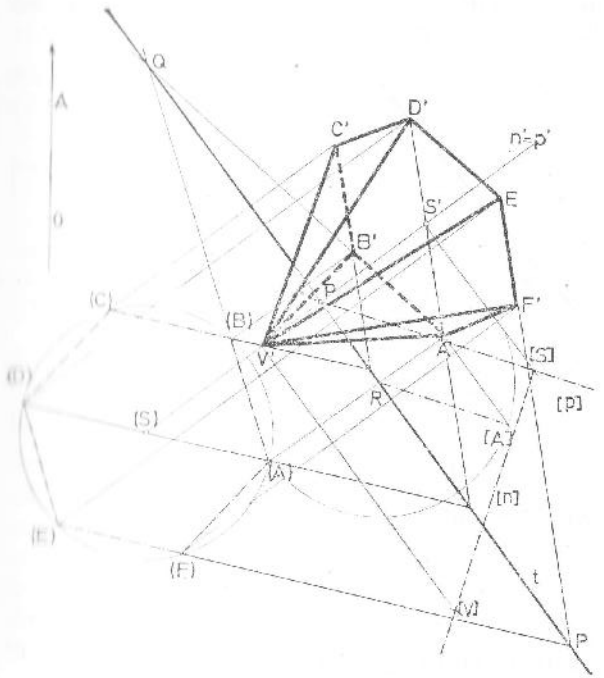
9. Kroz datu tačku $M(M',OM_0)$ konstruisati ravan τ normalnu na dve date ravni $\alpha(a,K',OK_0)$ i $\beta(b,L',OL_0)$.

10. Date su dve paralelne prave $a(A,M',OM_0)$ i $b(N',ON_0)$. Konstruisati rastojanje ovih pravih.

10. Projekcije nekih geometrijskih tela

Izložićemo konstrukciju projekcija nekih geometrijskih tela ako je poznat oblik, veličina i položaj tela prema projekcijskoj ravni π. Konstrukcije projekcija tela zasnivaju se na prethodno izloženim osobinama projekcija ravnih likova i raznih međusobnih položaja tačaka, pravih i ravni. Izvodimo ih tako što konstruišemo projekcije temena, ivica i konture projekcija tela. Iz ovih konstrukcija proizlazi i konstrukcija projekcije tela ako je poznat oblik tela, a nisu dati svi podaci o veličini i položaju. Biraćemo najopštiji položaj tela prema projekcijskoj ravni, a specijalne izvodimo iz ovih kao primere. Pretpostavljamo da su definicije o obliku i neke osobine geometrijskih tela poznate.

Piramida. — Izvedimo projekciju piramide konstruišući projekciju osnove i projekciju vrha. Konstruišimo projekciju pravilne šestostrane piramide ABCDEFV čija je osnova u datoj ravni $\tau(t,A',OA_0)$, jedna ivica osnove data je projekcijom $A'B'$, a visina piramide je dva puta veća od ivice osnove (sl. 64).



sl. 64

Kako je osnova piramide pravilan šestougao u ravni τ kosoj prema ravni π, njegovu projekciju konstruišemo obaranjem ravni τ (II.4). Odredimo prvo pravu veličinu odstojanja tačke A od traga t, duž [A]R, a zatim tačku (A) određenu obaranjem ravni τ, tj. $A'(A) \perp t$ i $R(A)=R[A]$. Trag Q prave AB je na tragu t, presek sa projekcijom $A'B'$. Na pravoj (A)Q konstruiše se tačka (B) iz B' čime je određena ivica osnove, odnosno stranica šestougla u oborenom položaju, dakle, u pravoj veličini. Konstruišimo zatim pravilan šestougao (ABCDEF) čija je stranica duž (AB) i središte (S). Perspektivno afinim preslikavanjem, u kome je t osa, (A)A' zrak sa parom odgovarajućih tačaka (A), A', konstruišemo projekciju $A'B'C'D'E'F'$ (II.5). Prema osobinama perspektiv-