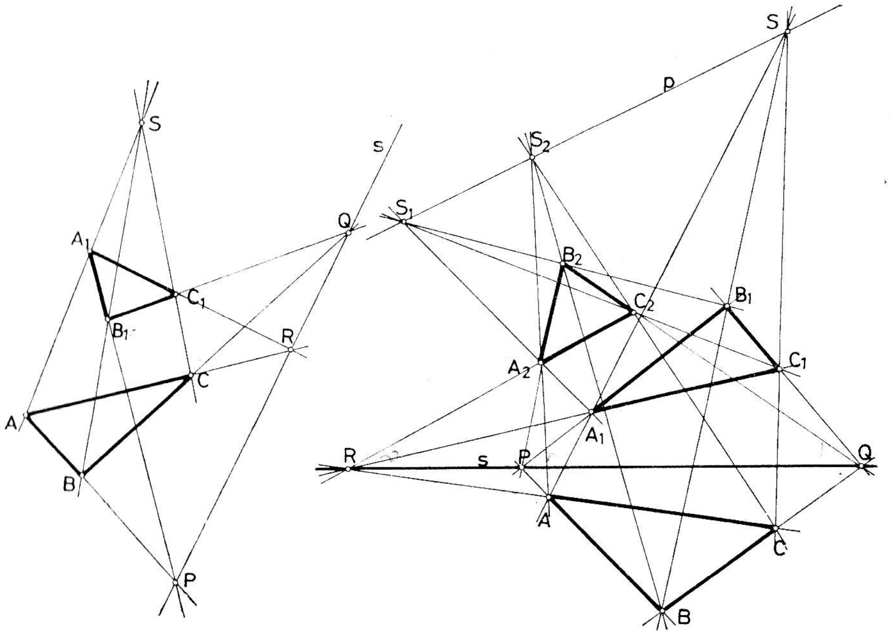
(sl. 9a). Neka je s presečna prava ovih ravni, i A i A_1, B i B_1, C i C_1 odgovarajuća temena datih trouglova.

1. U direktnom stavu se pretpostavlja da se prave AA_1, BB_1 i CC_1 seku u jednoj tački S. Pošto se prave AA_1 i BB_1 seku u tački S, one određuju ravan. Ovoj ravni pripadaju prave AB i A_1B_1 i neka je njihova presečna tačka P. Tačka P pripada ravni α, jer je tačka prave AB i pripada ravni α_1, jer je tačka prave A_1B_1. Dakle, tačka P pripada presečnoj pravoj s ravni α i α_1. Slično se pokazuje da se prave BC i B_1C_1 seku u tački Q i da se prave AC i A_1C_1 seku u tački R i da obe pripadaju pravoj s. Dakle, presečne tačke pravih kojima pripadaju odgovarajuće stranice trouglova, tačke P, Q, R, pripadaju jednoj pravoj s.



sl. 9

2. Pretpostavka obratnog stava je da presečne tačke P, Q, R, pravih kojima pripadaju odgovarajuće stranice, redom AB i A_1B_1, BC i B_1C_1, AC i A_1C_1, pripadaju jednoj pravoj. Kako su trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$, u različitim ravnima α i α_1, tačke P, Q, R su na presečnoj pravoj s ravni α i α_1. Prave AB i A_1B_1 seku se, dakle, u tački P i obrazuju ravan λ, prave BC i B_1C_1 seku se u tački Q i obrazuju ravan μ i prave AC i A_1C_1 seku se u tački R i obrazuju ravan ν. Ravni λ i μ imaju zajedničke tačke B i B_1, dakle, seku se po pravoj BB_1. Slično se ravni μ i ν seku po pravoj CC_1, a ravni ν i λ po pravoj AA_1. Tri ravni λ, μ i ν imaju zajedničku tačku S. Kroz tačku S prolaze presečne prave AA_1, BB_1, CC_1.

Dokažimo dalje iste stavove pod pretpostavkom da su trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ u istoj ravni (sl. 9b).

3. Neka su trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ u ravni α i neka je S presečna tačka pravih AA_1, BB_1, CC_1. Na proizvoljnoj pravoj p kroz S koja nije u ravni α izaberimo proizvoljne tačke S_1 i S_2. Prave AS_2 i A_1S_1 pripadaju istoj ravni i neka je njihova presečna tačka A_2. Neka se slično prave BS_2 i B_1S_1 seku u tački B_2 i prave CS_2 i C_1S_1 u tački C_2. Tačke A_2, B_2, C_2 određuju trougao u ravni α_2 različitoj od α. Neka se ravni α i α_2 seku po pravoj s. Za dva trougla ABC i $A_2B_2C_2$ u prostoru sa centrom S_2 dokazano je (4.1) da se prave kojima pripadaju odgovarajuće stranice AB i A_2B_2, BC i B_2C_2, AC i A_2C_2 seku redom u tačkama P, Q, R na pravoj s. Isto tako i za trouglove $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ u ravnima α i α_2 sa centrom S_1 prave kojima pripadaju parovi njihovih odgovarajućih stranica seku se u tačkama prave s. Kako A_2B_2 seče s u tački P, sledi da prava A_1B_1 seče s u istoj tački P; slično se dobija da prava B_1C_1 seče s u tački Q i A_1C_1 seče s u tački R. Dakle, AB i A_1B_1, BC i B_1C_1, AC i A_1C_1 seku se redom u tačkama P, Q, R prave s.

4. Pretpostavka obratnog stava je da se prave kojima pripadaju stranice AB i A_1B_1, BC i B_1C_1, CA i C_1A_1 trouglova ABC i $A_1B_1C_1$ seku redom u tačkama P, Q, R prave s. Neka je α_2 proizvoljna ravan kroz pravu s i neka je $A_2B_2C_2$ trougao u ravni α_2 čije stranice A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2 pripadaju pravim koje prolaze redom kroz tačke P, Q, R. Dokazano je da (4.2) za trouglove ABC i $A_2B_2C_2$ koji su u različitim ravnima i čije odgovarajuće stranice pripadaju pravim koje se seku u tačkama jedne prave, postoji tačka S_2 u kojoj se seku prave AA_2, BB_2, CC_2. Takođe, za trouglove $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ postoji tačka S_1 u kojoj se seku prave A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2. Tačke S_1 i S_2 određuju pravu p i neka je S tačka prodora prave p kroz ravan α. Prave S_1A_1 i S_2A_2 seku se u tački A_2 i određuju ravan koja seče ravan α po pravoj AA_1. U istoj ravni je i prava S_1S_2, pa je presek pravih S_1S_2 i AA_1 tačka S. Na isti način se pokazuje da tačka S pripada i pravim BB_1 i CC_1. Dakle, AA_1, BB_1 i CC_1 seku se u tački S.

5. Perspektivno kolinearno preslikavanje dvaju ravnih polja tačaka

Kao što je dokazano, projektovanje ravni τ na ravan π iz centra O je obostrano jednoznačno preslikavanje dvaju ravnih polja tačaka i u kome par odgovarajućih tačaka pripada pravoj koja prolazi kroz tačku O koja je izvan nosilaca ovih ravnih polja tačaka. Definišimo sledeća preslikavanja dvaju ravnih polja tačaka:

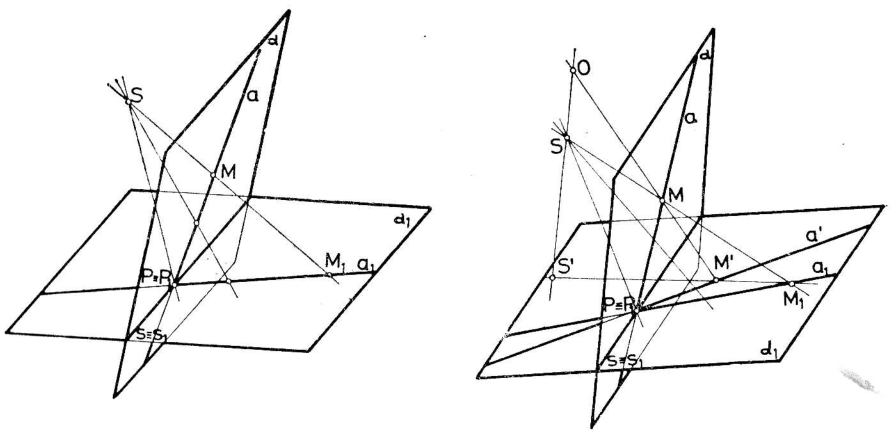
Definicija 1. Obostrano jednoznačno preslikavanje dvaju ravnih polja tačaka u kome parovi odgovarajućih tačaka pripadaju pravim koje prolaze kroz jednu tačku S naziva se *perspektivno preslikavanje*.

Tačka S je *centar perspektive*, a prave na kojima su parovi odgovarajućih tačaka i koje obrazuju snop sa središtem S jesu *zraci perspektive.*

Definicija 2. Obostrano jednoznačno preslikavanje dvaju ravnih polja tačaka u kome tačkama jedne prave prvog polja odgovaraju u drugom polju tačke koje takođe pripadaju jednoj pravoj naziva se *kolinearno* preslikavanje.

Stav 1. Perspektivno preslikavanje dvaju ravnih polja tačaka, čiji su nosioci dve različite ravni, je kolinearno preslikavanje.

Neka su data dva polja tačaka koja pripadaju dvema različitim ravnima α i α_1 (sl. 10a). U polju $\alpha(M)$ neka je a proizvoljna prava. Pravom a i centrom perspektive S određena je ravan (S,a) kojoj pripadaju zraci perspektivnog preslikavanja tačaka prave a. Prema tome, prodorne tačke ovih zrakova kroz ravan α_1 pripadaju presečnoj pravoj a_1 ravni (Sa,) sa α_1. Iz ovoga sledi da se tačke prave a polja $\alpha(M)$ preslikavaju u tačke prave a_1 polja $\alpha_1(M_1)$, dakle, preslikavanje je kolinearno.



sl. 10

Posledica 1. U perspektivnom preslikavanju ravni α na α_1 presečna prava s ovih dveju ravni preslikava se u istu pravu i to tako da se svaka njena tačka preslikava u samu sebe, dakle, prava se preslikava u samu sebe identički.

Prema prethodno dokazanom stavu, ravan (S,s), gde je s iz α, seče α_1 po pravoj s_1 i z α_1. Kako je s zajednička prava ravni α i α_1, sledi da se s poklapa sa s_1. Isto tako, zrak SP, gde je P tačka prave s, seče ravan α_1 u istoj tački, dakle, i tačke P i P_1 se poklapaju. Za tačku P kažemo da se preslikava u samu sebe ili da je P *dvojna* tačka i označavamo $P \equiv P_1$. Kako je svaka tačka prave s dvojna, kažemo da je i prava s dvojna, ili da se prava s preslikava u samu sebe *identički*, što označavamo $s \equiv s_1$.

Definicija 3. Prava koja se u perspektivno kolinearnom preslikavanju preslikava u samu sebe identički naziva se *osa perspektive* ili *osa kolineacije* (sl. 10a).

Posledica 2. Ako prava a polja $\alpha(M)$ seče osu perspektive s u tački P, tada istu tačku sadrži prava a_1 polja $\alpha_1(M_1)$ koja u perspektivnom preslikavanju odgovara pravoj a.

Prema posledici 1. tačka preseka prave a i ose s je dvojna tačka preslikavanja, tj. $P \equiv P_1$. Kako je preslikavanje kolinearno, tačka $P \equiv P_1$ pripada pravoj a_1, dakle, prave a i a_1 seku se u tački $P \equiv P_1$ prave s.

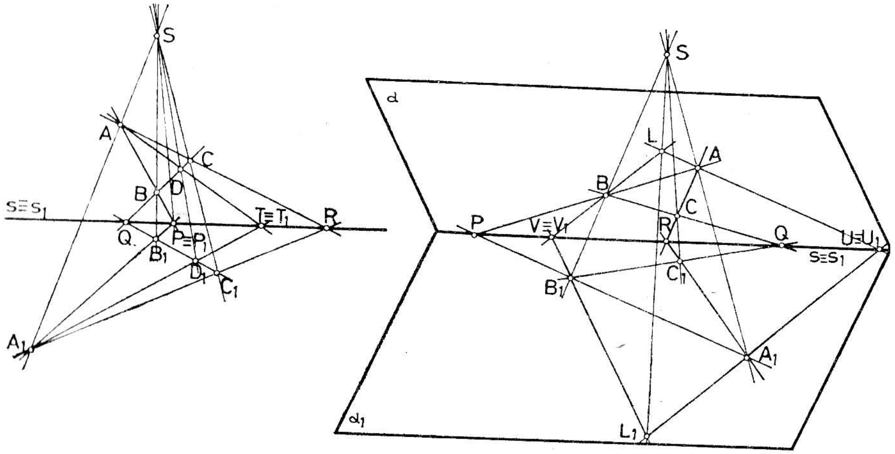
Stav 2. Perspektivnim preslikavanjima polja tačaka ravni α na α_1 iz centra S i iz centra O, koji ne pripadaju ravnima α i α_1, određena su u ravni α_1 dva polja tačaka među kojima je preslikavanje perspektivno i kolinearno.

Dokaz. Izvedimo dva perspektivna preslikavanja ravnog polja tačaka $\alpha(M)$ na ravan α_1 iz centara S i O koji se razlikuju i ne pripadaju ravnima α i α_1 (sl. 10b). Preslikavanjem iz centra S dodeljujemo ravnom polju $\alpha(M)$ polje tačaka $\alpha_1(M_1)$, pri čemu tački M ravni α odgovara u ravni α_1 tačka M_1, prodorna tačka zraka SM. Preslikavanjem iz centra O dodeljujemo ravnom polju $\alpha(M)$ polje tačaka $\alpha'(M')$, pri čemu tački M ravni α odgovara u ravni α_1 tačka M' prodorna tačka zraka OM. Na taj način u ravni α_1 dobijamo dva polja tačaka $\alpha_1(M_1)$ i $\alpha'(M')$. Među tačkama ovih dvaju ravnih polja uspostavljeno je obostrano jednoznačno preslikavanje u kome prodornoj tački M_1 zraka SM odgovara prodorna tačka M' zraka OM. Dokažimo da je ovo preslikavanje perspektivno i kolinearno. Kako smo u prethodnom stavu dokazali da je perspektivno preslikavanje ravnih polja tačaka kolinearno, sledi da su oba preslikavanja polja α na ravan α_1 iz centara S i O kolinearna, tj. tačke prave a polja α preslikavaju se u tačke prave a_1, odnosno u tačke prave a' ravni α_1. Prema tome, tačkama prave a_1 odgovaraju tačke prave a', pa je preslikavanje polja tačaka $\alpha_1(M_1)$ i $\alpha'(M')$ kolinearno. Najzad, uočimo ravan određenu pravima SM_1 i OM' koje se seku u tački M. Ova ravan seče ravan α_1 po pravoj M_1M', a prava OS koja pripada ovoj ravni prodire kroz ravan α_1 u tački S' prave M_1M'. Dakle, pravoj koja spaja par odgovarajućih tačaka M_1 i M' pripada tačka S'. Preslikavanje tačaka ravnih polja $\alpha_1(M_1)$ i $\alpha'(M')$ je perspektivno jer postoji centar perspektive S'. Prema tome, preslikavanje polja tačaka $\alpha_1(M_1)$ i $\alpha'(M')$ je kolinearno i perspektivno. U oba preslikavanja iz centra S i iz centra O osa preslikavanja je prava s, presečna prava ravni α i α_1. Prema tome je i u preslikavanju iz centra S' osa preslikavanja prava s. Kako je preslikavanje polja tačaka $\alpha_1(M_1)$ i $\alpha'(M')$ nastalo izvođenjem dva preslikavanja tačaka ravni α na α_1, kažemo da je ono proizvod ova dva preslikavanja.

Definicija 4. Preslikavanje dvaju ravnih polja tačaka koje je perspektivno i kolinearno nazivamo *perspektivno kolinearno preslikavanje, perspektivna kolineacija ili centralna kolineacija.* Centar i osu perspektive nazivamo *centar i osa kolineacije*. Nosioci dvaju perspektivno kolinearnih polja tačaka jesu ili *dve različite* ravni ili *jedna* ista.

U daljem izlaganju, ukoliko je potrebno, biće naglašeno da li je nosilac jedna ili dve ravni, u protivnom, obuhvaćena su oba slučaja.
Kako ravan određuju tri nekolinearne tačke, perspektivno kolinearno preslikavanje zadaje se sa tri para odgovarajućih tačaka, pri čemu par odgovarajućih tačaka pripada zraku perspektive koji sadrži centar perspektive.

Stav 3. Ako u kolinearnom preslikavanju dvaju polja tačaka postoji centar perspektive, tada postoji i osa perspektive.



sl. 11

Kao što smo dokazali, ako je preslikavanje ravnog polja tačaka $\alpha(M)$ na $\alpha_1(M_1)$ perspektivno sa centrom S, ono je i kolinearno (stav 1.). Takođe je dokazano da presečnoj pravoj s ravni α i α_1 odgovara u ovom preslikavanju ista prava i svakoj tački prave s odgovara ista tačka (posled. 1). Ova prava je, dakle, osa perspektive (sl. 10a).
Ako su polja tačaka $\alpha(A,B,C,\ldots)$ i $\alpha_1(A_1,B_1,C_1,\ldots)$ u istoj ravni i preslikavanje ovih dvaju polja je kolinearno, i ako se prave AA_1, BB_1 i CC_1 seku u tački S iste ravni, tada se, na osnovu Dezargova stava za dva trougla iste ravni, prave kojima pripadaju odgovarajuće stranice AB i A_1B_1, BC i B_1C_1, AC i A_1C_1 seku redom u tačkama P, Q, R koje pripadaju jednoj pravoj s. Dokažimo da se svaka tačka prave s preslikava u istu tačku, tj. da je s osa kolineacije (sl. 11a). Tački P prave AB polja $\alpha(M)$, u kojoj se AB i A_1B_1 seku, odgovara u polju $\alpha_1(M_1)$ tačka prave A_1B_1, jer je preslikavanje kolinearno. Preslikavanje je perspektivno, pa zrak SP seče pravu A_1B_1 u tački P_1, a kako se AB i A_1B_1 seku u tački P, tačka P_1 se poklapa sa P. Dakle, tačka P se preslikava u istu tačku, tj. $P \equiv P_1$. Isto važi za tačke Q i R u kojima

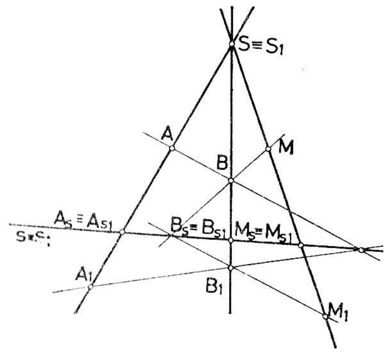
se seku preostala dva para odgovarajućih stranica. Dokažimo da ova osobina važi za proizvoljnu tačku T prave s. Uočimo kroz T proizvoljnu pravu polja $\alpha(M)$, npr. pravu AT i označimo sa D presek ove prave sa pavom BC. Zrak perspektive SD u preseku sa pravom B_1C_1 određuje preslikanu tačku D_1, pa prava A_1D_1 odgovara pravoj AD. Dokažimo da se prave AD i A_1D_1 seku u tački T čime dokazujemo da se tačka T prave AD poklapa sa njoj odgovarajućom tačkom T_1 prave A_1D_1. Prave AA_1, BB_1 i DD_1 spajaju odgovarajuća temena trouglova ABD i $A_1B_1D_1$ i prolaze kroz tačku S. Prave kojima pripadaju odgovarajuće stranice AB i A_1B_1 seku se u tački P, a BD i B_1D_1 u tački Q. Tačke P i Q određuju pravu na kojoj se, prema Dezargovu stavu, seku i prave kojima pripadaju odgovarajuće stranice AD i A_1D_1. Kako je tačkama P i Q određena prava s, prave AD i A_1D_1 seku se u tački prave s. Prava AD seče s u tački T, dakle, A_1D_1 prolazi kroz tačku T. Prema tome je $T \equiv T_1$.
Na isti način, koristeći Dezargov stav u prostoru, mogli smo da izvedemo prvi deo dokaza ovog stava koji se odnosi na dve različite ravni u prostoru.

Stav 4. Ako u kolinearnom preslikavanju dvaju polja tačaka postoji osa, tada postoji i centar perspektive.

Dokaz. Neka polja tačaka $\alpha(A,B,C,\ldots)$ i $\alpha_1(A_1,B_1,C_1,\ldots)$ pripadaju dvema različitim ravnima α i α_1. Neka je s presečna prava ovih ravni (11b). Ona je dvojna prava, tj. osa $s \equiv s_1$. Na s su tada presečne tačke P, Q, R parova odgovarajućih pravih AB i A_1B_1, BC i B_1C_1, AC i A_1C_1 i one su dvojne. Na osnovu inverznog Dezargova stava postoji tačka S u kojoj se seku prave AA_1, BB_1 i CC_1. Dokažimo da prava koja spaja ma koje dve odgovarajuće tačke L i L_1 ravni α i α_1 prolazi kroz tačku S. Neka L, A, B ne pripadaju jednoj pravoj. Neka LA i LB seku osu s redom u tačkama U i V. Kako je $U \equiv U_1$, $V \equiv V_1$ i preslikavanje ravni α na α_1 kolinearno, prave U_1A_1 i V_1B_1 seku se u tački L_1. Dakle, prave kojima pripadaju odgovarajuće stranice trouglova ABL i $A_1B_1L_1$ seku se na pravoj s. Na osnovu inverznog Dezargova stava prave AA_1, BB_1 i LL_1 seku se u jednoj tački. Kako se AA_1 i BB_1 seku u tački S, prava LL_1 prolazi kroz istu tačku S.
Dokaz je isti i u slučaju kada su polja tačaka u istoj ravni, jer inverzan Dezargov stav koji se koristi u dokazu važi i za dva trougla koji su u istoj ravni.

Stav 5. Ako pri kolinearnom preslikavanju dvaju polja tačaka, koja su u istoj ravni, postoji centar kolineacije, tada je to centar pramena pravih čija je svaka prava dvojna i centar je dvojna tačka.

Dokaz. Na osnovu prethodno dokazanog stava, ako postoji centar kolineacije S dvaju ravnih polja tačaka $\alpha(M)$ i $\alpha_1(M_1)$ koja su u istoj ravni, tada postoji i osa kolineacije s. Dokažimo da je svaka prava pramena sa centrom S dvojna. Ako je A, A_1 proizvoljan par odgovarajućih tačaka preslikavanja, on pripada pravoj kroz centar S. Presečnoj tački A_s prave AA_1 sa osom s odgovara ista tačka, tj. $A_{s1} \equiv A_s$ (sl. 12). Prema tome, pravoj AA_s odgovara u datom kolinearnom preslikavanju prava A_1A_{s1} koja se sa njom poklapa. Dakle, prava AA_1 pramena sa središtem S preslikava se u samu sebe. Isto važi i za pravu BB_1 pramena, gde je B, B_1 bilo koji drugi par odgovarajućih tačaka istog preslikavanja i $B_s \equiv B_{1s}$ presek sa osom. Sledi da presečnoj tački S pravih AA_s i BB_s odgovara ista tačka kao presek odgovarajućih pravih A_1A_{s1} i B_1B_{s1}. Dakle, S je dvojna tačka, tj. $S \equiv S_1$. Svaka prava pramena je dvojna jer sadrži dve dvojne tačke preslikavanja: centar $S \equiv S_1$ i presek sa osom, npr. $M_s \equiv M_{1s}$ i S su dvojne tačke prave MM_1.

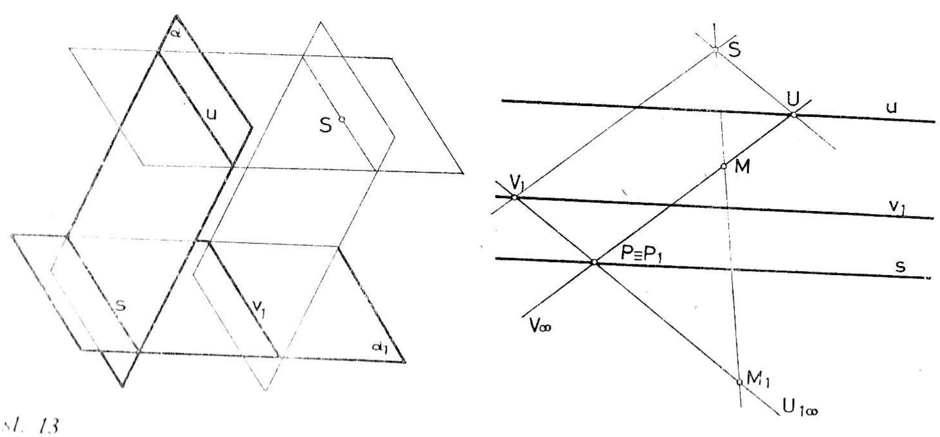


sl. 12

Preslikavanje pravih pramena nije identično (kao što je preslikavanje ose s), dvojne tačke na svakom zraku su samo centar S i presečna tačka prave pramena sa osom s.

Definicija 5. Perspektivna kolineacija u kojoj centar S ne pripada osi zove se i *homologija*, a u kojoj pripada osi zove se *elacija*.

Definicija 6. U perspektivno kolinearnom preslikavanju dvaju ravnih polja tačaka prava jednog polja koja odgovara beskonačno dalekoj pravoj drugog polja naziva se *protiv — osa.*



sl. 13

Neka su $\alpha(M)$ i $\alpha_1(M_1)$ dva polja tačaka u različitim ravnima i neka je s njihova presečna prava. Centar S perspektivno kolinearnog preslikavanja i beskonačno daleka prava v_∞ polja $\alpha(M)$ određuje ravan (S,v_∞) paralelnu ravni α koja u preseku sa ravni α_1 određuje pravoj v_∞ odgovarajuću pravu v_1. Prava v_1 je prema definiciji protiv-osa polja $\alpha_1(M_1)$. Kako su ravni α i (S,v_∞) paralelne, presečne prave s i v_1 ovih ravni sa ravni α_1 su paralelne. Dakle, protiv-osa v_1 paralelna je osi perspektive s. Slično se dobija da beskonačno daleka prava $u_{1\infty}$ u ravni α_1 i centar S određuju ravan paralelnu ravni α_1, koja u preseku sa ravni α određuje protiv-osu u u ravni α paralelnu osi s (sl. 13a).

Neka je perspektivno kolinearno preslikavanje dvaju polja tačaka $\alpha(M)$ i $\alpha_1(M_1)$, koja su u istoj ravni, dato osom s centrom S i parom odgovarajućih tačaka M i M_1 (sl. 13b). I u slučaju kada oba polja tačaka pripadaju jednoj ravni protiv osa v_1 polja $\alpha_1(M_1)$ paralelna je osi s, jer se v_1 seče sa odgovarajućom beskonačno dalekom pravom v_∞ polja $\alpha(M)$ na osi s i to u beskonačno dalekoj tački ose s. Za konstrukciju protiv-ose v_1 zato je dovoljno da se preslika samo jedna beskonačno daleka tačka polja $\alpha(M)$. Neka je pravom MP, gde je $P \equiv P_1$ tačka ose s, data beskonačno daleka tačka V_∞ polja $\alpha(M)$. Zrak kroz S paralelan pravoj MP preslikava beskonačno daleku tačku V_∞ prave MP u tačku V_1 na pravoj M_1P_1 polja $\alpha_1(M_1)$. Prava kroz tačku V_1 paralelna osi s je protiv osa v_1 polja $\alpha_1(M_1)$. Isto se u polju $\alpha(M)$ konstruiše protiv-osa u. Tačku $U_{1\infty}$ prave M_1P_1 polja $\alpha_1(M_1)$ preslikavamo u tačku U u polju $\alpha(M)$ na pravoj MP u preseku sa zrakom $SU_{1\infty}$, koji je paralelan pravoj M_1P_1. Prava kroz U, paralelna osi s, je protiv-osa u.

Prema prethodnim konstrukcijama četvorougao SV_1PU je paralelogram. Kako su kroz temena V_1 i U konstruisane protiv-ose v_1 i u paralelne osi s, može se dokazati da je odstojanje centra S od jedne protiv-ose jednako rastojanju ose i druge protiv-ose. Kako je ravno polje tačaka određeno trima tačkama koje ne pripadaju jednoj pravoj, perspektivno kolinearno preslikavanje dvaju ravnih polja zadaje se na sledeći način:

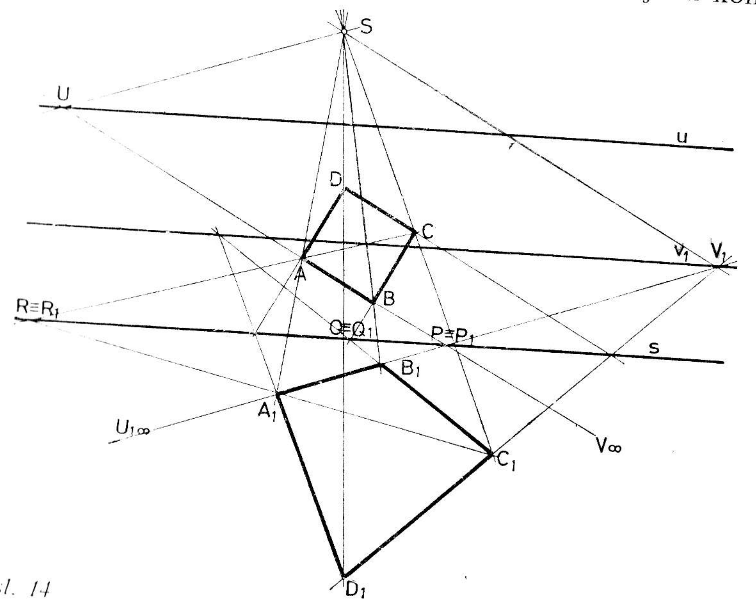
1. centar S i tri para odgovarajućih tačaka na zracima kroz S;
2. centar S, osa s i par odgovarajućih tačaka M, M_1 na zraku kroz S (osa s je određena sa dva para odgovarajućih tačaka koje su dvojne).
3. centar S, osa s i protiv-osa v_1 ili u (svakoj tački protiv-ose odgovara poznata beskonačno daleka tačka zraka kolineacije).

Definicija 7. Kolinearno preslikavanje dvaju ravnih polja tačaka u kome se beskonačno daleka prava jednog polja tačaka preslikava u beskonačno daleku pravu drugog polja naziva se *afino* preslikavanje.

Ako je preslikavanje perspektivno i afino, tada ga nazivamo *perspektivno afino*. Osu preslikavanja tada nazivamo *osa afinosti*, centar *centrom afinosti*, a zrake *zracima afinosti*.

Primer 1. Datom kvadratu ABCD polja tačaka $\alpha(M)$ konstruisati odgovarajući četvorougao $A_1B_1C_1D_1$ u polju $\alpha_1(M_1)$ ako su ova dva polja tačaka u istoj ravni i ako je perspektivno kolinearno preslikavanje dato centrom S, osom s i parom odgovarajućih tačaka A, A_1 (sl. 14).

Pre nego što pređemo na konstrukciju četvorougla $A_1B_1C_1D_1$ konstruišimo protiv-osu polja $\alpha(M)$ u kome je kvadrat. Uočimo zato par odgovarajućih pravih ovog preslikavanja, npr. pravu AB polja $\alpha(M)$ koja seče osu s u tački $P \equiv P_1$ i njoj odgovarajuću pravu A_1P_1 u polju $\alpha_1(M_1)$. Preslikajmo beskonačno daleku tačku $U_{1\infty}$ prave A_1P_1 u tačku U prave AP. Tačka U je određena u preseku prave AP sa zrakom $SU_{1\infty}$ koji je paralelan pravoj A_1P_1. Prava u kroz tačku U, paralelna osi s, jeste tražena protiv-osa polja $\alpha(M)$. Kvadrat ABCD ima ili nema zajedničkih tačaka sa protiv-osom. Pretpostavimo da nijedna tačka kvadrata ne pripada protiv-osi. Tada se sve tačke kvadrata preslikavaju u konačne tačke.



Sl. 14

Iz uslova da je preslikavanje kolinearno, tačke A, B, P, koje pripadaju jednoj pravoj u polju $\alpha(M)$, preslikavaju se u tačke A_1, B_1, P_1 koje takođe pripadaju jednoj pravoj u polju $\alpha_1(M_1)$. Dakle, tačka B_1 pripada pravoj A_1P_1. Iz uslova da je preslikavanje perspektivno, par odgovarajućih tačaka B, B_1 pripada zraku kroz centar S. Dakle, tačka B_1 pripada pravoj SB. Prema tome, B_1 je presečna tačka pravih A_1P_1 i SB. Tačke duži AB preslikavaju se u tačke duži A_1B_1. Na taj način određena je i stranica A_1B_1 traženog četvorougla.

Na isti način odredimo tačku C_1. Prava BC seče osu s u tački $Q \equiv Q_1$ pa je njoj odgovarajuća prava B_1Q_1 i na njoj je tačka C_1

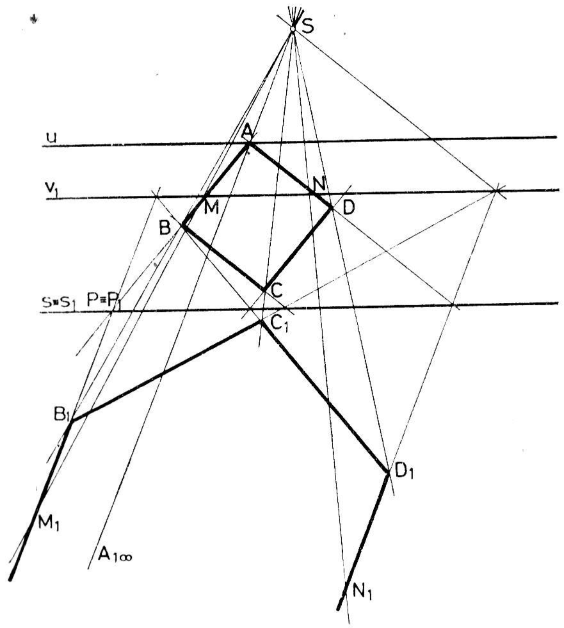
određena u preseku sa zrakom SC. Za preslikavanje tačke C mogli smo da koristimo i pravu AC. Pošto nismo, upotrebimo pravu AC za kontrolu preciznosti izvedene konstrukcije. Par odgovarajućih pravih seče se u tački ose, dakle, AC i A_1C_1 seku se u tački $R \equiv R_1$ ose s. (Ukoliko to na crtežu nije ispunjeno, crtež nije precizno izveden.)

Na isti način konstruišimo tački D odgovarajuću tačku D_1, preslikavajući jednu od pravih CD, AD, BD.

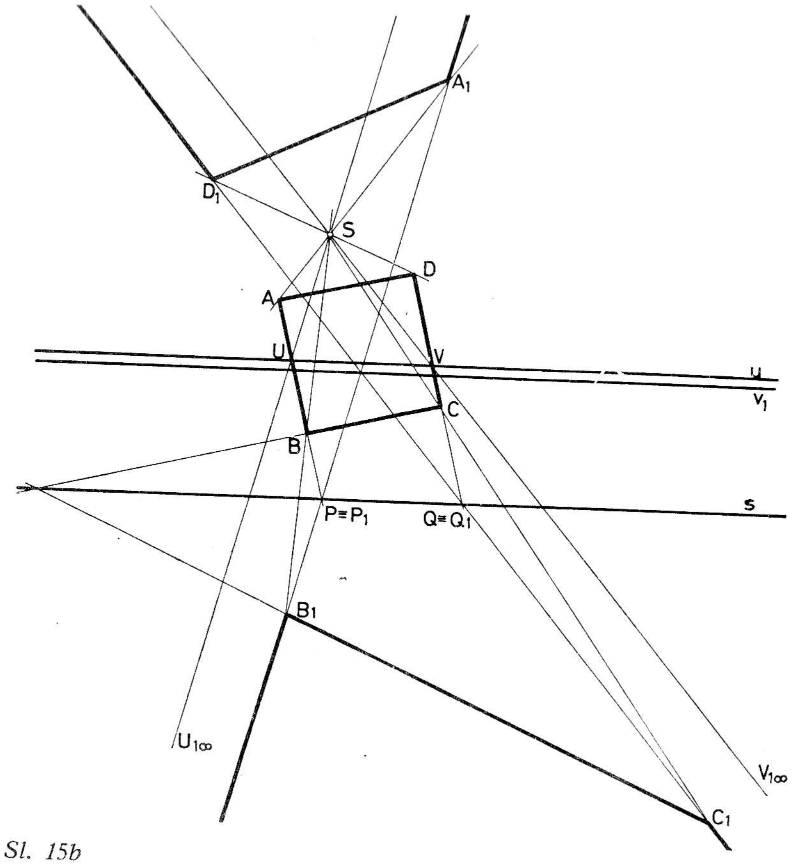
Kako su suprotne stranice kvadrata paralelne, prave kojima one pripadaju seku se u tačkama beskonačno daleke prave. Prema tome, suprotne stranice četvorougla $A_1B_1C_1D_1$ pripadaju pravima koje se seku na protiv-osi v_1 polja $\alpha_1(M_1)$, dakle, na pravoj paralelnoj osi s.

Primer 2. Dati kvadrat ABCD preslikati perspektivno kolinearno ako su dati centar S, osa s i protvi-osa u polją tačaka u kome je kvadrat i ako: a) jedno teme kvadrata pripada protiv-osi u (sl. 15a) i b) ako protiv-osa u seče kvadrat (sl. 15b).

a) Ako je teme A kvadrata ABCD na protiv-osi u, tada se tačka A preslikava u beskonačno daleku tačku $A_{1\infty}$ zraka SA. Da bismo konstruisali tačku B_1, odredimo presečnu tačku $P \equiv P_1$ ose s sa pravom AB. Prava AP preslikava se u pravu $A_{1\infty}P_1$, dakle, to je prava kroz P_1 paralelna pravoj SA. Kako je tačka B na pravoj AP, tačka B_1 je na pravoj $P_1A_{1\infty}$ i dobija se u preseku sa zrakom SB. Preslikajmo na pravu $A_{1\infty}P_1$ još jednu tačku duži AB, npr. tačku M u M_1. Pomoću tačke M_1 zaključujemo da se stranica AB kvadrata preslikava u onu polupravu prave $A_{1\infty}P_1$ čiji je kraj B_1 i kojoj pripada M_1.



Sl. 15a



Sl. 15b

Ostale tačke C i D preslikavamo u tačke C_1 i D_1 kao u prethodnom primeru. Stranica AD se takođe preslikava u jednu od polupravih prave $D_1A_{1\infty}$ sa krajem D_1 na kojoj je tačka N_1, preslikana tačka N stranice AD kvadrata. Stranice kvadrata se, prema tome, preslikavaju u otvorenu izlomljenu liniju. Deo ravni ograničen ovom linijom, kome pripadaju npr. tačke duži B_1D_1, u koju se preslikava duž BD, je skup preslikanih tačaka površi kvadrata.

b) Ako protiv-osa u seče kvadrat ABCD i to stranicu AB u tački U i stranicu CD u tački V, tada se tačke U i V preslikavaju u beskonačno daleke tačke $U_{1\infty}$ zraka SU i $V_{1\infty}$ zraka SV. Da bismo preslikali stranicu AB, uočimo presek $P \equiv P_1$ ose s sa pravom AB. Tada se prava UP, na kojoj je AB, preslikava u pravu $U_{1\infty}P_1$ koja je paralelna zraku SU. Na njoj odredimo A_1 i B_1 u preseku sa zracima SA i SB. Kako se tačka U duži AB preslikava u beskonačno daleku tačku $U_{1\infty}$, stranica kvadrata se preslikava u dve poluprave prave $U_{1\infty}P_1$ čiji su krajevi tačke A_1 i B_1. Slično, ako je $Q \equiv Q_1$ presek ose s i prave CD, na kojoj je tačka V protiv-ose u, tada se stranica CD preslikava u dve poluprave prave $Q_1V_{1\infty}$ paralelne zraku SV, u poluprave čiji su krajevi tačke C_1 i D_1.

Najzad, svaka od stranica AD i BC, koje nemaju zajedničkih tačaka sa protiv-osom u, preslikavaju se u duži A_1D_1 i B_1C_1. Stranice kvadrata se, prema tome, preslikavaju u dve otvorene izlomljene linije koje ograničavaju delove ravni u koje se preslikava površ kvadrata.

Zadaci za vežbu

1. Data su tri para odgovarajućih tačaka perspetkivno kolinearnog preslikavanja sa centrom S. Konstruisati osu i protiv-ose ovog preslikavanja.

2. Dati paralelogram ABCD preslikati perspektivno kolinearno ako je dat centar S i tačkama A, B, C odgovarajuće tačke A_1, B_1, C_1.

3. Dati su centar S, osa s i par odgovarajućih tačaka A i A_1 perspektivno kolinearnog preslikavanja. Konstruisati protiv-ose ovog preslikavanja.

4. Dati su centar S, protiv-osa u i par odgovarajućih tačaka A i A_1 perspektivno kolinearnog preslikavanja. Konstruisati osu i drugu protiv-osu ovog preslikavanja.

5. Dati su centar S, osa s i protiv-osa u perspektivno kolinearnog preslikavanja. Preslikati datu duž AB ako je:
a) duž AB i protiv-osa u nemaju zajedničkih tačaka
b) krajnja tačka B duži AB pripada protiv-osi u
c) duž AB seče protiv-osu u.

6. Dati su centar S, osa s i protiv-osa u perspektivno kolinearnog preslikavanja. Preslikati dve prave p i q:
a) koje se seku na protiv-osi u
b) koje su paralelne.

7. Dati su centar S, osa s i protiv-osa u perspektivno kolinearnog preslikavanja. Preslikati proizvoljan trougao ABC ako je:
a) trougao ABC i protiv osa u nemaju zajedničkih tačaka
b) jedno teme trougla pripada protiv osi u
c) trougao ABC seče protiv osu u.

8. Pravilan šestougao koji nema zajedničkih tačaka sa protiv-osom preslikati perspektivno kolinearno ako su dati centar S, osa s i protiv-osa u. Dokazati da se prave, kojima pripadaju suprotne stranice preslikanog šestougla, seku u tačkama jedne prave paralelne osi s.

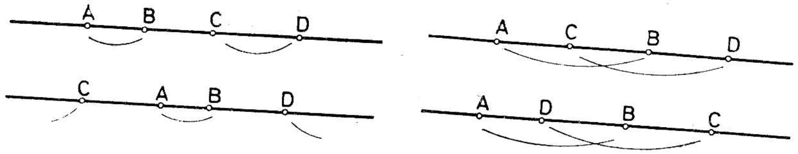
9. Dati su centar S, osa s i protiv-osa u perspektivno kolinearnog preslikavanja. Preslikati dati trougao ako je jedno njegovo teme centar S i:
a) trougao ne seče protiv-osu u
b) trougao seče protiv-osu u.

10. Dati su centar S, osa s i protiv-osa u perspektivno kolinearnog preslikavanja. Preslikati dati kvadrat ako je centar S u kvadratu i:
a) kvadrat ne seče protiv-osu,
b) kvadrat seče protiv-osu.

6. Invarijanta perspektivno kolinearnog preslikavanja

Definicija 1. Dvorazmera četvorke tačaka A, B, C, D jedne prave je razmera dveju razmera $\dfrac{AC}{BC} : \dfrac{AD}{BD}$, gde su AC, BC, AD, BD dužine duži određene tačkama A, B, C, D. Obeležavaćemo je [ABCD].

Kako su dužine duži pozitivni brojevi, dvorazmera je broj $[ABCD] = k$. Ako C, odnosno D, nije između A i B, parovi A, B i C, D se ne razdvajaju (sl. 16a), u protivnom oni se razdvajaju (sl. 16b). Ako se parovi tačaka razdvajaju, neka je $k < 0$, a ako se ne razdvajaju, neka je $k > 0$.



sl. 16

Stav 1. Ako je jedna od tačaka četvorke A,B,C,D beskonačno daleka, tada je dvorazmera jednaka razmeri trojke konačnih tačaka.

Neka je npr. D_∞. Kako je $[ABCD_\infty] = \frac{AC}{BC} : \frac{AD_\infty}{BD_\infty}$ i $\frac{AD_\infty}{BD_\infty} \to 1$,

sleduje da je $[ABCD] = \frac{AC}{BC}$

Definicija 2. Četvorka tačaka za koju je $k = -1$ naziva se *harmonijska četvorka tačaka*, ili, parovi A, B i C, D nazivaju se *harmonijski konjugovani parovi tačaka*.

Iz $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1$ sleduje da je $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$ i da se parovi A,B i C,D razdvajaju.

Stav 2. Ako su a, b, c, d zraci pramena sa središtem S, p i p_1 proizvoljne prave koje ne prolaze kroz S i A, B, C, D redom presečne tačke ovih zrakova sa pravom p i A_1, B_1, C_1, D_1 redom presečne tačke sa pravom p_1, tada je $[ABCD] = [A_1B_1C_1D_1]$ (sl. 17).

Kroz tačke A i A_1 konstruišimo prave paralelne sa c koje seku pravu d redom u tačkama K i K_1 i prave paralelne sa d koje seku pravu c redom u tačkama L i L_1. Prave kroz B i B_1 paralelne sa c seku d redom u tačkama M i M_1, a prava paralelne sa d seku c redom u N i N_1. Iz sličnosti trouglova ACL i BCN, $A_1C_1L_1$ i $B_1C_1N_1$ je

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AL}{BN} \quad i \quad \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{A_1L_1}{B_1N_1}.$$

Iz sličnosti trouglova ADK i BDM, $A_1D_1K_1$ i $B_1D_1M_1$ je:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AK}{BM} \quad i \quad \frac{A_1D_1}{B_1D_1} = \frac{A_1K_1}{B_1M_1}.$$

U paralelogramu ALSK je $AL = SK$ i u paralelogramu BNSM je $BN = SM$. Sleduje, da je: $\frac{AC}{BC} = \frac{AL}{BN} = \frac{SK}{SM}$. Isto tako, iz paralelograma $A_1L_1SK_1$ i $B_1N_1SM_1$ je $A_1L_1 = SK_1$ i $B_1N_1 = SM_1$ iz čega sleduje: $\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{A_1L_1}{B_1N_1} = \frac{SK_1}{SM_1}$.

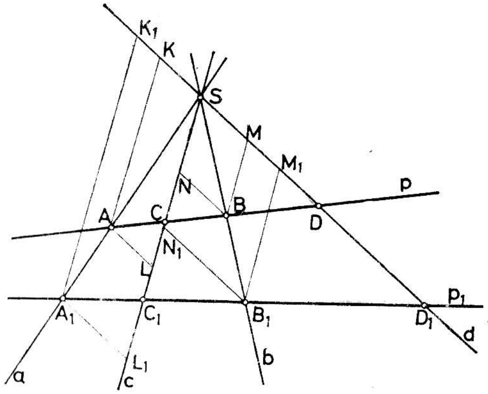
Prema tome je: $[ABCD] = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{SK}{SM} : \frac{AK}{BM} = \frac{SK}{AK} : \frac{SM}{BM}$ i

$$[A_1B_1C_1D_1] = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1D_1}{B_1D_1} = \frac{SK_1}{SM_1} : \frac{A_1K_1}{B_1M_1} = \frac{SK_1}{A_1K_1} : \frac{SM_1}{B_1M_1}.$$

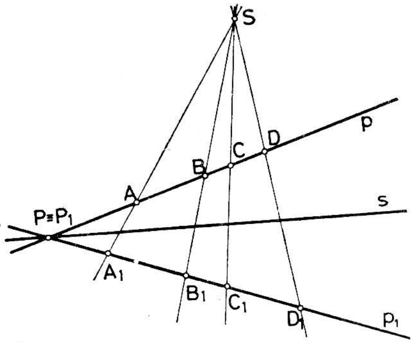
Iz sličnosti trouglova SKA i SK_1A_1 je $\frac{SK}{AK} = \frac{SK_1}{A_1K_1}$ i iz sličnosti trouglova SMB i SM_1B_1 je $\frac{SM}{BM} = \frac{SM_1}{B_1M_1}$.

Prema tome je: $\frac{SK}{AK} : \frac{SM}{BM} = \frac{SK_1}{A_1K_1} : \frac{SM_1}{B_1M_1}$, odnosno

$[ABCD] = [A_1B_1C_1D_1]$.



sl. 17



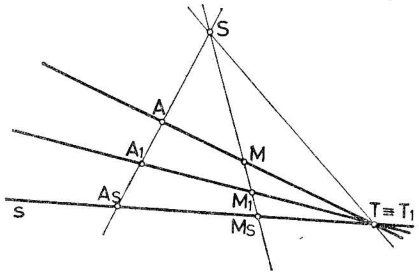
sl. 18

Posledica. Dvorazmera četvorke tačaka jedne prave je *invarijanta* perspektivno kolinearnog preslikavanja (sl. 18).

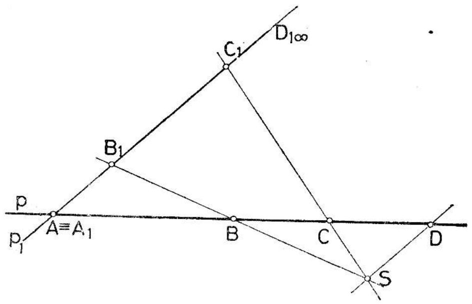
Ako su p i p_1 par odgovarajućih pravih perspektivno kolinearnog preslikavanja dvaju ravnih polja tačaka sa centrom S i osom s i A_1, B_1, C_1, D_1 tačke prave p_1, koje u datom preslikavanju odgovaraju redom tačkama A, B, C, D prave p, tada je na osnovu prethodnog stava $[ABCD] = [A_1B_1C_1D_1]$.

Stav 3. Ako je perspektivno kolinearno preslikavanje dvaju polja tačaka $\alpha(M)$ i $\alpha_1(M_1)$ dato osom s, centrom S i parom odgovarajućih tačaka A i A_1 i ako je M, M_1 proizvoljan par odgovarajućih tačaka zadatog preslikavanja i A_s, M_s presečne tačke ose s redom sa zracima AA_1, MM_1, tada je $[MM_1SM_s] = [AA_1SA_s]$ (sl. 19).

Prave AM i A_1M_1 seku se u jednoj tački $T = T_1$ ose s. Zraci TA, TA_1, TS i TA_s pramena sa središtem T presečeni su pravim SA i SM. Prema prethodno dokazanom stavu dvorazmere četvorki presečnih tačaka jednake su, dakle je $[MM_1SM_s] = [AA_1SA_s]$.



sl. 19



sl. 20

Definicija 3. Broj $k = [MM_1SM_s]$, gde je M, M_1 par odgovarajućih tačaka preslikavanja, S centar, M_s presek zraka MM_1 i ose s, nazivamo *konstantom* perspektivno kolinearnog preslikavanja. Perspektivno kolinearno preslikavanje sa konstantom $k = -1$ nazivamo *harmonijska kolineacija.*

Na osnovu dokazanih osobina, konstruisaćemo na pravoj p tačku D tako da sa trima datim tačkama A, B, C, gde je B između A i C, tj. A—B—C, čini četvorku tačaka čija je dvorazmera

$$[ABCD] = \frac{3}{2} \quad \text{(sl. 20).}$$

Neka je p_1 proizvoljna prava kroz tačku A. Konstruišimo na pravoj p_1 četvorku tačaka A_1, B_1, C_1, D_1 čija je dvorazmera $[A_1B_1C_1D_1] = \frac{3}{2}$, pri čemu je $A \equiv A_1$ i $D_{1\infty}$. Tada je $[A_1B_1C_1D_{1\infty}] = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{3}{2}$, pa je za proizvoljno izabranu jedinicu dužine $A_1C_1 = 3$ i $B_1C_1 = 2$ i A_1— B_1 — C_1.

Smatrajući B, B_1 i C, C_1 parovima odgovarajućih tačaka perspektivno kolinearnog preslikavanja, presek zrakova BB_1 i CC_1 određuje centar S perspektive. Kako je $D_{1\infty}$ beskonačno daleka tačka prave p_1, prava kroz S paralelna pravoj p_1 preslikava $D_{1\infty}$ u

tačku D na pravoj p. Prema dokazanom stavu je $[ABCD] = [A_1B_1C_1D_{1\infty}]$. Dakle je $[ABCD] = \frac{3}{2}$.

Ova konstrukcija omogućuje da se perspektivno kolinearno preslikavanje zada centrom S, osom s i konstantom preslikavanja k.

7. Perspektivno afino preslikavanje

Razlikujući slučajeve u kojima su centar i osa konačni od slučajeva u kojima su beskonačno daleki, dobićemo različita specijalna perspektivno kolinearna preslikavanja ravnih polja tačaka euklidskog prostora za koji su beskonačno daleki elementi nesvojstveni. Razlikovaćemo sledeće slučajeve:

1. Centar kolineacije je konačna tačka S i osa kolineacije je konačna prava s.
2. Centar je beskonačno daleka tačka S_∞, osa je konačna prava s.
3. Centar je konačna tačka S, osa je beskonačno daleka prava s_∞.
4. Centar je beskonačno daleka tačka S_∞, osa je beskonačno daleka prava s_∞.

U svakom od navedenih slučajeva razlikovaćemo i one čija konstanta preslikavanja k ima posebnu vrednost.

1. Ako su centar i osa konačni elementi, preslikavanje je opšte perspektivno kolinearno sa čijim smo se osobinama upoznali.

2. Neka je preslikavanje dvaju ravnih polja tačaka $\alpha(M)$ i $\alpha_1(M_1)$ dato konačnom osom s i beskonačno dalekim centrom S_∞.

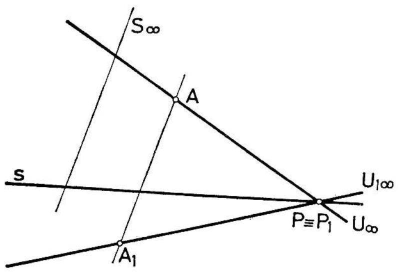
Stav 1. Ako je centar perspektivno kolinearnog preslikavanja beskonačno daleka tačka S_∞, ovo preslikavanje je perspektivno afino.

Tada osu nazivamo *osa afinosti a zrake zracima afinosti.*

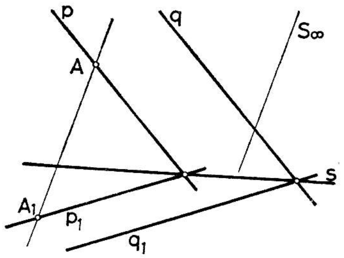
Ovo preslikavanje je perspektivno jer paralelni zraci obrazuju pramen odnosno snop sa središtem S_∞. Da bismo dokazali da je navedeno preslikavanje afino, treba, prema definiciji, dokazati da se beskonačno daleka prava jednog polja preslikava u beskonačno daleku pravu drugog polja tačaka.

Neka je preslikavanje dato centrom S_∞, osom s i parom odgovarajućih tačaka A i A_1 (sl. 21). Pokazali smo da je za preslikavanje beskonačno daleke prave dovoljno preslikati jednu njenu tačku. Uočimo zato par odgovarajućih pravih AP i A_1P_1, gde je $P \equiv P_1$ tačka ose s . Preslikajmo tačku U_∞ prave AP u tačku U_1 prave A_1P_1 drugog polja. Tačka U_1 se određuje na pravoj A_1P_1 u preseku sa zrakom $S_\infty U_\infty$. Kako je $S_\infty U_\infty$ beskonačno daleka prava, ona u preseku sa A_1P_1 određuje beskonačno daleku tačku $U_{1\infty}$ prave A_1P_1 . Prava kroz $U_{1\infty}$ paralelna osi s je beskonačno daleka prava jer je određena dvema beskonačno dalekim tačkama. Dakle, slika beskonačno daleke prave je beskonačno daleka prava. Dokaz važi i za slučaj kada su polja tačaka u različitim ravnima i za slučaj kada su u istoj ravni.

Ako su oba polja tačaka u istoj ravni, dokaz bi mogao da se zasnuje i na stavu da se svaki zrak pramena, čiji je nosilac centar S perspektive, perspektivno kolinearnog preslikavanja, preslikava u istu pravu. Kako je S_∞, tačka beskonačno daleke prave, beskonačno daleka prava je zrak pramena sa središtem S_∞ i preslikava se u istu pravu, dakle, u beskonačno daleku pravu.



sl. 21



sl. 22

Posledica. U perspektivno afinom preslikavanju paralelne prave preslikavaju se u paralelne prave.

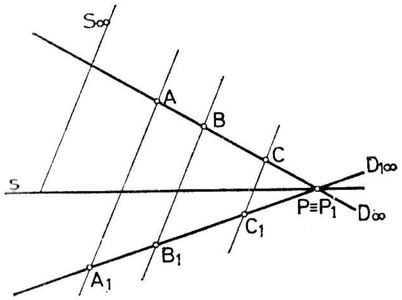
Prema prethodnom, beskonačno daleka tačka preseka paralelnih pravih, pošto pripada beskonačno dalekoj pravoj, preslikava se u beskonačno daleku tačku preslikane prave koja je takođe beskonačno daleka. Dakle, preslikane prave seku se u beskonačno dalekoj tački, tj. one su takođe paralelne (sl. 22).

Stav 2. Ako su A,B,C, i A_1, B_1, C_1 redom odgovarajuće tačke na dvema odgovarajućim pravima perspektivno afinog preslikavanja u kome je centar S_∞ i osa s, tada je $AC:BC = A_1C_1:B_1C_1$, tj. invarijanta perspektivno afinog preslikavanja je *razmera* trojke tačaka jedne prave (sl. 23).

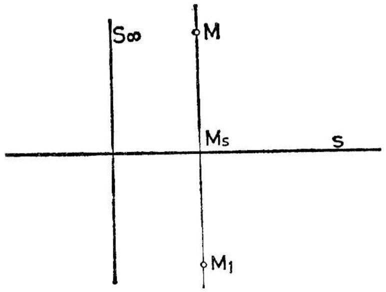
Pri datom preslikavanju tačaka dveju odgovarajućih pravih AP i A_1P_1 $(P \equiv P_1)$ tačka D_∞ prave AP preslikava se u tačku $D_{1\infty}$ prave A_1P_1. Kako je invarijanta perspektivno kolinearnog preslikavanja dvorazmera četvorke tačaka jedne prave, tj. $[ABCD] = [A_1B_1C_1D_1]$, i kako je dvorazmera jednaka razmeri ako je jedna od tačaka četvorke beskonačno daleka, tj. $[ABCD_\infty] = \frac{AC}{BC}$ i $[A_1B_1C_1D_{1\infty}] = \frac{A_1C_1}{C_1B_1}$, sleduje $\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}$.

Dokaz se može izvesti i na osnovu stava da su odsečci na kracima ugla APA_1 određeni u preseku sa paralelnim pravim AA_1, BB_1, CC_1 proporcionalni. Dakle je $\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}$.

Posledica. Središte duži preslikava se u središte odgovarajuće duži.



sl. 23



sl. 24

Stav 3. Konstanta perspektivno afinog preslikavanja dvaju polja tačaka koja pripadaju istoj ravni, u kome je centar S_∞ i osa s, i M, M_1 par odgovarajućih tačaka, a M_s presečna tačka zraka afinosti MM_1 sa osom preslikavanja s, jednaka je razmeri $k = \frac{M_1M_s}{MM_s}$.

Polazeći od konstante perspektivno kolinearnog preslikavanja, $k = [MM_1SM_s]$, i dokazane osobine da je dvorazmera četvorke tačaka jedne prave, od kojih je jedna beskonačno daleka, jednaka razmeri trojke konačnih tačaka, dobijamo za S_∞:

$$k = [MM_1S_\infty M_s] = \frac{MS_\infty}{M_1S_\infty} : \frac{MM_s}{M_1M_s} = 1 : \frac{MM_s}{M_1M_s} = \frac{M_1M_s}{MM_s}.$$

Stav 4. Ako je konstanta preslikavanja $k = -1$ i ako su zraci afinosti normalni na osu, preslikavanje dvaju polja tačaka, koja pripadaju istoj ravni, je osna simetrija (sl. 24).

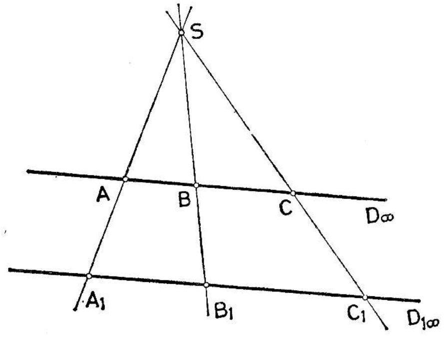
Kako je $k < 0$, parovi M, M_1 i S, M_s se razdvajaju, pa je za S_∞, M_s između M i M_1. Za vrednost $|k| = 1$ je $\frac{M_1M_s}{MM_s} = 1$, odnosno $M_1M_s = MM_s$. Dakle, na proizvoljnom zraku afinosti, koji je na osu s normalan, nalazi se par odgovarajućih tačaka sa različitih strana ose i na jednakim odstojanjima. Kako ovu osobinu ima svaki par odgovarajućih tačaka datog preslikavanja, a navedene osobine definišu simetriju u odnosu na osu s, ovo perspektivno afino preslikavanje je simetrija u odnosu na osu s.

3. Neka je preslikavanje dvaju ravnih polja tačaka određeno konačnim centrom S i beskonačno dalekom osom s_∞. Iz osobina opšteg perspektivno kolinearnog preslikavanja izvedimo osobine specifične za s_∞.

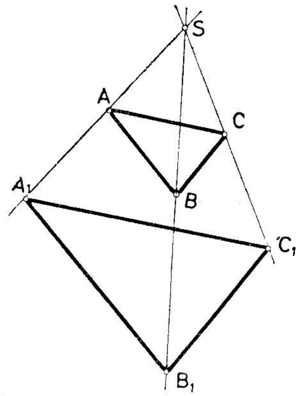
Stav 5. Ako je osa perspektivno kolinearnog preslikavanja beskonačno daleka prava s_∞ i centar S konačna tačka, ovo preslikavanje je perspektivno afino.

Preslikavanje je perspektivno jer zraci koji spajaju parove odgovarajućih tačaka prolaze kroz konačnu tačku S. Pošto se u ovom preslikavanju beskonačno daleka prava, koja je osa preslikavanja s_∞, preslikava u samu sebe, ovo je preslikavanje afino.

Stav 6. Invarijanta preslikavanja, u kome je centar S i osa s_∞, je *razmera* trojke tačaka jedne prave (sl. 25).



sl. 25



sl. 26

Polazeći od invarijantnosti dvorazmere četvorke tačaka jedne prave u perspektivno kolinearnom preslikavanju $[ABCD] = [A_1B_1C_1D_1]$ i od osobine da se u afinom preslikavanju beskonačno daleka tačka jedne prave preslikava u beskonačno daleku tačku odgovarajuće prave, npr. D_∞ u $D_{1\infty}$, dobijamo da je $[ABCD_\infty] = [A_1B_1S_1D_{1\infty}]$, odnosno $\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}$. Dakle, invarijanta je razmera trojke tačaka jedne prave.

Isto možemo dokazati i ako uočimo dve odgovarajuće prave datog preslikavanja koje su paralelne, jer se seku u tački ose koja je beskonačno daleka prava, i na ovim pravim parove odgovarajućih tačaka A i A_1, B i B_1, C i C_1. Na osnovu poznatog stava geometrije, odsečci koje na paralelnim pravim određuju zraci SA, SB, SC proporcionalni su, tj. $\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}$.

Stav 7. Konstanta preslikavanja, u kome je centar S osa s, M, M_1 par odgovarajućih tačaka, jednaka je razmeri $k = \frac{MS}{M_1S}$.

Kako je osa beskonačno daleka prava s_∞, presečna tačka zraka MM_1 sa osom s je beskonačno daleka tačka $M_{s\infty}$. Dvorazmera k $[MM_1SM_{s\infty}]$ kojom je konstanta perspektivno kolinearnog preslikavanja definisana, jednaka je, prema tome, razmeri trojke konačnih tačaka. Dakle je $k = \frac{MS}{M_1S}$.

Stav 8. Dva ravna lika koji se jedan u drugi preslikavaju perspektivno afino sa centrom S i osom s_∞, jesu perspektivno slični ili homotetični (sl. 26).

Neka su trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ dva odgovarajuća trougla datog preslikavanja. Dokažimo da su perspektivno slični.

Trouglovi su u perspektivnom položaju jer parovi odgovarajućih temena A i A_1, B i B_1, C i C_1 pripadaju zracima perspektivnog preslikavanja sa centrom S.

Kako su AB i A_1B_1 odgovarajuće prave, one se seku u tački ose s_∞, dakle, one su paralelne, pa je $AB : A_1B_1 = AS : A_1S$. Isto tako, pošto su AC i A_1C_1 odgovarajuće prave, one su paralelne, pa sledi: $AC : A_1C_1 = AS : A_1S$. Dakle je: $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$. Kraci uglova BAC i $B_1A_1C_1$ su paralelni i jednako usmereni, pa su uglovi jednaki. Prema tome, trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ su slični. Koeficienat sličnosti jednak je konstanti preslikavanja.

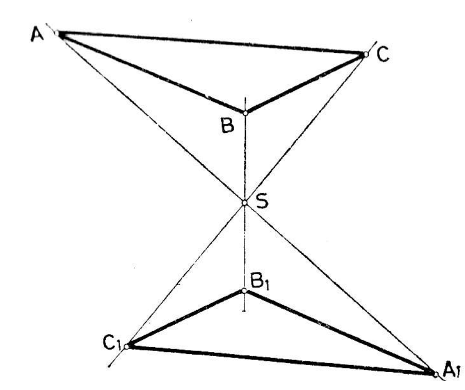
Rastavljanjem proizvoljnog mnogougla na trouglove dokazuje se da su bilo koja dva odgovarajuća mnogougla ovog preslikavanja slični.

Stav 9. Ako je konstanta preslikavanja $k = -1$, preslikavanje sa centrom S i osom s_∞ je centralna simetrija.

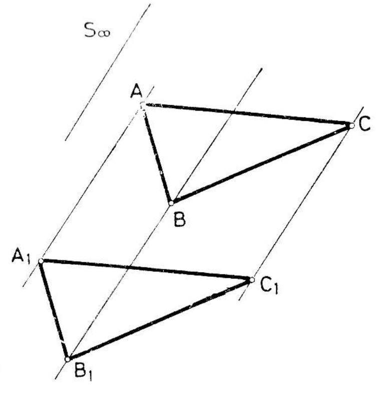
Kako je $k < 0$, parovi M, M_1 i S, M_s se razdvajaju, dakle, za beskonačno daleku tačku $M_{s\infty}$ tačke M i M_1 su sa različitih strana tačke S. Kako je $|k| = 1$, sledi da je $\frac{M_1S}{MS} = 1$, tj. $M_1S = MS$.

Ovu osobinu ima svaki par odgovarajućih tačaka, a navedena osobina definiše simetriju u odnosu na centar S. Ovo perspektivno afino preslikavanje je simetrija u odnosu na centar S.

Na slici 27 dat je primer odgovarajućih trouglova ABC i $A_1B_1C_1$ perspektivno kolinearnog preslikavanja koje predstavlja centralnu simetriju u odnosu na centar S.



sl. 27



sl. 28

4. Ako je u perspektivno kolinearnom preslikavanju centar beskonačno daleka tačka S_∞ i osa perspektive beskonačno daleka prava s_∞, tada su zraci perspektive paralelni i osa je beskonačno daleka prava s_∞ i odgovara sama sebi. Prema dokazanim osobinama u 2. i 3. ovo preslikavanje je perspektivno afino.

Stav 10. Dva odgovarajuća ravna lika preslikavanja u kome je centar S_∞ i osa s_∞, podudarni su i mogu se dobiti jedan iz drugog paralelnim pomeranjem u pravcu zraka afinosti. Ovo preslikavanje je translacija ili translatorna podudarnost.

Dokažimo da su dva odgovarajuća trougla ABC i $A_1B_1C_1$ podudarna (sl. 28). Zraci preslikavanja AA_1 i BB_1 paralelni su, a takođe su paralelne i odgovarajuće prave AB i A_1B_1. U paralelogramu ABB_1A_1 je $AB = A_1B_1$ i $AA_1 = BB_1$. Slično dokazujemo da je $BC = B_1C_1$, $BB_1 = CC_1$ i $AC = A_1C_1$, $AA_1 = CC_1$. Prema tome su trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ podudarni.

Kako su odgovarajuća temena na paralelnim zracima, a odgovarajuće stranice paralelne, i kako je $AA_1 = BB_1 = CC_1$, preslikavanje predstavlja paralelno pomeranje u pravcu zraka afinosti. Ovo perspektivno afino preslikavanje je, dakle, translacija. Trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ su translatorno podudarni.

Rastavljanjem proizvoljnog mnogougla na trouglove dokazuje se da su bilo koja dva odgovarajuća mnogougla ovog preslikavanja translatorno podudarni.

Prema dokazanim osobinama preslikavanja u slučajevima 2. i 3., kada su ili centar ili osa beskonačno daleki i preslikavanje u slučaju 4. u kome su i centar i osa beskonačno daleki, je perspektivno afino. Za ova preslikavanja važe zajedničke osobine:

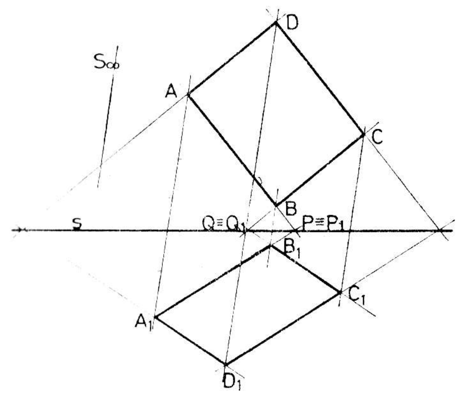
1. paralelne prave preslikavaju se u paralelne prave,
2. razmera triju tačaka (ili razmera dužinna dveju duži) jedne prave je invarijanta ovih preslikavanja.

Primeri

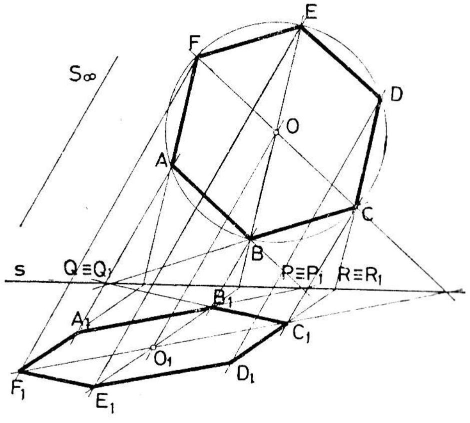
Primer 1. Pravougaonik ABCD preslikati perspektivno afino ako je dat zrak afinosti, osa afinosti s i temenu A odgovarajuća tačka A_1 (sl. 29).

Kroz teme A pravougaonika ABCD konstruišimo zrak paralelan datom zraku afinosti i na njemu izaberimo tačku A_1. Prava AB seče osu s u tački $P \equiv P_1$ i preslikava se u pravu A_1P_1 na kojoj se dobija B_1 u preseku sa zrakom afinosti kroz B. Slično se dobija tačka C_1 u preseku zraka afinosti kroz C sa pravom B_1Q_1, gde je $Q \equiv Q_1$ presek prave BC sa osom s. Kako su suprotne stranice pravougaonika paralelne, a paralelnost je invarijanta afinog preslikavanja, paralelne su i suprotne stranice u preslikanom četvorouglu $A_1B_1C_1D_1$. Preslikani četvorougao je paralelogram, pa se teme D_1 dobija u preseku pravih $A_1D_1 \parallel B_1C_1$ i $C_1D_1 \parallel A_1B_1$. Uglovi u paralelogramu $A_1B_1C_1D_1$ su u opštem slučaju različiti od pravog. Preciznost konstrukcije proveravamo koristeći osobinu da se parovi odgovarajućih pravih AD i A_1D_1, CD i C_1D_1 seku na osi s.

Par odgovarajućih tačaka A i A_1 može se zadati konstantom preslikavanja, npr. $k = \frac{AA_s}{A_1A_s} = -\frac{3}{2}$ (sl. 29). Tada treba na zraku afinosti kroz tačku A koji seče s u A_s konstruisati tačku A_1 tako da su A i A_1 sa različitih strana tačke A_s i $A_1A_s = \frac{2}{3}AA_s$. Dalje nastavljamo konstrukciju kao što je u prethodnom navedeno.



sl. 29



sl. 30

Primer 2. Pravilan šestougao ABCDEF preslikati perspektivno afino ako je dat zrak afinosti i tri para odgovarajućih tačaka A i A_1, B i B_1, C i C_1 (sl. 30).