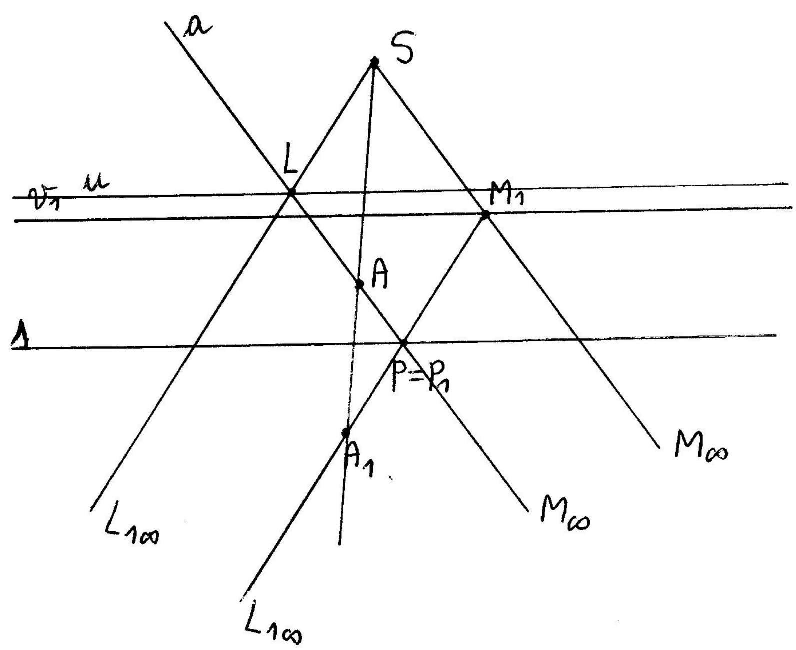
Решење првог колоквијума из Нацртне и компјутерске геометрије
14. 12. 2013.

1 Дато је средиште S, оса s, против-оса v_1 и тачка A, $A \notin s$, $A \notin v_1$. Конструисати перспективно колинеарну слику A_1 тачке A и против-осу u датог пресликавања.

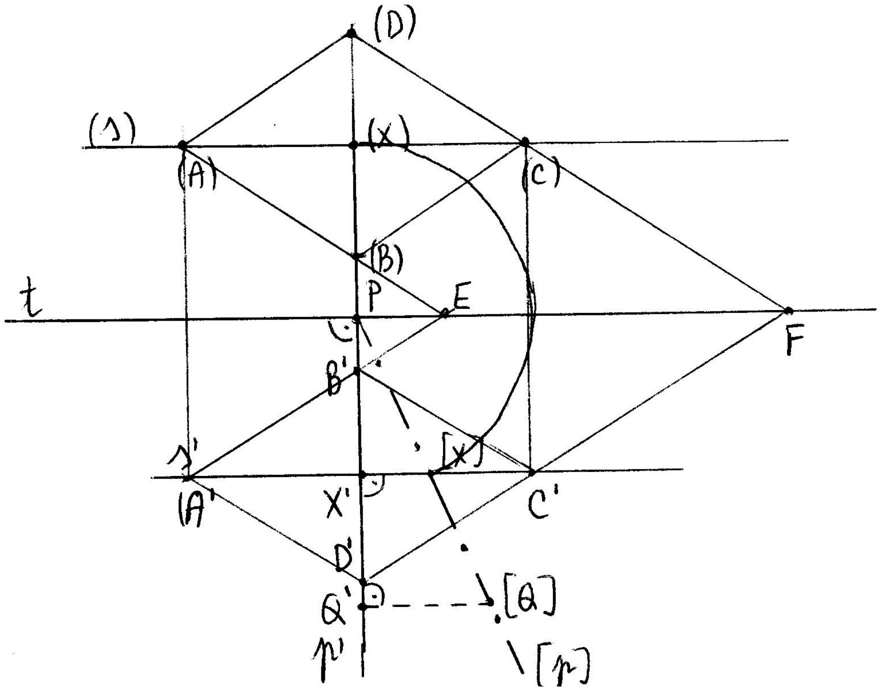
Решење: Конструишемо s, $v_1 \| s$, и изаберемо S и A, $A \notin s$, $A \notin v_1$, $S \notin s$, $S \notin v_1$. Нека је M_1 произвољна тачка на v_1. Тада тачка M_∞ поља α припада правој SM_1. Нека је a права кроз A, таква да је $a \| SM_1$. Како $M_\infty \in SM_1$, следи да $M_\infty \in a$. Нека је $a \cap s = P \equiv P_1$. Пошто су тачке A, P, M_∞ колинеарне, следи да су A_1, P_1, M_1 колинеарне. Осим тога, тачка A_1 припада правој SA, па је $A_1 = SA \cap P_1M_1$. Да бисмо конструисали против-осу u, потребно је да пресликамо неку произвољну бесконачно далеку тачку поља α_1. Нека је $L_{1\infty}$ бескон. далека тачка праве A_1M_1. Тада њена слика L припада правој AM_∞, као и правој $SL_{1\infty}$. Значи, $L = AM_\infty \cap SL_{1\infty}$. Коначно, кроз тачку L конструишемо праву u, $u \| s$. Права u је тражена против-оса поља α.



(2) Права $p(X', OX_0, Q', OQ_0)$ је нагибница равни τ. Конструисати нормалну пројекцију ромба $ABCD$ који лежи у равни τ, ако дијагонала d_1 тог ромба припада правој p, тачка X је пресек његових дијагонала и ако су његове дијагонале d_1 и d_2 подударне датим дужима l_1 и l_2 редом. Написати шта је пројекција ромба.

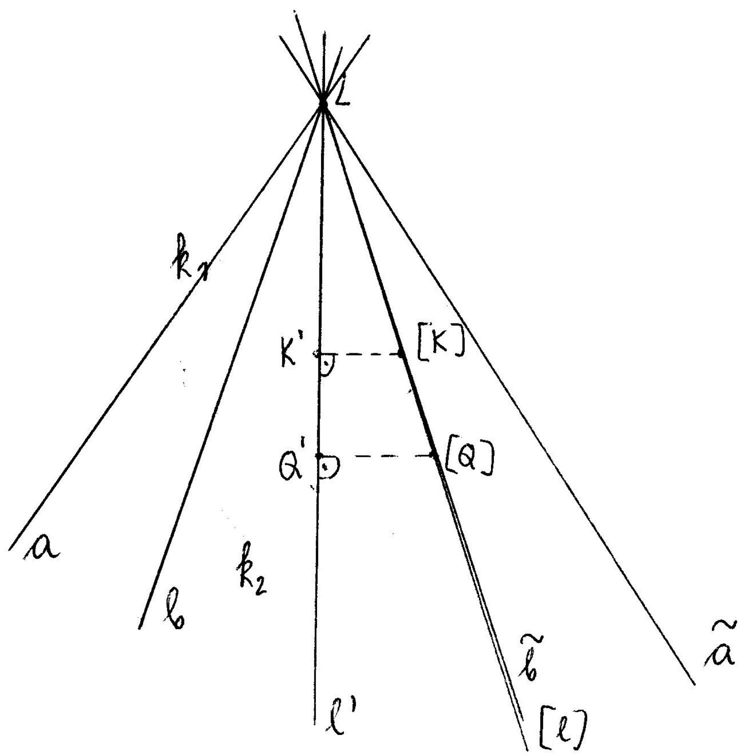
Решење: Дијагонале ромба су нормалне. Ако је $d_1 = BD$ и по претпоставци задатка $d_1 \in p$, следи да $d_2 = AC \in s$, где је s сутражница равни τ, $s \perp_X p$. Помоћу тачака X и Q и њихових ката OX_0, OQ_0 обарамо нагибницу p, тј налазимо $[p]$. Тада је $p' \cap [p] = P$ — траг нагибнице. Кроз P конструишемо траг t равни τ, тако да је $t \perp_P p'$. Затим конструишемо тачку (X) на p'. Одредимо тачке (B) и (D) на p' тако да је $(X)(B) = (X)(D) = \frac{l_1}{2}$. Затим кроз (X) конструишемо

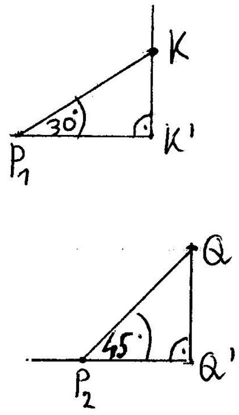
оборену сутражницу (s), такву да је $(s) \parallel t$, тј $(s) \underset{(X)}{\perp} p'$.
На праву (s) одредимо тачке (A) и (C) тако да је $(X)(A)=(X)(C)=\frac{l_2}{2}$. Кроз тачку X' конструишемо s', $s' \parallel t$.
Из (A) и (C) повучемо нормале на праву t. Те нормале секу s' у тачкама A' и C'. Нека је $(A)(B) \cap t = E$. Успоставимо перспективно афино пресликавање између два талака (τ) и τ'. Како су (A), (B), E колинеарне тачке, биће колинеарне и тачке A', B', E. Отуда је $A'E \cap p' = B'$.
Сада још треба да одредимо D' помоћу ова перспект. афина пресликавања. Уочимо на пример $(C)(D) \cap t$.
Нека је $(C)(D) \cap t = F$. Тада су (C), (D), F колинеарне тачке, па су колинеарне и тачке C', D', F. Отуда је $D' = C'F \cap p'$. Пројекција ромба $ABCD$ је ромб $A'B'C'D'$, јер су његове дијагонале $A'C'$ и $B'D'$ нормалне.



(3) Дата је пресечна права $l(K';OK_0,Q';OQ_0)$ равни α и β. Конструисати трагове ових равни, ако раван α заклапа са Π угао од 30°, а раван β заклапа са Π угао од 45°.

Решење: Права l припада и равни α и равни β, па се њен траг L налази у пресеку трагова a и b равни α и β. Траг L праве l одређујемо обарањем праве l у Π помоћу њених тачака K и Q и њихових кота OK_0 и OQ_0. Затим кроз тачку K уочимо нагибницу p_1 равни α. Помоћном конструкцијом конструишемо $\triangle P_1KK'$, где је $KK'=OK_0$, $\measuredangle KP_1K'=30^\circ$ и $\measuredangle KK'P_1=90^\circ$. Тиме добијамо дуж $K'P_1$, где је P_1 траг нагибнице p_1. Како је $p_1'\perp a$, следи да је траг a тангента круга $k_1(P_1,K'P_1)$. Аналогно, кроз тачку Q уочимо нагибницу p_2 равни β. Помоћном конструкцијом конструишемо $\triangle P_2QQ'$, где је $QQ'=OQ_0$, $\measuredangle QP_2Q'=45^\circ$ и $\measuredangle QQ'P_2=90^\circ$. Тиме добијамо дуж $Q'P_2$, где је P_2 траг нагибнице p_2. Како је $p_2'\perp b$, следи да је траг b тангента круга $k_2(P_2,Q'P_2)$. Пошто трагови a и b пролазе кроз тачку L - траг праве l, из тачке L повлачимо тангенте a и b на кругове k_1 и k_2. Задатак има 4 решења, јер из тачке L постоје 4 тангенте на кругове k_1 и k_2.

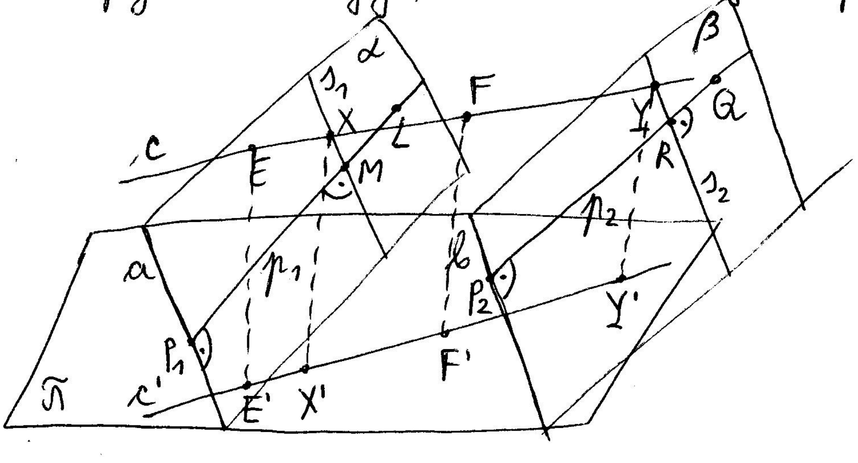




Решења су парови (a,b), $(a,\tilde{b})$, $(\tilde{a},b)$, $(\tilde{a},\tilde{b})$.

4) Дате су две паралелне равни $\alpha(a, L', OL_0)$ и $\beta(b, Q', OQ_0)$ и права $c(E', OE_0, F')$ паралелна са π. Права c продире равни α и β у тачкама X и Y, при чему њена пројекција c' није нормална на трагове тих равни. Наћи праву величину дужи XY.

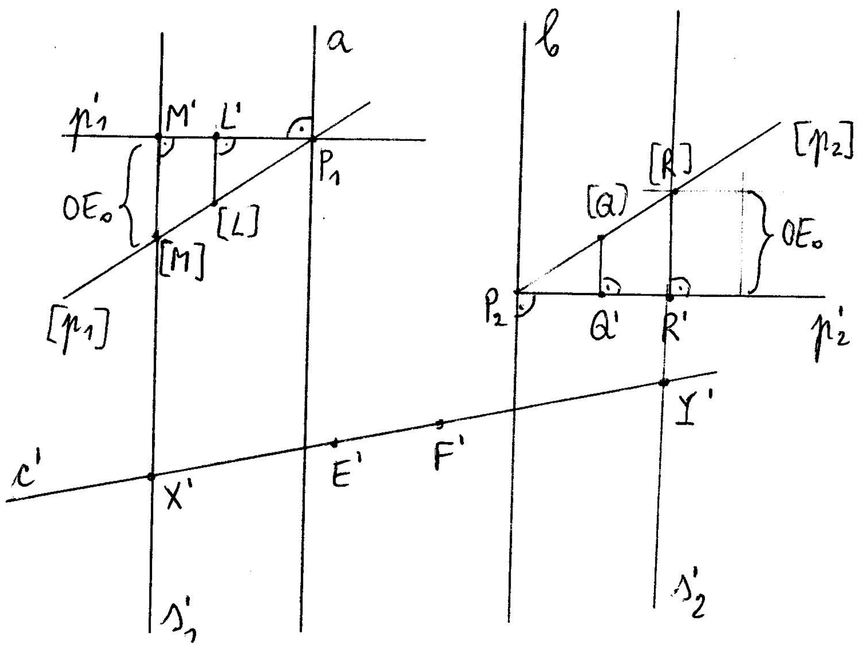
Решење: Посматрајмо најпре слику у простору. Пошто је права $c \parallel \pi$, то је $c \parallel c'$, па је $XY = X'Y'$. Треба да конструишемо дуж $X'Y'$ – то је тражена дуж.



$a \parallel b$ – трагови
$p_1 \parallel p_2$ – нагибн.
$[p_1] \parallel [p_2]$
$s_1 \parallel s_2$ – сутражн.

Треба да одредимо продорне тачке X и Y праве c кроз α и β. Уочимо сутражницу s_1 равни α кроз X и сутраж. s_2 равни β кроз Y. Нека је p_1 нагибница равни α кроз L и p_2 нагибница равни β кроз Q. Нека је $p_1 \cap s_1 = M$ и $p_2 \cap s_2 = R$. Тада је $XX' = EE' = \underline{OE_0 = MM'}$ и $YY' = EE' = \underline{OE_0 = RR'}$. Према томе, тачке M' и R' можемо одредити на нагибницама p_1' и p_2' редом, јер имамо њихово одстојање OE_0 до Π. Када конструишемо M' и R', кроз те тачке конструишемо сутражнице s_1' и s_2' редом. Пошто је $c \cap s_1 = X$, то је $c' \cap s_1' = X'$. Аналогно, пошто је $c \cap s_2 = Y$, то је $c' \cap s_2' = Y'$. Тиме је конструисана дуж $X'Y'$, тј. права величина дужи XY.

Дато: a, b, L', Q', E', F'
$a \parallel b$ – трагови равни



c': $c' = E'F'$
p_1': $L' \in p_1'$, $p_1' \perp_{P_1} a$
M': $M' \in p_1'$, $M'[M] = OE_0$
s_1': $M' \in s_1'$, $s_1' \parallel a$
$[p_1] = [M][L]$
p_2': $Q' \in p_2'$, $p_2' \perp_{P_2} b$
$[p_2]$: $[p_2] \parallel [p_1]$, $P_2 \in [p_2]$
R': $R' \in p_2'$, $R'[R] = OE_0$
s_2': $R' \in s_2'$, $s_2' \parallel b$
$s_1' \cap c' = X'$
$s_2' \cap c' = Y'$
$X'Y'$ – тражена дуж