ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ТОПОЛОГИЈЕ

16.1.2020.

1. [**6 поена**] Доказати да тополошки простори $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ задовољавају T_2 аксиому сепарације акко тополошки производ $(X \times Y, \mathcal{T}_{X \times Y})$ задовољава T_2 аксиому сепарације.

2. (а) [**3 поена**] Доказати да је затворени подскуп компактног тополошког простора такође компактан.

   (б) [**3 поена**] Испитати компактност скупа природних бројева у тополошком простору $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_R)$.

3. [**3 поена**] Ако су A и B два затворена скупа у тополошком простору $(X, \mathcal{T})$ таква да су $A \cup B$ и $A \cap B$ повезани скупови, доказати да су тада и A и B повезани скупови.

4. [**5 + 3 поена**] Нека су $A = \{(x, e^{kx}) \mid x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$ и $B = A \cup (\{0\} \times [2, \infty))$ подскупови тополошког простора $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{d_2})$.

   (а) Испитати путевну повезаност скупа A.

   (б) Испитати повезаност скупа B.

5. [**Бонус задатак: 1 + 3 поена**] Дат је скуп X и две топологије $\mathcal{T}_1$, и $\mathcal{T}_2$ на X такве да је $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

   (а) Ако је $A \subseteq X$ компактан у $(X, \mathcal{T}_2)$, доказати да је A компактан у $(X, \mathcal{T}_1)$.

   (б) Ако је $(X, \mathcal{T}_1)$ Хауздорфоф, а $(X, \mathcal{T}_2)$ компактан, доказати да је $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.