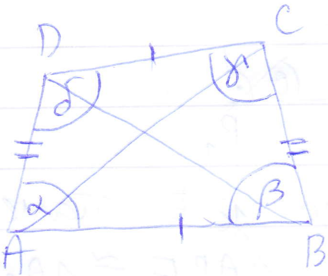
Први колоквијум из Нееуклидских геометрија

17.12.2022

Решења задатака

(1) Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ у хиперболичкој равни. Ако је $AB \cong CD$ и $BC \cong AD$, доказати да је $\beta+\gamma<180^\circ$

Решење:

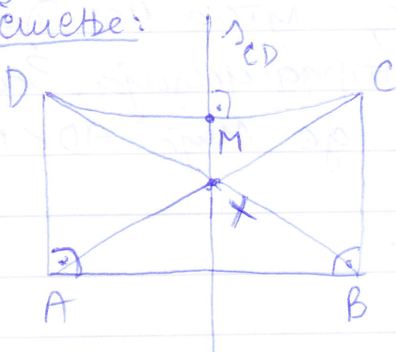


Претпоставимо да је $AB \cong CD$ и $BC \cong AD$. Тада је $\triangle ABC \underset{ccc}{\cong} \triangle ACD$, па је $\beta \cong \delta$.
Аналогно је $\triangle ABD \underset{ccc}{\cong} \triangle BCD$, па је $\alpha \cong \gamma$.

Према теореми, у L^2 важи $\alpha+\beta+\gamma+\delta<360^\circ$. Како је $\alpha \cong \gamma$ и $\beta \cong \delta$, добијамо $2(\beta+\gamma)<360^\circ \Rightarrow \beta+\gamma<180^\circ$ ∎

(2) Дат је Сакеријев четвороугао $ABCD$ са основицом AB и противосновицом CD. На симетрали противосновице CD дата је произвољна тачка X. Доказати да је $XA \cong XB$.

Решење:



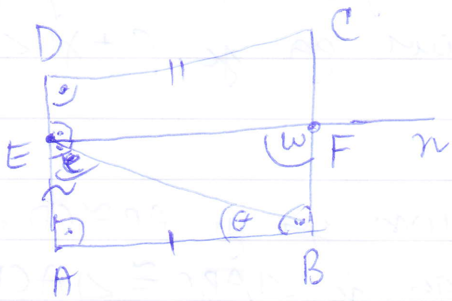
Нека је $s_{CD} \cap CD = M$.
Тада је $\triangle DXM \cong \triangle MXC$ (СУС), одакле је $\measuredangle MDX \cong \measuredangle MCX$, и $XD \cong XC$.
Пошто је $ABCD$ Сакеријев четвороугао, према теореми је $\measuredangle ADM = \measuredangle BCM$.
Сада је $\measuredangle ADX = \measuredangle ADM - \measuredangle MDX = \measuredangle BCM - \measuredangle MCX = \measuredangle BCX$. Како је $XD \cong XC$, $AD \cong BC$, $\measuredangle ADX \cong \measuredangle BCX$, следи да је $\triangle AXD \cong \triangle XBC$ (СУС), па је $XA \cong XB$ ∎

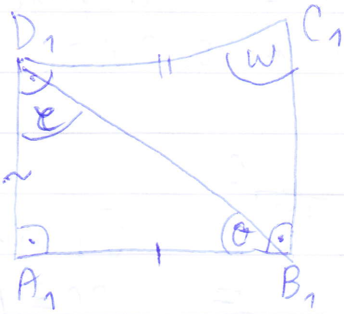
(3) Доказати да су Ламбертови четвороуглови $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ са оштрим угловима у теменима C и C_1

подударни, ако је $AB \cong A_1B_1$ и $CD \cong C_1D_1$.

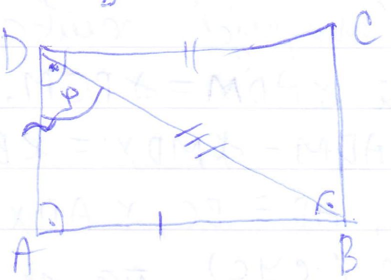
Решење:

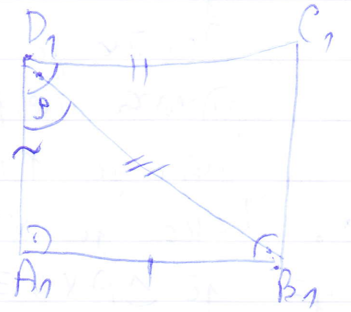
Претпоставимо да су $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ Ламбертови четвороуглови, такви да је $AB \cong A_1B_1$ и $CD \cong C_1D_1$. Оштри углови су у теменима C и C_1.





Претпоставимо да је $AD > A_1D_1$. Нека је E тачка на AD таква да је $AE \cong A_1D_1$. Сада је $\triangle ABE \cong \triangle A_1B_1D_1$ (СУС) $\Rightarrow BE \cong B_1D_1$, $\measuredangle ABE = \theta = \measuredangle A_1B_1D_1$, $\measuredangle AEB = \varphi = \measuredangle A_1D_1B_1$. Нека је $n \perp AD$, $n \cap BC = F$. Сада је $\triangle EBF \cong \triangle B_1C_1D_1$ (УСУ), па је $EF \cong D_1C_1$ и $\measuredangle EFB = \measuredangle B_1C_1D_1 = \omega$. Како је $CD \cong C_1D_1$ и $EF \cong D_1C_1 \Rightarrow CD \cong EF$, па је четвороугао $EFCD$ Сакеријев четвор са основицом DE и противосновицом CF. Према теореми, углови на противосновици су оштри. Како је $\measuredangle EFB = \omega$ оштар, њему напоредан угао је туп. Дакле, угао на противосновици је туп, што је контрадикција. Зато није $AD > A_1D_1$. Аналогно се доказује да није $AD < A_1D_1$. Зато је $AD \cong A_1D_1$.





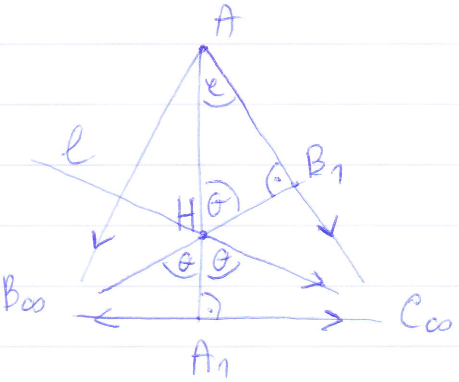
Ако уочимо $\triangle ABD$ и $\triangle A_1B_1D_1$, они су подударни (СУС), па је $BD \cong B_1D_1$, $\measuredangle ADB \cong \measuredangle A_1D_1B_1 = \rho$. Сада је $\triangle BCD \cong \triangle B_1C_1D_1$ (СУС) ($BD \cong B_1D_1$, $CD \cong C_1D_1$, $\measuredangle BDC = 90 - \rho = \measuredangle B_1D_1C_1$), па је $BC \cong B_1C_1$ и $\measuredangle C \cong \measuredangle C_1$.

Пошто су сви елементи четвороуглова $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ подударни, следи да су ти четвороуглови подударни. ∎

④ Дат је троугао $\triangle AB_\infty C_\infty$ са два бесконачно далека темена у хиперболичкој равни. Висине тог троугла AA_1 и $B_\infty B_1$ секу се у тачки H. Доказати да је

$$\Pi(HA_1)+\Pi(HB_1)-\Pi(AA_1) > 90^\circ.$$

Решење:



Означимо са $\varepsilon = \angle A_1AC_\infty$ и са $\theta = \angle AHB_1$.
Тада је $\angle A_1HB_\infty = \theta$ (унакрсни).

Нека је l: $H \in l$, $l \parallel B_\infty C_\infty$.
Тада је
$\Pi(HA_1) = \angle A_1HB_\infty = \angle A_1HC_\infty = \theta$ ....(1)

У $\triangle AHB_1$ имамо да је $\varepsilon+\theta < 90^\circ$, па је
$$-(\varepsilon+\theta) > -90^\circ \ ...\ (2)$$

Како је $\Pi(HB_1) = \angle B_1HC_\infty$, јер је у тачки B_1 прав угао и права HC_∞ је паралелна са правом B_1C_∞, следи да је
$\Pi(HB_1) = \angle B_1HC_\infty = 180^\circ - 2\theta$ ... (3)

Такође је $\Pi(AA_1) = \varepsilon = \angle A_1AC_\infty$, ... (4),
јер је у тачки A_1 прав угао и $AC_\infty \parallel A_1C_\infty$.

Помоћу (1), (2), (3), (4) добијамо

$$\begin{aligned}
&\Pi(HA_1)+\Pi(HB_1)-\Pi(AA_1) = \\
&= \theta + (180-2\theta) - \varepsilon \\
&= 180 - \theta - \varepsilon \\
&= 180 - (\varepsilon+\theta) > 180 - 90^\circ = 90^\circ
\end{aligned}$$
∎