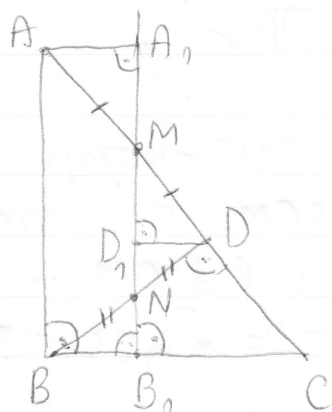


Перви законикот из Несеужских геометрија

24. 4. 2017.

- ① Дати је правоуглиот $\triangle ABC$ со правим углом у тачењу B . Ако је BD висина која одговара хипотенузи AC , M средините AD и N средините BD , докажити да права MN није нормална на BC .

Доказ: Претпоставимо да је $\triangle ABC$ правоуглиот троугао со правим углом у тачењу B , $AM = MD$ и $BN = ND$. Претпоставимо да је права MN нормална на BC .



Нека је $MN \perp BC$.

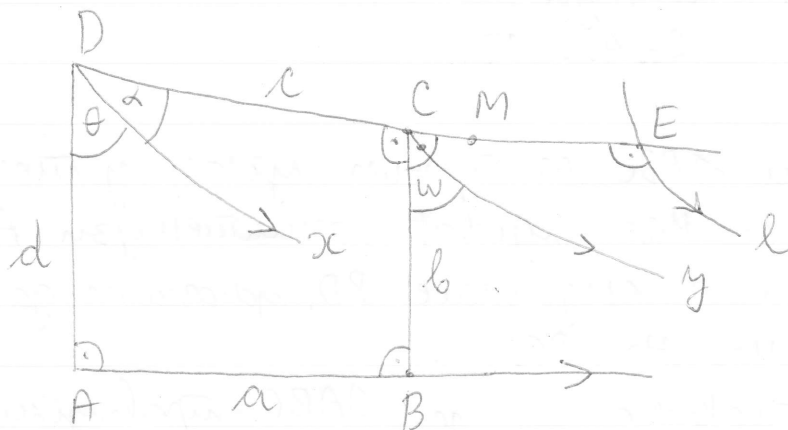
Означимо са A_1 и D_1 пројекције нормала из тачака A и D преко AA_1 и DD_1 на праву MN . Тада је $\triangle AA_1M \cong \triangle DD_1M$,
сш

огање је $AA_1 \cong DD_1$. Слично је $\triangle BB_1N \cong \triangle DD_1N$, огање је $BB_1 \cong DD_1$. Према томе, $AA_1 \cong BB_1$, $\angle A_1 = \angle B_1 = 90^\circ$, па је ABB_1A_1 сакерујево четвороугао са основом A_1B_1 и противосновом AB . Тако је угао на противосновици оштар, следи да је $\angle B < 90^\circ$, што је контрадикција. Дакле, $MN \not\perp BC$. $\blacksquare$

- ② Дати је Ламбертов четвороугао у L^2 код кога је $\angle D < 90^\circ$. Ако је $BC = b$, $AD = d$, $CD = c$, $\pi(b') = 90^\circ - \pi(b)$, докажити да је $\angle D = \pi(d) + \pi(c + b')$.

Доказ: Претпоставимо да је $ABCD$ Ламбертов четвороугао, такав да је $\angle D < 90^\circ$, $BC = b$, $AD = d$, $CD = c$,

$\Pi(b') = 90^\circ - \Pi(b)$, где b' — левая дуга.



Уведемо позначення Dx : $Dx \parallel AB$. Тоді ж
 $\Pi(AD) = \Pi(d) = \angle ADx = \theta$ (0)

Уведемо н позначення Cy : $Cy \parallel AB$. Тоді ж
 $\Pi(BC) = \Pi(b) = \angle BCy = \omega$.

Нека ж M : $B(D, C, M)$. Тоді ж $\angle yCM$ — дуга, як
се називають внутрішній кут $\angle BCM$, то середина
поступи відноситься позначка l : $l \perp CM$ н $l \parallel Cy$.
Тоді ж $l \parallel Cy$ н $l \perp CM \Rightarrow \Pi(CE) = \angle yCE = 90^\circ - \omega$.
Тоді ж $\omega = \Pi(b)$, отже ж
 $\Pi(CE) = 90^\circ - \Pi(b)$, (1)

По протилежності ж
 $\Pi(b') = 90^\circ - \Pi(b)$... (2)

На основі середньої ж відстані дуги створюють
відстані. Тоді ж паралельність, н релативна (1) н (2),
звідси

$$CE = b' \text{ (3)}$$

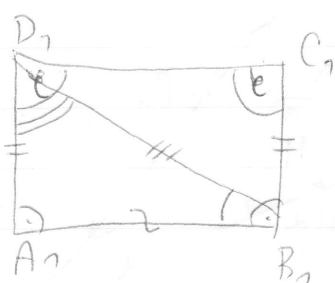
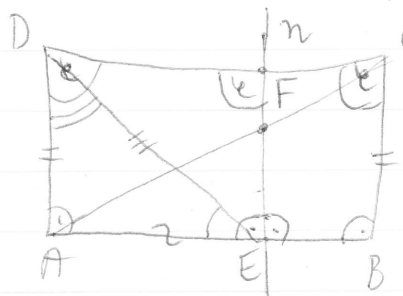
Тоді ж $Dx \parallel AB$, $Cy \parallel AB$, $l \parallel Cy$, здається
можливо ж $Dx \parallel l$.

Тоді ж $Dx \parallel l$ н $l \perp DC \Rightarrow \Pi(DE) \stackrel{(3)}{=} \Pi(c + b') =$
 $= \angle xDE = \alpha$ (4)

Тоді ж, тоді ж $\angle D = \theta + \alpha$, тоді ж (0) н (4)
звідси $\angle D = \theta + \alpha = \Pi(d) + \Pi(c + b')$. ■

③ Дадено е да су Сакерујеви нештобразидеи $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ у L^2 погледу, али је $BC \cong B_1C_1$ и $\angle BCD \cong \angle B_1C_1D_1$.

Доказ: Нека су $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ Сакерујеви нештобразидеи, тако да је $BC \cong B_1C_1$ и $\angle BCD \cong \angle B_1C_1D_1 = \epsilon$. Тако је $\angle BCD \cong \angle ADC$ и $\angle B_1C_1D_1 \cong \angle A_1D_1C_1 \Rightarrow \angle ADC = \angle A_1D_1C_1 = \epsilon$.



Претпостави-
мо да је
 $AB > A_1B_1$.

Нека је E тачка на сегменту AB , таква да је $AE \cong A_1B_1$. Нека је n права нормална на AB у тачки E . Тако је $BC \cong AD$ и $B_1C_1 \cong A_1D_1$, па је $AD \cong A_1D_1$, па је $\triangle AED \cong \triangle A_1B_1D_1$. Одатле је $DE \cong B_1D_1$, $\angle ADE \cong \angle A_1D_1B_1$ и $\angle AED \cong \angle A_1B_1D_1$.

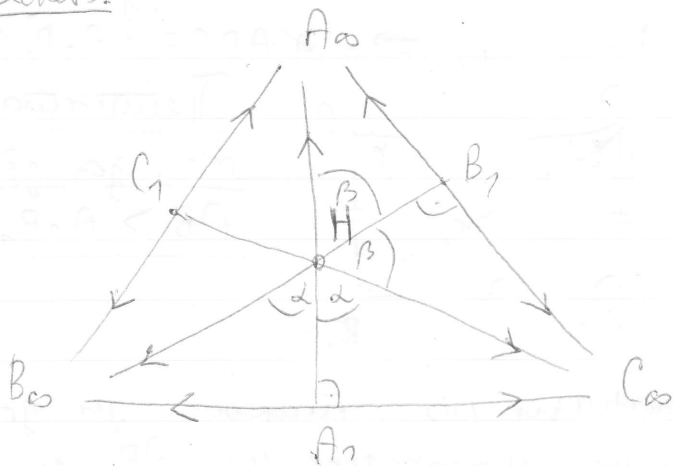
Сада је $\angle EDC \cong \angle B_1D_1C_1$ и $\angle DEF \cong \angle D_1B_1C_1$, где је F пресек правих n и CD . Права n сече AB , а сече BC (јер је $n \parallel BC$), па бдџ такође сече AC , у $\triangle ABC$. Тако n сече AC , а сече AD (јер је $n \parallel AD$), бдџ такође сече CD , у сегменту ACD . Сада је $\triangle DEF \cong \triangle B_1C_1D_1$, одатле гласио да је $\angle EFD = \epsilon$.

Међутим, сада је у нештобразиду $FEBC$ збир унутрашњих углова 180° , што је немогуће. Дакле, није $AB > A_1B_1$. Аналогно се доказује да није $AB < A_1B_1$. Трећа могућност је $AB \cong A_1B_1$. Сада је $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, па је $AC \cong A_1C_1$. Тако је $\triangle ACD \cong \triangle A_1C_1D_1$, одатле је $CD \cong C_1D_1$.

Што се такође доказује да је $ABCD \cong A_1B_1C_1D_1$. $\square$

- ④ Дати је $\triangle A_\infty B_\infty C_\infty$ са три бесконачно далека тачена у равни L^2 . Ако се линије $A_\infty A_1$ и $B_\infty B_1$ секу у тачки H , доказати да права $C_\infty H$ садржи висину из тачена C_∞ .

Доказ:



Треуголник $\triangle A_\infty B_\infty C_\infty$ је $A_\infty A_1 \cap B_\infty B_1 = H$. Тада је $\angle(HA_1) = \alpha$ и $\angle(HB_1) = \beta$. Тачице су $\nsubseteq B_\infty H A_1$ и $\nsubseteq A_\infty H B_1$ унакрсни углови, следи да је $\nsubseteq B_\infty H A_1 = \alpha = \nsubseteq A_\infty H B_1 = \beta$. Уочимо праву $H C_\infty$ и $\triangle A_\infty B_\infty A_1$. Права $H C_\infty$ седе $A_\infty A_1$, а седе $B_\infty A_1$ (јер је $H C_\infty \parallel B_\infty A_1$), па на основу "Тачице асимптотске следи да права $H C_\infty$ седе директноу $A_\infty B_\infty$ у нејкој тачки C_1 . Доказатељство да је угао у тачки C_1 прав. Како је $\nsubseteq C_1 H B_\infty \cong \nsubseteq B_1 H C_\infty = \alpha = \beta$ и $\nsubseteq C_1 H A_\infty \cong \nsubseteq A_1 H C_\infty = \alpha = \beta$ (унакрсни углови), и $C_1 H \cong C_1 H$, следи да је $\triangle A_\infty C_1 H \cong \triangle C_1 H B_\infty$. Одавде је $\nsubseteq B_\infty C_1 H \cong \nsubseteq A_\infty C_1 H$. Тачице су две углови надобредни, следи да су прави. Према томе, угао у тачки C_1 је прав, па права $H C_\infty$ садржи линију из тачена C_∞ . ■