Други колоквијум из Линеарне алгебре 2

09.01.2018. године

1. Нека је пресликавање $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R})$ дефинисано са:

$$\langle A, B\rangle = tr(A^T \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot B).$$

а) [**1 поен**] Доказати да је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ на $M_2(\mathbf{R})$.

б) [**3 поена**] Одредити једну ортонормирану базу потпростора $U = \{A \in M_2(\mathbf{R}) | A^T = A\}$.

в) [**1 поен**]Одредити растојање између матрица $A = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

2. [**3 поена**] Нека је V векторски простор полинома над $\mathbf{R}$ степена мањег или једнаког 2. Нека су затим Φ_1, Φ_2, Φ_3 линеарне функционеле дефинисане са $\Phi_1(f(t)) = \int\limits_0^1 f(t)dt$, $\Phi_2(f(t)) = f'(1)$ и $\Phi_3(f(t)) = f(0)$. Наћи базу $\{f_1, f_2, f_3\}$ простора V која је дуална бази $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$.

3. [**5 поена**] Наћи угао између вектора $x = (1, 10, 2, -1)$ и равни $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 7 \end{cases}$.

4. а)[**2 поена**] Нормалан оператор A је косоконјугован оператор акко све његове сопствене вредности имају облик $i\lambda, \lambda \in \mathbf{R}$. Доказати.

б)[**5 поена**] Испитати да ли је оператор $f: \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ дефинисан са

$$f(x, y, z) = ((2 + i)x + (1 + 2i)y, (1 + 2i)x + (2 + i)y, z)$$

нормалан и ако јесте извршити ортогоналну дијагонализацију датог оператора.

5. [**3 поена**] За хермитску матрицу $H = \begin{bmatrix} 1 & i & 2+i \\ -i & 2 & 1-i \\ 2-i & 1+i & 2 \end{bmatrix}$ наћи несингуларну матрицу P тако да је $P^T H \bar{P}$ дијагонална матрица, а затим наћи њену сигнатуру.