Други колоквијум из Линеарне алгебре 2

15.01.2019. године

1. [**5 поена**] Нека је пресликавање $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ дефинисано са:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

   (а) Доказати да је $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скаларни производ на $\mathbb{R}_3[x]$.

   (б) Одредити једну ортонормирану базу простора $\mathbb{R}_3[x]$ полазећи од базе $\{1, 1-x, 2+x^2, x^3\}$.

   (в) Одредити растојање између вектора $1-x$ и $2+x^2$.

2. [**3 поена**] Линеарне функционеле $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ задате су са

$$f_1(p) = p(1), f_2(p) = p(0), f_3(p) = p(-1), p \in \mathbb{R}_2[x].$$

   Одредити базу простора $\mathbb{R}_2[x]$ којој је $\{f_1, f_2, f_3\}$ дуална база.

3. [**6 поена**] Нека је V потпростор унитарног простора $\mathbb{R}^5$ са стандардним скаларним производом такав да је

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 | x_4 + x_1 = -x_5 + x_1 = x_2 + x_3 = x_4 + x_5 = 0\}.$$

   (а) Одредити базу и димензију ортогоналног комплемента $V^\perp$ потпростора V.

   (б) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = (a+1, a, a, -1, 2a+1)$, $a \in \mathbb{R}$.

   (в) Да ли постоји број $a \in \mathbb{R}$ такав да је $v = (a+1, a, a, -1, 2a+1) \in V^\perp$?

4. [**5 поена**] У простору $\mathbb{R}_2[x]$ са скаларним производом

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx, p, q \in \mathbb{R}_2[x]$$

   одредити матрицу репрезентације конјугованог оператора D^* у односу на базу $\left\{1, x, \frac{1}{2}(3x^2-1)\right\}$, где је D оператор диференцирања.

5. (а) [**2 поена**] Доказати да за конјуговане операторе A и B важи $(A+B)^* = A^*+B^*$ и $(AB)^* = B^*A^*$.

   (б) [**2 поена**] Ако су A и B самоконјуговани оператори, доказати да су и $AB + BA$ и $i(AB - BA)$ самоконјуговани оператори.