УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО–МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

МЕТОДИКА НАСТАВЕ АНАЛИЗЕ

4. недеља рада на даљину

КРАГУЈЕВАЦ
2020

Садржај

Глава 1

Апстракција и конкретизација

Математика је апстрактна наука. Објекти, величине и односи међу њима, који се појављују и разматрају у математици, мотивисани су појавама из стрварног света, али су њихове особине апстрактне. На основу ове чињенице је јасно да мисаони поступци апстракција и њена супротност конкретизација играју посебно значајну улогу у математици као науци, а самим тим и у настави математике.

Реч апстракција потиче од латинске речи abstractio што значи издвајање, извлачење, одвајање, одвлачење.

Наравно, математика на самом свом настанку није била апстрактна, и прешла је дуг пут до апстрактне науке какву ми данас познајемо. Потсетимо се, математика код древних цивилизација Азије и Африке, посебно Вавилона и Египта, била је конкретна, уско повезана с практичним израчинавањима и мерењима. Стари Грци, захваљујући путовањима својих мислилаца (научника) и филозофа у те земље, упознали су и преузели њихова математичка знања, али су их почели објашњавати на нов начин (доказивати). У мноштву до тада неповезаних чињеница Грци су почели да траже сличност, апстраховали су их и генерализовали, а онда изводили, дедуковали нове чињенице. Од тог времена важно место место у математици заузимају апстрактна разматрања и доказивање. Зачетних тога је био Талес (око 624 – 548. п.н.е.), иако се у његовим доказима преплиће конкретно и апстрактно, па његов доказ није логички строг, али је ипак значајан помак ка апстракцији. Потпуна апстракција математичких појмова постиже се после Талеса. Питагора (око 570 – 399. п.н.е.) већ разматра апстрактне геометријске облике, а код њега су и бројеви апстрактни. Он уводи доказ у математику. Његов научно-филозофски систем, и поред својих недостатака, допринео је да се код Грка математика развије као апстрактна наука. Помоћу апстрактних математичких појмова он и његови следбеници објашњавали су структуру свемира.

Проблемом апстракције бавили су се и Грчки филозофи. Теоријски проблем апстракције разматра филозоф Сократ (469 – 399. п.н.е.) у својој расправи са софистима у вези са питањем о границама спознаје. Платон (око 429 – 348. п.н.е.) у схватању апстрактних математичких појмова одлази и корак даље, он у њима види реалност и постојање свих идеја искуствених објеката. Математика, која се бави апстрактним математичким појмовима, омогућава сагледавање света изван искуства. Из тога произлази његова филозофија и његово поимање света – Платонов „свет идеја”. Платоново учење о идејама одбацио је Еуклид (око 330 – 275. п.н.е.). Сви појмови које он разматра су из чулног искуства. Еуклидови докази су строги и његове Елементе карактерише висок ниво апстракције.

Шта је заправо апстракција? Постоје различити описи овог појма у зависности у којој науци или у ком подручју људске делатности се он среће (логика, психологија, филозофија, хемија, математика, уметност, говорни језик, итд.). Апстракција је један од основних мисаоних процеса. У науци, а посебно у математици, апстракција означава делотворан и логички разрађен поступак за теоријско упознавање предмета и практично овладавање њиме. Прецизније, апстракција је мисаоно одвлачење општег и битног својства посматраног објекта или појаве од осталих својстава, небитних за одређено проучавање, и одбацивање тих небитних својстава.

Будући да се општа битна својства неког скупа објеката издвајају применом метода генерализације, из тога очито произлази да је апстраховање у блиској вези с уопштавањем и да се не може без њега остварити. Уопштавање и апстраховање стално се примењују у процесу формирања појмова при прелазу од представа к појмовима. При томе, конкретни објекти, потребни за формирање новог појма морају бити одабрани тако да омогућавају уопштавање, издвајање битних својстава која чине садржај појма. Издвајање и апстраховање општих и битних својстава служе за математички опис посматраних конкретних објеката. Погледамо врло једноставан, али и важан пример појма броја, где се ученик први пут среће са апстракцијом.

Пример 1.1. *Појам броја* 3.

До појма броја 3 *ученик долази у неколико корака.*

1) *Запажање (чулна спознаја): упознавање конкретхих скупова и њихових својстава. (Три јабуке, три круга, три слова, три квадрата итд.)*

2) *Представа о броју* 3*: уочавање и издвајање заједничког битног својства проматраних скупова.*

3) *Формирање апстрактног појма броја* 3*: битно својство скупа* $\{a, b, c\}$.

Сличан је процес формирања и многих других апстрактних математичких појмова. Навешћемо још неколико једноставних примера апстракције.

Пример 1.2. 1) *С природом апстракције, а то значи с једним за математику важним мисаоним процесом, ученике можемо упознати врло рано. Узмимо једноставну једнакост* $20 \cdot 5 = 100$. *Ту једнакост можемо схватити као резултат апстраховања из многих конкретних односа. Који конкретан садржај можемо дати наведеној једнакости? Неки од одговора су: вредност* 20 *жвака по цени од* 5 *динара, површина просторије дужине* 20 *и ширине* 5 *метара, пређени пут објекта при константној брзини од* $20\ \mathrm{km/h}$ *и др.*

2) *У школским задацима са брзинама, кретањем, објекат који се креће по неком путу је најчешће човек, животиња, бицикл, аутомобил, воз, брод или авион. При решавању таквог задатка ми се најпре удаљавамо од конкретне природе објекта и замишљамо објекат као материјалну тачку које се креће по некој путањи. Након ове апстракције задатак решавамо као математички задатак.*

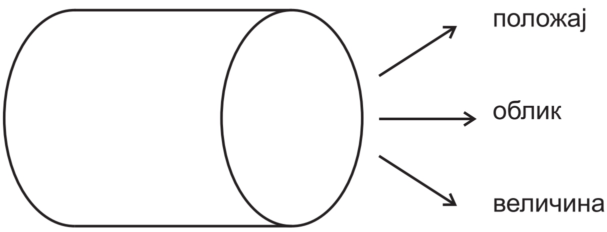
3) *Проблем постављања цевовода између два места повезан је са низом питања. Сам цевовод је конкретан објекат који има разноврсна и за практичне сврхе важна својства: облик, величину, дужину, тежину, пропусну снагу, материјал од ког је направљен, врсту изолације која је постављена око њега и др. При решавању овог проблема пројектант мора неколико пута прибећи апстракцији, издвајајући нека од наведених својстава и занемарујући привремено остала. Разматрање дужине цевовода и трасе води до првог апстрактног модела цевовода - геометријске линије, разматрање облика и величине цевовода у сврху што ефикаснијег рада води до другог апстрактног модела - геометријског тела, а разматрање врсте изолације води до трећег апстрактног модела - геометријске површи.*

Проучавање ових айсшракшних модела конкрешної објекша даје йошребне одіоворе на раније йосшављена йишања.

Већ из прва два описана примера уочавамо да се апстракција појављује у два различита облика. Први од њих карактерше чулна спознаја.

Пример 1.3. *Предмеш у йросшору.*

Промашрајмо йредмеш на слици 1.1 као іеомешријско шело. Оно има различиша својсшва која уочавамо нашим чулима: йоложај у йросшору, облик, величину и др. У сврху йроучавања можемо издвојиши било које од ших својсшава и удаљиши іа од осшалих. Сшрелице на цршежу йоказују шри моіућа смера айсшраховања.



Слика 1.1.

Други облик апстракције карактерише удаљавање потпуно изван чулног подручја. Ова апстракција је по својој природи дубља од прве, јер није само једноставан избор неких својстава објекта за одређено проучавање већ и њихова трансформација.

Пример 1.4. *Класификација шроуілова.*

Посшоје две йриродне класификације шроуілова: класификација у односу на дужине сшраница и класификација у односу на величине уілова.

Ако вршимо класификацију у односу на дужине сшраница, онда се йри шоме удаљавамо од својсшава међу величинама уілова и друіих својсшава. Резулшаш ове класификације су следећи йојмови: разносшрани шроуіао, једнакокраки шроуіао и једнакосшранични шроуіао.

Ако вршимо класификацију у односу на величине уілова, онда се йри шоме удаљавамо од својсшава међу дужинама сшраница и друіих својсшава. Резулшаш ове класификације су следећи йојмови: ошшроуіли шроуіао, йравоуіли шроуіао и шуйоуіли шроуіао.

Погледајмо сада један сложенији пример из школске математике у којем се прожима и надопуњује неколико мисаоних поступака (анализа, конкретизација, индукција, генерализација, аналогја), а посебно ћемо обратити пажњу на различите нивое апстраховања.

Пример 1.5. *Закон комутативности за сабирање природних бројева.*

а) *Овај закон ученици усвајају већ у почетној настави (први разред основне школе). Као темељ истраживања служи индуктивни поступак који се сатоји од низа индуктивних закључака о конкретним објектима и специјалним случајевима. Конкетни објекти су најчешће скупови предмета из стварног света: оловке, штапићи, плочице, новчићи, коцкице и др. На пример, збир* 3 *новчића и* 6 *новчића је* 9 *новчића, а толико новчића се добија и као збир* 6 *новчића и* 3 *новчића. Дакле, важи једнакост* $3+6=6+3$. *Мењањем броја елемената из наведених скупова, сабирањем и провераванњем добија се за тај ниво наставе низ апстрактних једнакости:*

$$3+6=6+3, \quad 9+4=4+9, \quad 7+12=12+7, \quad 10+15=15+10.$$

Једнакости показују да је небитна природа предмета, већ да је битан је однос (веза) међу бројевима предмета које оне описују. Издвајањем тога општег, битног изведена је прва апстракција.

б) *Добијене једнакости можемо у даљим разматрањима узети као полазне математичке објекте и њих такође подвргнути уопштавању и апстраховању. Погледајмо пажљиво те једнакости. Није тешко открити у њима оно опште и одвојити га од њиховог конкретног садржаја. Шта је то опште? На левој страни сваке једнакости је збир два броја, а на десној страни је збир тих бројева у обрнутом поретку. Ако одбацимо те конкретне природне бројеве и уместо њих уведемо променљиве величине, рецимо* a *и* b, *добијамо једнакост*

$$a+b=b+a \quad \text{за све} \quad a,b\in\mathbb{N}.$$

Прелазом од конкретних природних бројева ка променљивим величинама изведена је генерализација горњих конкретних једнакости, а мисаоним одвлачењем општег од посебног уједно је изведена друга апстракција.

На овај начин применом генерализације (уопштавања) и апстраховања водимо ученике до открића закона комутативности за сабирање природних бројева, али и до појма променљиве величине, важне за појам функције.

Напомена. Сличним поступком ученици усвајају својство комутативности и асоцијативности операције сабирања у другим бројевним скуповима ($\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$), као и закон дистрибутивности множења према сабирању. Наравно, треба увек имати на уму да приказано апстраховање није доказивање, на основу неколико конкретних једнакости не следи општа једнакост.

Закон комутативности за сабирање природних бројева је већ добијен уопштавањем и апстраховањем, међутим тај се поступак може наставити. Наиме, у том закону се још увек ради о конкретном скупу ($\mathbb{N}$) и конкретној операцији ($+$). Међутим, постоје и други скупови и опреције дефинисане за њихове елементе које имају исто својство.

ПРИМЕР 1.6. *Закон комутативности.*

Сабирање целих бројева $+$, множење рационалних бројева $\cdot$, сабирање вектора $+$, унија скупова $\cup$, пресек скупова $\cap$, конјункција исказа $\wedge$, дисјункција исказа $\vee$ су неке од операција које су комутативне (за које важи закон комутативности):

$$
\begin{aligned}
a+b=b+a &\quad \text{за све} \quad a,b\in\mathbb{C},\\
a\cdot b=b\cdot a &\quad \text{за све} \quad a,b\in\mathbb{Q},\\
\vec{v}_1+\vec{v}_2=\vec{v}_2+\vec{v}_1 &\quad \text{за све векторе равни } \vec{v}_1,\vec{v}_2,\\
A\cup B=B\cup A &\quad \text{за све скупове } A,B,\\
A\cap B=B\cap A &\quad \text{за све скупове } A,B,\\
A\wedge B=B\wedge A &\quad \text{за све исказе } A,B,\\
A\vee B=B\vee A &\quad \text{за све исказе } A,B.
\end{aligned}
$$

Све су то конкретне операције у конкретним скуповима. Прелазом од конкретних скупова ка променљивом скупу G и конкретних операција ка променљивој операцији $\circ$, која у скупу G има опште битно својство тих операција, изводи се ово уопштавање и нова апстракција и открива општи појам комутативне операције.

Опреција $\circ$ дефинисана на скупу G је комутативна операција ако је

$$a\circ b=b\circ a \quad \text{за све} \quad a,b\in G.$$

Математика има широку примену у многим подручјима живота и многим наукама. Ако се примена односи на конкретан проблем или појаву, изграђује се његов апстрактни математички модел. Физика је наука у којој је примена математике врло честа, а једна од веза математике и физике је појам функције. опишимо један такав пример.

Пример 1.7. *Линеарна функција.*

Зависност брзине тела од времена, зависност линераног растезање металног штапа при загревању од температуре, зависност запреминског растезања чврстих тела при загревању од топлоте, веза Целзиусових и Фаренхајтових степени дати су редом релацијама:

$$
\begin{aligned}
v_t &= v_0 + at,\\
l_r &= l_0 + bT,\\
V_t &= V_0 + cT,\\
T_F &= \frac{9}{5}T_C + 32.
\end{aligned}
$$

Није тешко уочити оно опште у овим релацијама и одвојити га од њиховог конкретног садржаја. Апстраховањем од конкретних појава и појмова долазимо до функције $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. *Према томе, линеарна функција је апстрактан математички модел који обухвата све наведене конкретне појаве. Проучавањем функције* $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, *њених својстава и њеног графика издваја се оно опште што је својствено не само појавама описаним горњим релацијама, него и многим другим. Добијени резултати проучавања могу се након тога лако пренети на конкретну ситуацију.*

Ради нешто потпунијег увида у примену математике у физици наводимо још неке физичке појаве и одређене функције као њихове апстрактне математичке моделе:

- слободни пад – квадратна функција;
- наизменична струја – тригонометријске функције;
- закон радиоактивног распада – експоненцијална функција.

На крају још неколико напомена.

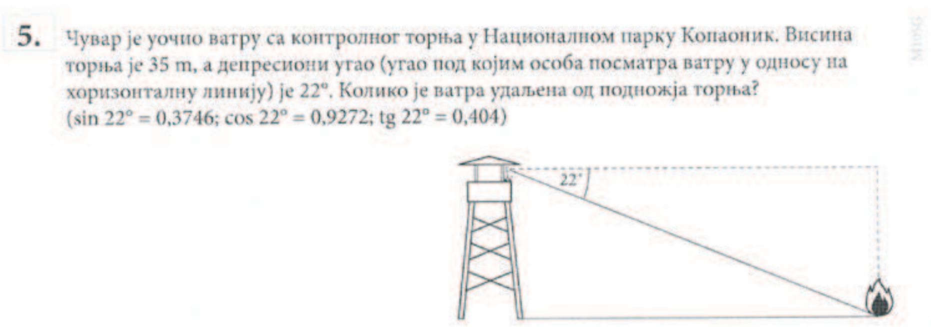
Описани начин конструкције апстрактних модела конкретних објеката у процесу спознаје уједно је и добар методички начин увођења ученика у круг идеја који представља предмет проучавања математике.

При примени апстракције у другим подручјима људске делатности треба пазити колико далеко смеју ићи поједностављење и апстрахирање, који се детаљи могу занемарити и на које мање ефекте не треба обраћати пажњу. С једне стране, апстрактни математички модел на који се своди конкретни проблем не сме бити исувише сложен, а с друге стране не сме се претерано поједноставити његова конкретна страна. Није увек лако наћи границу до које се сме ићи.

Поред свих лоших страна апстракција има и једну лошу страну: удаљавање од неких својстава објекта, неважних за одређено проучавање, чиме се може изгубити целовита слика објекта.

Настави математике у нашој земљи се често замера претерана академска апстрактност и недостатак решавања конкретних проблема који би указали и на употребну вредност математичких знања. Имајући то у виду предлажемо да се чешћ задају задаци чији саставни део решења је прављење одговарајућег апстрактног модела. Овим се подстиче и развој мишљења код ученика, али и мотивација за учење. За овај приступ се залажу и савремени теоретичари који у први план стављају методи активног и проактивног учења, као и „ problem solving" стратегије у настави (проблемска и хеуристичка настава).

Најбољи пример за изнето запажање је забрињавајуће лош резултат при решавању задатка датог на слици 1.2 (задатак је био дат на тестирању које је спроведено у оквиру израде стандарда за крај средњошколског образовања).


5. Чувар је уочио ватру са контролног торња у Националном парку Копаоник. Висина торња је 35 m, а депресиони угао (угао под којим особа посматра ватру у односу на хоризонталну линију) је 22°. Колико је ватра удаљена од подножја торња?
(sin 22° = 0,3746; cos 22° = 0,9272; tg 22° = 0,404)

Слика 1.2.

Задатак су решавали ученици завршних разреда средњих школа, а у табели 1.1 су дати проценти ученика, по типовима школа, који су тачно решили задатка.

тип школе	гим. ПМ	гим. О	гим. ДЈ	сс 4	сс 3
тачна решења	32%	13%	4%	2%	0%

Табела 1.1.