УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО–МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

МЕТОДИКА НАСТАВЕ АНАЛИЗЕ
5. недеља рада на даљину

КРАГУЈЕВАЦ
2020

Глава 1

Генерализација и специјализација

Генерализација и специјализација спадају у основне методе научних истраживања и једна другој су супротне.

Реч генерализација је настала од латинске речи *generalisatio*, што значи уопштавање, уопштеност, и према речи *generalis*, што значи општи, свеопшти, свеобухватан, најважнији, врховни, главни.

Реч специјализација је настала од латинске речи *specialis*, што значи посебан, особит, нарочит, одређен, тачан, појединачан.

Генерализација или уопштавање је прелазак са посматрања датог скупа објеката на посматрање његовог надскупа. Полазећи од неког појма коме је придружен одређени скуп објеката, његов обим и утврђује се неко својство свих елемената датог скупа. Затим се посматра општији појам и својство преноси на све елементе добијеног надскупа или се утврђује општије својство. Наравно да није унапред јасно да ли ће при том преношењу својство остати сачувано, па се оно обавезно мора доказати за све елементе надскупа. Дакле, генерализације или уопштавање је метод којим се изграђују општији појмови или општија тврђења.

ПРИМЕР 1.1. *Најчешћи прелази са скупа у надскуп у школској математици су следећи:*

- $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$; $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$; $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$;

- *једнакостранични троуглови → једнакокраки троуглови;*
- *правоугли троуглови → троуглови;*
- *квадрати → правоугаоници;*
- *квадрати → ромбови;*
- *правоугаоници → паралелограми;*
- *трапези → четвороуглови;*
- *троуглови → многоуглови;*
- *четвороуглови → многоуглови;*
- *правилни многоуглови → многоуглови;*
- *коцке → квадри;*
- *квадри → правоугли паралелепипеди;*
- *тетраедри → n-тостране пирамиде;*
- *тригонометријске функције оштрог угла → тригонометријске функције произвољног угла.*

На основу наведеног списка прелаза видимо да се прелази обично врше у „најближи" надскуп. Они истовремено и указују на уопштавање одређених појмова. На пример, појам рационалног броја је уопштење појма целог броја, појам паралелограма је уопштење појма правоугаоника, појам квадра је уопштење појма коцке, итд. Такође, видимо да неки појмови имају и више уопштења. Нпр. појам ромба и појам правоугаоника су уопштења појма квадрата.

Дати списак прелаза открива још неке важне чињенице. Ако посматрамо прелазе *троуглови → многоуглови* и *тетраедри → n-тостране пирамиде* видимо да њих карактерише замена броја 3 било којим природним бројем n. Последњи прелаз са списака представља одбацивање ограничења $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ за посматрани угао α.

На основу свих прелаза издвајају се два основна начина генерализације:

(а) замена константе променљивом;

(б) одбацивање ограничења.

Специјализација је прелаз са посматрања датог скупа објеката на одговарајуће разматрање његовог подскупа. Специјализација се најчешће примењује када је неко опште својство добијено генерализацијом већ доказано. Тада се специјализацијом добија једноставније својство. То својство више не треба доказивати, јер је његов доказ обухваћен општим доказом. У школској математици срећемо такву специјализацију.

Најчешћи прелази са скупа у подскуп у школској математици су у обратним смерова од прелаза које смо набројали за генерализацију. Прелази се обично врше у „најближи" подскуп.

Издвајамо два основна начина специјализације:

(а) замена промењиве константом;

(б) увођење ограничења.

Из свега до сада реченог јасно је да генерализација и специјализација имају широку примену у настави математике. У нижим разредима основне школе наставник помоћу конкретних објеката уводи нове појмове, описује њихова својства, а онда изводи једноставније генерализације. Касније у школовању генерализације постају све сложеније и овај метод постаје важан и богат извор нових сазнања.

Генерализација, односно прелаз са конкретног и појединачног ка општем, је сложен мисаони процес. Психолози указују на чињеницу да постоје ученици који тешко савладавају тај прелаз, што додатно обавезује наставника математике да својим методичким приступом тај прелаз учини што лакшим. С друге стране, прелаз који се врши у специјализацији води до једноставнијих математичких чињеница и омогућава ученицима боље разумевање наставних садржаја.

ПРИМЕР 1.2. 1) *Закони комутативности, $a+b=b+a$ и $ab=ba$, асоцијативности, $a+(b+c)=(a+b)+c$ и $a(bc)=(ab)c$, као и дистрибутивности множења према сабирању, $a(b+c)=ab+ac$, се најпре успостављају у скупу природних бројева и то тако што се на почетку посматрају конкретни примери, а затим изводе генерализације. Методом генерализације се ти закони постепено из скупа $\mathbb{N}$ преносе у шире скупове $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.*

2) *Операције са степенима имају следећа својства:*

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad a^n : a^m = a^{n-m},$$
$$(ab)^n = a^n \cdot b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Ова својства се најпре доказују за експоненте из скупа $\mathbb{N}$*, а затим се доказује да при прелазима* $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *и* $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ *својства остају сачувана.*

Пример 1.3. *Формула* $S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$ *за збир унутрашњих углова* n*-тоугла је генерализација формуле за збир унутрашњих углова троугла.*

С друге стране, формула да је збир углова у троуглу 180° *је специјализација формуле за збир унутрашњих углова троугла и добија се занемом промељиве* n *константом* 3*.*

Пример 1.4. *Формула* $h = \frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$ *за дужину висине која одговара основици дужине* a *у једнакокраком троуглу код ког је крак дужине* b *је генерализација формуле* $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ *за дужину висине једнакостраничног троугла.*

С друге стране, скуп једнакостраничних троуглова је подскуп скупа једнакокраких троуглова. То значи да све што важи за једнакокраке троуглове важи и за једнакостраничне троуглове. Код једнакостраничног троугла је $b = a$*, па специјализацијом из формуле за висину једнакокраког троугла добијамо формулу за висину једнакостраничног троугла.*

Напомена. Ако се у настави најпре изводи формула за висину једнакостраничног троугла, онда је формула за висину једнакокраког троугла њена генерализација и њен доказ осигурава аналогија. Ако се међутим изведе прво формула за висину једнакокраког троугла, онда формулу за висину једнакостраничног троугла није потребно аналогно изводити, већ она директно следи специјализацијом $b = a$. Коју ће формулу наставник прво извести зависи од његове креативности. **Пожељно је указати ученицима оба приступа и тако им указати на генерализацију и специјализацију.**

Пример 1.5. 1) *Теорема да је централни угао круга два пута већи од периферијског над истом тетивом је генерализација теореме о периферијском углу над пречником.*

С друге стране, специјализацију тврђења да је централни угао круга два пута већи од периферијског над истом тетивом добијамо када за тетиву изаберемо пречник кружнице, тј. изаберемо централни угао мере 180°*. На тај начин специјализацијом добијамо тврђење да је сваки периферијски угао над пречником кружнице прав.*

2) *Формула* $d = \sqrt{a^2+b^2}$ *за дужину дијагонале правоугаоника је генерализација формуле* $d = a\sqrt{2}$ *за дужину дијагонале квадрата, а формула*

$D = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ *за дужину дојагонале квадра је генерализација формуле* $D = a\sqrt{3}$ *за дужину дијагонале коцке.*

Полазећи од формула за дужине дијагонале правоугаоника, специјализацијом за $b = a$ *добијамо формулу за дужину дијагонале квадрата, а полазећи од формуле за дужину дијагонале квадра специјализацијом за* $b = c = a$ *добијамо формулу за дужину дијагонале коцке.*

3) *Косинусна теорема* $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos\gamma$ (*где су* a, b, c *дужине страница, а* γ *мера угла између страница дужина* a *и* b) *је генерализација Питагорине теореме,* $c^2 = a^2 + b^2$ *у скупу правоуглих троуглова.*

Полазећи од косинусне теореме, специјализацијом за $\gamma = 90°$, *добијамо Питагорину теорему.*

Пример 1.6. *Површина троугла.*

Ако су a, b *и* c *дужине страница троугла, његова површина* P *се може израчунати применом Херонове формуле:*

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Како ова формула важи за произвољан троугао, она важи и за све специјалне случајеве. Специјализацијом ћемо из ове формуле извести формуле за површину једнакостраничног, једнакокраког и правоуглог троугла. Херонова формула се може записати у следећем облику:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{(a+b)^2-c^2}{4}\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{4}} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(c^2-a^2-b^2)^2}. \end{aligned}$$

Приметимо да је добијени облик Херонове формуле посебно погодан када се дужине страница троугла изражавају помоћу корена. Тај облик је погодан и за специјализације које нас интересују.

1) *Површина једнакостраничног троугла. У овом случају је* $b = c = a$ *и специјализација даје*

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2a^2-(a^2-a^2-a^2)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{3a^4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

2) *Површина једнакокраког троугла. У овом случају је $c = b$ и та специјализација даје*

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (b^2 - a^2 - b^2)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - a^4}$$
$$= \frac{1}{4}a\sqrt{4b^2 - a^2} = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}.$$

Приметимо овде формулу за висину једнакокраког троугла која одговара основици.

3) *Површина правоуглог троугла. Сада је $c^2 = a^2 + b^2$, па та специјализација даје*

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2} = \frac{ab}{2}.$$

Напомена. Јасно је да ученици пре извођења Херонове формуле већ знају формуле за израчунавање површине специјалних троуглова. **Зато Хeронову формулу треба извести као леп пример генерализације, а након тога искористити специјализацију за проверу и утврђивање раније стеченог знања.**

У настави математике ученици се срећу са великим бројем правила. Из методичких разлога добро је најпре доказати таква правила за два броја, затим проширити на више од два броја, па онда прећи на њихову примену. Следећи корак је генерализација тих правила на n бројева. Обратно, специјализацијом из добијених формула, најчешће узимањем да су свих n бројева међусобно једнаки, добијамо нова правила.

Пример 1.7. **1)** *Полазећи од правила за множење степена $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, најпре се проширује на производ три степена: $a^m \cdot a^n \cdot a^p = (a^m \cdot a^n) \cdot a^p = a^{m+n} \cdot a^p = a^{m+n+p}$, а затим генерализацијом на опште правило:*

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \ldots \cdot a^{m_n} = a^{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

Специјализацијом се за $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$ добија

$$a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m = a^{m+m+\cdots+m} = a^{mn},$$

односно, ново правило за степен степена: $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$.

2) *Полазећи од правила $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, које важи за произвољне ненегативне бројеве a и b, најпре га проширујемо на три ненегативна броја: $\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$. Сада је лако извести* *и следећу генерализацију. Ако је n природан број већи од 1 и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ненегативни бројеви, тада је*

$$\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a_n}.$$

Специјализација $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a \geqslant 0$ даје правило за степеновање корена: $\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$.

Слично, правило за множење два k-та корена

$$\sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[k]{ab}, \quad k \in \mathbb{Q},\ k \neq 0,\ a, b \geqslant 0,$$

проширујемо на производ три k-та корена, а затим генерализацијом на правило:

$$\sqrt[k]{a_1}\, \sqrt[k]{a_2} \cdots \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

које важи за $k \in \mathbb{Q}$, $k \neq 0$, и све ненегативне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Специјализацијом $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a \geqslant 0$ добијамо правило за степеновање k-тог корена: $\left(\sqrt[k]{a}\right)^n = \sqrt[k]{a^n}$.

3) *Правило за логаритам производа*

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad a, x, y > 0,\ a \neq 1,$$

проширујемо на

$$\log_a(xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z \quad a, x, y, z > 0,\ a \neq 1,$$

а затим на опште правило:

$$\log_a(x_1 x_2 \cdots x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \cdots + \log_a x_n$$

за све $a > 0$, $a \neq 1$ и $x_k > 0$, $k = \overline{1, n}$.

Специјализација $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ даје ново правило

$$\log_a x^n = n \log_a x \quad a, x > 0,\ a \neq 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Даље се могу примењивати нове генерализације тако што се за експоненте n користе прелази $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.

У следећим примерима показујемо како се откривају генерализације. **Било би добро овакве задатке давати бар бољим ученицима, јер се таквим примерима усмерава мишљење ученика на овај важан мисаони поступак.**

Пример 1.8. *Уопштење Питагорине теореме.*

Формулишимо Питагорину теорему у следећем облику: површина квадрата конструисаног над хипотенузом правоуглог троугл једнака је збира површина квадрата конструисаних над катетама.

Како да генерализујемо ово тврђење? Да ли уместо квадрата над страницама правоуглог троугла могу бити неки други многоуглови? Какве особине ти многоуглови морају да задовољавају?

Уочимо с једне стране да су сви квадрати међусобно слични четвороуглови, а с друге стране да су квадрати правилни многоуглови. Те две чињенице указују на три погодна прелаза:

- *квадрати* $\to$ *слични четвороуглови,*
- *квадрати* $\to$ *правилни многоуглови,*
- *квадрати* $\to$ *слични многоуглови.*

Тим прелазима добијамо три генерализације Питагорине теореме.

1. *Ако су четвороуглови над страницама правоуглог троугла међусобно слични, онда је површина четвороугла конструисаног над хипотенузом једнака збиру површина четвороуглова конструисаних над катетама.*

2. *Површина правилног* n*-тоугла конструисаног над хипотенузом правоуглог троугла једнака збиру површина правилних* n*-тоуглова конструисаних над катетама.*

3. *Ако су многоуглови над страницама правоуглог троугла међусобно слични, онда је површина многоугла конструисаног над хипотенузом једнака збиру површина многоуглова конструисаних над катетама.*

Лако се види да су све три генерализације тачне. Доказати!

Пример 1.9. *Дељивост збира кубова три узастопна природна броја.*

Означимо са $n, n+1$ *и* $n+2$ *три узастопна природна броја и посматрајмо збир њихових кубова:* $s(n) = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$. *Замењујући неколико тројки природних бројева добијамо да је*

$$
\begin{aligned}
s(1) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6, \\
s(2) &= 2^3 + 3^3 + 4^3 = 99 = 11 \cdot 9, \\
s(3) &= 3^3 + 4^3 + 5^3 = 216 = 24 \cdot 9 = 12 \cdot 18, \\
s(11) &= 11^3 + 12^3 + 13^3 = 5256 = 584 \cdot 9 = 36 \cdot 146, \ldots .
\end{aligned}
$$

Видимо да су у овим примерима сви збирови дељиви са 9.

Приметимо да, такође, важи:

$$\begin{aligned} 1+2+3=6, &\quad 6|s(1);\\ 2+3+4=9, &\quad 9|s(2);\\ 3+4+5=12, &\quad 12|s(3);\\ 11+12+13=36, &\quad 36|s(11). \end{aligned}$$

Ово сугерише следеће генерализације.

1. *Збир кубова три узастопна природна броја дељив је увек бројем* 9.

2. *Збир кубова три узастопна природна броја дељив је збиром тих бројева.*

Обе генерализације су тачне! Доказати!

ПРИМЕР 1.10. *На страницама* BC, CA *и* AB *једнакостраничног троугла* ABC *дате су тачке* A_1, B_1 *и* C_1, *такве да је* $BA_1 = CB_1 = AC_1 = \frac{1}{3}AB$. *Тада праве* AA_1, BB_1 *и* CC_1 *одређују једнакостранични троугао* KLM *и за површине важи:* $P_{\triangle KLM} = \frac{1}{7}P_{\triangle ABC}$.

Нећемо се задржавати на доказу овог тврђења, већ размишљамо о могућим генерализацијама.

Можемо константу 3 *заменити променљивом* n (*где је* n *природан број већи од* 3) *и можемо једнакостраничан троугао заменити произвољним троуглом. На тај начин добијамо следеће генерализације.*

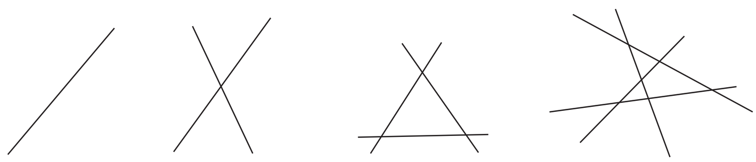
1. *Нека је* ABC *једнакостраничан троугао и нека су тачке* A_1, B_1 *и* C_1 *редом на страницама* BC, CA *и* AB, *такве да је* $BA_1 = CB_1 = AC_1 = \frac{1}{n}AB$. *Тада праве* AA_1, BB_1 *и* CC_1 *одређују једнакостранични троугао* KLM *и за површине важи:* $P_{\triangle KLM} = \frac{n^2-4n+4}{n^2-n+1}P_{\triangle ABC}$.

2. *Нека је* ABC *произвољан троугао и нека су тачке* A_1, B_1 *и* C_1 *редом на страницама* BC, CA *и* AB, *такве да је* $BA_1 = CB_1 = AC_1 = \frac{1}{3}AB$. *Тада праве* AA_1, BB_1 *и* CC_1 *одређују троугао* KLM *за који важи:* $P_{\triangle KLM} = \frac{1}{7}P_{\triangle ABC}$.

3. *Нека је* ABC *произвољан троугао и нека су тачке* A_1, B_1 *и* C_1 *редом на страницама* BC, CA *и* AB, *такве да је* $BA_1 = CB_1 = AC_1 = \frac{1}{n}AB$. *Тада праве* AA_1, BB_1 *и* CC_1 *одређују троугао* KLM *за који важи:* $P_{\triangle KLM} = \frac{n^2-4n+4}{n^2-n+1}P_{\triangle ABC}$.

Пример 1.11. *Праве у равни.*

Одредимо на колико делова n правих у равни, од којих се сваке две секу и никоје три не пролазе кроз исту тачку, деле раван. Обележимо тај број са $F_2(n)$ и одредимо првих неколико вредности (види слику 1.1).



Слика 1.1.

Видимо да је $F_2(1) = 2$, $F_2(2) = 4$, $F_2(3) = 7$, $F_2(4) = 11$. Можемо их записати у облику

$$F_2(1) = \frac{1 \cdot 2}{2} + 1, \quad F_2(2) = \frac{2 \cdot 3}{2} + 1, \quad F_2(3) = \frac{3 \cdot 4}{2}, \quad F_2(4) = \frac{4 \cdot 4}{2} + 1,$$

што сугерише следећу генерализацију:

$$F_2(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Ова формула је тачна и лако се доказује уочавањем рекурентне релације $F_2(n) = F_2(n-1) + n$, коју није тешко уочити.

У претходном примеру није било једноставно уочити правилност која нас доводи до генерализације. Међутим, некада се из почетних вредности може лако уочити правилност која доводи до генерализације која није тачна, као што је то случај у следећим примерима.

Пример 1.12. *Равни у простору.*

За равни у простору кажемо да су у општем положају ако међу њима нема паралелних и ако никоје четири не пролазе кроз исту тачку. Посматрајмо n равни које су у општем положају у простору и одредимо на колико делова оне деле простор. Обележимо тај број са $F_3(n)$. Лако се уочава да је $F_3(1) = 2$, $F_3(2) = 4$, $F_3(3) = 8$, што сугерише генерализацију $F_3(n) = 2^n$. Међутим, то није тачно. Наиме, већ четврта раван дели 7 од претходних 8 делова на два дела, па је $F_3(4) = 8 + 7 = 15$. Тачна формула је

$$F_3(n) = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}.$$

ПРИМЕР 1.13. *Посматрајмо вредности Ојлерове функције*

$$f(x) = x^2 + x + 41$$

на скупу ненегативних целих бројева. Првих неколико вредности су: $f(0) = 41$, $f(1) = 43$, $f(2) = 47$, $f(3) = 53$, $f(4) = 61$, $f(5) = 71$, $f(6) = 83$. *Све добијене вредности су прости бројеви. То сугерише генерализацију да су вредности функције f прости бројеви за све ненегативне целе бројеве. Међутим, то није тачно. Прости су и бројеви* $f(7)$, $f(8)$, $\ldots$, $f(39)$, *али је* $f(40) = 1681 = 41^2$ *сложен број, као и* $f(41) = 1763 = 41 \cdot 43$. *Интересантно је да је* $f(42) = 1847$ *прост број.*

ПРИМЕР 1.14. *Фермаови бројеви* $F(n) = 2^{2^n} + 1$ *су редом* $F(0) = 3$, $F(1) = 5$, $F(2) = 17$, $F(3) = 257$, $F(4) = 65537$. *Сви ови бројеви су прости, што сугерише генерализацију да су сви Фермаови бројеви прости. Међутим, Ојлер је доказао да је* $F(5) = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$.

Из претходних примера јасно уочавамо значај доказивања генерализација. Често је и само доказивање или оповргавање генерализација веома тешко. Код оповргавања је довољно наћи бар један контрапример.

ПРИМЕР 1.15. *У многим збиркама задатака из математике где су дати задаци за вежбање принципа математичке индукције су дати задаци у којима треба доказати да за сваки природан број n важи једнакост, где је са леве стране нека коначна сума. Ту је десна страна једнакости такође позната и треба индукцијом доказати да једнакост важи. Међутим, остаје питање како добити те једнакости.*

1. *Када је у питању сума* $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)$, *довољно је знати збир првих n природних бројева:* $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, *што је ученицима познато. Сада је*

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$$

Овакав метод ученицима, посебно у основној школи, може бити превише апстрактан. Могуће је кроз конкретне примере наслутити општу формулу. Тако из

$$1 = 1^2, \quad 1+3 = 4 = 2^2, \quad 1+3+5 = 9 = 3^2, \quad 1+3+5+7 = 16 = 4^2,$$

долазимо до генерализације $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$. *Наравно, ова генерализација се мора доказати.*

Приметимо да код сума код којих су општи чланови полиноми првог степена по k, збирови су полиноми другог степена по n.

2. *Код суме* $\sum_{k=1}^{n}k^2$ *су општи чланови другог степена, па можемо претпоставити да су збирови полиноми трећег степена по* n. *Општи облик полинома трећег степена по* n *је* An^3+Bn^2+Cn+D, *где коефицијенте* A,B,C,D *одређујемо из почетних услова које добијамо рачунајући одговарајуће суме за* $n=1,2,3,4$. *Тако за суму* $\sum_{k=1}^{n}k^2$ *добијамо систем једначина*

$$\begin{aligned}A+B+C+D&=1,\\ 8A+4B+2C+D&=5,\\ 27A+9B+3C+D&=14,\\ 64A+16B+4C+D&=30.\end{aligned}$$

Решење овог система је $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{6}$, $D=0$, *па је*

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ову формулу треба доказати математичком индукцијом.

3. *Један од начина одређивања неких сума је коришћење претходно изведених збирова. На пример,*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(3k+1)&=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\\ &=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{n(n+1)}{2}\\ &=n(n+1)^2.\end{aligned}$$

4. *Погледајмо вредности суме* $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ *за првих неколико природних бројева:*

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3},\quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4},\ldots$$

Наслућујемо да је

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Формулу коју смо добили генерализацијом доказујемо математичком индукцијом.

Може се и лакше доказати разлагањем у парцијалне разломке:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Десна страна ове суме је количник два полинома првог степена.

5. *Суме*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} \quad \textit{и} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

се могу записати у облику

$$\frac{An+B}{Cn+D},$$

па се методом неодређених коефицијената долази до одговарајућих формула. Остављамо студенту за домаћи рад!