Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет

Маринко Ж. Тимотијевић

Комплексна анализа

СКРИПТА

Крагујевац
2020

Садржај

Предговор

Ова скрипта је настала као резултат напора да се у време ванредног стања студентима што више олакша усвајање градива из предмета Комплексна анализа. Скрипту треба користити упоредо са презентацијама и видео записима који ће током следећих месеци да буду објављивани на сајту Института.

Због ограниченог времена, скрипта је настала брзо. Аутор моли читаоце да имају разумевања према грешкама у тексту, и да сваку уочену грешку јаве мејлом на

timotijevicmarinko@yahoo.com.

1 Основни концепти комплексне анализе

Комплексни бројеви су пре свега настали као потреба да се конструише најмање алгебарски затворено поље које садржи подпоље изоморфно пољу реалних бројева. Најједноставнија конструкција коплексних бројева подразумева додавање тзв. „комплексне јединице” пољу реалних бројева односно елемента $i \in \mathbb{C}$ уз услов да је $i^2 = -1$ и извршити тзв. алгебарско затворење над добијеним елементима. На тај начин, поље комплексних бројева може да се представи у форми:

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

Иако најоптималнија по запису, ова форма представљања комплексних бројева није погодна за математичку анализу зато што нам не омогућава да искористимо већ стечена знања из Анализе, Топологије и осталих математичких дисциплина већ целу конструкцију морамо да радимо из почетка.

Отуда, да би убрзали процес структурирања знања комплексне анализе, поље комплексних бројева дефинишемо мало другачије.

1.1 Поље комплексних бројева

Како се на скупу комплексних бројева већ на почетку наслућује структура дводимензионалног Еуклидског простора, полазимо од следеће дефиниције.

Дефиниција 1.1. *Нека је $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ алгебра где је $\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ скуп комплексних бројева а $+$ и $\cdot$ су бинарне операције које су за произвољне $(x, z), (y, t) \in \mathbb{C}$ дефинисане са:*

$$(x, y) + (z, t) \overset{\text{Деф.}}{=} (x + z, y + t);$$
$$(x, y) \cdot (z, t) \overset{\text{Деф.}}{=} (xz - yt, xt + yz).$$

Као што видимо, овако дефинисан скуп комплексних бројева је ништа друго до класична Еуклидска раван што нам омогућава да познате особине Еуклидске равни пренесемо на скуп комплексних бројева.

Теорема 1.1. *Алгебарска структура $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ је поље које називамо поље комплексних бројева које садржи потполе $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ изоморфно пољу реалних бројева.*

Доказ: Аксиоме поља се врло једноставно проферавају и доказ остављамо читаоцима. Напомињемо да је неутрални елемент за сабирање у Абеловој гупи $(\mathbb{C}, +)$ елемент $\mathbf{0} = (0, 0)$ док је неутрални елемент за множење у Абеловој групи $(\mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\}, \cdot)$ елемент $\mathbf{1} = (1, 0)$. Такође, сваки елемент Абелове групе $(x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$ има инверзни елемент $(x, y)^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2}(x, -y)$.

Пресликавање $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ дато са $\varphi(x) = (x, 0)$ је изоморфизам поља. $\square$

Овакав форма комплексних бројева нам омогућава да сабирање комплексних бројева визуелизујемо као сабирање раванских вектора и тако искористимо сву расположиву геометријску интуицију.

Да би проверили да ли смо на овај начин добиили поље комплексних бројева на које смо навикли, у новоформираном пољу решимо једначину $z^2 = -\mathbf{1}$ где је $z = (x, y)$, $\mathbf{1} = (1, 0)$. Наведена једначина сада има форму:

$$(x, y) \cdot (x, y) = -(1, 0);$$
$$(x^2 - y^2, 2xy) = -(1, 0);$$

За $y = 0$ добијамо једначину $x^2 = -1$ која нема решења у пољу реалних бројева док, за $x = 0$ добијамо $y^2 = 1$ тј. $y = 1$ или $y = -1$. Дакле, једначина $z^2 = -\mathbf{1}$ у пољу $\mathbb{C}$ има два решења и то:

$$(0, 1), \quad (0, -1).$$

Ако са $i = (0, 1)$ означимо прво решење једначине, добијамо следећу теорему.

Теорема 1.2. *Поље комплексних бројева је изоморфно пољу* $(\mathbb{C}_{\mathcal{A}}, +, \cdot)$ *где је* $\mathbb{C}_{\mathcal{A}} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ *а операције* $+$ *и* $\cdot$ *представљају стандардно множење бинома са реалним коефицијентима уз услов* $i^2 = -1$.

Доказ: Пресликавање $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_{\mathcal{A}}$ дато са $\varphi(x, y) = x + iy$ је изоморфизам. □

Дакле, комплексне бројеве можемо да посматрамо или као векторе Еуклидске равни или као биноме са реалим коефицијентима уз услов за комплексну јединицу. Да би избегли компликације са ознакама, поље $\mathbb{C}_{\mathcal{A}}$ такође означавамо са $\mathbb{C}$. Ако уведемо функције $\mathrm{Re}, \mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ које називамо редом реални и имагинарни део комплексног броја, произвољан комплексан број $z \in \mathbb{C}$ можемо да запишемо на два начина:

$$z = \mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z, \text{ алгебарски облик;}$$
$$z = (\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z), \text{ векторски облик.}$$

Комплексне бројеве интерпретиране у алгебарској форми називамо поље комплексних бројева а комплексне бројеве интерпретиране у виду вектора називамо комплексна раван.

Иако је алгебарска форма комплексног броја свакако једноставнија, вектораска форма нам, поред једноставније анализе у коју ћемо да се уверимо нешто касније, омогућава и врло лепу геометријску интерпретацију операције множења комплексних бројева. Уређени пар $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ можемо у тзв. поларним координатама да представимо са

$$z = \rho(\cos\varphi, \sin\varphi) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \text{ тригонометријски облик;}$$

где је $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ такозвани модуо комплексног броја а φ је угао који за-

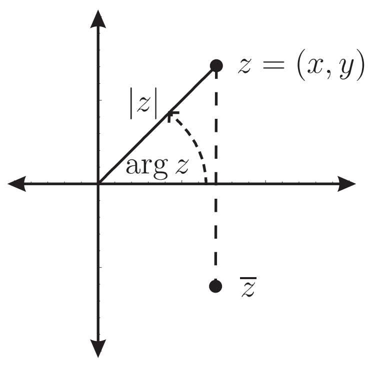


График 1: Векторска форма комплексног броја.

клапа позитивни до $x-$осе Еуклидске равни и вектор (x, y) који се назива аргумент комплексног броја у ознаци $\arg z$. При том, угао $\varphi = \arg z$ се рачуна тако да вектори $(1, 0)$ и (x, y) буду позитивно оријетисани (смер од вектора $(1, 0)$ до (x, y) је супротан кретању казаљке на сату). За даљу анализу, биће значајан и коњуговани комплексни број комплексном броју $z = x + iy$ који је облика $\overline{z} = x - iy$. Сви уведени концепти су илустровани на Графику 1, приметимо да множење комплексног броја позитивним реалним бројем не утиче на аргумент.

Сада наводимо неколико особина наведених карактеристика комплексних бројева.

Теорема 1.3. *У пољу комплексних бројева, за произвољне* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *важи:*

(1) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2, \quad \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$*;*

(2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2, \quad |z|^2 = z\overline{z}$*;*

(3) $|\overline{z}| = |z|, \quad \arg \overline{z} = -\arg z$*;*

(4) $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$ *па је* $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$, $\arg z^{-1} = -\arg z$ *за све* $z \neq 0$*;*

(5) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$*;*

(6) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$ *где је* $z_2 \neq 0$.

Доказ: Доказ особина **(1)** – **(4)** остављамо читаоцима.

Нека комплексни бројеви $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ имају тригонометријске форме

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

тада, кориситећи адиционе формуле за косинус и синус збира углова добијамо

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)$$

одакле одмах следи особина **(5)** а особина **(6)** следи из особине **(4)**. $\square$

Дакле, ако комплексан број $z \in \mathbb{C}$ помножимо комплексним бројем $a \in \mathbb{C}$ вршимо ротацију броја z за угао $\arg a$ у позитивном смеру око координатног почетка као и хомотетију (у односу на координатни почетак) са коефицијентом $|a|$.

Последица Теореме 1.3 (особина **(5)**) је позната Моаврова[1] формула по којој је за произвољно $n \in \mathbb{N}$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Сада се осврћемо на кореновање у скупу компелскних бројева. Знамо да у скупу реаних бројева једначина $x^2 = a$ за позитивно a има два решења $x = \sqrt{a}$ и $x = -\sqrt{a}$. Да би квадратни корен описали као функцију, по договору, претпостављамо да је у скупу реалних бројева $\sqrt{a}$ позитивна величина. Међутим, у скупу компелскних бројева, због недостатка уређења међу комплексним бројевима, проблем дефинисања корена као функције је знатно сложенији. Штавише у Поглављу 7 ћемо да докажемо да $n-$ти корен не може ни да буде дефинисан као функција на целом скупу комплексних бројева већ уводимо један потпуно нови математички концепт тзв. „вишезначних функција”.

Следећа теорема добро илуструје проблематичност комплексног корена.

Теорема 1.4. *Нека је* $a \in \mathbb{C}$ *и* $a \neq 0$. *За произвољно* $n \in \mathbb{N}$, *једначина* $z^n = a$ *има у скупу комплексних бројева тачно* n *различитих решења и то:*

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\arg a + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg a + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

[1] Abraham de Moivre 1667-1754, француски математичар.

Доказ: Лако се доказује да су комплексни бројеви z_1 и z_2 у тригонометријском облику једнаки акко је $|z_1| = |z_2|$ и $\arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi$ за неко $k \in \mathbb{Z}$. Тада, једнакост $z^n = a$ по особини **(5)** Теореме 1.3 постаје:

$$\begin{aligned} |z^n| &= |a|, & \arg z^n &= \arg a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ |z|^n &= |a|, & n \arg z &= \arg a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ |z| &= \sqrt[n]{a}, & \arg z &= \frac{\arg a + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

Како у комплексној равни постоји тачно n различитих комплексних бројева облика $z_k = \sqrt[n]{|a|}\big(\cos\frac{\arg a+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg a+2k\pi}{n}\big)$ и то за $k = 0, 1, \ldots, n-1$, ови бројеви су решења тражене једначине. □

Приметимо да због геометрије множења комплексних бројева, сва решења једначине $z^n = a$ се добијају ротацијом једног решења око координатног почетка за углове $\frac{2k\pi}{n}$, $k = 1, \ldots, n-1$. То значи да сва решења једначине $z^n = a$ у компелскној равни формирају правилни $n-$тоугао са центром у координатном почетку као што илуструје график испод.

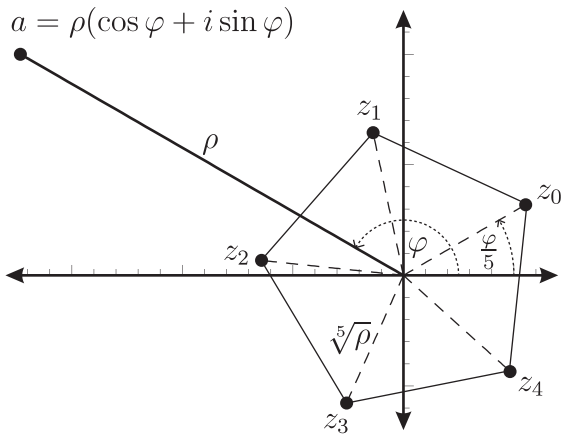


График 2: Решења једначине $z^5 = a$ формирају правилан петоугао.

На крају овог одељка, наводимо можда најпрактичнију тзв. експоненцијалну форму комплексног броја. У Поглављу 3.4 ће да буде доказана Ојлерова формула

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

која омогућава да се сваки број у комплексној равни представи са $z = |z|e^{i\arg z}$.

1.2 Компактификација комплексне равни

У овом одељку анализирамо проблем бесконачности у комплексној равни. Како на реалној правој постоје две бесконачности и то једна која је „позитивна" и друга која је „негативна", проста интуиција наводи на закључак да у комплексној равни постоји непребројиво много бесконачности где је свака одређена вектором датог правца и смера. Међутим, као што ћемо ускоро да видимо, недостатак уређења на скупу комплексних бројева имплицира и недостатак уређености међу бесконачностима што последично значи да у комплексној равни можемо да радимо само са једном бесконачношћу.

У ту сврху, описаћемо једну тополошку конструкцију, тзв. компактификацију Александрова[2] комплексне равни заједно са одговарајућом метриком на скупу комплексних бројева која ће да нам омогући практичан рад са комплексном бесконачношћу.

Посматрајмо комплексну раван у векторском облику али сада као потскуп тродимензионалног Еуклидског простора $\mathbb{R}^3$ односно нека је $\mathbb{C} = \{z = (x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ (практично, $x0y$ раван). Унутар простора $\mathbb{R}^3$ уочимо јединичну сферу са центром у координатном почетку $S^2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid ||(a, b, c)|| = 1\}$ и на њој „северни пол" односно тачку $N = (0, 0, 1)$. Сада дефинишемо пресликавање

$$p : \mathbb{C} \to S^2$$

на следећи начин, нека је слика тачке $z = (x, y, 0) \in \mathbb{C}$, тачка $\widetilde{z} = (a, b, c) \in S^2$ која представља тачку пресека полуправе Nz и сфере S^2 као што је илустровано на графику испод.

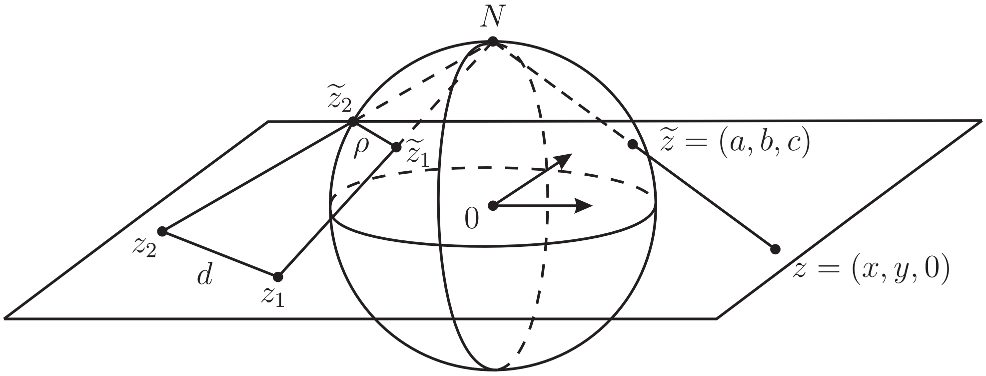


График 3: Стереографска пројекција Еуклидске равни на сферу.

Координате тачке $\widetilde{z}$ налазимо решавањем система једначина

$$a = tx, \quad b = ty, \quad c = 1 - t, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1 \tag{1.1}$$

одакле добијамо да је $t = \frac{2}{1+x^2+y^2} = \frac{2}{1+|z|^2}$ што имплицира да је

$$p(z) = \widetilde{z} = \left(\frac{2x}{1 + |z|^2}, \frac{2y}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}\right).$$

Приметимо да овако дефинисано пресликавање јесте „1-1" али да није „на" јер ни једна тачка $x0y$ равни неће да се преслика у северни пол. Решавањем система (1.1) по непознатим x и y добијамо инверзно пресликавање $p^{-1} : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ које има форму:

$$p^{-1}(\widetilde{z}) = p^{-1}(a, b, c) = \left(\frac{a}{1 - c}, \frac{b}{1 - c}, 0\right).$$

На овај начин, комплексној равни $\mathbb{C}$ можемо да додамо бесконачно далеку тачку као инверзну слику северног пола N стереографском пројекцијом p. Прецизније, нека је по дефиницији $\infty = p^{-1}(N)$. Тако добијамо једнотачкасту компактификацију Александорва комплексне равни $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ која представља тополошки простор хомеоморфан сфери S^2 (p је одговарајући хомеоморфизам).

[2] Павел Сергејевич Александров 1896-1982, руски математичар.

Да би избегли тополошку терминологију, на простору $\overline{\mathbb{C}}$ уводимо метрику која је сагласна са топологијом сфере S^2. Како је комплексна раван у суштини Еуклидска раван са додатном структуром множења, најприроднија метрика комплексне равни, таква да су сабирање и множење комплексних бројева непрекидне функције, је Еуклидска метрика која се за произвољне комплексне бројеве $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ рачуна са:

$$d(z_1, z_2) = d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |z_2 - z_1|.$$

Сада, што се тиче метрике на простору $\overline{\mathbb{C}}$, да би она била сагласна са топологијом односно метриком на сфери S^2, најприродније би било да искористимо растојање на сфери између стереографских пројекција тачака. Међутим, растојање на сфери би подразумевало налажење дужине лука дела кружнице одређене тачкама $\widetilde{z_1}$, $\widetilde{z_2}$ и координатним почетком. Да би избегли превелики рачун, искористићемо тополошки еквивалентну метрику на сфери а то је стандардна Еуклидска метрика између просторних тачака јер је топологија на сфери релативна у односу на Еуклидску топологију простора $\mathbb{R}^3$ (Дефиниција 1.13).

Дакле, компактификацију Александрова комплексне равни можемо да посматрамо као метрички простор $(\overline{\mathbb{C}}, \rho)$ где се растојање између коначних тачака $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ рачуна на следећи начин:

$$\rho(z_1, z_2) \overset{\text{Деф.}}{=} d(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2) = \frac{2|z_2 - z_1|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}}$$

док се растојање коначне тачке $z \in \mathbb{C}$ и бесконачне тачке $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ добија тако што се у дефиницији метрике ρ потражи гранична вредност када z_2 тежи бесконачности и добијамо да је

$$\rho(z, \infty) = \frac{2}{1 + |z|^2}.$$

При том, метрика ρ, као Еуклидско растојање тачака јединичне сфере је ограничена и увек мања или једнака од 2 као што се види на Графику 3.

Иако на први поглед врло интересантна, метрика ρ ће да нам буде од користи у једном врло специфичном случају.

Теорема 1.5. *Метрике d и ρ су еквивалентне на сваком ограниченом потскупу скупа $\mathbb{C}$.*

Доказ: Заиста, ако је $\mathcal{D}$ ограничен потскуп скупа $\mathbb{C}$, тада постоји $R > 0$ тако да за све $z \in \mathbb{C}$ важи $|z| < R$. То са друге стране имплицира да за произвољне $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ у разломку

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{2|z_2 - z_1|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}}$$

најмања могућа вредност имениоца је 1 (за $z_1, z_2 = 0$). Такође, вредност имениоца, због ограничености скупа $\mathcal{D}$, не може да буде већа од $\sqrt{1 + R^2}\sqrt{1 + R^2} = 1 + R^2$. Тако добијамо да је

$$\frac{2}{1 + R^2}|z_2 - z_1| \leq \rho(z_1, z_2) \leq 2|z_2 - z_1|$$

чиме је теорема доказана. □

Дакле, на ограниченим скуповима, потпуно је свеједно да ли користимо метрику d или метрику ρ

1.3 Топологија комплексне равни

У овом одељку описаћемо посебне фамилије скупова, сагласне уведеним метрикама, које ће да нам буду од значаја у наставку курса. Дотаћићемо се и пар једноставних концепата скуповне топологије који ће касније да нам омогуће врло значајне резултате.

Прво, у метричком простору $(\mathbb{C}, d)$ дефинишемо базне отворене скупове односно отворене и затворене кугле кугле са центром у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$ полупречника ϵ:

$$\mathcal{U}_{z_0}^{\epsilon} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \epsilon\}, \text{ отворена кугла;}$$
$$\overline{\mathcal{U}}_{z_0}^{\epsilon} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \epsilon\}, \text{ затворена кугла.}$$

Отворене кугле са центром у тачки z_0 ћемо надаље да називамо просто околине тачке z_0. Уводимо и концепт окрњене околине тачке $z_0 \in \mathbb{C}$ полупречника ϵ:

$$\mathcal{U}_{z_0}^{\epsilon\circ} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| \leq \epsilon\} = \mathcal{U}_{z_0}^{\epsilon} \setminus \{z_0\}.$$

Како је метрика ρ корисна искључиво као мера растојања до бесконачности, околину бесконачности сагласну метрици ρ дефинишемо са:

$$\mathcal{U}_{\infty}^{\epsilon} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{\epsilon}\right\}.$$

Дефинисане околине тачака простора $\overline{\mathbb{C}}$ су илустроване на графику испод.

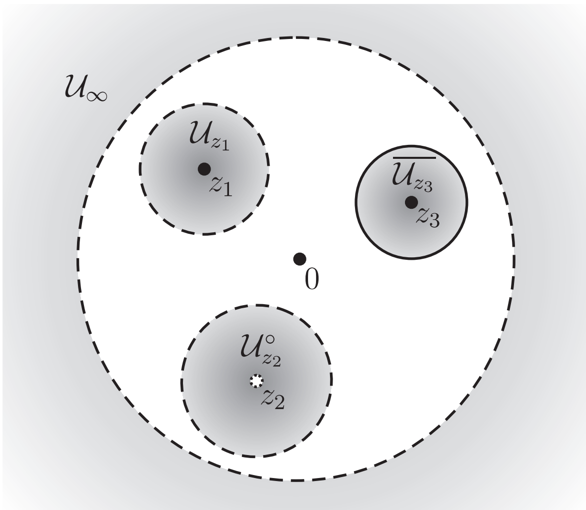


График 4: Околине тачака простора $\overline{\mathbb{C}}$.

Сада дефинишемо концепт отвореног скупа на уобичајан начин.

Дефиниција 1.2. *Подскуп $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ је отворен акко*

$$(\forall z \in \mathcal{D})(\exists \epsilon > 0)\mathcal{U}_z^{\epsilon} \subseteq \mathcal{D}.$$

Дакле, скуп је отворен ако садржи бар једну околину око сваке своје тачке. Читаоци лако могу да докажу да су околина тачке и окрњена околина тачке отворени скупови.

Дефиниција 1.3. *Тачка $z \in \mathbb{C}$ је тачка нагомилавања скупа $A \subseteq \mathbb{C}$ акко*

$$(\forall \epsilon > 0)\mathcal{U}_z^{\epsilon\circ} \cap A \neq \emptyset.$$

Практично, тачка $z \in \mathbb{C}$ је тачка нагомилавања скупа A акко скуп A садржи бар једну тачку на произвољно малом растојању од тачке z, различиту од тачке z. На пример, тачка z_0 је тачка нагомилавања окрњене околине $\mathcal{U}_{z_0}^{\circ}$.

Дефиниција 1.4. *Унију скупа $A \subseteq \mathbb{C}$ и скупа његових тачака нагомилавања називамо затворење скупа A и означавамо са $\overline{A}$. Скуп је затворен ако је једнак својем затворењу.*

Дефиниција 1.5. *Тачка $z \in \mathbb{C}$ је рубна тачка скупа $A \subseteq \mathbb{C}$ (пишемо $z \in \partial A$) акко*

$$(\forall \epsilon > 0)\mathcal{U}_z^{\epsilon} \cap A \neq \emptyset \wedge \mathcal{U}_z^{\epsilon} \cap A^c \neq \emptyset.$$

Скуп свих рубних тачака скупа A називамо граница скупа и обележавамо је са ∂A. Сада, илустсрације ради, доказаћемо неколико тополошких особина дефинисаних скупова.

Теорема 1.6. *Скуп је затворен акко је његов комплемент отворен. Граница скупа је затворен скуп.*

Доказ: Нека је $A \subseteq \mathbb{C}$ затворен скуп. Тада, произвољно $z \in A^c$ није тачка нагомилавања скупа A што по Дефиницији 1.3 имплицира да постоји окрњена околина $\mathcal{U}_z^{\circ}$ која не сече A што имплицира да је $\{z\} \cup \mathcal{U}_z^{\circ} = \mathcal{U}_z \subset A^c$. Дакле, A^c је отворен скуп.

Нека је A^c је отворен скуп. Нека је $z \in \mathbb{C}$ тачка нагомилавања скупа A. Ако $z \notin A$ односно ако би z припадало скупу A^c који је отворен, постојала би околина $\mathcal{U}_z$ која је потскуп од A^c а то би значило да окрњена околина $\mathcal{U}_z \setminus \{z\} = \mathcal{U}_z^{\circ}$ не сече скуп A што је супротно претпоставци да је z тачка нагомилавања скупа A. Отуда $z \in A$ чиме смо доказали да A садржи све своје тачке нагомилавања односно да је затворен.

Докажимо да је $(\partial A)^c$ отворен скуп. Нека $z \notin \partial A$. То по дефиницији граничних тачака имплицира да постоји околина $\mathcal{U}_z$ таква да је $\mathcal{U}_z \cap A = \emptyset$ или $\mathcal{U}_z \cap A^c = \emptyset$. То значи да је $\mathcal{U}_z \subseteq A^c$ или $\mathcal{U}_z \subseteq A$. Ако је, на пример, $\mathcal{U}_z \subseteq A$, тада свака друга тачка $w \in \mathcal{U}_z$ не може да буде гранична тачка скупа A јер око w може да се уочи околина $\mathcal{U}_w$ која је цела садржана у $\mathcal{U}_z$ а то значи да $\mathcal{U}_w$ не може да сече A^c. Отуда, $\mathcal{U}_z \subset (\partial A)^c$ чиме смо доказали да је $(\partial A)^c$ отворен скуп. □

Ради илустрације, затворење околине $\mathcal{U}_{z_0}$ или окрњене околине $\mathcal{U}_{z_0}^{\circ}$ тачке z_0 је затворена кугла $\overline{\mathcal{U}_{z_0}}$. Даље, околина $\mathcal{U}_{\infty}$ је отворен скуп јер је комплемент затворене кугле $\overline{\mathcal{U}_0}$.

Све наведене дефиниције могу да се прошире на метрички простор $(\overline{\mathbb{C}}, \rho)$ где метрику ρ користимо искључиво за околине бесконачности.

Теорема 1.7. *Сваки бесконачан потскуп простора $\overline{\mathbb{C}}$ има бар једну тачку нагомилавања.*

Доказ: Нека је $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ бесконачан скуп. Претпоставимо прво да је A ограничен у простору $(\mathbb{C}, d)$ односно да је A потскуп неке затворене кугле $\overline{\mathcal{U}_z}$ довољно великог полупречника. Како је $\overline{\mathcal{U}_z}$ затворен и ограничен скуп, он је компактан што имплицира да његов произвољан бесконачан потскуп, а самим тим и A, мора да има тачку нагомилавања.

Ако скуп A није ограничен у $(\mathbb{C}, d)$, тада за произвољну окрњену околину бесконачности односно скуп $\mathcal{U}_{\infty}$ важи да A није потскуп од $(\mathcal{U}_{\infty})^c = \overline{\mathcal{U}_0}$ (јер би у супротном A био ограничен) што значи да $A \cap \mathcal{U}_{\infty} \neq \emptyset$. Дакле, ∞ је у овом случају тачка нагомилавања скупа A у простору $(\overline{\mathbb{C}}, \rho)$. □

Дефиниција 1.6. *Кажемо да скуп $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ **компактно припада** скупу $\mathcal{D}$ ако је затворење $\overline{A}$ (који се рачуна у простору $(\overline{\mathbb{C}}, \rho)$) потскуп скупа $\mathcal{D}$.*

На пример, произвољан затворен и ограничен потскуп скупа $\mathcal{D}$ компактно припада скупу $\mathcal{D}$. Такође, ограничен потскуп A затвореног скупа F му увек компактно припада јер било која тачка нагомилавања скупа A је такође тачка нагомилавања скупа F који садржи све своје тачке нагомилавања јер је затворен. Даље, скуп природних бројева $\mathbb{N}$ (посматран као потскуп од $\mathbb{C}$) не припада компактно скупу $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ јер затворење скупа $\mathbb{N}$ у простору $\overline{\mathbb{C}}$ је $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ који није потскуп од $\mathbb{R}$.

Сада наводимо концепт пута односно криве у скупу комплексних бројева. Путеви у комплексној равни су врло битни због комплексне интеграције и концептуално се не разликују од путева Еуклидске равни.

Дефиниција 1.7. *Пут γ је непрекидно пресликавање $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ (или $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{C}}$) где је $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ класичан затворени интервал у скупу реалних бројева.*

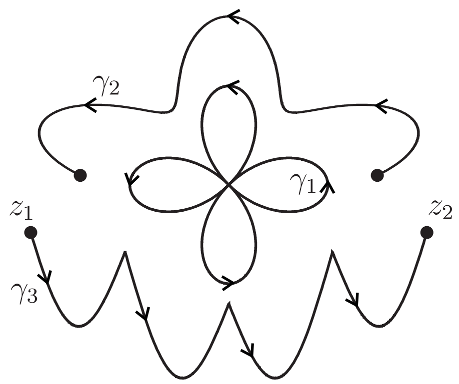


График 5: Путеви комплексне равни.

Непрекидност пресликавања $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ се проверава помоћу непрекидности векторске функције $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ облика $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$ која је еквивалентна непрекидности њених координатних функција $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Непрекидност пресликавања $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{C}}$ се проверава помоћу непрекидности функције $\gamma : [a, b] \to S^2$ али овакви путеви неће да буду од претераног теоријског значаја а самим тим ни њихова непрекидност.

Дефиниција 1.8. *Кажемо да су путеви $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ и $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ еквивалентни (пишемо $\gamma_1 \sim \gamma_2$) ако постоји непрекидна растућа и „на" функција $\tau : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ таква да је $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \tau$.*

Ако пут $\gamma[a, b] \to \mathbb{C}$ комплексне равни интерпретирамо као кретање материјалне тачке кроз време $t \in [a, b]$, тада трансформација τ која обезбеђује еквивалентност путева може да се схвати као трансформација времена односно, код еквивалентних путева се игнорише брзина кретања већ нам је од интереса само путања материјалне тачке. На пример, путеви:

$$\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = \cos t + i \sin t$$
$$\gamma_2 : [0, \sqrt{\pi}] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = \cos t^2 + i \sin t^2$$

су еквивалентни где јер је $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \tau$ где је $\tau(t) = t^2$ непрекидна, растућа и „на" функција.

Приметимо да еквивалентни путеви морају да имају исте слике тј. у скуповном смислу је $\gamma_1\big([a_1,b_1]\big) = \gamma_2\big([a_2,b_2]\big)$, обратно не мора да важи јер, на пример, $\gamma(t)$ и $\gamma(-t)$ не могу да буду еквивалентни ако γ повезује две различите тачке. Лако се показује да је $\sim$ релација еквиваленције на скупу свих путева што нам омогућава да уведемо следећу дефиницију.

Дефиниција 1.9. *Крива у комплексној равни је класа еквиваленције пута γ у односу на релацију $\sim$.*

Да би избегли ознаку $[\gamma]_\sim$, криву одређену путем γ такође означавамо са γ.

Дефиниција 1.10. *Пут $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ (а самим тим и крива γ) је:*

- ***Жорданов*** *ако је γ „1-1”;*
- ***непрекидно-диференцијабилан*** *ако је γ непрекидно-диференцијабилна функција;*
- ***гладак*** *ако је непрекидно-диференцијабилан и ако је $\gamma'(t) \neq 0$ за све $t \in [a,b]$;*
- ***део по део гладак*** *ако је γ део по део непрекидно-диференцијабилна функција а γ' може да буде једнак нули само у тачкама прекида;*
- ***ретифицибилан*** *ако дужина криве γ може да се израчуна криволинијским интегралом прве врсте односно ако постоји и коначан је:*

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

На пример, на Фигури 5, криве γ_2 и γ_3 су Жорданове док γ_1 није, крива γ_3 је глатка а γ_3 део-по део глатка. Занимљиво је да путања γ_1 може да представља глатку али и део по део глатку криву. Криве које нису ретифицибилне неће да буду од значаја на овом курсу.

Дефиниција 1.11. *Скуп $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ је путевима повезан акко за сваке $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ постоји пут $\gamma : [a,b] \to \mathcal{D}$ такав да је $\gamma(a) = z_1$ и $\gamma(b) = z_2$.*

Интуитивно, скуп $\mathcal{D}$ је путевима повезан ако од било које тачке скупа $\mathcal{D}$ може да се дође до било које друге његове тачке без изласка из скупа $\mathcal{D}$. Путевима повезани у равни су, на пример, слова $\mathcal{A}, \mathcal{E}$ док слова $\check{C}$, $\acute{C}$ нису.

Сада именујемо најзначајнију класу скупова курса Комплексне анализе.

Дефиниција 1.12. *Потскуп $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ називамо* ***област*** *ако је $\mathcal{D}$ отворен и путевима повезан.*

Области су значајни скупови из два разлога, први је што око сваке тачке z области $\mathcal{D}$ можемо да уочимо околину $\mathcal{U}_z$ садржану у $\mathcal{D}$, а други је што сваке две тачке области $\mathcal{D}$ можемо да повежемо путем чија слика компактно припада области $\mathcal{D}$ што последично значи да сваки пут области $\mathcal{D}$ може да се покрије са коначно много околина које су такође садржане у области $\mathcal{D}$.

На крају, описаћемо једно тополошко својство области које ће да нам омогући да докажемо најзначајнију теорему Комплексне анализе, Теорему у јединствености аналитичке функције 5.19.

Дефиниција 1.13. *Скуп свих отворених потскупова комплексне равни обележавамо са $\mathcal{T}$ и називамо топологија. Ако је $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, релативну топологију на скупу $\mathcal{D}$ дефинишемо са*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{D}} = \{\mathcal{O} \cap \mathcal{D} \mid \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}.$$

Отворене скупове на области ма могли смо да дефинишемо и на класичан начин помоћу одговарајућих базних отворених скупова топологије $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$. Наиме, скуп $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ је отворен у релативној топологији на скупу $\mathcal{D}$ акко

$$(\forall z \in \mathcal{A})(\exists \epsilon > 0)\mathcal{U}_z^{\epsilon} \cap \mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}.$$

Такође, $z \in \mathcal{D}$ је тачка нагомилавања скупа $A \subseteq \mathcal{D}$ у релативној топологији скупа $\mathcal{D}$ акко

$$(\forall \epsilon > 0)(\mathcal{U}_z^{\epsilon\circ} \cap \mathcal{D}) \cap A \neq \emptyset.$$

Аналогно, скуп F је затворен у релативној топологији на простору $\mathcal{D}$ акко садржи све своје тачке нагомилавања у односу на $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$.

Дефиниција 1.14. *Скуп $\mathcal{D}$ је повезан акко не постоје непразни скупови $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ такви да је $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ и*

$$\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.$$

Практично, ако пренебрегнемо дефиницију релативне топологије на $\mathcal{D}$, скуп $\mathcal{D}$ је повезан акко не постоје отворени скупови комплексне равни $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ такви да је:

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2, \quad \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{D} \neq \emptyset, \mathcal{O}_2 \cap \mathcal{D} \neq \emptyset, \quad \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \cap \mathcal{D} = \emptyset$$

као што је илустровано на графику испод.

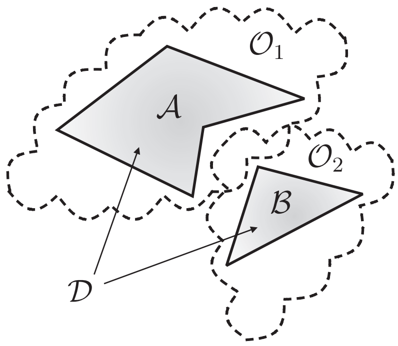


График 6: Не-повезаност скупа $\mathcal{D}$ ($\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}$).

Сада наводимо везу између повезаности и повезаности путевима.

Теорема 1.8. *Сваки путевима повезан скуп је повезан.*

Доказ: Нека је $\mathcal{D}$ путевима повезан. Претпоставимо да није повезан тј. нека постоје $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ који су непразни, дискунктни и нека је $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Тада, постоје $z_1 \in \mathcal{A}$ и $z_2 \in \mathcal{B}$ а, како је $\mathcal{D}$ путевима повезан, постоји пут $\gamma : [a, b] \to \mathcal{D}$ такав да је $\gamma(a) = z_1$ и $\gamma(b) = z_2$. То значи да је $\gamma\big([a, b]\big) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ и $\gamma\big([a, b]\big) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ али, пошто су скупови $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ дисјунктни, закључујемо да пут γ није повезан што противуречи његовој непрекидности. Дакле, $\mathcal{D}$ је повезан. $\square$

Као што икуструје График 6, у релативној топологији специфичних скупова, постоје потскупови који су истовремено отворени и затворени конкретно, скупови $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ су отворени и затворени у релативној топологији скупа $\mathcal{D}$. Међутим, као што илуструје следећа теорема, повезани скупови имају само један непразан, отворен и затворен скуп у својој релативној топологији.

Теорема 1.9. *Нека је $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ непразан, отворен и затворен скуп у релативној топологији скупа $\mathcal{D}$. Ако је $\mathcal{D}$ повезан, тада је $\mathcal{A} = \mathcal{D}$.*

Доказ: Лако се показује да је у релативној топологији скупа $\mathcal{D}$ комплемент отвореног скупа затворен скуп и обрнуто.

Нека је $\mathcal{D}$ повезан. Претпоставимо да је $\mathcal{A}$ прави потскуп скупа $\mathcal{D}$ који је непразан, отворен и затворен у односу на $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$. Тада, $\mathcal{D} \setminus \mathcal{A} = \mathcal{B}$ је такође непразан и отворен у $\mathcal{D}$ јер је комплемент скупа $\mathcal{A}$ који је по претпоставци затворен у $\mathcal{D}$. Отуда, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ су непразни, отворени скупови топологије $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ за које важи:

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset, \quad \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$$

што противуречи претпоставци да је $\mathcal{D}$ повезан. Отуда, $\mathcal{A} = \mathcal{D}$. □

1.4 Низови комплексних бројева

У овом одељку ћемо кратко да се осврнемо на појам низова специјално, низова комплексних бројева и њихове конвергенције. Читаоци који су добро упознати са концептом конвергенције низова метричких простора могу да пређу на следеће поглавље.

Дефиниција 1.15. *Низ комплексних бројева је свако пресликавање $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Ако је $Z(n) = z_n$, за све $n \in \mathbb{N}$, низ комплексних бројева означавамо са $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Као што видимо, низови комплексних бројева су ништа друго до генерализација вектора комплексних бројева. Овде нема потребе да дефинишемо низ елемената простора $\overline{\mathbb{C}}$ јер у том случају се подразумева да за неко $n_0 \in \mathbb{N}$ важи $z_{n_0} = \infty$ што нема претераног математичког смисла.

Дефиниција 1.16. *Тачка $z_0 \in \mathbb{C}$ је тачка нагомилавања низа $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ акко*

$$(\forall \epsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n > n_0)|z_n - z_0| < \epsilon.$$

Тачка $z = \infty$ је тачка нагомилавања низа $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ акко

$$(\forall M > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n > n_0)|z_n| > M.$$

Дефиниција 1.17. *Нека је $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ комплексних бројева. Тада, за $z_0 \in \mathbb{C}$ (z_0 је коначан комплексан број) кажемо да $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка z_0 односно*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)|z_n - z_0| < \epsilon.$$

Аналогно, низ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка бесконачности односно

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)|z_n| > M.$$

Тополошким речником, тачка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ је тачка нагомилавања (или гранична врендост) низа $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ акко свака околина тачке z_0 (у простору $(\overline{\mathbb{C}}, \rho)$) садржи бесконачно много (или скоро све тј. све осим коначно много) чланова низа. При том, због еквивалентности метрика ρ и d на ограниченим скуповима, без губљења општости можемо да се определимо за метрику ρ јер конвергенција низа у простору $(\overline{\mathbb{C}}, \rho)$ ка коначном комплексном броју имплицира конвергенцију истог низа у простору $(\mathbb{C}, d)$.

Како се метрички простор $(\mathbb{C}, d)$ геометријски интерпретира као Еуклидска раван са Еуклидском метриком, конвергенција низа ка коначном комплексном броју је еквивалентна конвергенцији низа његових првих и других координата као што илуструје следећа теорема.

Теорема 1.10. *Низ комплексних бројева* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n+iy_n)_{n\in N}$ *где* $(x_n)_{n\in N}, (y_n)_{n\in N} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *конвергира коначном комплексном броју* $z_0 = x_0 + iy_0$ *акко у скупу реалних бројева важи:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Доказ: Доказ тврђења следи на основу неједнакости:

$$\max\{|x_n - x_0|, |y_n - y_0|\} \leq \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0|.$$

која је једноставна последица особина квадратног корена реалних бројева □

Што се тиче метрике ρ, она је занимљива само у случају када низ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка бесконачности. Међутим, по дефиницији конвергенције, много је лакше је да искористимо конвергенцију низа модула $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ и особине конвергенције низова реалних бројева.

Теорема 1.11. *Нека је* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *низ комплексних бројева. Тада*

- $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty$*;*
- $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0.$

Дакле, на основу претходне теореме, да би доказали да низ комплексних бројева $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка $z_0 \in \mathbb{C}$, довољно је да докажемо да низ $(z_n - z_0)_{n\in\mathbb{N}}$ тежи нули а то је еквивалентно услову да низ реалних бројева $(|z_n - z_0|)_{n\in\mathbb{N}}$ тежи нули.

Приметимо да конвергенција ка бесконачности односно ка нули не зависи од низа аргумената. Међутим, ако низ комплексних бројева конвергира ка неком коначном комплексном броју, његова конвергенција може да се провери помоћу низа модула и низа аргумената као што илуструје следећа теорема.

Теорема 1.12. *Низ комплексних бројева* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *конвергира коначном комплексном броју* z_0 *акко конвергирају реални низови* $(|z_n|)_{n\in N}$ *и* $(\arg z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *и за неко* $k_0 \in \mathbb{Z}$ *важи:*

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|, \quad \lim_{n\to\infty} \arg z_n = \arg z_0 + 2k_0\pi.$$

1.5 Непрекидност функција комплексне променљиве

У овом одељку ћемо кратко да се осврнемо на појам функције комплексне променљиве и њену непрекидност. Као и до сада дефинисани појмови, концепт непрекидности комплексне функције је уско везан за непрекдиност пресликавања метричких простора.

Дефиниција 1.18. *Нека је* $\mathcal{D} \subseteq \overline{\mathbb{C}}$*. Функција* $f : \mathcal{D} \to \overline{\mathbb{C}}$ *је свака релација таква да за свако* $z \in \mathcal{D}$ *постоји тачно једно* $w \in \overline{\mathbb{C}}$ *такво да је* $w = f(z)$*.*

Претходно дефинисани појам се односи на једнозначне функције. У ситуацијама када једном елементу домена одговара више од једног елемента кодомена, такве функције ћемо да називамо „вишезначним”. Аналогно као у реалним анализама се дефинише појам функција које су „1-1” или „на”.

Посматрајмо сада функције чији домен и кодомен формирају коначни компексни бројеви. Најопштије функције овог типа имају форму $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ која због векторске интерпретације комплексних бројева и Еуклидске метрике може да се анализира као векторска функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ако је $\mathrm{Re} \circ f = u$ и $\mathrm{Im} \circ f = v$, функције $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

називамо редом реални и имагинарни део функције f коју тада можемо да представимо у алгебарском облику са:

$$f(z) = f(x+iy) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Аналогно, ако за функцију $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ постоје композиције $|f| = \rho$ и $\arg f = \varphi$, функцију f можемо у тригонометријском односно експоненцијалном облику да представимо са:

$$f(z) = \rho(z)\big(\cos\varphi(z) + i\sin\varphi(z)\big) = \rho(z)e^{i\varphi(z)}.$$

У зависности од конкретних околности, функције ћемо да представљамо у одговарајућем облику.

Сада наводимо концепт граничне вредности функције који је потпуно аналоган одговарајућем концепту реалне анализе.

Дефиниција 1.19. *Нека је функција f дефинисана на окрњеној околини тачке $a \in \overline{\mathbb{C}}$. Кажемо да је $w \in \mathbb{C}$ гранична вредност функције f када z тежи броју a и пишемо*

$$\lim_{z\to a} f(z) = w$$

акко за сваку околину $\mathcal{U}_w$ тачке w постоји окрњена околина $\mathcal{U}_a^\circ$ тачке a таква да је $f(\mathcal{U}_a^\circ) \subset \mathcal{U}_w$.

Претходна дефиниција је формулисана тополошким речником где се околине формирају у зависности од тога да ли су тачке a или w коначне или бесконачне. Аналитичким речником, дефиниција граничне вредности функције се формулише на следећи начин:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to a} f(z) = w &\Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall z \in \mathbb{C})|z-a| < \delta \Rightarrow |f(z) - w| < \epsilon;\\
\lim_{z\to a} f(z) = \infty &\Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists\delta > 0)(\forall z \in \mathbb{C})|z-a| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M;\\
\lim_{z\to \infty} f(z) = w &\Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall z \in \mathbb{C})|z| > N \Rightarrow |f(z) - w| < \epsilon;\\
\lim_{z\to \infty} f(z) = \infty &\Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists N > 0)(\forall z \in \mathbb{C})|z| > N \Rightarrow |f(z)| > M.
\end{aligned}$$

Као и код низова комплексних бројева, конвергенција функције $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ка коначним вредностима се једноставно проверава помоћу координатних функција.

Теорема 1.13. *Нека је $|a| < \infty$ и $f : \mathcal{U}_a \to \mathbb{C}$ функција. Тада, функција f тежи коначном комплексном броју када z тежи ка a акко $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : \mathcal{U}_a \to \mathbb{C}$ теже коначним реалним бројевима и важи:*

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a}\big(\operatorname{Re} f(z) + i\operatorname{Im} f(z)\big) = \lim_{z\to a}\operatorname{Re} f(z) + i\lim_{z\to a}\operatorname{Im} f(z).$$

За разлику од алгебарског облика, конвергенција функција у експоненцијалном облику је мало проблематичнија због аргумента комплексне функције који некада не може добро да се дефинише на целом домену функције. Оно што са сигурношћу можемо да тврдимо је да ако је $f(z) = \rho(z)e^{i\varphi(z)}$ експоненцијални облик функције и ако је $\lim\limits_{z\to a}\rho(z) = \rho_0$ а $\lim\limits_{z\to a}\varphi(z) = \varphi_0$, тада је $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \rho_0 e^{\varphi_0}$.

Постоји варијанта конвергенције функције ка тачки која нема окрњену околину на којој је функција дефинисана али, како ћемо на овом курсу да испитујемо конвергенцију функције на областима, нема потребе да је експлицитно наводимо.

2 Диференцијални рачун функција комплексне промењиве

У математичкој анализи, најједноставније функције су линеарна пресликавања коначно-димензионалних векторских простора. Наравно, линеарна пресликавања су предмет алгебре међутим, једна посебна класа пресликавања се локално понашају као линеарне функције тј. мале промене аргумента индукују скоро линеарне промене функције. Прецизније, ако довољно мало мењамо арумент функције $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, резултат је приближно једнак промени једне линеарне функције $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Математички запис ове особине има форму:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = L(h) + o(h) \quad \text{када} \quad h \to 0.$$

Линеарну функцију L која задовољава горњу једначину називамо диференцијал функције f у тачки x_0. Отуда, ако желимо да извршимо локалну анализу диференцијабилних функција, довољно је да знамо форму и особине њеног диференцијала који је линеарна функција па самим тим много једноставнија за анализу.

Да би боље разумели концепте диференцијалног рачуна комплексних функција, опишимо најпре линеарне функције комплексне промењиве.

2.1 Линеарне функције комплексне промењиве

Дефиниција 2.1. *Пресликавање $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ векторских простора $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$ над (истим) пољем $\mathbb{F}$ је линеарно акко:*

$$(\forall x, y \in \mathbb{V})(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}) L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y).$$

Практично, пресликавање је линеарно ако је слика линеарне комбинације два вектора линеарна комбинација њихових слика са истим скаларима. Овде наводимо фундаменталну теорему која употпуности описује линеарна пресликавања коначно-димензионалних векторских простора.

Теорема 2.1. ***(Основни став линеарне алгебре).*** *Нека коначно-димензионални векторски простор $\mathbb{V}$ над пољем $\mathbb{F}$ има базу $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и нека је $\mathbb{W}$ произвољан векторски простор над пољем $\mathbb{F}$. Ако је $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ линеарно пресликавање, тада постоје* ***једнствени*** *вектори $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{W}$ такви да је $L(e_i) = w_1$, $i = 1, \ldots, n$.*

Дакле, свако линеарно пресликавање је потпуно одређено сликама базних вектора домена. Ако су домен и кодомен коначно-димензионални, линеарна пресликавања се своде на множење матрица.

Поље комплексних бројева је уведено помоћу векторског простора $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ где смо искористили сабирање вектора простора $\mathbb{R}^2$ заједно са операцијом множења коју смо дефинисали са:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \overset{\text{деф.}}{=} (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.1}$$

Отуда, поље комплексних бројева можемо да анализирамо у контексту два векторска простора:

$$(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R}) \quad \text{и} \quad (\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{C}).$$

Ове две алгебарске структуре имају значајно различите особине:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0) + y(0, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\{(1, 0), (0, 1)\};$$

$$\mathbb{C} = \{z \mid z \in \mathbb{C}\} = \{z \cdot 1 \mid z \in \mathbb{C}\} = \mathcal{L}\{1\}.$$

Дакле, векторски простор $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ над пољем $\mathbb{R}$ је дводимензионалан са базом $\{(1,0),(0,1)\}$ док је векторски простор $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{C})$ над пољем $\mathbb{C}$ једнодимензионалан са базом $\{1\}$.

У зависности од тога да ли пресликавање чува структуру векторског простора над пољем реалних или пољем комплексних бројева, разликоваћемо два типа линеарних пресликавања.

Дефиниција 2.2. *Пресликавање* $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *је:*

- $\mathbb{R}$-*линеарно ако је пресликавање* $L : (\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ *линеарно;*
- $\mathbb{C}$-*линеарно ако је пресликавање* $L : (\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{C}) \to (\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{C})$ *линеарно.*

Како је $\mathbb{R}$ под-поље поља $\mathbb{C}$, закључујемо да су сва $\mathbb{C}$-линеарна пресликавања и $\mathbb{R}$-линеарна. Међутим, као што ћемо да видимо у наставку, обрнуто не мора да важи.

Теорема 2.2. *Свака* $\mathbb{R}$-*линеарна функција* $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *је облика* $L(z) = az + b\overline{z}$ *за јединствене* $a, b \in \mathbb{C}$ *где је*

$$a = \frac{L(1) - iL(i)}{2}, \quad b = \frac{L(1) + iL(i)}{2}.$$

Доказ: За произвољно $z \in \mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$-линеарну функцију L важи:

$$\begin{aligned} L(z) &= L(x \cdot 1 + i \cdot y) = xL(1) + yL(i) = \frac{z + \overline{z}}{2}L(1) + \frac{z - \overline{z}}{2i}L(i) \\ &= \frac{L(1) - iL(i)}{2}z + \frac{L(1) + iL(i)}{2}\overline{z}. \end{aligned}$$

Дакле, $\mathbb{R}$-линеарно пресликавање има наведену форму. Теорема 2.1 имплицира да је $\mathbb{R}$-линеарно пресликавање L одређено сликама вектора 1 и i. Како систем једначина

$$a = \frac{L(1) - iL(i)}{2}$$
$$b = \frac{L(1) + iL(i)}{2}$$

има јединствено решење по непознатим $L(1)$ и $L(i)$, закључујемо да бројеви $a, b \in \mathbb{C}$ одговарају јединственом $\mathbb{R}$-линеарном пресликавању. □

Као што видимо, свако $\mathbb{R}$-линеарно пресликавање се своди на линеарну комбинацију комплексног броја z и њему конјугованог комплексног броја $\overline{z}$ са два јединствена комплексна скалара a, b.

Теорема 2.3. *Свака* $\mathbb{C}$-*линеарна функција* $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *је облика* $L(z) = az$ *где је* $a = L(1)$.

Доказ: За произвољно $z \in \mathbb{C}$ и $\mathbb{C}$-линеарну функцију L важи:

$$L(z) = L(z \cdot 1) = zL(1).$$

□

Као што видимо, $\mathbb{C}$-линеарна функција је употпуности одређена својеврсним комплексним коефицијентом правца.

Сада ћемо да анализирамо везу између $\mathbb{R}$-линеарних и $\mathbb{C}$-линеарних пресликавања.

Последица 2.1. *Нека је $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ једна $\mathbb{R}$-линеарна функција. Тада су следећи услови еквиваленшни:*

(а) *L је $\mathbb{C}$-линеарна;*

(б) *$L(iz) = iL(z)$ за све $z \in \mathbb{C}$;*

(в) *$L(1) + iL(i) = 0$.*

Доказ: Користимо особину да су комплексни бројеви скалари у простору $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{C})$.

(а)⇒(б) По дефиницији $\mathbb{C}-$линеарног пресликавања, $i \in \mathbb{C}$ је скалар.

(б)⇒(в) $L(1) + iL(i) \overset{(б)}{=} L(1) + L(i \cdot i) = L(1) + L(-1) \overset{\mathbb{R}\text{-лин.}}{=} L(1) - L(1) = 0.$

(в)⇒(а) По Теореми 2.2, пресликавање L је облика $L(z) = \frac{L(1)-iL(i)}{2}z + \frac{L(1)+iL(i)}{2}\overline{z}$. Услов $L(1) + iL(i) = 0$ имплицира да је $L(z) = az$ а ово је $\mathbb{C}$-линеарна функција. □

Анализирајмо геометријске особине $\mathbb{R}$ односно $\mathbb{C}$ линеарних пресликавања.

Како свако $\mathbb{R}$-линеарно пресликавање геометријски представља линеарно пресликавање Еуклидске равни, оно је по Основном ставу Линеарне алгебре 2.1 одређено сликама вектора $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Једно $\mathbb{R}-$линеарно пресликавање је илустровано на слици испод.

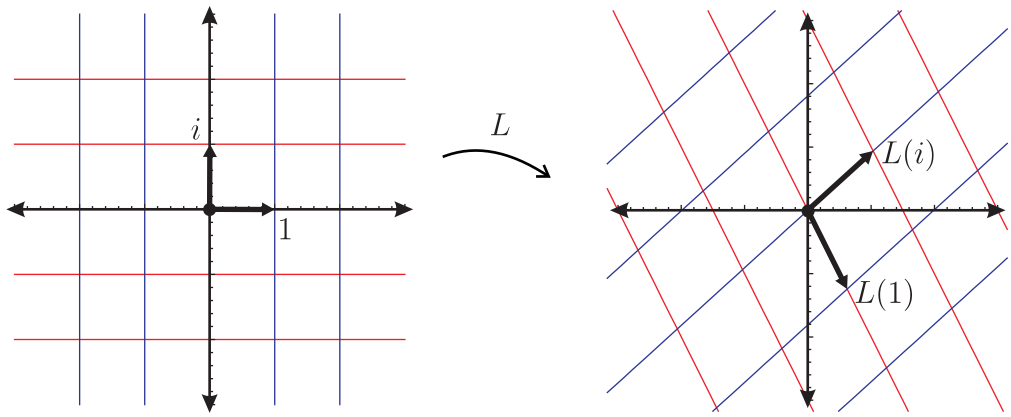


График 7: $\mathbb{R}-$линеарно пресликавање комплексне равни.

Нека је сада $L(z) = az + b\overline{z}$ за неке $a, b \in \mathbb{C}$. Ако је $a = a_1 + ia_2$ и $b = b_1 + ib_2$ тада је:

$$\begin{aligned} L(z) = L(x+iy) &= (a_1 + ia_2)(x + iy) + (b_1 + ib_2)(x - iy) \\ &= (a_1 + b_1)x - (a_2 - b_2)y + i\big[(a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y\big] \end{aligned}$$

Дакле, реални и имагинарни део $\mathbb{R}$-линеарног пресликавања су функције:

$$u(x, y) = (a_1 + b_1)x - (a_2 - b_2)y,$$

$$v(x, y) = (a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y,$$

што имплицира да пресликавање L, посматрано као пресликавање $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ има форму

$$L(x, y) = \big((a_1 + b_1)x - (a_2 - b_2)y, (a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y\big).$$

Јакобијан овог линеарног пресливања је

$$J = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & -a_2 + b_2 \\ a_2 + b_2 & a_1 - b_1 \end{vmatrix} = |a|^2 - |b|^2.$$

Отуда, ако је $|a| > |b|$, пресликавање L чува оријентацију вектора а ако је $|a| < |b|$, пресликавање L мења оријентацију вектора а ако је $|a| = |b|$ пресликавање није бијекција.

Нека је сада L једно $\mathbb{C}$-линеарно пресликавање односно нека је $L(z) = az$ за неко $a \in \mathbb{C}$. Ако је $a = a_1 + ia_2$ пресликавање L је облика:

$$L(z) = L(x + iy) = (a_1 + ia_2)(x + iy) = (a_1 x - a_2 y) + i(a_2 x + a_1 y)$$

што значи да, посматрано као линеарно пресликавање Еукидске равни, $\mathbb{C}-$линеарно пресликавање има Јакобијан:

$$J = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} = |a|^2.$$

Отуда, свако $\mathbb{C}-$линеарно пресликавање чува оријентацију вектора.

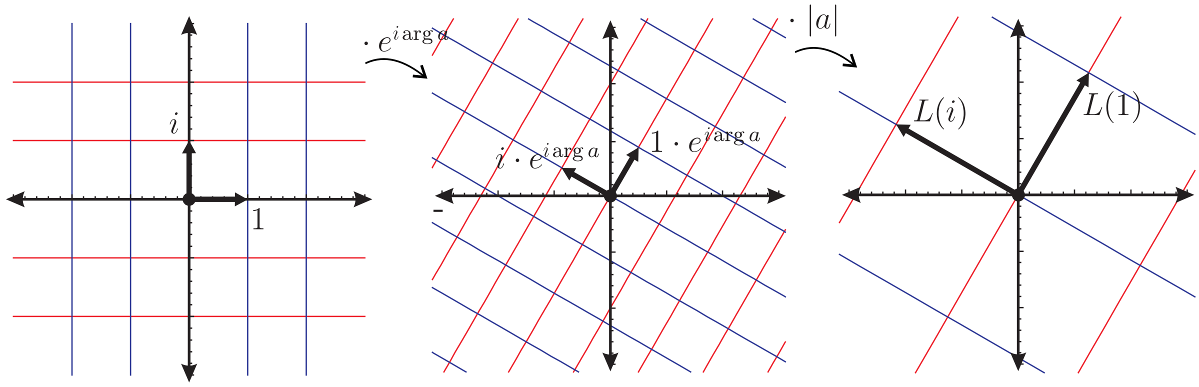


График 8: $\mathbb{C}-$линеарно пресликавање комплексне равни.

Анализирајмо сада $\mathbb{C}$-линеарно пресликавање L као специјалан случај линеарног пресликавања Еуклидске равни. Нека је $L(1,0) = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Тада, услов $L(1) + iL(i) = 0$ Последице 2.1, множењем са i постаје $L(i) = iL(1)$. Ако комплексне бројеве интерпретирамо као уређене парове реалних бројева, услов $L(i) = iL(1)$ постаје:

$$L(0,1) = (0,1) \cdot L(1,0) = (0,1) \cdot (a,b) \overset{(2.1)}{=} (-b, a).$$

Дакле, ако је $L(1,0) = (a,b)$ и L је $\mathbb{C}$-линеарно, тада је $L(0,1) = (-b,a)$ а то имплицира да је скаларни производ $\langle L(1,0), L(0,1) \rangle = 0$. Отуда, слике базних вектора су ортогонални вектори једнаке норме а то је довољан услов да закључимо да $\mathbb{C}$-линеарна пресликавања чувају углове између вектора.

Како је по Теореми 2.3 свако $\mathbb{C}$-линеарно пресликавање облика $L(z) = az$ за неко $a \in \mathbb{C}$, ако искористимо експоненцијални облик комплексног броја добијамо да је

$$L(z) = az = |a| e^{i \arg a} |z| e^{i \arg z} = |a||z| e^{i(\arg a + \arg z)}.$$

Дакле, $\mathbb{C}$-линеарно пресликавање представља композицију ротације Еуклидске равни за угао $\arg a$ и хомотетије са коефицијентом $|a|$ као што илуструје График 9.

У литератури се често помињу и афина пресликавања комплексне равни која имају форму $L(z) = b + az$ за неке константе $a, b \in \mathbb{C}$. Геометријски, афина пресликавања представљају композицију $\mathbb{C}$-линеарног пресликавања и транслације за вектор b.

2.2 Диференцијабилност комплексних функција

Нека је комплексна функција f дефинисана на некој околини $\mathcal{U}_z$ тачке $z \in \mathbb{C}$.

Дефиниција 2.3. *Функција $f : \mathcal{U}_z \to \mathbb{C}$ је $\mathbb{R}$-диференцијабилна ($\mathbb{C}$-диференцијабилна) у тачки z ако постоји $\mathbb{R}$-линеарна ($\mathbb{C}$-линеарна) функција $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ таква да је*

$$f(z+h) - f(z) = L(h) + o(h) \quad \textit{када} \quad h \to 0$$

односно $\lim\limits_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$

Функцију L називамо $\mathbb{R}$ односно $\mathbb{C}$ диференцијал функције f и обележавамо са $\mathrm{d}f$. Дакле, ако се функција локално понаша као $\mathbb{R}$ односно $\mathbb{C}$ линарна функција, рећи ћемо да је она $\mathbb{R}$ односно $\mathbb{C}$ диференцијабилна или диференцијабилна у реаном односно комплексном смислу.

Опишимо диференцијал $\mathbb{R}$-диференцијабилне функције. Нека је

$$f(z+h) - f(z) = L(h) + o(h) \quad \text{када} \quad h \to 0 \tag{2.2}$$

где је L једна $\mathbb{R}-$линеарна функција.

Ако је $h = h_1 + ih_2$ тада је због $\mathbb{R}$-линеарности $L(h) = L(h_1 + ih_2) = h_1 L(1) + h_2 L(i)$.

За $h_2 = 0$, заменом у (2.2) добијамо

$$f(z+h_1) - f(z) = h_1 L(1) + o(h_1) \quad \text{када} \quad h_1 \to 0;$$

$$L(1) = \lim_{h_1\to 0} \frac{f(z+h_1) - f(z)}{h_1} - \lim_{h_1\to 0} \frac{o(h_1)}{h_1} = \lim_{h_1\to 0} \frac{f(z+h_1) - f(z)}{h_1}.$$

Ако комплексне бројеве интерпретирамо као уређене парове реалних бројева а функцију f као пресликавање $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ дато са $f(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$, претходна гранична вредност је дефиниција парцијалног извода функције f по промењљивој x:

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{f\big((x,y) + (h_1, 0)\big) - f(x,y)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x} = (u'_x, v'_x).$$

Дакле, $L(1) = \frac{\partial f}{\partial x}$ а алгебарска форма овог парцијалног извода је $\frac{\partial f}{\partial x} = u'_x + iv'_x$.

Слично, заменом $h_1 = 0$ у (2.2) добијамо

$$f(z+ih_2) - f(z) = h_2 L(i) + o(h_2) \quad \text{када} \quad h_2 \to 0;$$

$$L(i) = \lim_{h_2\to 0} \frac{f(z+ih_2) - f(z)}{h_2} - \lim_{h_2\to 0} \frac{o(h_2)}{h_2} = \lim_{h_1\to 0} \frac{f(z+ih_2) - f(z)}{h_2} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Отуда, одредили смо $L(1)$ и $L(i)$ па, на основу Теореме 2.2, пресликавање L је облика

$$L(h) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)h + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{h}.$$

Ако компоненте $\mathbb{R}$-линеарног диференцијала функције f означимо са:

$$\frac{\partial f}{\partial z} \overset{\text{деф.}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \overset{\text{деф.}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

по Теореми 2.2, добијамо следеће тврђење.

Теорема 2.4. *Диференцијал $\mathbb{R}$-диференцијабилне функције f у тачки $z \in \mathbb{C}$ на јединствен начин може да се представи са:*

$$\mathrm{d}f(h) = \frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \overline{h}.$$

Претходна теорема, заједно са Последицом 2.1 услов **(в)**, доказује и следеће тврђење.

Теорема 2.5. *У тачки $z \in \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$-диференцијабилна функција је $\mathbb{C}$-диференцијабилна акко је*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Анализирајмо сада $\mathbb{R}$-диференцијабилну функцију $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ као пресликавање $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ дато са $f(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$. Једначина (2.2) тада има форму:

$$f\big((x,y) + (h_1,h_2)\big) - f(x,y) = L(h_1,h_2) + o(||(h_1,h_2)||) \quad \text{када} \quad ||h|| \to 0.$$

Како је пресликавање L линеарно као пресликавање $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, претходна једнакост је управо дефиниција диференцијабилности векторске функције $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ која је диференцијабилна акко су њене координатне функције $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ диференцијабилне. Тако добијамо први део следећег тврђења.

Теорема 2.6. *Нека је комплексна функција $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дефинисана на некој околини тачке $z_0 = x_0 + iy_0$. Тада, f је $\mathbb{R}$-диференцијабилна у тачки z_0 акко су функције u и v диференцијабилне на некој околини тачке (x_0, y_0). Ако је при том у тачки (x_0, y_0) испуњено*

$$u'_x = v'_y \quad \text{и} \quad u'_y = -v'_x,$$

тада, f је $\mathbb{C}$-диференцијабилна у тачки z_0 и важи $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = u'_x + iv'_x$.

Доказ: По Теореми 2.5, довољно је да покажемо да из услова $u'_x = v'_y$ и $u'_y = -v'_x$ следи $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Заиста,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\big((u'_x + iv'_x) + i(u'_y + iv'_y)\big) = \frac{1}{2}\big((u'_x - v'_y) + i(u'_y + v'_x)\big) = 0.$$

□

Услови $u'_x = v'_y$ и $u'_y = -v'_x$ се називају Коши[3]-Риманови[4] услови. По претходној теореми они су довољни за $\mathbb{C}-$диференцијабилност али, као што ћемо да видимо у следећој теореми, они су и потребни.

Теорема 2.7. *Функција $f = u(x,y) + iv(x,y)$ је $\mathbb{C}-$диференцијабилна у тачки $z_0 = x_0 + iy_0$ акко су функције u и v диференцијабилне на некој околини тачке (x_0, y_0) и ако у (x_0, y_0) задовољавају Коши-Риманове услове.*

Доказ: ($\Leftarrow$) Претходна теорема.

($\Rightarrow$) Како је по Дефиницији 2.3 свака $\mathbb{C}-$диференцијабилна функција и $\mathbb{R}$-диференцијабилна, функције u и v су диференцијабилне на некој околини тачке (x_0, y_0). Отуда, f је $\mathbb{R}$-диференцијабилна на околини тачке z_0 а из њене $\mathbb{C}$-диференцијабилности, по Последици 2.1, следи $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ а овај услов је еквивалентан Коши-Римановим условима за функције u и v. □

[3] Baron Augustin-Louis Cauchy 1783-1857, француски математичар, инжењер и физичар.
[4] Georg Friedrich Bernhard Riemann 1826-1866, немачки математичар.

Пример 2.1. *Функција $f(z) = \overline{z}$ није $\mathbb{C}$-диференцијабилна ни у једној тачки скупа $\mathbb{C}$.*

Заиста, како је $f(x+iy) = \overline{x+iy} = x - iy$, координатне функције функције f $u(x,y) = x$ и $v(x,y) = -y$ су диференцијабилне. Међутим, $u'_x = 1 \neq -1 = v'_y$. □

Сада уводимо први извод комплексне функције на класичан начин.

Дефиниција 2.4. *Извод комплексне функције f у тачки $z \in \mathbb{C}$ је гранична вредност*

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Теорема 2.8. *Нека је $\mathcal{U}_z$ околина тачке z. Тада, извод функције $f : \mathcal{U}_z \to \mathbb{C}$ у тачки z постоји акко је она $\mathbb{C}-$диференцијабилна у тачки z.*

Доказ: ($\Rightarrow$) Нека постоји $f'(z) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$. Тада је

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) + \alpha(h) \quad \text{где је} \quad \lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0.$$

То значи да је

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)h + \alpha(h)h$$

а функција $L(h) = f'(z)h$ је $\mathbb{C}$-линеарна ($f'(z) \in \mathbb{C}$ је константа) и $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\alpha(h)h}{h} = 0$ односно $\alpha(h)h \in o(h)$ када $h \to 0$. Дакле, по Дефиницији 2.3, функција f је $\mathbb{C}-$диференцијабилна.

($\Leftarrow$) Нека је f једна $\mathbb{C}-$диференцијабилна функција односно нека је

$$f(z+h) - f(z) = L(h) + o(h)$$

где је L једна $\mathbb{C}$-линеарна функција. По Теореми 2.3, $L(h) = ah$ па, када претходну једнакост поделимо са h, добијамо:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = a$$

односно, $f'(z)$ дато Дефиницијом 2.4 постоји и једнак је a. □

Претходна теорема указује да је $\mathbb{C}-$диференцијабилност еквивалентна егзистенцији извода комплексне функције. Отуда, извод комплексне функције можемо да израчунамо и методама реалне анализе.

Последица 2.2. *Ако постоји извод комплексне функције $f : \mathcal{U}_z \to \mathbb{C}$ у тачки z. тада је:*

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = u'x + iv'x.$$

Доказ: Како постоји $f'(z)$, по претходној теореми f је $\mathbb{C}-$диференцијабилна, а самим тим и $\mathbb{R}$-диференцијабилна у тачки z. Тада, по Теореми 2.4, њен $\mathbb{R}-$диференцијал је облика $L(h) = \frac{\partial f}{\partial z}h + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{h}$. Како је због $\mathbb{C}$-диференцијабилности $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ (Теорема 2.5), заменом у једнакости (2.2) добијамо

$$f(z+h) - f(z) = \frac{\partial f}{\partial z}h + o(h) \quad \text{када} \quad h \to 0.$$

Ако леву и десну страну претходне једнакости поделимо са h, добијамо да је

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{\partial f}{\partial z}.$$

□

На основу до сада доказаних тврђења, закључујемо да извод комплексне функције можемо да израчунамо или помоћу граничне вредности или помоћу парцилајних извода координатних функција. То нам омогућава да докажемо да за извод комплексне функције важе сва правила диференцирања.

Теорема 2.9. *Нека су $f:\mathcal{U}_z\to\mathbb{C}$ и $g:\mathcal{V}_z\to\mathbb{C}$ диференцијабилне у комплексном смислу у тачки z. Тада је у тачки z:*

- $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$ *за све* $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$;
- $(f\cdot g)'=f'g+fg'$;
- $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$, *при том,* $g(w)\neq 0$ *на некој околини тачке* z.

Ако је $f:\mathcal{U}_z\to\mathbb{C}$ диференцијабилна у комплексном смислу у тачки z а $g:\mathcal{V}_{f(z)}\to\mathbb{C}$ диференцијабилна у комплексном смислу у $f(z)$, тада је:

$$(g\circ f)'(z)=g'\big(f(z)\big)f'(z).$$

Доказ тврђења остављамо читаоцима.

Сада ћемо да се фокусирамо на једну специјалну класу комплексних функција фундаменталних за даљу анализу.

Дефиниција 2.5. *Кажемо да је функција f* ***аналитичка*** *(или холоморфна или регуларна) у тачки z ако је она $\mathbb{C}$-диференцијабилна на некој околини тачке z.*

Овај курс комплексне анализе је фундаметално везан за концепт аналитичких функција. Отуда, читаоцима се препоручује да се добро упознају са наведеним концептом.

Пример 2.2. *Функција $f(z)=|z|^2=z\overline{z}$ је $\mathbb{R}-$диференцијабилна на $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}-$диференцијабилна само за $z=0$ и није аналитичка ни у једној тачки.*

Заиста, $f(x+iy)=x^2+y^2$ има диференцијабилне координатне функције ($u(x,y)=x^2+y^2$, $v(x,y)=0$) а Коши-Риманови услови важе само за $(x,y)=(0,0)$. □

Ако је функција f аналитичка у свакој тачки отвореног скупа $\mathcal{D}$ кажемо да је она аналитичка на $\mathcal{D}$.

Поглавље до сада је базирано на метричком простору $(\mathbb{C},d)$ са стандарном Еуклидском метриком. Поставља се питање шта се дешава у бесконачности односно, како би на проширеном скупу $\overline{\mathbb{C}}$ проверили аналитичност неке функције. Технике описане у овом поглављу нису погодне за анализу простора $\overline{\mathbb{C}}$ зато што он не може да буде векторски простор. Због тога, аналитичност у бесконачности проверавамо на следећи начин.

Дефиниција 2.6. *Кажемо да функција f аналитичка у бесконачној тачки ако је функција $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ аналитичка у нули.*

Овде се ослањамо на особину да функција $w(z)=\frac{1}{z}$ околину бесконачности бијективно пресликава у околину нуле.

2.3 Геометријска интерпретација извода

Као што смо већ видели, диференцијал $\mathbb{R}-$диференцијабилне функције је $\mathbb{R}-$линеарна функција облика $\mathrm{d}f(h) = \frac{\partial f}{\partial z}h + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{h}$ а у случају $\mathbb{C}-$диференцијабилне функције $\mathrm{d}f(h) = \frac{\partial f}{\partial z}h = f'(z)h$. Како h у суштини представља прираштај функције, означимо га са $\mathrm{d}z$ као у осталим анализама. Тада, диференцијал $\mathbb{R}$ односно $\mathbb{C}$ диференцијабилне функције може да се запише у облику;

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}\overline{z} \quad \text{односно} \quad \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z = f'(z)\mathrm{d}z.$$

Анализирајмо сада Јакобијане ових диференцијала. Присетимо се (Анализа 4) да ако је Јакобијан реалне функције $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ различит од нуле у тачки (x, y), тада постоји околина $\mathcal{U}_{(x,y)}$ таква да је $f : \mathcal{U}_{(x,y)} \to f\big(\mathcal{U}_{(x,y)}\big)$ бијекција (погледајте теорему о монотоности диференцијабилних функција преко првог извода, Анализа 2). Како смо у Поглављу 2.1 већ рачунали Јакобијане линеарних фукција комплексне променљиве, закључујемо да је Јакобијан $\mathbb{R}-$диференцијабилне функције у тачки z:

$$J_f(z) = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|^2$$

док је Јакобијан $\mathbb{C}-$диференцијабилне функције у тачки z:

$$J_f(z) = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 = |f'(z)|^2.$$

Дефиниција 2.7. *Тачка $z \in \mathbb{C}$ је критична тачка пресликавања f ако је $J_f(z) = 0$.*

Геометријски посматрано, ако је Јакобијан $\mathbb{R}$-диференцијабилног пресликавања једнак нули у тачки z, тада $\mathrm{d}f(z)$ има нетривијално језгро тј. није „1-1" (доказати). То даље имплицира да слика неке околине тачке z нeће да има „глатку мрежу". График испод илуструје да је тачка $z = 0$ критична тачка функције $f(z) = z^2$.

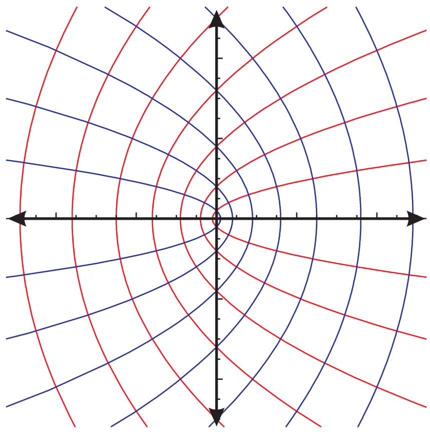


График 9: Слика Еуклидске мреже пресликавањем $f(z) = z^2$.

Сада уводимо специјалну класу пресликавања која глатко пресликавају Еуклидску мрежу.

Дефиниција 2.8. *Кажемо да је $\mathbb{R}-$диференцијабилно пресликавање f **конформно** у тачки z ако је диференцијал $\mathrm{d}f$ у тачки z композиција хомотетије и ротације и тачка z није критична тачка пресликавања f.*

Практично, пресликавање f је конформно у z ако је диференцијал $\mathrm{d}f$ у тачки z бијекција и своди се на хомотетију са ротацијом што даље имплицира да $\mathrm{d}f$ чува углове па сличне фигуре пресликава у сличне фигуре.

Ако је f конформно у свакој тачки области $\mathcal{D}$, тада кажемо да је f конформно на $\mathcal{D}$.

Теорема 2.10. *Нека z није критична тачка $\mathbb{R}-$диференцијабилног пресликавања f. Тада, фукнција f је конформна у z акко је $\mathbb{C}-$диференцијабилна у z.*

Доказ:($\Rightarrow$) Нека се $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}\overline{z}$ у тачки z своди на истезање са ротацијом тј. нека $\mathrm{d}f$ чува углове. Како је угао између вектора 1 и i прав, следи да угао између вектора

$$\mathrm{d}f(1) = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \quad \text{и} \quad \mathrm{d}f(i) = \frac{\partial f}{\partial z}i - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}i$$

мора да буде прав. Знамо да $\mathrm{d}f(1)$ и $\mathrm{d}f(i)$ имају једнаку норму (добијени су једнаким истезањем јединичних вектора) и позитивно су оријентисани (добијени су ротацијом вектора са позитивном оријентацијом). Тако закључујемо да се $\mathrm{d}f(i)$ добија од $\mathrm{d}f(1)$ ротацијом за угао $\frac{\pi}{2}$ која се у комплесној анализи своди на множење са i. Дакле:

$$\mathrm{d}f(i) = i\mathrm{d}f(1) = \frac{\partial f}{\partial z}i + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}i.$$

Упоређивањем са горњом једначином, закључујемо да је $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ што по Теореми 2.5 имплицира $\mathbb{C}$-диференцијабилност функције f.

($\Leftarrow$) По Теореми 2.3, диференцијал $\mathrm{d}f$ је облика $\mathrm{d}f = a\mathrm{d}z = |a|e^{i\arg a}\mathrm{d}z$ а ово је композиција хомотетије са коефицијентом $|a|$ и ротације за угао $\arg a$. $\square$

Дакле, ако је функција f аналитичка и нема критичних тачака на $\mathcal{D}$, тада је f конформна на $\mathcal{D}$.

Опишимо геометријске особине конформног пресликавања анализом кривих и њихових слика. Нека је f конформно на некој околини $\mathcal{U}$ тачке z и нека је f' некрекидна на $\mathcal{U}$. Посматрајмо гладак пут $\gamma : [0,1] \to \mathcal{U}$ који почиње у тачки z. Тада, слика пута γ је пут $\gamma_f = f \circ \gamma$. Како је

$$\gamma_f'(t) = f'\big[\gamma(t)\big]\gamma'(t) \quad \text{за све} \quad t \in [0,1],$$

закључујемо да је γ_f такође гладак пут јер је f' непрекидна функција која је због конформности пресликавања f различита од нуле у свакој тачки скупа $\mathcal{U}$.

Упоредимо дужине лукова пута γ и његове слике. Ако посматрамо довољно мали сегмент пута γ од $\gamma(0)$ до $\gamma(\epsilon)$, дужина лука овог сегмента је приближно једнака норми тангентног вектора у тачки $\gamma(0)$ односно $|\gamma'(0)| = |u'(0) + iv'(0)| = \sqrt{u'^2(0) + v'^2(0)}$ помноженој са ϵ тј. $\epsilon|\gamma'(0)|$ (присетимо се криволинијског интеграла прве врсте, Анализа 4). Тада, однос дужине $\epsilon-$сегмента пута γ и његове слике се када ϵ тажи нули приближава:

$$\frac{|\gamma_f'(0)|}{|\gamma'(0)|} = \frac{|f'\big(\gamma(0)\big)\gamma'(0)|}{|\gamma'(0)|} = |f'\big(\gamma(0)\big)| = |f'(z)|.$$

Како лева страна горње једнакости не зависи од пута γ, закључујемо да се сви лукови који пролазе кроз z истежу подједнако. Тако закључујемо да пресликавање које је конформно у тачки z пресликава диск полупречника ϵ у „скоро диск” полупречника $|f'(z)|\epsilon$ као што илуструје График 10.

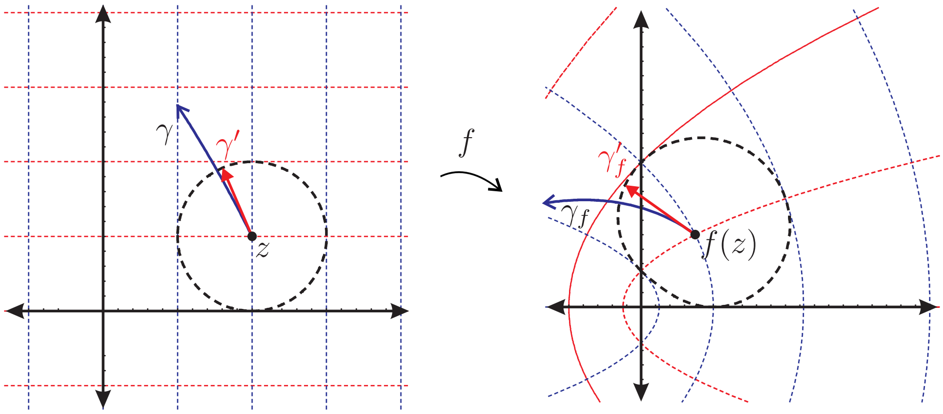


График 10: Конформност пресликавања $f(z) = z^2$.

Анализирајмо сада аргумент тангентног вектора пута γ и његове слике. Из услова $\gamma'_f(0) = f'(z)\gamma'(0)$ закључујемо да је

$$\arg \gamma'_f(0) = \arg f'(z) + \arg \gamma'(0)$$

што имплицира да се тангентни вектор произвољне криве у тачки z ротира за угао $\arg f'(z)$. Дакле, слика ϵ-диска око тачке z, је „скоро диск” полупречника $|f'(z)|\epsilon$ око тачке $f(z)$ ротиран за угао $\arg f'(z)$ што се такође види на Графику 10.

На крају, ако посматрамо два глатка пута α, β у тачки z, тангентни вектори њихових слика α_f, β_f ће да буду ротирани за исти угао $\arg f'(z)$, што имплицира да ће угао између тангентних вектора α'_f, β'_f да буде исти. Отуда, ако пресликамо Еуклидску мрежу конформним пресликавањем, резултат је мрежа кривих које се секу под правим угловима као што се види на графику испод.

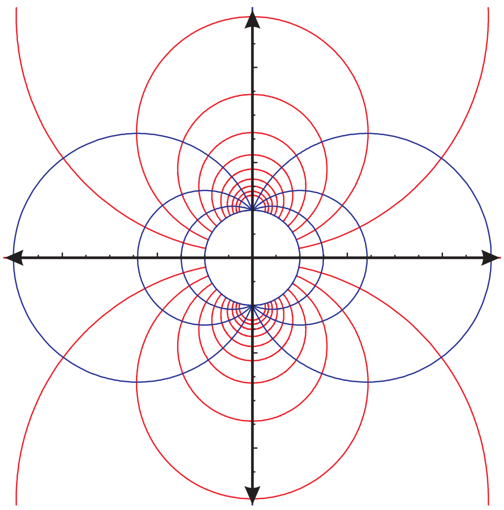


График 11: Слика Еуклидске мреже конформном функцијом.

3 Елементарне функције комплексне промењиве

У овом поглављу анализираћемо значајне функције комплексне промењиве. Најједноставније функције комплексне промењиве су пре свега полиноми

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad \text{где} \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}.$$

Полиноми су аналитичке функције на целом скупу $\mathbb{C}$, у скупу комплексних бројева сваки полином степена n има тачно n нула рачунајући вишеструкости. Све наведене особине могу лако да се докажу уведеним техникама.

Следећи тип елементарних функција су рационалне функције облика $r(z) = \frac{p_n(z)}{q_m(z)}$ где су p_n и q_m $(m > 1)$ полиноми са комплексним коефицијентима. Како је поље комплексних бројева алгебарски затворено, сваки полином степена $n > 0$ може да се факторише као производ $p(z) = a(z - z_1) \cdots (z - z_n)$. Отуда, рационална функција комплексне промењиве може да се представи у виду производа:

$$r(z) = \frac{p_n(z)}{q_m(z)} = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \, \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \cdots \frac{a_{n_0} z + b_{n_0}}{c_{n_0} z + d_{n_0}} \quad \text{где је} \quad n_0 = \max\{m, n\}.$$

Због тога, да би разумели својства рационалих функција комплексне промењиве, довољно је да анализирамо функције облика $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

3.1 Билинеарне функције

Дефиниција 3.1. *Нека су $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ такви да је $ad - bc \neq 0$. Функцију $w : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$*

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

називамо билинеарна функција.

Да w не би била константна функција, бројилац $az+b$ не сме да буде дељивимениоцем $cz + d$ тј. $\alpha(cz + d) \neq az + b$ за све $\alpha \in \mathbb{C}$. Претходно је еквивалентно услову да систем једначина $\alpha c = a$ и $\alpha d = b$ нема решења по промењивој α тј. $\alpha = \frac{a}{c}$, $\frac{a}{c} d = b$. Дакле, за $ad \neq bc$, бројилац и именилац билинеарне функције су узајамно прости полиноми. Нама ће у овом поглављу да буду занимљиве билинеарне функције за $c \neq 0$ јер за $c = 0$ добијамо афину функцију $w(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$ а као што смо видели у Поглављу 2.1, ово је композиција хомотетије, ротације и транслације.

Билинеарна функција је пресликавање простора $\overline{\mathbb{C}}$. Лако се показује да је $w(\infty) = \lim\limits_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$ и $w\big(-\frac{d}{c}\big) = \infty$. Отуда, ако $w : \overline{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ дефинишемо са:

$$w(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{c}{d}\}; \\ \infty, & z = -\frac{d}{c}; \\ \frac{a}{c}, & z = \infty, \end{cases}$$

добијамо пресликавање које је непрекидно на $\overline{\mathbb{C}}$.

Теорема 3.1. *Билинеарна функција $w : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ је бијекција. Њена инверзна функција је такође билинеарна.*

Доказ: Да би доказали да је пресликавање w бијекција, довољно је да докажемо да постоји њему инверзно пресликавање. Решавањем једначине $w = \frac{az+b}{cz+d}$ по променљивој z добијамо $z = \frac{dw-b}{a-cw}$. Дакле, $w^{-1}(z) = \frac{dz-b}{a-cz}$ је билинеарна функција и важи $w \circ w^{-1}(z) = w^{-1} \circ w(z) = z$ за све $z \in \mathbb{C}$ тј. w^{-1} је инверзна функција функције w. $\square$

Обележимо фамилију билинеарних функција на скупу $\overline{\mathbb{C}}$ са $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{C}})$. Приметимо да структура $(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{C}}), \circ)$ има следеће особине:

- идентичко пресликавање $\mathbb{1}_{\overline{\mathbb{C}}}(z) = z$ је билинеарно;
- композиција билинеарних пресликавања је билинеарно пресликавање (доказати);
- за свако $w \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{C}})$ постоји $w^{-1} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{C}})$ тако да је $w \circ w^{-1} = \mathbb{1}_{\overline{\mathbb{C}}}$ (Теорема 3.1).

Како је композиција пресликавања асоцијативна операција, добијамо следеће тврђење.

Теорема 3.2. *Структура $(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{C}}), \circ)$ је група.*

При том, група $(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{C}}), \circ)$ није Абелова. На пример, ако је $w_1(z) = \frac{1}{z}$ а $w_2(z) = z + 1$, тада је $w_1 \circ w_2(z) = \frac{1}{z+1}$ док је $w_2 \circ w_1(z) = \frac{1}{z} + 1$.

Анализирајмо аналитичност односно конформност билинеарног пресликавања. Како је извод билинеарне функције

$$w'(z) = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0,$$

закључујемо да је w аналитичка на $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. Такође, w је аналитичка и за $z = \infty$ јер је $w\left(\frac{1}{z}\right)$ аналитичка у $z = 0$ (Дефиниција 2.6). Што се тиче конформности билинеарног пресликавања, по Теореми 2.10, довољно је да проверимо конформност у тачкама $z = -\frac{d}{c}$ и $z = \infty$. У оба случаја, потребно је да одредимо углове између два вектора на Комплексној сфери у тачки $z = \infty$. Зато користимо следећу дефиницију.

Дефиниција 3.2. *Угао између путева $\gamma_1 : [a, b] \to \overline{\mathbb{C}}$ и $\gamma_2 : [a, b] \to \overline{\mathbb{C}}$ у тачки $z = \infty$ је угао између кривих $\frac{1}{\gamma_1}$ и $\frac{1}{\gamma_2}$ у тачки $w = 0$.*

Ова дефиниција је оправдана и геометријски. Када се стереографском пројекцијом путеви γ_1 и γ_2 пресликају на комплексну сферу, угао добијених кривих у тачки $(0, 0, 1)$ је једнак угловима између кривих $\frac{1}{\gamma_1}$ и $\frac{1}{\gamma_2}$ у тачки $w = 0$ што може да се докаже техникама диференцијалне геометрије.

Ако функција $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ чува углове кривих у бесконачности као у претходној дефиницији, тада кажемо да је f конформна у бесконачности. Тако добијамо следећи критеријум конформности на $\overline{\mathbb{C}}$.

Лема 3.1. *Нека $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.*

- *Ако је $f(z_0) = \infty$ за $z_0 \in \mathbb{C}$ тада, f је конформно у z_0 ако је $\frac{1}{f}$ конформно у z_0.*
- *Пресликавање f је конформно за $z = \infty$ акко је f^{-1} конформно за $w = f(\infty)$.*

Доказ: Нека је $f(z_0) = \infty$ и нека функција $\frac{1}{f}$ чува углове у тачки z_0 и нека су γ_1 и γ_2 глатке криве које се секу у z_0. Тада, угао између њихових слика $\gamma_{1f} = f \circ \gamma_1$ и $\gamma_{2f} = f \circ \gamma_2$ се по Дефиницији 3.2 своди на угао кривих $\frac{1}{\gamma_{1f}} = \gamma_{1\frac{1}{f}}$ и $\frac{1}{\gamma_{2f}} = \gamma_{2\frac{1}{f}}$ у тачки z_0 који је због конформности пресликавања $\frac{1}{f}$ једнак углу између кривих γ_1 и γ_2.

Други део тврђења следи из чињенице да ако функција f има инверзну функцију на околини тачке z_0, тада f је конформно у z_0 акко је f^{-1} конформно у $f(z_0)$. $\square$

Обратите пажњу да ако је f конформна у тачки $z \in \mathbb{C}$, због Теореме 2.10, постоји околина $\mathcal{U}$ тачке z на којој је функција f бијекција те конформност у бесконачности има смисла проверавати помоћу функције f^{-1}.

Теорема 3.3. *Билинеарно пресликавање $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ је конформно на $\overline{\mathbb{C}}$.*

Доказ: Проверимо конформност за $z = -\frac{d}{c}$ и $z = \infty$. Како је $w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$, по претходној леми, довољно је да проверимо конформност функције $\frac{1}{w} = \frac{cz+d}{az+b}$ у тачки $z = -\frac{d}{c}$ а она следи из чињенице да је

$$\left(\frac{1}{w}\right)'(z) = \frac{bc - ad}{(az+b)^2} \neq 0 \quad \text{за} \quad z = -\frac{c}{d}.$$

У доказу Теореме 3.1 смо видели да је $w^{-1}(z) = \frac{dz-b}{a-cz}$. Како је извод претходне функције различит од нуле за $z = \frac{a}{c}$, закључујемо да је w конформна за $z = \infty$. $\square$

Отуда, билинеарно пресликавање, зато што је конформно пресликавање, чува углове између вектора што имплицира да ће Еуклидску мрежу да слика у мрежу кривих које се секу под правим угловима као што илуструје график испод.

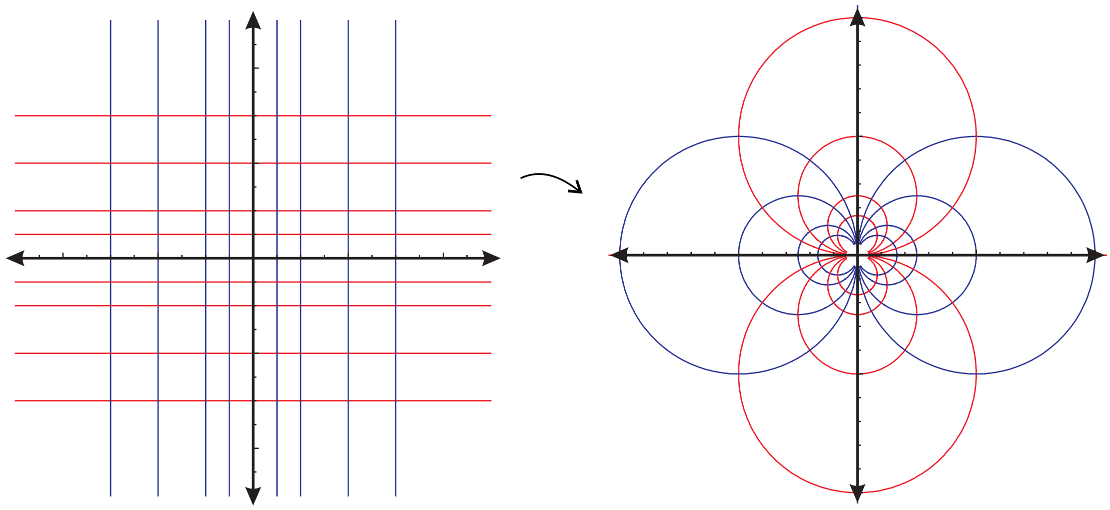


График 12: Слика Еуклидске мреже пресликавањем $f(z) = \frac{1}{z}$.

На Графику 12 такође видимо да пресликавање $w(z) = \frac{1}{z}$ Еуклидске праве пресликава у кружнице које се секу у координатном почетку. Показаћемо да сва билинеарна пресликавања имају аналогну особину.

Дефиниција 3.3. *Кружнице у простору $\overline{\mathbb{C}}$ су кружнице комплексне равни $\mathbb{C}$ као и праве равни $\mathbb{C}$ којима је додата тачка $z = \infty$.*

Објаснимо мотивацију за претходну дефиницију. Присетимо се стереографске пројекције која Еуклидску раван пресликава на јединичну сферу. Тада, слика праве l еуклидске равни ће да буде пресек сфере и равни која пролази кроз тачку $(0, 0, 1)$ и садржи праву l. Отуда, слика праве l је кружница која садржи тачку $(0, 0, 1)$ као што илуструје График 13.

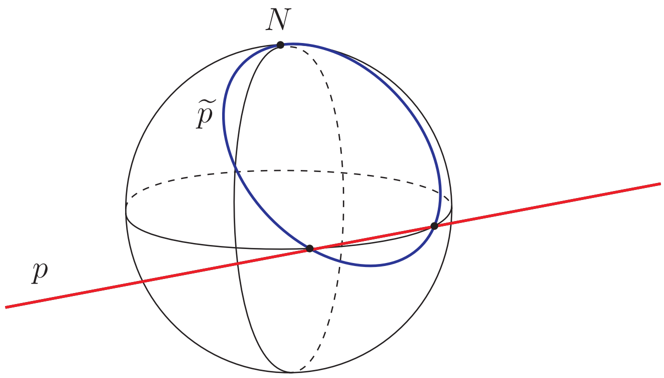


График 13: Права p и њена стереографска пројекција $\widetilde{p}$.

Теорема 3.4. *Билинеарно пресликавање кружницу простора* $\overline{\mathbb{C}}$ *пресликава у кружницу простора* $\overline{\mathbb{C}}$.

Доказ: Докажимо да тврђење важи за функцију $w(z) = \frac{1}{z}$. Кружница Еуклидске равни са центром у (x_0, y_0) полупречника R представља скуп тачака $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ које задовољавају једначину:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2;$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0.$$

Ако претходну једначину помножимо константом A, закључујемо да произвољним $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ одговара јединствена кружница одређена једначином:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D \overset{(*)}{=} 0.$$

При том, за $A = 0$ једначина $(*)$ одређује јединствену праву Еуклидске равни.

У комплексној равни, једначина $(*)$ има форму

$$Az\overline{z} + B\frac{z + \overline{z}}{2} + C\frac{z - \overline{z}}{2i} + D = 0$$

или еквивалентно:

$$Az\overline{z} + Ez + \overline{E}\overline{z} + D \overset{(**)}{=} 0$$

где је $E = \frac{1}{2}(B - iC)$. Тако закључујемо да једначина $(**)$ за одговарајуће $A, D \in \mathbb{R}$ и $E \in \mathbb{C}$ одређује сваку кружницу (Дефиниција 3.3) простора $\overline{\mathbb{C}}$.

Да би одредили слику кружнице дате једначином $(**)$ пресликавањем $w(z) = \frac{1}{z}$, довољно је да у једначини $(**)$ променљиву z заменимо са $\frac{1}{w}$. Отуда, слика кружнице $(**)$ је одређена једначином

$$A + E\overline{w} + \overline{E}w + Dw\overline{w} = 0$$

а ово има форму једначине $(**)$ па је такође кружница простора $\overline{\mathbb{C}}$.

Нека је сада $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ произвољна билинеарна функција. Тада w можемо да представимо са:

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2}\frac{1}{z + \frac{d}{c}} = \alpha + \frac{\beta}{z + \gamma}.$$

Дакле, произвољна билинеарна функција је композиција транслације за вектор γ, функције $\frac{1}{z}$, линеарне функције са коефицијентом β (дакле, композиција ротације и хомотетије) и транслације за вектор α. Како свака од наведених функција кружнице простора $\overline{\mathbb{C}}$ слика у кружнице простора $\overline{\mathbb{C}}$, закључујемо да то својство има и w као њихова композиција. □

Билинеарна пресликавања чувају и симетрију тачке у односу на кружницу.

Дефиниција 3.4. *Кажемо да је тачка z симетрична тачки z' у односу на кружницу $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$ ако су тачке z_0, z, z' колинеарне и ако важи:*

$$|z' - z_0|\,|z - z_0| = R^2.$$

Геометријски, да би конструисали тачку z' симетричну тачки z у односу на кружницу $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$, прво конструишемо тачку T на кружници K тако да угао $\measuredangle Tzz_0$ буде прав. Тада, тачка z' је пресек тангенте на круг K у тачки T и праве zz_0. Услов дефиниције важи зато што су троуглови $\triangle z_o z' T$ и $\triangle z_0 z T$ слични па је $d(z_0, z) : R = R : d(z_0, z')$ као што је илустровано на слици испод.

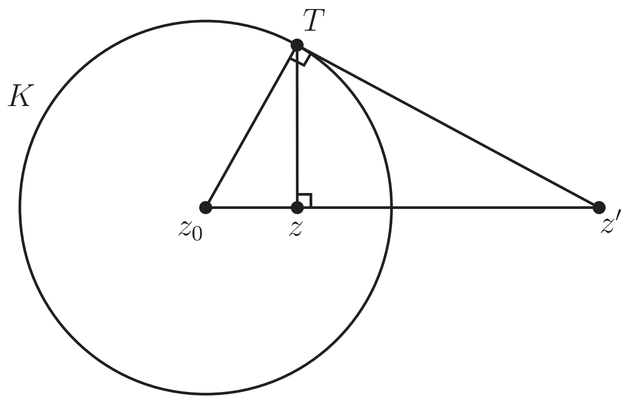


График 14: Конструкција тачке z' симетричне тачки z у односу на круг K.

Постоји критеријум симетричности у односу на кружницу који не користи метрику. Присетимо се из геометрије да су две кружнице нормалне акко су им таненте у заједничкој тачки нормалне или елвивалентно ако њихове тангенте у заједничкој тачки садрже центре кружница.

Теорема 3.5. *Тачке z и z' су симетричне у односу на кружницу K акко је сваки круг који садржи тачке z и z' нормалан на кружницу K.*

Доказ: ($\Rightarrow$) Нека су z и z' симетричне у односу на кружницу K са центром O. Нека је K' произвољна кружница са центром у O' која садржи z и z'. Нека је T додирна тачка тангенте из тачке O на кружницу K' као што је приказано на Графику 15.

Знамо из Елементарне геометрије да је квадрат дужине тангенте на круг једнак производу дужина одсечака које формира права из исте тачке. Тако, закључујемо да је:

$$d(O, T)^2 = d(O, z)d(O, z'),$$

Због симетричности у односу на кружницу K важи да је $d(O, z)d(O, z') = R^2$, закључујемо да је $d(O, T) = R$. Како је $\measuredangle OTO' = \frac{\pi}{2}$, права $O'T$ је тангента на кружницу K што даље имплицира да је угао тангенти на кружнице K и K' у заједничкој тачки прав односно, кружнице K и K' су нормалне.

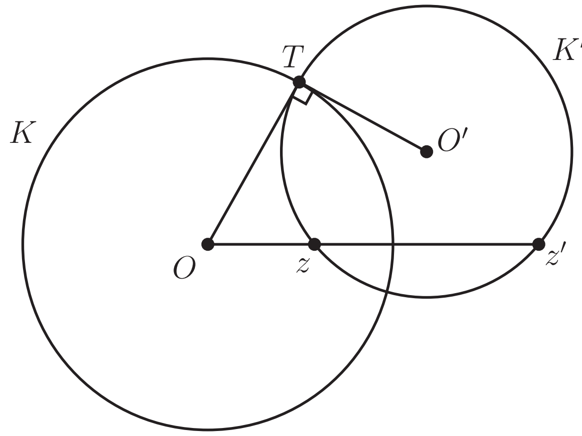


График 15: Права OT је тангента на круг K' па је $\measuredangle OTO'$ прав.

($\Leftarrow$) Нека је свака кружница која садржи тачке z и z' нормална на K.

Ако z, z' и O нису колинеарне, тада постоји јединствена кружница K' описана око троугла $\triangle zOz'$ која је по претпоставци нормална на K. Нека је T пресечна тачка кружница K и K'. Тада, права OT је тангента на кружницу K' (јер $\measuredangle OTO' = \frac{\pi}{2}$) што није могуће јер и O и T припадају кружници K'. Дакле, O, z и z' су колинеарне.

Нека је сада T произвољна тачка кружнице K која не припада правој zz'. Тада, због услова нормалности, права OT је тангента на кружницу K' одређену тачкама z, z' и T. Како је квадрат дужине тангенте на круг једнак производу дужина одсечака из исте тачке, добијамо да је:

$$d(O,z)d(O,z') = d(0,T)^2 = R^2$$

где је R полупречник кружнице K. $\square$

Претходну теорему можемо да искористимо и дефинишемо симетричност у односу на све кружнице (Дефиниција 3.3) простора $\overline{\mathbb{C}}$.

Дефиниција 3.5. *Кажемо да су тачке z и z' симетричне у односу на кружницу K простора $\overline{\mathbb{C}}$ ако је свака кружница која садржи тачке z и z' нормална на K.*

Теорема 3.6. *Ако су тачке z и z' симетричне у односу на кружницу K простора $\overline{\mathbb{C}}$, тада су $w(z)$ и $w(z')$ симетричне у односу на кружницу $w(K)$ за произвољно билинеарно пресликавање $w : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.*

Доказ: Нека су z и z' симетричне у односу на кружницу K. По Теореми 3.4 знамо да је $w(K)$ кружница у $\overline{\mathbb{C}}$. Докажимо да је $w(z)$ симетрично тачки $w(z')$ у односу на кружницу $w(K)$. Нека је K' произвољна кружница која садржи $w(z)$ и $w(z')$. Тада, $w^{-1}(K')$ је кружница (w^{-1} је билинеарно, Теорема 3.1) која садржи тачке z и z' па мора да буде нормална на K. Како је билинеарно пресликавање конформно (Теорема 3.3), угао између кривих K и $w^{-1}(K')$ једнак је углу између њихових слика $w(K)$ и $w\big(w^{-1}(K')\big)$. Отуда, кружнице $w(K)$ и K' су нормалне. $\square$

Као што смо до сада видели, свако билинеарно пресликавање је бијективно, обострано непрекидно те представља својеврсни хомеоморфизам простора $\overline{\mathbb{C}}$ на самог себе. Међутим, због особине чувања кружница комплексне равни, помоћу билинеарних пресликавања можемо да докажемо хомеоморфност специфичних области простора $\overline{\mathbb{C}}$.

Теорема 3.7. *Постоји јединствено билинеарно пресликавање које различите тачке z_1, z_2, z_3 простора $\overline{\mathbb{C}}$ пресликава у различите тачке w_1, w_2, w_3 простора $\overline{\mathbb{C}}$.*

Доказ: Нека су z_1, z_2, z_3 произвољне различите тачке простора $\overline{\mathbb{C}}$. Тада, пресликавање $w_{\{z_1,z_2,z_3\}} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ дато са:

$$w_{\{z_1,z_2,z_3\}}(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

је билинеарно и слика z_1, z_2, z_3 редом у $0, \infty, 1$.

Тада, за различите $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, пресликавање $w^{-1}_{\{w_1,w_2,w_3\}}$ је билинерно и $0, \infty, 1$ слика редом у w_1, w_2, w_3 што значи да пресликавање $w = w^{-1}_{\{w_1,w_2,w_3\}} \circ w_{\{z_1,z_2,z_3\}}$, које је билинеарно на основу Теореме 3.2, слика z_1, z_2, z_3 редом у w_1, w_2, w_3.

Докажимо сада јединственост пресликавања w. Нека је w' неко друго билнеарно пресликавање такво да је $w'(z_i) = w_i$ за $i = 1, 2, 3$. Тада, за билинеарно пресликавање $W = w_{\{w_1,w_2,w_3\}} \circ w' \circ w^{-1}_{\{z_1,z_2,z_3\}}$ важи:

$$W(0) = w_{\{w_1,w_2,w_3\}}\Big(w'\big(w^{-1}_{\{z_1,z_2,z_3\}}(0)\big)\Big) = w_{\{w_1,w_2,w_3\}}\big(w'(z_1)\big) = w_{\{w_1,w_2,w_3\}}(w_1) = 0;$$
$$W(\infty) = w_{\{w_1,w_2,w_3\}}\Big(w'\big(w^{-1}_{\{z_1,z_2,z_3\}}(\infty)\big)\Big) = w_{\{w_1,w_2,w_3\}}\big(w'(z_2)\big) = w_{\{w_1,w_2,w_3\}}(w_2) = \infty;$$
$$W(1) = w_{\{w_1,w_2,w_3\}}\Big(w'\big(w^{-1}_{\{z_1,z_2,z_3}\}(1)\big)\Big) = w_{\{w_1,w_2,w_3\})}\big(w'(z_3)\big) = w_{\{w_1,w_2,w_3\}}(w_3) = 1..$$

Како је $W(z) = \frac{az+c}{cz+d}$, из услова $W(\infty) = \infty$ односно $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{az+c}{cz+d} = \frac{a}{c} = \infty$ добијамо $c = 0$ тј. функција $W(z)$ је облика $W = \alpha z + \beta$. Услов $W(0) = 0$ имплицира да је $\beta = 0$ а ако искористимо и услов да је $W(1) = 1$ добијамо $\alpha = 1$. Дакле, функција W је идентичко пресликавање $W(z) = z$ тј. $W = \mathbb{1}_{\overline{\mathbb{C}}}$. Отуда:

$$w_{\{w_1,w_2,w_3\}} \circ w' \circ w^{-1}_{\{z_1,z_2,z_3\}} = \mathbb{1}_{\overline{\mathbb{C}}} \quad \text{или еквивалентно} \quad w' = w^{-1}_{\{w_1,w_2,w_3\}} \circ w_{\{z_1,z_2,z_3\}}$$

а ово је управо функција w из првог дела доказа. □

Приметимо да у дефиницији пресликавања $w_{\{z_1,z_2,z_3\}}$, било која од тачака z_i може да буде 0 или ∞ што нам омогућава да дефинишемо билинеарно пресликавање $w : \{z_1, z_2, z_3\} \overset{\text{„на"}}{\to} \{w_1, w_2, w_3\}$ за произвољан избор различитих тачака z_i, w_i, $i = 1, 2, 3$ простора $\overline{\mathbb{C}}$.

Дефиниција 3.6. *Ако постоји билинеарно пресликавање $w : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$, тада кажемо да су области $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ билинеарно изоморфне.*

Теорема 3.8. *Било која два круга простора $\overline{\mathbb{C}}$ су билинеарно изоморфни.*

Доказ: Нека су $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ произвољни кругови простора $\overline{\mathbb{C}}$ (области чија је граница кружница по Дефиницији 3.3). Тада, $\partial\mathcal{D}_1 = K_1$ и $\partial\mathcal{D}_2 = K_2$ су кружнице. Претпоставимо да су кружнице K_i оријентисане тако да њиховим обиласком тачке области $\mathcal{D}_i$ остају са леве стране (као што је илустровано на Графику 16).

Нека су $z_1, z_2, z_3 \in K_1$ и $w_1, w_2, w_3 \in K_2$ различите тачке одабране сагласно оријентацији кривих K_1 и K_2. Тада, по Теореми 3.7, постоји јединствено билинеарно пресликавање које тачке z_1, z_2, z_3 слика редом у w_1, w_2, w_3. Тада, K_1 је јединствена кружница која пролази кроз тачке z_1, z_2, z_3 а K_2 јединствена кружница која пролази кроз тачке $w(z_1), w(z_2), w(z_3)$. Како је по Теореми 3.4 $w(K_1)$ кружница која пролази

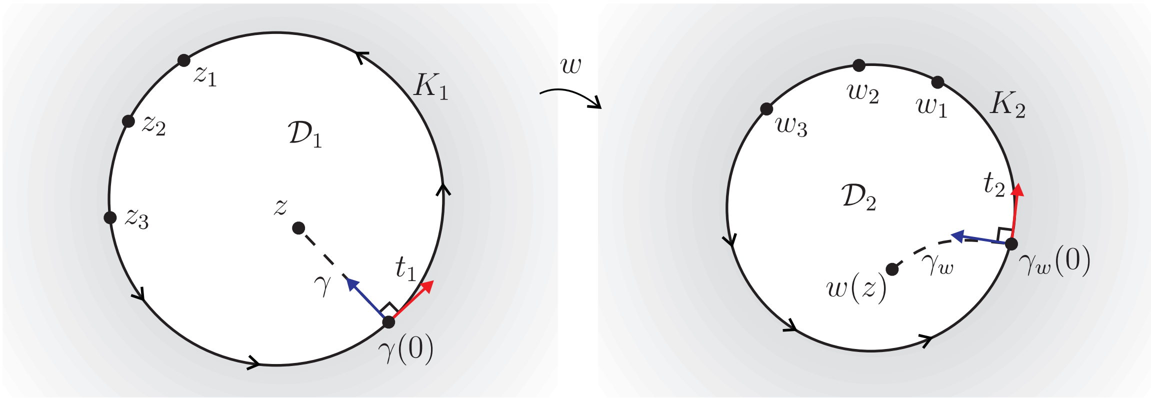


График 16: Билинеарно пресликавање кругова $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$.

кроз $w(z_1), w(z_2), w(z_3)$, закључујемо да је $w(K_1) = K_2$. При том, пресликавање w чува одабрану оријентацију кружница.

Докажимо још да је $w(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2$. За произвољно $z \in \mathcal{D}_1$, постоји део полупречника односно пут $\gamma : [0,1] \to \overline{\mathbb{C}}$ који не сече кружницу K_1 и повезује тачку $\gamma(0)$ са кружнице и тачку $z = \gamma(1)$ (График 16). Тада, $\gamma_w = w \circ \gamma$ је гладак пут који не сече K_2 и повезује тачку $\gamma_w(0) \in K_2$ и тачку $\gamma_w(1) = w(z)$. Нека је t_1 тангентни вектор на кружницу K_1 у тачки $\gamma(0)$ а t_2 тангентни вектор слике кружнице $w(K_1) = K_2$ у тачки $\gamma_f(0)$. При том, нека је вектор t_1 сагласан са одабраном оријентацијом кружнице K_1. Због конформности пресликавања w, вектори $\gamma_w'(0)$ и t_2 су ортогонални и имају исту оријетацију као и вектори $\gamma'(0)$ и t_1. Како је $\gamma'(0)$ лево од t_1 закључујемо да је $\gamma_w'(0)$ лево од t_2 што даље доказује да је тачка $w(z)$ са леве стране кружнице K_2 тј. $w(z) \in \mathcal{D}_2$. □

Пример 3.1. *Описати сва билинеарна пресликавања која горњу полураван* $\mathcal{P} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ *пресликавају на јединични круг* $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

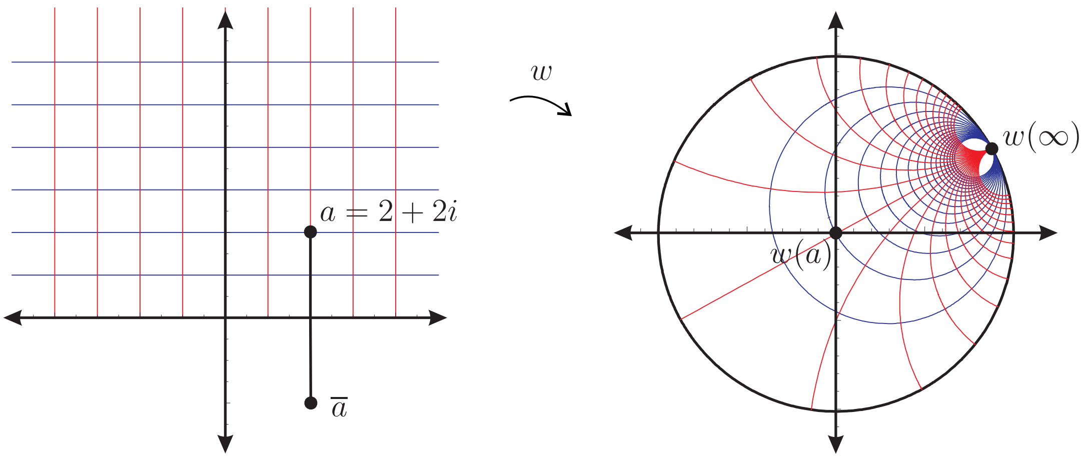


График 17: Билинеарно пресликавање горње полу-равни у јединични круг.

Решење: Користимо особину да билинеарно пресликавање чува симетрију у односу на кружницу. Нека је $w : \mathcal{P} \to \mathcal{D}$ произвољно билинеарно пресликавање. Тада, постоји $a \in \mathcal{P}$ тако да је $w(a) = 0$. Како је $\overline{a}$ симетрична тачки a у односу на кружницу $K_1 = \partial\mathcal{P}$ а тачка $z = \infty$ симетрична тачки $z = 0$ у односу на кружницу $K_2 = \partial\mathcal{D}$, закључујемо да је $w(\overline{a}) = \infty$. То значи да пресликавање w има форму:

$$w(z) = \alpha \frac{z - a}{z - \overline{a}} \quad \text{за неко} \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Опишимо још константу α. Како се $\partial\mathcal{P}$ слика у $\partial\mathcal{D}$, за произвољно $z = x \in \mathbb{R}$ важи да је $w(x) \in \partial\mathcal{D}$ односно

$$1 = |w(x)| = \left|\alpha \frac{x-a}{x-\overline{a}}\right| = |\alpha| \frac{|x-a|}{|\overline{x-a}|} = |\alpha|.$$

Дакле $|\alpha| = 1$ па је $\alpha = e^{i\varphi}$ за неко $\varphi \in [0, 2\pi]$ што имплицира да је пресликавање w облика $w(z) = e^{i\varphi}\frac{z-a}{z-\overline{a}}$. График 17 илуструје слику Еуклидске мреже добијеним пресликавањем. □

Пример 3.2. *Описати сва билинеарна пресликавања круга* $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ *у самог себе.*

Решење: Нека је као у претходном примеру $w : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ билинеарно и нека је $w(a) = 0$. Како је тачка $z = \frac{1}{\overline{a}}$ симетрична тачки $z = a$ односу на кружницу $\partial\mathcal{D}$ (доказати) а $w = \infty$ симетрична тачки $w = 0$, закључујемо да је $w\left(\frac{1}{\overline{a}}\right) = \infty$ што имплицира да је w облика:

$$w(z) = \alpha \frac{z-a}{z-\frac{1}{\overline{a}}} = \frac{\alpha}{\overline{a}} \frac{z-a}{z\overline{a}-1} = \beta \frac{z-a}{z\overline{a}-1} \quad \text{за неко} \quad \beta \in \mathbb{C}.$$

Да би ближе одредили β, користимо услов да $w(1) \in \partial\mathcal{D}$ јер $1 \in \partial\mathcal{D}$ а билинеарно пресликавање кружнице слика у кружнице. Отуда:

$$1 = |w(1)| = |\beta| \frac{|1-a|}{|\overline{a-1}|} = |\beta|.$$

Дакле, $\beta = e^{i\varphi}$ за неко $\varphi \in [0, 2\pi]$ па је $w(z) = e^{i\varphi}\frac{z-a}{z\overline{a}-1}$. Пресликавање w је илустровано на графику испод. □

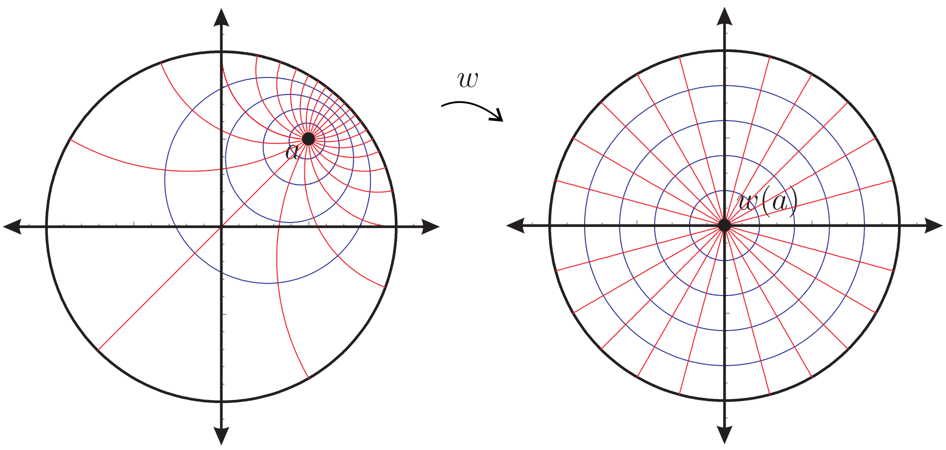


График 18: Билинеарно пресликавање јединичног круга у јединични круг.

3.2 Степена функција комплексне промењиве

У реалној анализи, посебан тип елементарних функција представљају степене функције облика $f(z) = x^\alpha$ где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\alpha > 0$. Међутим, у пољу комплексних бројева, $n-$ти корен не може да буде дефинисан као функција. Због тога, степене функције које (у овом тренутку) можемо да дефинишемо на скупу комплексних бројева су облика

$$w(z) = z^n = zz\cdots z \quad \text{где} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Особине степених функција су дате у следећем тврђењу.

Теорема 3.9. *За произвољно $n \in \mathbb{N}$ важи:*

- *степена функција $w(z) = z^n$ је, аналитичка на $\mathbb{C}$;*
- $(z^n)' = nz^{n-1}$*;*
- *за $n > 1$, функција $w(z) = z^n$ је конформна на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Први и други део теореме се лако доказују индукцијом по $n \in \mathbb{N}$. Како је извод степене функције $w(z) = z^n$ за $n > 1$ једнак нули за $z = 0$, следи да је Јакобијан степене функције једнак нули за $z = 0$ што имплицира да је $z = 0$ критична тачка степене функције.

Ако посматрамо модуо и аргумент комплексног броја z, помоћу особине $|z^n| = |z|^n$ и $\arg z^n = n \arg z$, закључујемо да степена функција у експоненцијалном облику има форму:

$$w(\rho e^{i\varphi}) = (\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi}.$$

Експоненцијална форма илуструје да степена функција није конформна у нули. Наиме, ако посматрамо тангентне векторе на две криве у нули, њихове слике ће да буду вектори $n-$пута увећаног аргумента што даље имплицира да угао између слика два вектора неће да буде исти као угао између њих.

За разлику од степених функција реалне промењљиве, ни једна комплексна функција $w = z^n, n > 1$ није бијекција на домену. То је последица особине да једначина $w^n = z$ има у скупу $\mathbb{C}$ тачно $n-$различитих решења што значи да постоји $n-$комплексних бројева који имају исти $n-$ти степен односно функција $w = z^n$ није „1-1”. Нека тачке $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ имају исти $n-$ти степен. Тада је:

$$z_1^n = z_2^n \Leftrightarrow \rho_1^n e^{in\varphi_1} = \rho_2^n e^{in\varphi_2} \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge n\varphi_1 = n\varphi_2 + 2k\pi \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge \varphi_1 = \varphi_2 + \frac{2k\pi}{n}.$$

Тако закључујемо да ће пресликавање $w = z^n$ да буде „1-1” на области $\mathcal{D}$ акко $\mathcal{D}$ не садржи тачке z_1 и z_2 истог модула такве да $\arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2k\pi}{n}$ за $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Пример 3.3. *Степеном функцијом $f(z) = z^n$ пресликати област $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\}$.*

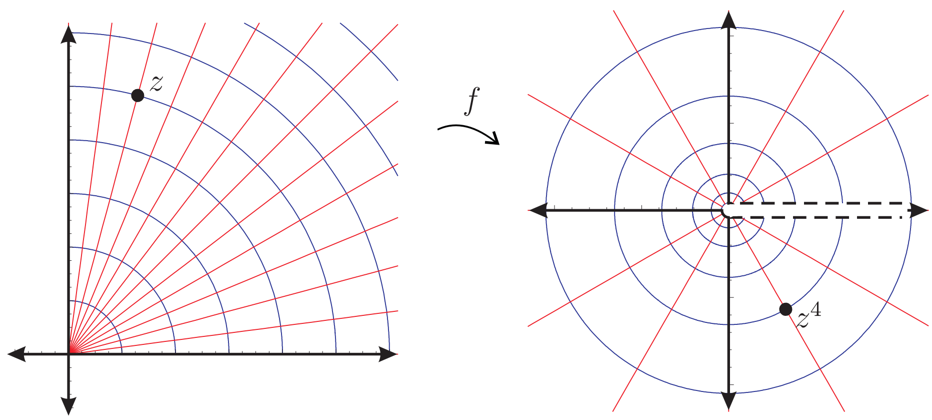


График 19: Пресликавање $f(z) = z^4$ унутрашњости првог квадранта.

Решење: Приметимо да је $f(z) = z^n$ „1-1” на области $\mathcal{D}$. Ако искористимо експоненцијални облик степене функције, лако закључујемо да се полуправе $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \alpha\}$

сликају у полуправе $\{w \in \mathbb{C} \mid \arg w = n\alpha\}$ док се кружнице $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \rho\}$ сликају у кружнице $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| = \rho^n\}$ као што је илустровано на Графику 19. Отуда, слика области $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\}$ је област $\{w \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg w < 2\pi\}$ а ово је скуп $\mathbb{C}$ без позитивног дела реалне осе. $\square$

Како је степена функција „на” на $\mathbb{C}$ а „1-1” на скупу $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\}$, она је бијекција посматрана као функција $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Анализирајмо њену инверзну функцију $f^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \to \mathcal{D}$. Ова функција је конформна на домену, пресликајмо њоме Еуклидску мрежу. Како је

$$f(\rho e^{i\varphi}) = \rho^n e^{in\varphi} = \rho^n \cos n\varphi + i\rho^n \sin n\varphi,$$

скуп $f^{-1}\big(\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w = u_0\}\big)$ чине све тачке $z = \rho e^{i\varphi}$ за које је $\rho^n \cos n\varphi = u_0$ или еквивалентно $\rho = \sqrt[n]{\frac{u_0}{\cos n\varphi}}$. Слично, инверзна слика праве $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w = v_0\}$ је скуп тачака $z = \rho e^{i\varphi}$ за које је $\rho = \sqrt[n]{\frac{v_0}{\sin n\varphi}}$ као што је илустровано на графику испод.

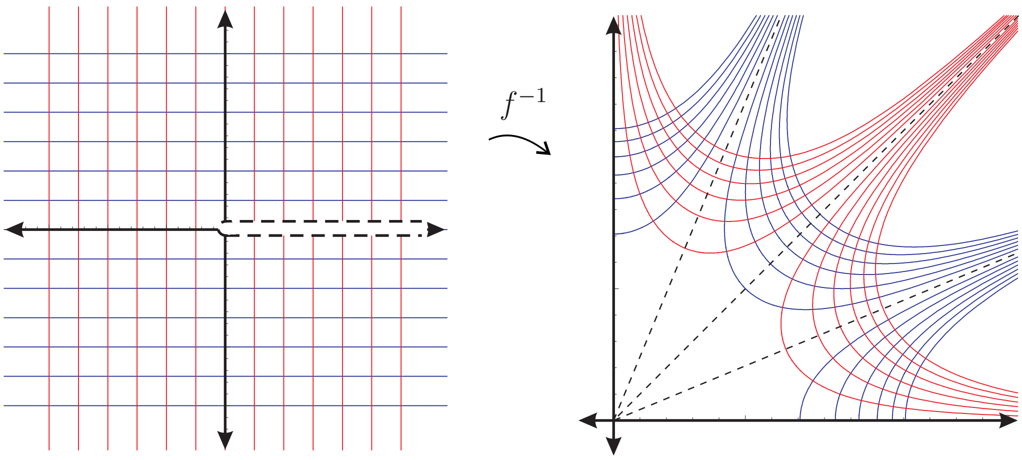


График 20: Функција f^{-1} за $f(z) = z^4$ на скупу $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

3.3 Функција Жуковског

У Комплексној анализи, број z и његова реципрочна вредност $\frac{1}{z}$ имају занимљива својства. На пример, знамо да је $|z| > 1$ акко је $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$. Поставља се питање шта се дешава са средњом вредношћу бројева z и $\frac{1}{z}$ тј. има ли она значаја за анализу комплексних бројева. У ту сврху, уводимо тзв. функцију Жуковског[5]:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Ова функција има истакнуту примену у аеродинамици и динамичким системима, а као што ћемо ускоро да видимо, врло је значајна за тригонометријске функције комплексне променљиве.

Теорема 3.10. *Функција Жуковског је аналитичка на* $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ *и конформна на* $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{-1, 1\}$.

[5] Николай Егорович Жуковский 1847-1921, руски математичар, физичар и инжењер.

Доказ: Прво, функција $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ је линеарна комбинација идентичке функције која је аналитичка у свакој тачки и билинеарне функције која није аналитичка у нули. Отуда, f је аналитичка на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Извод функције Жуковског је облика:

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$$

и различит је од нуле за све $z \neq \pm 1$. Тако закључујемо (Теорема 2.10) да је f конформна за свако $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, 1\}$. Како је $f(0) = \infty$, користећи Лему 3.1, функција f ће да буде конформна у $z = 0$ ако је $\frac{1}{f}$ конформна за $z = 0$. Како је

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z) = 2\frac{1 - z^2}{(1 + z^2)^2}$$

и важи да је $\left(\frac{1}{f}\right)'(0) \neq 0$, закључујемо да је f конформна у $z = 0$. За конформност у бесконачности, приметимо да је $f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{z} + z) = f(z)$ што даље имплицира да се функција f на околини бесконачности понаша исто као на околини нуле а управо смо показали да је f конформна у нули.

Испитајмо сада конформност функције Жуковског за $z = \pm 1$. Полазимо од једнакости

$$\frac{f(z) - 1}{f(z) + 1} = \frac{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1}{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1} = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 + 2z + 1} = \left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)^2.$$

Ако је $w_1(z) = \frac{z-1}{z+1}$, решавањем горње једначине по $f(z)$ добијамо да је

$$f(z) = \frac{1 + w_1^2(z)}{1 - w_1^2(z)}.$$

Дакле, функцију f можемо да представимо као композицију $w_2 \circ g \circ w_1$ где је $g(z) = z^2$ и $w_2(z) = \frac{1+z}{1-z}$. Како су w_1 и w_2 билинеарне функције, оне су конформне на $\overline{\mathbb{C}}$ (Теорема 3.3), а функција g као степена функција није конформна за $z = 0$ и $z = \infty$. Тако закључујемо да f није конформна ако је $w_1(z) = 0$ тј. $z = 1$ и $w_1(z) = \infty$ тј. $z = -1$. □

У доказу претходне теореме смо видели да је $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ што одмах имплицира да функција Жуковског није „1-1”. Опишимо области на којима ће функција Жуковског да буде „1-1”. Нека је $f(z_1) = f(z_2)$ или еквивалентно $f(z_1) - f(z_2) = 0$. Тада,

$$0 = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) - \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) = \frac{z_1^2 z_2 + z_2 - z_2^2 z_1 - z_1}{2z_1 z_2} = \frac{z_1 - z_2}{2z_1 z_2}(z_1 z_2 - 1).$$

Дакле, различите тачке z_1 и z_2 ће да имају исте слике акко је $z_1 z_2 = 1$ односно акко је z_1 реципрочна вредност од z_2.

Пример 3.4. *Функцијом Жуковског пресликати област* $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

Решење: Одмах видимо да је f „1-1” на $\mathcal{D}$ јер реципрочна вредност комплексног броја модула већег од 1 има модуо мањи од 1. Ако искористимо експоненцијални облик комплексног броја добијамо:

$$\begin{aligned} f(\rho e^{i\varphi}) &= \frac{1}{2}\left(\rho e^{i\varphi} + \left(\rho e^{i\varphi}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\rho e^{i\varphi} + \rho^{-1} e^{i(-\varphi)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \rho^{-1}(\cos\varphi - i\sin\varphi)\right). \end{aligned}$$

Дакле, реални и имагинарни део функције Жуковског су облика

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2}\big(\rho + \frac{1}{\rho}\big)\cos\varphi, \qquad v(\rho,\varphi) = \frac{1}{2}\big(\rho - \frac{1}{\rho}\big)\sin\varphi.$$

Тада, слика круга $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \rho_0\}$ је крива одређена једначинама:

$$u = \frac{1}{2}\big(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0}\big)\cos\varphi$$
$$v = \frac{1}{2}\big(\rho_0 - \frac{1}{\rho_0}\big)\sin\varphi$$

а ово су параметарске једначине елипсе (Анализа 4):

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\big(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0}\big)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\big(\rho_0 - \frac{1}{\rho_0}\big)^2} = 1.$$

Приметимо да ове елипсе имају жиже у тачкама 1 и -1 и да када се ρ приближава јединици вертикална висина елипсе тежи нули као што се види на графику испод.

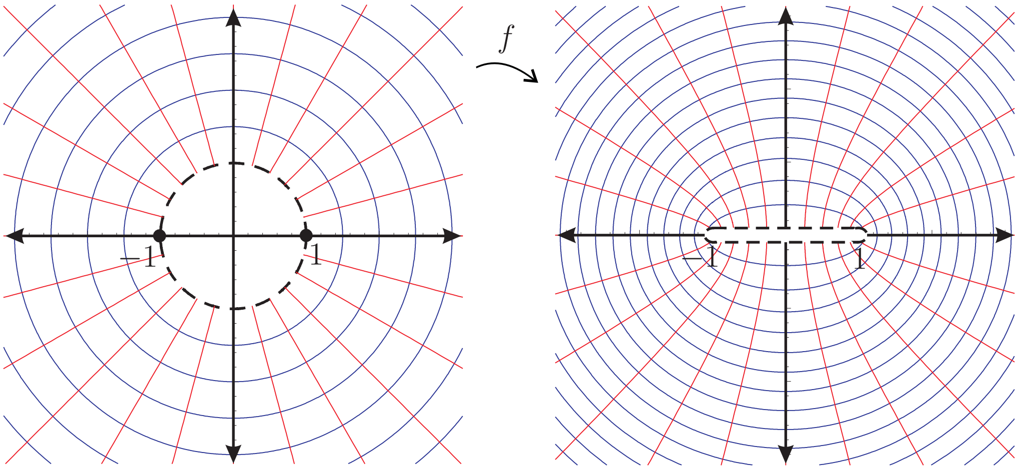


График 21: Слика области $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ функцијом Жуковског.

Аналогно, слика полу-праве $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1, \arg z = \varphi\}$ је одређена једначинама

$$u = \frac{1}{2}\big(\rho + \frac{1}{\rho}\big)\cos\varphi_0$$
$$v = \frac{1}{2}\big(\rho - \frac{1}{\rho}\big)\sin\varphi_0$$

а ово су параметарске једначине хиперболе:

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0} - \frac{v^2}{\cos^2\varphi_0} = 1,$$

која такође има жиже у $-1, 1$. Приметимо да се свака од ових хипербола приближава реалној оси на интервалу $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ али да ни једна не сече реалну осу јер се из параметарских једначина види да је $v = 0$ само за $\rho = 1$. Отуда, слика области $\mathcal{D}$ је скуп $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1, 1]\}$. Због конформности функције Жуковског на $\mathcal{D}$, фамилија елипси је ортогонална на фамилију хипербола као што илуструје График 21. $\square$

Занимљиво је видети шта се добија када функцијом Жуковског пресликамо скуп $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ и аналогну мрежу полу-правих и концентричних кругова. Амбициозни читаоци могу да спроведу анализу као у претходном примеру. На крају, приказаћемо још један график, не толико из теоретских већ из чисто естетских разлога.

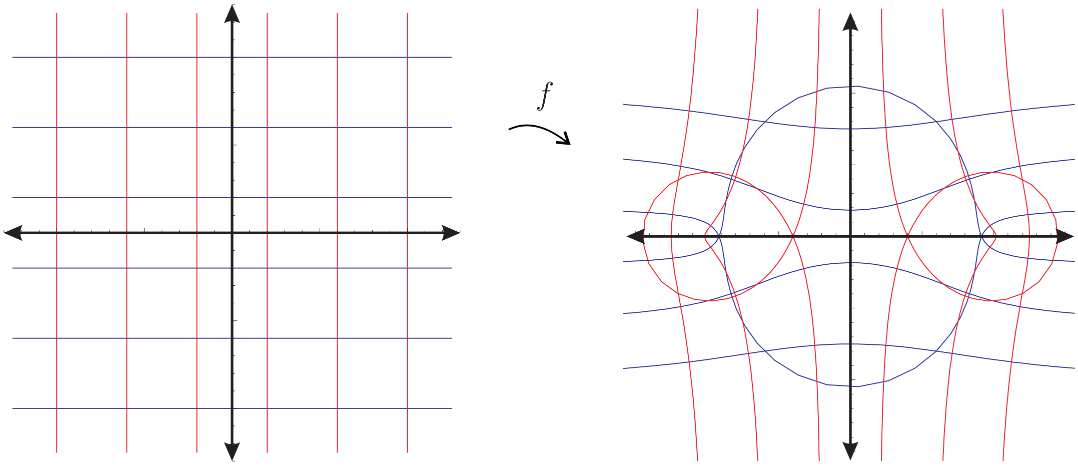


График 22: Пресликавање Еуклидске мреже функцијом Жуковског.

3.4 Експоненцијална функција $f(z) = e^z$

Експоненцијална функција реалне промењиве $f(x) = a^x$ може да се дефинише за свако $a > 0$. При том, за $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, вредност $a^{\frac{m}{n}}$ се рачуна као $\sqrt[n]{a^m}$ док се вредност a^α за $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ рачуна помоћу граничне вредности $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a^{m_k}}$ где је $\left(\frac{m_k}{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ низ рационалних бројева који конвергира ка α. Очигледно да ову методу не можемо да користимо за дефинисање експоненцијалне функције на скупу комплексних бројева због употребе корена, зато овде користимо нешто другачији приступ.

Ојлерова[6] константа $e \in \mathbb{R}$ је уведена као гранична вредност низа $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Тада, за произвољно $x \in \mathbb{R}$ важи:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}x} = e^x.$$

Дакле, експоненцијалну функцију реалне промењиве можемо да уведемо помоћу граничне не вредности $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ што нас наводи на закључак да експоненцијалну функцију комплексне промењиве, која треба да буде екстензија реалне експоненцијалне функције, можемо да уведемо помоћу аналогне граничне вредности.

Да би на описани начин дефинисали експоненцијалну функцију, покажимо прво да низ комплексних бројева $\left((1 + \frac{z}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира за свако $z \in \mathbb{C}$. Користимо Теорему 1.12 односно особину да ако је $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \rho_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n = \varphi_0$, тада је $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \rho_0 e^{i\varphi_0}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\left(1 + \frac{x+iy}{n}\right)\right|^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2nx + x^2 + y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2nx + x^2 + y^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2nx+x^2+y^2} \frac{2nx+x^2+y^2}{n^2} \frac{n}{2}} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2nx+x^2+y^2}{n^2} \frac{n}{2}} = e^x
\end{aligned}$$

[6] Leonhard Euler 1707-1783, швајцарски математичар, физичар, астроном, географ, логичар и инжењер.

Пре него што израчунамо граничну вредност низа аргумената, претпоставићемо да је реални део комплексног броја $1+\frac{1}{z}$ различит од нуле. Тада:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \arg\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right) &= \lim_{n\to\infty} n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\arg\left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{n+x}}{\frac{1}{n}}\\ &\overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{y}{1+\left(\frac{y}{n+x}\right)^2}\frac{-1}{(n+x)^2}}{\frac{-1}{n^2}} = y\end{aligned}$$

Ако је реални део комплексног броја $1+\frac{1}{z}$ једнак нули, можемо да претпоставимо да је његов имагинарни део различит од нуле (јер низ $\left((1+\frac{z}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ свакако конвергира за $z=0$) што нам омогућава да аргумент комплексног броја $1+\frac{1}{z}$ рачунамо помоћу функције arcctg и опет избегнемо дељење нулом.

Дакле, модуо и аргумент низа $\left((1+\frac{z}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергирају што имплицра да он конвергира ка $e^{\operatorname{Re} z}\big(\cos(\operatorname{Im} z)+i\sin(\operatorname{Im} z)\big)$ па можемо да уведемо следећу дефиницију.

Дефиниција 3.7. *Нека је $e\in\mathbb{R}$ Ојлерова константа. У скупу комплексних бројева функцију*

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

називамо експоненцијална функција комплексне променљиве.

Помоћу горе израчунатих граничних вредности, експоненцијалну функцију у тригонометријском облику можемо да дефинишемо са:

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Тада, заменом $x=0$ и $y=\varphi$ у претходној једначини, добијамо Ојлерову формулу:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \quad \text{за све} \quad \varphi\in\mathbb{R}.$$

Због асоцијативности операције множења комплексних бројева, за $m,n\in\mathbb{N}$ и произвољно $z\in\mathbb{C}$ важи $z^{m+n}=z^mz^n$. Аналогна особина важи и за произвољне степенове Ојлерове константе. За $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, где је $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ важи:

$$\begin{aligned}e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)\,e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)\\ &= e^{x_1+x_2}\big(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2+i(\cos y_1\sin y_2+\sin y_2\cos y_1)\big)\\ &= e^{x_1+x_2}\big(\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)\big)\\ &= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}=e^{z_1+z_2}.\end{aligned}$$

Сада наводимо основне особине експоненцијалне функције.

Теорема 3.11. *Експоненцијална функција $f(z)=e^z$ је:*

(а) *аналитичка на $\mathbb{C}$;*

(б) *конформна на $\mathbb{C}$;*

(в) *периодична са основним периодом $2\pi i$.*

Доказ: **(а)** Како је $e^{x+iy} = e^x cosy + ie^x \sin y$, реални и имагинарни део експоненцијалне функције су:

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad \text{и} \quad v(x,y) = e^x \sin y.$$

Како су обе функције диференцијабилне на $\mathbb{R}^2$ и за свако $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ важи:

$$u'_x = e^x \cos y = v'_y \quad \text{и} \quad u'_y = -e^x \sin y = -v'_x,$$

на основу Теореме 2.6 закључујемо да је f диференцијабилна у комплексном смислу за свако $z \in \mathbb{C}$ односно да је f аналитичка на $\mathbb{C}$.

(б) Како је експоненцијална функција аналитичка на $\mathbb{C}$, њен извод

$$(e^z)' = u'_x + iv'_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

је различит од нуле за свако $z \in \mathbb{C}$ (јер $e^x \neq 0$ и не постоји y тако да је $\sin y = \cos y = 0$). Отуда, на основу Теореме 2.10, функција f је конформна на $\mathbb{C}$.

(в) Ако искористимо тригонометријски облик комплексног броја, важи да је $e^z = e^w$ акко је $|e^z| = |e^w|$ и $\arg e^z = \arg e^w + 2k\pi$ за неко $k \in \mathbb{Z}$. Како је $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ а $\arg e^z = \operatorname{Im} z$, закључујемо да је $e^z = e^w$ акко је $e^{\operatorname{Re} z} = e^{\operatorname{Re} w}$ и $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w + 2k\pi$ или еквивалентно $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w + 2k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$. Дакле, $e^z = e^w$ акко је $z - w = 2k\pi i$ за неко $k \in \mathbb{Z}$. □

Као што видимо из претходне теореме, функција $f(z) = e^z$ ће да буде „1-1” на области $\mathcal{D}$ акко не постоје $z, w \in \mathcal{D}$ такви да је $z - w = 2k\pi i$ за неко $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Пример 3.5. *Функцијом* $f(z) = e^z$ *пресликати област* $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$.

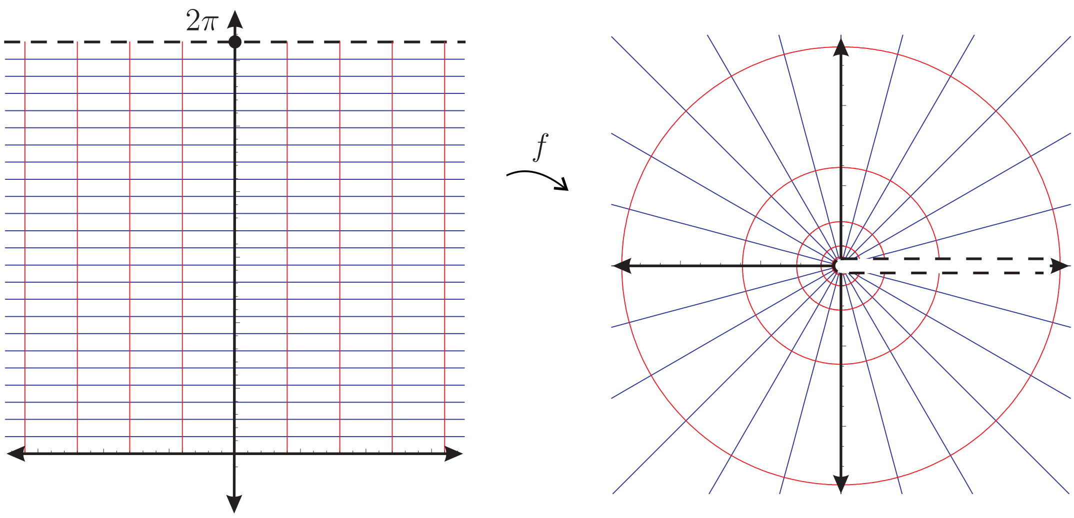


График 23: Слика Еуклидске мреже експоненцијалном функцијом.

Решење: Експоненцијални облик комплексне функције $f(z) = e^z$ има форму $f(x+iy) = \rho(x,y)\, e^{i\varphi(x,y)}$ где је:

$$\rho(x,y) = e^x \quad \text{а} \quad \varphi(x,y) = y.$$

Отуда, слика правих $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z = \alpha_0\}$ је кружница $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| = \alpha_0, 0 < \arg w < 2\pi\}$ док је слика праве $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = \beta_0\}$ полу-права $\{w \in \mathbb{C} \mid \arg w = \beta_0, |w| > 0\}$. Отуда, слика области $\mathcal{D}$ је $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ као што је илустровано на Графику 23. □

Претходни пример показује да је експоненцијална функција $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ „на”. Поставља се питање како у скупу комплексних бројева дефинисати експоненцијалну функцију са произвољном основом. У случају реалних бројева, за произвољне $a, x \in \mathbb{R}$, где је $a > 0$, важи да је $a^x = e^{x \ln a}$. Отуда, у скупу комплексних бројева, експоненцијалну функцију са основом $a \in \mathbb{C}$ можемо да уведемо са $a^z = e^{zw}$ где је w комплексан број такав да је $e^z = w$. Број w личи на комплексни логаритам броја a међутим, по Теореми 3.11, комплексан број $w + 2k\pi i$ такође може да буде логаритам броја a за произвољно $k \in \mathbb{Z}$ односно, комплексни логаритам је вишезначна функција као и комплексни корен.

3.5 Тригонометријске функије

Користрћи Ојлерову формулу, помоћу једначина $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ реалне тригонометријске функције можемо да добијемо од комплексне експоненцијалне функције:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{односно} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Отуда, да би добили аналитичке функције које представљају екстензије реалних тригонометријских функција, најприродније је да комплексни синус и комплексни косинус дефинишемо на следећи начин.

Дефиниција 3.8. *Комплексни синус и комплексни косинус су функције дате са:*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{и} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Сада наводимо неколико елементарних особина комплексног синуса и комплексног косинуса које представљају последице Теореме 3.11. Доказ теореме остављамо читаоцима.

Теорема 3.12. *Комплексни синус и комплексни косинус имају следеће особине:*

(а) *обе функције су аналитичке на $\mathbb{C}$ и важи $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$;*

(б) *обе функције су периодичне са основним периодом 2π.*

(в) *функција $\cos z$ је парна а $\sin z$ је непарна.*

Корстећи Дефиницију 3.8 косинуса и синуса, као и особину да у пољу комплексних бројева важи $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\, e^{z_2}$, лако може да се се докаже да за комплексни синус и комплексни косинус важе све адиционе формуле.

Теорема 3.13. *У скупу комплексних бројева, за све z, w важи:*

- $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$;
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$;
- $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$.

Остале адиционе формуле могу да се изведу од наведених.

Приметимо да дефинисане тригонометријске функције доста потсећају на хиперболичке функције реалне променљиве. Хиперболичке функције комплексне променљиве се уводе на еквивалентан начин.

Дефиниција 3.9. *Хиперболичке функције комплексне променљиве су функције:*

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Из дефиниција тригонометријских и хиперболичких функција видимо да је:

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz.$$

Пример 3.6. *Област* $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0\}$ *пресликати функцијом* $f(z) = \sin z$.

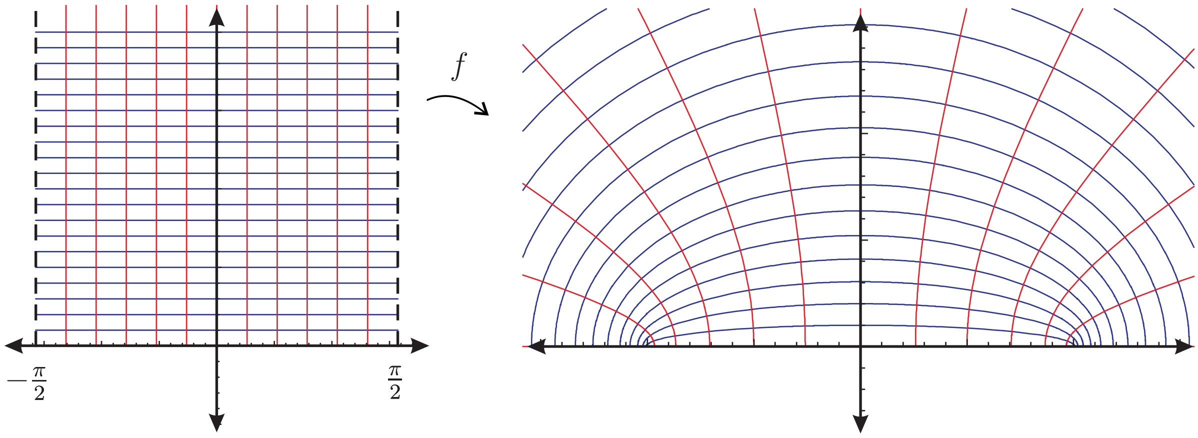


График 24: Слика области $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0\}$ функцијом $f(z) = \sin z$.

Решење: Одредимо прво реални и имагинарни део функције $f(z) = \sin z$.

$$\begin{aligned}\sin(x+iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{-i}{2}\big(e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i \sin x)\big)\\ &= \frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x + i\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x.\end{aligned}$$

Тада, слика праве $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = x_0, 0 < \operatorname{Im} z < \infty\}$ је одређена једначинама

$$\begin{aligned} u &= \frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x_0\\ v &= \frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x_0\end{aligned}$$

а ово су параметарске једначине хиперболе $\frac{u^2}{\sin^2 x_0} - \frac{v^2}{\cos^2 x_0} = 1$ где је $v > 0$ (јер за $y > 0$ важи да је $e^y > e^{-y}$).

Слично, слика праве $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = y_0, -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2\}$ је одређена једначинама:

$$\begin{aligned} u &= \frac{e^{y_0} + e^{-y_0}}{2}\sin x\\ v &= \frac{e^{y_0} - e^{-y_0}}{2}\cos x\end{aligned}$$

а ово су параметарске једначине елипсе $\frac{u^2}{\left(\frac{e^{y_0}+e^{-y_0}}{2}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\frac{e^{y_0}-e^{-y_0}}{2}\right)^2}=1$ где је опет $v>0$ јер $\cos x>0$ за $x\in(\pi/2,\pi/2)$.

Дакле, слика Еуклидске мреже области $\mathcal{D}$ је фамилија хипербола и фамилија елипси из горње полу-равни ($v>0$) као што се види на Графику 24. Отуда, слика области $\mathcal{D}$ је скуп $\{w\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im} w>0\}$.

Задатак смо могли да решимо једноставније користећи познате функције. Како је

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{iz}}{i}+\frac{1}{\frac{e^{iz}}{i}}\right),$$

закључујемо да је $\sin z=\big(h\circ L_2\circ g\circ L_1\big)(z)$ где је $L_1(z)=iz$ линеарна функција (ротација за $\pi/2$), $g(z)=e^z$ експоненцијална функција, $L_2(z)=\frac{z}{i}=-iz$ линеарна функција (ротација за $-\pi/2$) и $h(z)=\frac{1}{2}\big(z+\frac{1}{z}\big)$ функција Жуковског. □

Дефиниција 3.10. *Тангенс и котангенс комплексног броја z су функције:*

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}\quad \textit{и}\quad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Ове функције нису аналитичке у тачкама где је именилац једнак нули. За функцију $\operatorname{tg} z$ то су тачке $z\in\mathbb{C}$ за које је:

$$\cos z=0\Leftrightarrow e^{iz}+e^{-iz}=0\Leftrightarrow e^{2iz}=-1\Leftrightarrow e^{2iz}=e^{i\pi}\Leftrightarrow 2iz=i\pi+i2k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Дакле, функција $\operatorname{tg} z$ није аналитичка у тачкама $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ где $k\in\mathbb{Z}$. Слично се доказује да $\operatorname{ctg} z$ није аналитичка за $z=k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

У тачкама где су функције $\operatorname{tg} z$ односно $\operatorname{ctg} z$ аналитичке, због доказаних особина за извод количника комплексних функција и тригонометријских идентитета за функције $\sin z$ и $\cos z$, важи:

$$(tgz)'=\frac{1}{\cos^2 z}\quad \text{и}\quad (\operatorname{ctg} z)'=\frac{-1}{\sin^2 z}.$$

Приметимо да због једнакости $\sin z=-\sin(z+\pi)$ и $\cos z=-\cos(z+\pi)$ важи $\operatorname{tg}(z+\pi)=\frac{\cos(z+\pi)}{\sin(z+\pi)}=\frac{-\cos z}{-\sin z}=\operatorname{tg} z$. Отуда, π је период комплексног тангенса а ова функција не може да има мањи период јер је екстензија реалног тангенса. Дакле, π је основни период функције $\operatorname{tg} z$ а самим тим и за $\operatorname{ctg} z$ јер је $\operatorname{ctg} z=\frac{1}{\operatorname{tg} z}$.

Занимљиво је да су функције $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ такође композиције познатих функција. На пример, $\operatorname{tg} z$ можемо да представимо са:

$$\operatorname{tg}(z)=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{1}{i}\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}=-i\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}.$$

Отуда $\operatorname{tg} z=\big(w\circ g\circ L\big)(z)$ где је $L(z)=2iz$ линеарна функција, $g(z)=e^z$ експоненцијална функција и $w(z)=-i\,\frac{z-1}{z+1}$ билинеарна функција.

На Графику 25. је представљена слика области $\mathcal{D}=\{z\in\mathbb{C}\mid -\pi/4<\operatorname{Re} z<\pi/4\}$ и одговарајуће Еуклидске мреже. Амбициозни читаоци могу да докажу да је слика области $\mathcal{D}$ унутрашњост јединичног круга и да се хоризонталне и вертикалне праве сликају у делове кружница.

На крају, као што смо видели из овог поглавља, најбитније елементарне функције су билинеарне функције, функција Жуковског и експоненцијална функција јер све остале функције описане у овом поглављу могу да се добију њиховим композицијама.

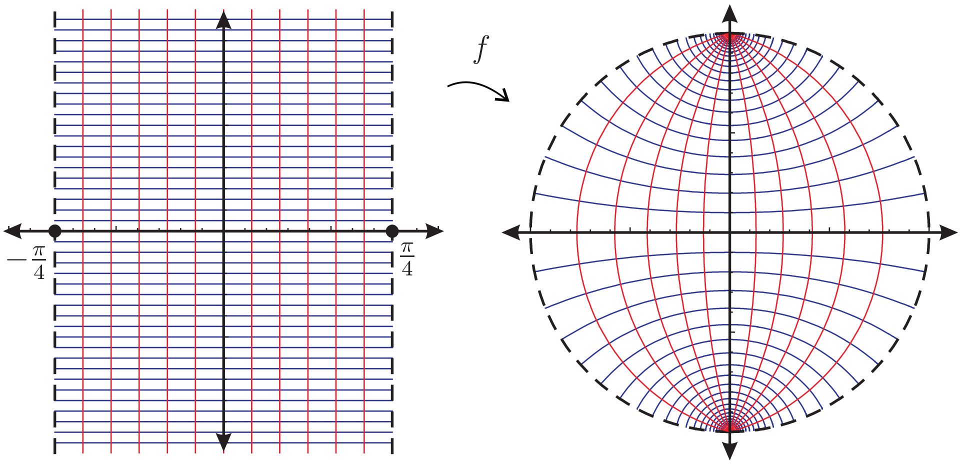


График 25: Слика области $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}] \mid -\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4\}$ функцијом $f(z) = \operatorname{tg} z$.

4 Интегрални рачун функција комплексне променљиве

Као и код реалних функција, главни циљ комплексног интеграла треба да буде одређивање мере промене функције f од тачке $a \in \mathbb{C}$ до тачке $b \in \mathbb{C}$. Међутим, за разлику од реалне праве, у комплексној равни постоји непребројиво много кривих које повезују два различита комплексна броја. Отуда, у комплексној равни, поред подинтегралне функције и граничних тачака, јако битну улогу игра и пут који повезује граничне тачке. У овом поглављу ћемо да одговоримо на питање егзистенције комплексног интеграла као и под којим условима вредност интеграла не зависи од пута који повезује граничне тачке.

Нека је $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ комплексна функција и нека $a, b \in \mathbb{C}$. Нека је $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ пут који повезује тачке a и b. Мотивисани класичним интегралом функције реалне променљиве, интеграл функције комплексне променљиве уводимо на следећи начин.

Нека је $P = \{t_i \mid i = 0, \dots, n\}$, где је $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, подела интевала $[\alpha, \beta]$ и нека је $E = \{e_i \mid t_{i-1} \leq e_i \leq t_i, i = 1, \dots, n\}$ фамилија истакнутих тачака. На овај начин смо изабрали тачке $\mathcal{P} = \{z_i = \gamma(t_i) \mid i = 0, \dots, n\}$ на кривој γ као и тачке $\mathcal{E} = \{\xi_i = \gamma(e_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ које се налазе на сегментима криве γ између тачака z_i као што је илустровано на графику испод.

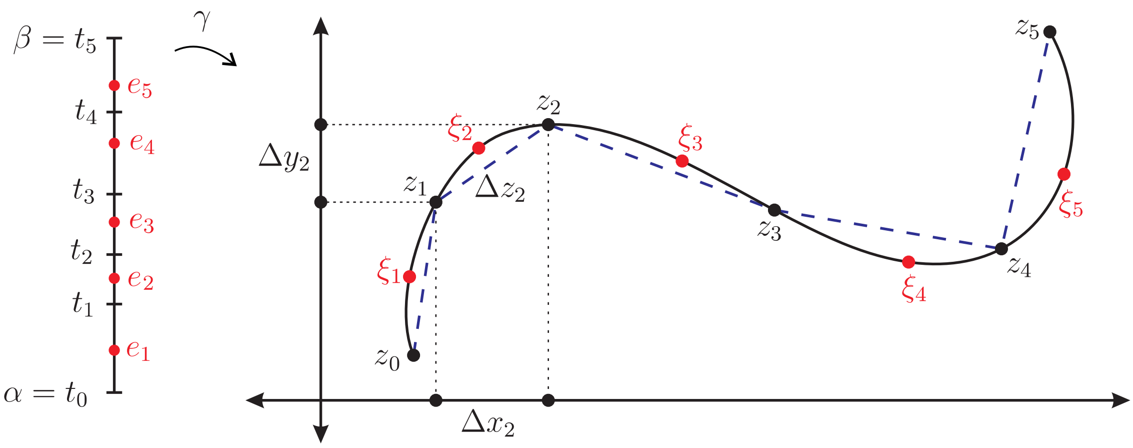


График 26: Подела интервала $[\alpha, \beta]$ и индукована подела на кривој γ.

Интеграл комплексне функције f по кривој γ дефинишемо са:

$$\int\limits_{\gamma} f \mathrm{d}z \overset{\text{деф.}}{=} \lim_{\lambda(\mathcal{P})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta z_i$$

где је $\lambda(\mathcal{P}) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |z_i - z_{i-1}|$ класичан параметар поделе $\mathcal{P}$ а $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$. Интеграл функције f по путу γ постоји акко десна гранична вредност постоји и коначна је.

Сада ћемо да демистификујемо овако дефинисани интеграл. Нека је $f(z) = u(z) + iv(z)$, и нека је $\operatorname{Re} z_i = x_i$, $\operatorname{Im} z_i = y_i$ $i = 0, \ldots, n$. Тада,

$$\Delta z_i = z_i - z_{i-1} = x_i + iy_i - x_{i-1} - iy_{i-1} = (x_i - x_{i-1}) + i(y_i - y_{i-1}) = \Delta x_i + i\Delta y_i$$

Како је γ пут, он је по дефиницији непрекидна функција $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. Отуда, параметар поделе $\lambda(\mathcal{P}) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |z_i - z_{i-1}| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$ ће да тежи нули акко параметар поделе P интервала $[\alpha, \beta]$ тј. $\lambda(P) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |t_i - t_{i-1}|$ тежи нули. Тада, интеграл комплексне функције f по кривој γ постаје:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma} f \mathrm{d}z &= \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \big(u(\xi_i) + iv(\xi_i)\big)(\Delta x_i + i\Delta y_i) \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \big(u(\xi_i)\Delta x_i - v(\xi_i)\Delta y_i\big) + i \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \big(v(\xi_i)\Delta x_i + u(\xi_i)\Delta y_i\big).
\end{aligned}$$

при том, у кораку $(*)$ смо користили особину да w тежи коначном компескном броју акко $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w$ теже коначним реалним бројевима.

Студенти који се сећају Анализе 4 би требало да препознају последње две интегралне суме. За студенте који се не сећају, прва интегрална сума је ништа друго до криволинијски интеграл друге врсте векторског поља $(u, -v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ по кривој γ док је друга интегрална сума, криволинијски интеграл друге врсте векторског поља (v, u) по кривој γ. Отуда, реални и имагинарни део комплексног интеграла функције $f = u + iv$ су:

$$\operatorname{Re}\Bigg(\int\limits_{\gamma} f \mathrm{d}z\Bigg) = \int\limits_{\gamma} u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y, \qquad \operatorname{Im}\Bigg(\int\limits_{\gamma} f \mathrm{d}z\Bigg) = \int\limits_{\gamma} v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y,$$

што имплицира да комплексни интеграл постоји акко постоје оба криволинијска интеграла друге врсте.

Све особине које важе за криволинијски интеграл друге врсте имају своје пандане у комплексној интеграцији и многе од њих ћемо поново да докажемо. Ако сте се икада запитали зашто се уопште учи криволинијски интеграл друге врсте, сада имате одговор.

4.1 Дефиниција и особине интеграла по путу

Досадашња теорија овог поглавља је била само ради илустрације. Да би избегли да у наставку доказе теорема сводимо на интегралне суме, комплексни интеграл ћемо да дефинишемо мало другачије. Нека је $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ где је $f = u + iv$. Нека је $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$

пут облика $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ са тангентним вектором $\gamma' = \gamma_1' + i\gamma_2'$. Тада, техникама Анализе 4, комплексни интеграл $\int\limits_\gamma f\mathrm{d}z$ се рачуна на следећи начин:

$$\begin{aligned}\int\limits_\gamma f\mathrm{d}z &= \int\limits_\gamma u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int\limits_\gamma v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y\\ &= \int\limits_\alpha^\beta \big(u(\gamma_1,\gamma_2)\gamma_1' - v(\gamma_1,\gamma_2)\gamma_2'\big)\mathrm{d}t + i\int\limits_\alpha^\beta \big(v(\gamma_1,\gamma_2)\gamma_1' + u(\gamma_1,\gamma_2)\gamma_2'\big)\mathrm{d}t\\ &= \int\limits_\alpha^\beta \big(u(\gamma_1,\gamma_2) + iv(\gamma_1,\gamma_2)\big)(\gamma_1 + i\gamma_2)'\mathrm{d}t = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\gamma\big)\gamma'\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Последњу формулу ћемо да искористимо за дефиницију комплексног интеграла као згодну ознаку за Риманове интеграле који се добијају када се функција f и пут γ представе помоћу својих координатних функција.

Дефиниција 4.1. *Нека је $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ део по део гладак пут и f комплексна функција таква да је композиција $f \circ \gamma$ непрекидна на $[\alpha,\beta]$. Интеграл функције f по путу γ дефинишемо са:*

$$\int\limits_\gamma f\mathrm{d}z = \int\limits_\alpha^\beta f[\gamma(t)]\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

Приметимо да услови дефиниције обезбеђују егзистенцију комплексног интеграла јер из непрекидности функције $f \circ \gamma$ следи непрекидност функција $u \circ \gamma$ и $v \circ \gamma$ а γ_1' и γ_1' су део по део непрекидне функције што гарантује да постоје интеграли:

$$\int\limits_\alpha^\beta \big(u(\gamma_1,\gamma_2)\gamma_1' - v(\gamma_1,\gamma_2)\gamma_2'\big)\mathrm{d}t \quad \text{и} \quad \int\limits_\alpha^\beta \big(v(\gamma_1,\gamma_2)\gamma_1' + u(\gamma_1,\gamma_2)\gamma_2'\big)\mathrm{d}t.$$

Сада наводимо неколико основних особина комплексног интеграла.

Теорема 4.1. ***(Основне особине комплексног интеграла)***

(1) *Нека су f и g непрекидне на део по део глатком путу γ и нека $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$. Тада:*

$$\int\limits_\gamma (\alpha f + \beta g)\mathrm{d}z = \alpha\int\limits_\gamma f\mathrm{d}z + \beta\int\limits_\gamma g\mathrm{d}z.$$

(2) ***(Адитивност)*** *Нека је f непрекидна на део по део глатком путу $\gamma[\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$. Тада, за произвољно $\delta \in (\alpha,\beta)$ и путеве $\gamma_1 : [\alpha,\delta] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [\delta,\beta] \to \mathbb{C}$ дате са $\gamma_1(t) = \gamma(t), t \in [\alpha,\delta]$ и $\gamma_2(t) = \gamma(t), t \in [\delta,\beta]$, важи:*

$$\int\limits_\gamma f\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_1} f\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_2} f\mathrm{d}z.$$

(3) ***(Инваријантност)*** *Ако су γ_1 и γ_2 еквивалентни путеви а f непрекидна дуж пута γ_1 важи да је:*

$$\int\limits_{\gamma_1} f\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_2} f\mathrm{d}z.$$

(4) ***(Оријентација)*** *Нека је $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ део по део гладак пут. Нека је $\gamma^- : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ пут дат са $\gamma^-(t) = \gamma(\alpha + \beta - t)$. Ако је f непрекидна функција дуж пута γ тада:*

$$\int\limits_{\gamma^-} f\mathrm{d}z = -\int\limits_{\gamma} f\mathrm{d}z.$$

Доказ: Све наведене особине су последице особина Риманових интеграла.

(1) Важи због линеарности Риманових интеграла.

(2) $\int\limits_{\gamma} f\mathrm{d}z = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\gamma(t)]\gamma'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\alpha}^{\delta} f[\gamma(t)]\gamma'(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{\delta}^{\beta} f[\gamma(t)]\gamma'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\alpha}^{\delta} f[\gamma_1(t)]\gamma_1'(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{\delta}^{\beta} f[\gamma_2(t)]\gamma_2'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\gamma_1} f\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_2} f\mathrm{d}z.$

(3) Нека су путеви $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ и $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ еквивалентни тј. нека постоји непрекидна, растућа и „на” функција $\tau : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ таква да је $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \tau$. Тада,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma_1} f\mathrm{d}z &= \int\limits_{a}^{b} f[\gamma_1(t)]\gamma_1'(t)\mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \int\limits_{\tau^{-1}(a)}^{\tau^{-1}(b)} f\big[\gamma_1\big(\tau(s)\big)\big]\gamma_1'\big(\tau(s)\big)\tau'(s)\mathrm{d}s \\ &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big[\gamma_2(s)\big]\gamma_2'(s)\mathrm{d}s = \int\limits_{\gamma_2} f\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

При том, у кораку $(*)$ смо користили смену $t = \tau(s)$.

(4) $\int\limits_{\gamma} f\mathrm{d}z = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\gamma(s)]\gamma'(s)\mathrm{d}s \overset{s=\alpha+\beta-t}{=} \int\limits_{\beta}^{\alpha} f[\gamma(\alpha+\beta-t)]\gamma'(\alpha+\beta-t)(-1)\mathrm{d}t =$
$= \int\limits_{\beta}^{\alpha} f[\gamma^-(t)]\gamma^{-\prime}(t)\mathrm{d}t = -\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\gamma^-(t)]\gamma^{-\prime}(t)\mathrm{d}t = -\int\limits_{\gamma^-} f\mathrm{d}z.$ □

Исказ **(3)** претходне теореме указује на особину да вредност комплексног интеграла не зависи од пута којим смо параметризовали дату криву. Отуда, надаље можемо да користимо и термин интеграл по кривој. Особина **(4)** претходне теореме је практично последица својства криволинијског интеграла друге врсте којем се мења знак када се промени смер интеграције. Зато када радимо комплексни интеграл по некој затвореној кривој, ако није наведен смер интеграције, бирамо позитиван смер односно смер супротан кретању казаљке на сату.

Линеарност комплексног интеграла нам обезбеђује још један начин како да комплексни интеграл сводимо на два Риманова. Наиме, ако је $f[\gamma(t)]\gamma'(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ где су g_1 и g_2 реалне функције, тада:

$$\int\limits_{\gamma} f\mathrm{d}z = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\gamma(t)]\gamma'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(g_1(t) + ig_2(t)\big)\mathrm{d}t \overset{\textbf{(1)}}{=} \int\limits_{\alpha}^{\beta} g_1(t)\mathrm{d}t + i\int\limits_{\alpha}^{\beta} g_2(t)\mathrm{d}t$$

што такође имплицира да је:

$$\operatorname{Re}\Big(\int_\gamma f\mathrm{d}z\Big) = \int_\alpha^\beta \operatorname{Re}\big(f[\gamma(t)]\gamma'(t)\big)\mathrm{d}t,$$

$$\operatorname{Im}\Big(\int_\gamma f\mathrm{d}z\Big) = \int_\alpha^\beta \operatorname{Im}\big(f[\gamma(t)]\gamma'(t)\big)\mathrm{d}t.$$

Теорема 4.2. *Ако је функција f непрекидна на део по део глатком путу $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, тада је:*

$$\Big|\int_\gamma f\mathrm{d}z\Big| \leq \int_\alpha^\beta \big|f[\gamma(t)]\big|\,|\gamma'(t)|\mathrm{d}t.$$

Доказ: Нека је $\int_\gamma f\mathrm{d}z = J$ где је $J = |J|e^{i\varphi}$. Из $Je^{-i\varphi} = |J|e^{i\varphi}e^{-i\varphi} = |J|$ добијамо:

$$|J| = e^{-i\varphi}J = e^{-i\varphi}\int_\gamma f\mathrm{d}z \overset{(*)}{=} \int_\gamma e^{-i\varphi}f\mathrm{d}z.$$

У кораку $(*)$, константа $e^{-i\varphi}$ може да уђе под интеграл због линеарности интеграла. Како је $|J| \in \mathbb{R}$, добијамо да је:

$$|J| = \operatorname{Re}|J| = \operatorname{Re}\Big(\int_\gamma e^{-i\varphi}f\mathrm{d}z\Big) = \int_\alpha^\beta \operatorname{Re}\big(e^{-i\varphi}f[\gamma(t)]\gamma'(t)\big)\mathrm{d}t \overset{(**)}{\leq} \int_\alpha^\beta \big|f[\gamma(t)]\big|\,|\gamma'(t)|\mathrm{d}t$$

при том, у кораку $(**)$ смо користили особине да је $\operatorname{Re} z \leq |z|$, $|e^{-i\varphi}| = 1$ и монотоност Римановог интеграла функције реалне промењљиве. $\square$

Последица 4.1. *Ако је функција f непрекидна и ограничена на део по део глатком путу $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ тј. ако је $|f(z)| < M$ за све $z = \gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, тада је*

$$\Big|\int_\gamma f\mathrm{d}z\Big| \leq M|\gamma|$$

где је $|\gamma|$ дужина криве одређене путем γ.

Доказ: Нека је $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ где су γ_1 и γ_2 реалне функције. Тада, на основу претходне теореме

$$\Big|\int_\gamma f\mathrm{d}z\Big| \leq \int_\alpha^\beta \big|f[\gamma(t)]\big|\,|\gamma'(t)|\mathrm{d}t \leq \int_\alpha^\beta M|\gamma'(t)|\mathrm{d}t = M\int_\alpha^\beta \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

Последњи интеграл представља дужину лука криве γ (криволинијски интеграл прве врсте, Анализа 4). $\square$

Имајући у виду доказана тврђења, израчунајмо пар комплексних интеграла.

Пример 4.1. *За произвољно $k \in \mathbb{Z}$, израчунати интеграл* $\int\limits_{|z-a|=r} (z-a)^k \mathrm{d}z$.

Решење: Једна параметризација кружнице $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r\}$ је $z = a + re^{i\varphi}$ где $\varphi \in [0, 2\pi]$. Заменом у постављени интеграл добијамо:

$$\int\limits_{\gamma} (z-a)^k \mathrm{d}z = \int\limits_{0}^{2\pi} (a + re^{i\varphi} - a)^k \mathrm{d}(a + re^{i\varphi}) = ir^{k+1} \int\limits_{0}^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} \mathrm{d}\varphi.$$

Ако је $k \neq -1$, сменом $i(k+1)\varphi = t$ добијамо

$$\int\limits_{\gamma} (z-a)^k \mathrm{d}z = \frac{ir^{k+1}}{i(k+1)} \int\limits_{0}^{i2(k+1)\pi} e^t \mathrm{d}t = \frac{ir^{k+1}}{i(k+1)} (e^{i2(k+1)\pi} - 1) = 0.$$

За $k = -1$ вредност интеграла је

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = i \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi i.$$

□

Приметимо да у претходном примеру вредност интеграла не зависи од полупречника кружнице. Показаће се да је претходни пример од изузетног теоријског значаја.

Пример 4.2. *Нека је $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ и $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ произвољан део по део гладак пут који повезује тачке a и b. При том, ако је $k < 0$, пут γ не пролази кроз нулу тј. $\gamma(t) \neq 0$ за све $t \in [\alpha, \beta]$. Израчунати интеграл* $\int\limits_{\gamma} z^k \mathrm{d}z$.

Решење: За $k \neq -1$ знамо да је вредност Римановог интеграла $\int x^k \mathrm{d}z = \frac{x^{k+1}}{k+1}$. Тада, на кривој $z = \gamma(t)$ важи:

$$\int\limits_{\gamma} z^k \mathrm{d}z = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \gamma^k(t) \mathrm{d}\big(\gamma(t)\big) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \gamma^k(t)\gamma'(t) \mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \int\limits_{a}^{b} s^k \mathrm{d}s = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

при том, у кораку $(*)$ смо увели смену $\gamma(t) = s$ и важи да је $\gamma(\alpha) = a$ и $\gamma(\beta) = b$. Специјално, ако је $\gamma(a) = \gamma(b)$ односно ако је γ затворена крива, интеграл је једнак нули. □

Претходни пример илуструје особину да под одређеним условима интеграл комплексне функције не зависи од криве која повезује две различите тачке. Такође, како решење интеграла има форму

$$\int\limits_{\gamma} z^k \mathrm{d}z = \frac{z^{k+1}}{k+1}\Big|_a^b$$

где са десне стране рачунамо вредност примитивне функције подинтегралне функције у почетној и крајњој тачки, наслућујемо да под одређеним условима интеграли комплексних функција задовољавају Њутн[7]-Лајбницову[8] формулу.

[7] Sir Isaac Newton 1642-1726, енглески математичар, физичар, астроном, алхемичар и филозоф.

[8] Gotfrid Vilhelm Frajher (baron) fon Lajbnic 1646-1716, немачки математичар, филозоф, проналазач правник, историчар, дoпломата и политички саветник лужничко-српског порекла.

4.2 Њутн-Лајбницова формула

Поставља се питање да ли постоји веза између комплексног интеграла и комплексног диференцијала као што је случај код функција реалне променљиве. Као што ћемо да покажемо у овом поглављу, одговор се своди на егзистенцију примитивне функције.

Дефиниција 4.2. *Функција F је примитивна функција функције f на области $\mathcal{D}$ ако је аналитичка на $\mathcal{D}$ и ако важи:*

$$F'(z) = f(z) \quad \text{за све} \quad z \in \mathcal{D}.$$

Теорема 4.3. *Ако је F једна примитивна функција функције f на области $\mathcal{D}$, тада све примитивне функције функције f на области $\mathcal{D}$ су облика $F + c$ где $c \in \mathbb{C}$.*

Доказ: Нека су F_1 и F_2 примитивне функције функције f на области $\mathcal{D}$. Тада, за аналитичку функцију $G = F_1 - F_2$ важи $G'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = 0$ за све $z \in \mathcal{D}$. Ако је $G = u + iv$ тада, по Теореми 2.6, извод функције G у тачки z је због Коши-Римановых услова једнак:

$$G' = u_x' + iv_x' = v_y' - iu_y' = 0.$$

Отуда, $u_x' = u_y' = 0$ и $v_x' = v_y' = 0$ што имплицира да су функције u и v константне. Дакле, и G је константна функција тј. постоји $c \in \mathbb{C}$ тако да је $G(z) = F_1(z) - F_2(z) = c$ па важи да је $F_1(z) = F_2(z) + c$. □

Сада наводимо фундаменталну теорему овог поглавља.

Теорема 4.4. ***(Кошијева теорема о троуглу)*** *Нека је функција f аналитичка на области $\mathcal{D}$. Ако троугао $\triangle$ компактно припада области $\mathcal{D}$ ($\overline{\triangle}^{\rho} \subseteq \mathcal{D}$) тада је:*

$$\oint\limits_{\partial\triangle} f \mathrm{d}z = 0.$$

Доказ: Претпоставимо супротно, нека постоји троугао $\triangle$ који компактно припада области $\mathcal{D}$ такав да је:

$$\left| \oint\limits_{\partial\triangle} f \mathrm{d}z \right| = M > 0.$$

Поделимо троугао $\triangle$ средњим линијама на четири троугла $\triangle^I$, $\triangle^{II}$, $\triangle^{III}$, $\triangle^{IV}$ и оријентишимо њихове границе супротно кретању казаљке на сату као што је приказано на графику испод.

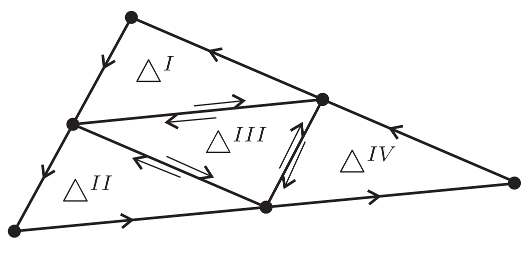


График 27: Подела троугла $\triangle$ средњим линијама.

Како су средње линије заједничке странице два троугла и супротно су оријентисане у суседним троугловима, закључујемо да је

$$\oint\limits_{\partial\triangle} f\mathrm{d}z = \oint\limits_{\partial\triangle^{I}} f\mathrm{d}z + \oint\limits_{\partial\triangle^{II}} f\mathrm{d}z + \oint\limits_{\partial\triangle^{III}} f\mathrm{d}z + \oint\limits_{\partial\triangle^{IV}} f\mathrm{d}z$$

зато што се на средњим линијама интеграли поништавају. Тада,

$$M = \Big|\oint\limits_{\partial\triangle} f\mathrm{d}z\Big| \le \Big|\oint\limits_{\partial\triangle^{I}} f\mathrm{d}z\Big| + \Big|\oint\limits_{\partial\triangle^{II}} f\mathrm{d}z\Big| + \Big|\oint\limits_{\partial\triangle^{III}} f\mathrm{d}z\Big| + \Big|\oint\limits_{\partial\triangle^{IV}} f\mathrm{d}z\Big|$$

што имплицира да међу троугловима $\triangle^{I}, \triangle^{II}, \triangle^{III}, \triangle^{IV}$ постоји бар један, означимо га са $\triangle_1$, такав да је:

$$\Big|\oint\limits_{\partial\triangle_1} f\mathrm{d}z\Big| \geqslant \frac{M}{4}$$

јер би у супротном $\Big|\oint\limits_{\partial\triangle_1} f\mathrm{d}z\Big| < M$ што није могуће.

Ако сада средњим линијама поделимо $\triangle_1$ на четири троугла са аналогном оријентацијама страница, закључујемо да међу подеоним троугловима постоји троугао $\triangle_2$ такав да је

$$\Big|\oint\limits_{\partial\triangle_2} f\mathrm{d}z\Big| \geqslant \frac{M}{4^2}.$$

Итерацијом овог процеса, долазимо до низа троуглова $\{\triangle_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ таквих да је $\triangle_n \subset \triangle_{n-1}$. При том, странице троугла $\triangle_n$ су два пута мање од страница троугла $\triangle_{n-1}$ што имплицира да дијаметар троуглова $\triangle_n$ тежи нули када n тежи бесконачности. Такође, за све $n \in \mathbb{N}$ важи да је

$$\Big|\oint\limits_{\partial\triangle_n} f\mathrm{d}z\Big| \geqslant \frac{M}{4^n}.$$

Из услова $\triangle_n \subset \triangle_{n-1}$ закључујемо да је $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \triangle_n \neq \emptyset$ што значи да постоји тачка $z_0 \in \mathbb{C}$ таква да $z_0 \in \triangle_n$ за све $n \in \mathbb{N}$. Како је z_0 тачка нагомилавања троугла $\triangle$, из $\overline{\triangle} \subseteq \mathcal{D}$ следи $z_0 \in \mathcal{D}$. Отуда, функција f је $\mathbb{C}-$диференцијабилна у тачки z_0 па је

$$f(z) \overset{(*)}{=} f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \alpha(z)(z-z_0) \quad \text{где} \quad \lim_{z\to z_0} \alpha(z) = 0.$$

Једнакост $(*)$ ће да буде додатно објашњена испод.

Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. По дефиницији преходне граничне вредности, постоји $\delta > 0$ тако да за све $z \in \mathcal{U}_{z_0}^{\delta} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$ важи да је $|\alpha(z)| < \epsilon$.

Како дијаметар троуглова $\triangle_n$ тежи нули када n тежи бесконачности и сваки од њих садржи тачку z_0, постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да је $\operatorname{diam} \triangle_{n_0} < \delta$ што значи да је $\triangle_{n_0} \subset \mathcal{U}_{z_0}^{\delta}$. Ако интегралимо леву и десну страну једнакости $(*)$ по $\partial\triangle_{n_0}$ добијамо:

$$\oint\limits_{\partial\triangle_{n_0}} f(z)\mathrm{d}z \overset{(**)}{=} f(z_0)\oint\limits_{\partial\triangle_{n_0}} \mathrm{d}z + f'(z_0)\oint\limits_{\partial\triangle_{n_0}} (z-z_0)\mathrm{d}z + \oint\limits_{\partial\triangle_{n_0}} \alpha(z)(z-z_0)\mathrm{d}z.$$

По Примеру 4.2, важи да је

$$\oint_{\partial\triangle_{n_0}} \mathrm{d}z = \oint_{\partial\triangle_{n_0}} (z-z_0)\mathrm{d}z = 0.$$

Тачке z и z_0 припадају троуглу $\triangle_{n_0}$, ако са $|\triangle_{n_0}|$ означимо његов обим, важи да је $|z-z_0| < |\triangle_{n_0}|$. Отуда, за свако $z \in \triangle_{n_0}$ важи $|\alpha(z)(z-z_0)| = |\alpha(z)|\,|z-z_0| < \epsilon|\triangle_{n_0}|$ што по Последици 4.1 имплицира да је:

$$\left|\oint_{\partial\triangle_{n_0}} \alpha(z)(z-z_0)\mathrm{d}z\right| \leq \epsilon|\triangle_{n_0}|^2.$$

Обим троугла $\triangle_{n_0}$ једнак је $|\triangle|/2^{n_0}$ где је $|\triangle|$ обим троугла $\triangle$. Отуда, ако потражимо модуо леве и десне стране једнакости $(**)$ закључујемо да је:

$$\frac{M}{4^{n_0}} \leq \left|\oint_{\triangle_{n_0}} f\mathrm{d}z\right| \leq \epsilon|\triangle_{n_0}|^2 = \epsilon\frac{|\triangle|^2}{4^{n_0}}.$$

Дакле, $M \leq \epsilon|\triangle|^2$ а како ϵ може да буде произвољно, претходно ће да важи само за $M=0$ што је супротно претпоставци да је $M > 0$. $\square$

Једнакост $(*)$ из доказа је добијена на следећи начин: по Дефиницији 2.3 $\mathbb{C}$-диференцијабилности функције f у тачки z_0 и Теореми 2.8 важи да је

$$f(z_0+h) - f(z_0) = f'(z_0)h + o(h) \quad \text{где је} \quad \lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} = 0.$$

Заменом $h = z - z_0$, претходна једнакост постаје

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0) \quad \text{где је} \quad \lim_{z\to z_0}\frac{o(z-z_0)}{z-z_0} = 0.$$

Услов $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{o(z-z_0)}{z-z_0} = 0$ имплицира да је $\frac{o(z-z_0)}{z-z_0} = \alpha(z)$ односно $o(z-z_0) = \alpha(z)(z-z_0)$ где је $\lim\limits_{z\to z_0}\alpha(z) = 0$.

Сада ћемо помоћу претходне теореме да докажемо да аналитичке функције имају примитивне функције али локално тј. на довољно малим околинама. Пре тога, дефинишимо сегмент у комплексној равни као скуп тачака које припадају дужи која повезује два различита комплексна броја $a, b \in \mathbb{C}$, прецизније:

$$[a,b] \overset{\text{деф.}}{=} \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}.$$

Тада, интеграл функције $f(z) = 1$ на оваквом сегменту је једнак

$$\int_{[a,b]} \mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}\big((1-t)a + tb\big) = (b-a)\int_0^1 \mathrm{d}t = b - a.$$

Лема 4.1. *Нека је функција f нейрекидна на кругу $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$ и за сваки троугао $\triangle$ који компактно припада кругу $\mathcal{U}$ важи:*

$$\oint_{\partial\triangle} f\mathrm{d}z = 0.$$

Тада функција f на кругу $\mathcal{U}$ има примитивну функцију дату са:

$$F(z) = \int\limits_{[a,z]} f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Доказ: Циљ је да докажемо да за овако дефинисану функцију F и све $z \in \mathcal{U}$ важи $F'(z) = f(z)$ тј. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$ или еквивалентно $\lim\limits_{h\to 0} \left(\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right) = 0.$

Докажимо последњу граничну вредност по дефиницији. Нека је $\epsilon > 0$. Нека је $h \in \mathbb{C}$ такво да $z + h \in \mathcal{U}$. Тада, троугао $\triangle$ са теменима $a, z, z + h$ компактно припада кругу $\mathcal{U}$ па је по претпоставци:

$$0 = \oint\limits_{\partial\triangle} f(\xi)\mathrm{d}\xi = \int\limits_{[a,z]} f(\xi)\mathrm{d}\xi + \int\limits_{[z,z+h]} f(\xi)\mathrm{d}\xi + \int\limits_{[z+h,a]} f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

По дефиницији пресликавања F видимо да је:

$$\int\limits_{[a,z]} f(\xi)\mathrm{d}\xi = F(z) \quad \text{и} \quad \int\limits_{[z+h,a]} f(\xi)\mathrm{d}\xi = -\int\limits_{[a,z+h]} f(\xi)\mathrm{d}\xi = -F(z+h).$$

Тако добијамо да је

$$F(z+h) - F(z) \overset{(*)}{=} \int\limits_{[z,z+h]} f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Из једноставног рачуна:

$$f(z) = \frac{1}{h}f(z)h = \frac{1}{h}f(z)(z+h-z) = \frac{1}{h}f(z)\int\limits_{[z,z+h]} \mathrm{d}\xi \overset{f(z)\text{ конст.}}{=} \frac{1}{h}\int\limits_{[z,z+h]} f(z)\mathrm{d}\xi$$

закључујемо да је

$$f(z) = \frac{1}{h}\int\limits_{[z,z+h]} f(z)\mathrm{d}\xi$$

па, ако једначину $(*)$ поделимо са h и од ње одузмемо претходну једначину добијамо:

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int\limits_{[z,z+h]} \big(f(\xi) - f(z)\big)\mathrm{d}\xi.$$

Како је f непрекидна у z, за одабрано $\epsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за све $\xi \in \mathbb{C}$ из $|z - \xi| < \delta$ следи $|f(z) - f(\xi)| \leq \epsilon$. Тада, ако је $|h| < \delta$, за све $\xi \in [z, z+h]$ важи да је $|z - \xi| < \delta$ па је $|f(z) - f(\xi)| < \epsilon$ што значи да је функција $|f(z) - f(\xi)|$ ограничена са ϵ на скупу $[z, z+h]$. Отуда, по Последици 4.1, за $|h| < \delta$ важи:

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int\limits_{[z,z+h]} \big(f(\xi) - f(z)\big)\mathrm{d}\xi\right| \leq \frac{1}{|h|}\,\epsilon\,|h| = \epsilon.$$

Дакле, ако је $|h| < \delta$ тада је $\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| < \epsilon$ односно, доказали смо тражену граничну вредност. $\square$

Теорема 4.5. *Нека је функција f аналитичка на области $\mathcal{D}$. Ако је круг $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$ садржан у области $\mathcal{D}$, тада функција f на кругу $\mathcal{U}$ има примитивну функцију дату са*

$$F(z) = \int\limits_{[a,z]} f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Доказ: Како је f аналитичка на $\mathcal{D}$, она је и непрекидна на $\mathcal{D}$ а самим тим и на кругу $\mathcal{U}$. Тврђење следи на осову претходне леме јер за прозивољан троугао $\triangle$ који компактно припада области $\mathcal{U}$, како је f аналитичка на $\mathcal{U}$, по Кошијевој теореми о троуглу 4.4 важи да је $\oint\limits_{\triangle} f\mathrm{d}z = 0$. $\square$

Претходна теорема гарантује егзистенцију примитивне функције али само на круговима на којима је функција аналитичка. Поставља се питање како формирати примитивну функцију функције f на областима које нису кругови. Главна идеја је описана у следећој леми.

Лема 4.2. *Ако је F_i примитивна функција функције f на кругу $\mathcal{U}_i$, $i = 1,2$ и ако је $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$, тада постоји $c \in \mathbb{C}$ тако да је*

$$F(z) = \begin{cases} F_1(z), & z \in \mathcal{U}_1; \\ F_2(z) + c, & z \in \mathcal{U}_2. \end{cases}$$

примитивна функција функције f на скупу $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$.

Заиста, Како је пресек кругова област, и важи да је $F_1'(z) = F_2'(z) = f(z)$ за све $z \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, по Теореми 4.3 постоји $c \in \mathbb{C}$ тако да је $F_1(z) = F_2(z) + c$ за све $z \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. Такође, по Теореми 4.3 функција $F_2 + c$ је примитивна функција функције f на $\mathcal{U}_2$. $\square$

Очигледна примена ове леме за конструкцију примитивне функције функције f на области $\mathcal{D}$ подразумева конструкцију покривача $\{\mathcal{U}_i \mid i \in I\}$ области $\mathcal{D}$ круговима и „спајању" локалних примитивних функција дуж кругова који се секу. Ово под одређеним условима јесте изводљиво када је покривач области $\mathcal{D}$ коначан међутим, шта урадити када је покривач бесконачан што је чест случај са областима јер оне нису компактне? Због тога овде наводимо специјалан случај када можемо да спроведемо описану конструкцију.

Дефиниција 4.3. *Нека је $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ функција и $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{D}$ пут. Непрекидна функција $\Phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ је примитивна функција функције f **дуж пута** γ ако за свако $t \in [\alpha, \beta]$ постоји околина $\mathcal{U}$ тачке $\alpha(t)$ и функција $F_{\mathcal{U}}$ која је примитивна функција функције f на области $\mathcal{U}$ таква да је:*

$$\Phi(t) = F_{\mathcal{U}} \circ \gamma(t).$$

Практично, примитивна функција дуж пута γ је композиција локалних примитивних функција и пута γ као што је илустровано на Графику 28. На пример, ако f има примитивну функцију F на целој области $\mathcal{D}$ тада, за сваки пут $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{D}$, функција $F \circ \gamma$ је примитивна функција функције f дуж пута γ. Очигледно, примитивна функција дуж пута је функција параметра $t \in [\alpha, \beta]$.

Теорема 4.6. *Функција која је аналитичка на области $\mathcal{D}$ има примитивну функцију дуж сваког пута области $\mathcal{D}$.*

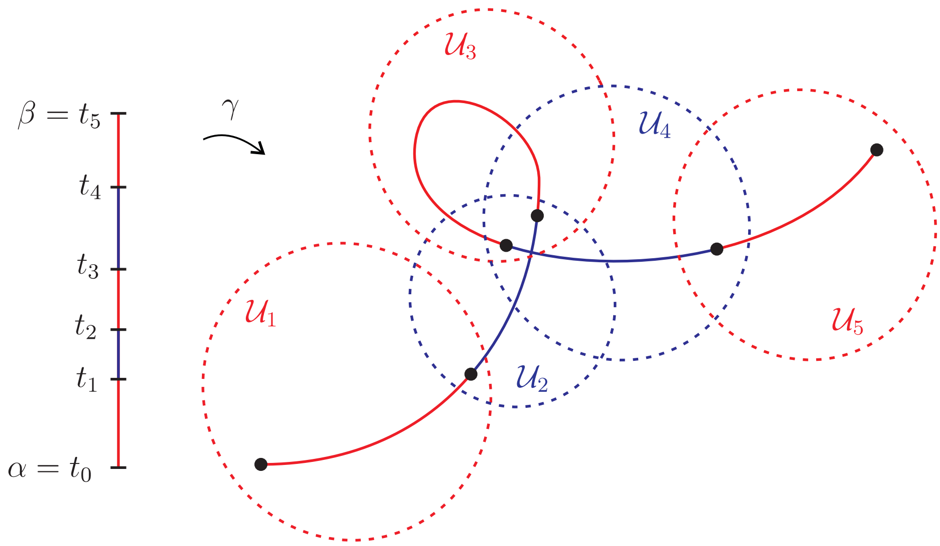


График 28: На кругу $\mathcal{U}_i$ функција f има примитивну функцију F_i.

Доказ: Нека је $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{D}$ пут а функција f аналитичка на $\mathcal{D}$. Област $\mathcal{D}$ је по дефиницији отворен скуп па, за свако $t \in [\alpha, \beta]$ постоји круг (отворена кугла) $\mathcal{U}_{\gamma(t)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \gamma(t)| < \rho_t\}$ који је садржан у $\mathcal{D}$. Фамилија, $\mathcal{F} = \{\mathcal{U}_{\gamma(t)} \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ је отворени покривач пута $\gamma\big([\alpha, \beta]\big)$ па, $\gamma^{-1}\big(\mathcal{F}\big) = \{\gamma^{-1}\big(\mathcal{U}_{\gamma(t)}\big) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ је отворени покривач интервала $[\alpha, \beta]$ (јер α је непрекидна функција па је инверзна слика сваког отвореног скупа отворен скуп). Како је $[\alpha, \beta]$ компактан скуп, покривач $\gamma^{-1}\big(\mathcal{F}\big)$ има Лебегов[9] број $\lambda > 0$.

Нека су $t_i \in [\alpha, \beta]$,$i = 0, 1, \dots, n$ такви да је $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$ и нека је $t_i - t_{i-1} < \lambda$ за $i = 1, \dots, n$. По дефиницији Лебеговог броја, за свако $i = 1, \dots, n$ постоји скуп $\gamma^{-1}\big(\mathcal{U}_i\big) \in \gamma^{-1}\big(\mathcal{F}\big)$ тако да је $[t_{i-1}, t_i] \subset \gamma^{-1}\big(\mathcal{U}_i\big)$ или еквивалентно $\gamma\big([t_{i-1}, t_i]\big) \subseteq \mathcal{U}_i$. Конструишимо функцију Φ.

За $k = 1$, по Теореми 4.5, на $\mathcal{U}_1$ функција f има примитивну функцију F_1.

За произвољно $k = 2, \dots, n$, како је $\mathcal{U}_{k-1} \cap \mathcal{U}_k \neq \emptyset$, по Теореми 4.5 и Леми 4.2, на кругу $\mathcal{U}_k$ постоји примитивна функција F_k функције f која се на $\mathcal{U}_{k-1} \cap \mathcal{U}_k \neq \emptyset$ поклапа са F_{k-1}. Нека је

$$\Phi(t) = \begin{cases} F_1 \circ \gamma(t), & t \in [\alpha, t_1]; \\ F_2 \circ \gamma(t), & t \in [t_1, t_2]; \\ \vdots & \\ F_k \circ \gamma(t), & t \in [t_{k-1}, t_k]; \\ \vdots & \\ F_n \circ \gamma(t), & t \in [t_{n-1}, t]. \end{cases}$$

Функције F_{k-1} и F_k се по конструкцији поклапају на $\mathcal{U}_{t_{k-1}} \cap \mathcal{U}_{t_k}$ што имплицира да је $F_{k-1} \circ \gamma(t_{k-1}) = F_k \circ \gamma(t_{k-1})$ па је функција Φ добро дефинисана и непрекидна на $[\alpha, \beta]$.

Како је свако $\gamma(t)$ садржано у неком $\mathcal{U}_i$ и функција F_i примитивна функција функције f на $\mathcal{U}_i$, функција Φ је примитивна функција функције f дуж пута γ. $\square$

Покушајте да саставите смислену реченицу у којој се појам „функција" јавља више од шест пута. График 28 илуструје доказ за $n = 5$. Читаоцима се препоручује да претходни доказ испишу за $n = 3$.

[9] Henri Léon Lebesgue 1875-1941, француски математичар.

Занимљиво је анализирати шта се дешава са примитивном функцијом дуж пута који није Жорданов односно, дуж пута који сече сам себе. У пресечној тачки, функција f има локалну примитивну функцију али, доказ не гарантује да ће у пресечној тачки вредност примитивне фунцкије дуж пута да буде иста. Овде се види главни проблем екстензије локалних примитивних функција јер екстензија не сме да зависи од редоследа скупова на којима се врши.

Примитивна функција дуж пута је јединствена до на комплексну константу као што илуструје следеће тврђење.

Теорема 4.7. *Ако су Φ_1 и Φ_2 примитивне функције функције f дуж пута γ, тада постоји константа $c \in \mathbb{C}$ таква да је $\Phi_1 = \Phi_2 + c$.*

Доказ: Нека је $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ пут и нека је $t \in [\alpha, \beta]$ произвољно. По дефиницији примитивне функције дуж пута, постоје околине $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ и на њима примитивне функције F_1 и F_2 функције f такве да је:

$$\Phi_1(t) = F_1 \circ \gamma(t), \gamma(t) \in \mathcal{U}_1 \quad \text{и} \quad \Phi_2(t) = F_2 \circ \gamma(t), \gamma(t) \in \mathcal{U}_2.$$

Како су F_1 и F_2 две примитивне функције функције f на области $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, постоји $c_0 \in \mathbb{C}$ тако да је $F_2(z) = F_1(z) + c_0$ за све $z \in \mathcal{U}$ што имплицира да је за све $z \in \mathcal{U}$

$$\Phi_2(t) = (F_1 + c_0) \circ \gamma(t) = F_1 \circ \gamma(t) + c_0 = \Phi_1(t) + c_0.$$

Отуда, функција $\Phi_1 - \Phi_2$ је константна на скупу $\Phi_1^{-1}\big(\mathcal{U}\big)$ који је околина тачке t јер је Φ_1 непрекидна. Дакле, $\Phi_1 - \Phi_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ је локално константна што значи да су њене координатне функције $\operatorname{Re}(\Phi_1 - \Phi_2) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ и $\operatorname{Im}(\Phi_1 - \Phi_2) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ непрекидне и локално константне функције. Како је свака непрекидна, локално константна функција реалне променљиве константна (Анализа 1), закључујемо да су $\operatorname{Re}(\Phi_1 - \Phi_2)$ и $\operatorname{Im}(\Phi_1 - \Phi_2)$ константне па исто важи и за функцију $\Phi_1 - \Phi_2$. $\square$

Сада можемо да формулишемо и докажемо главну теорему овог одељка.

Теорема 4.8. *Нека је $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ део по део гладак пут и нека је f непрекидна на γ. Ако је Φ примитивна функција функције f дуж пута γ тада је:*

$$\int_\gamma f \mathrm{d}z = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Доказ: Постојање једне примитвне фунцкије дуж пута гарантује да пут γ можемо да покријемо околинама на којима f има локалне примитивне функције што значи да можемо да конструишемо примитивну функцију дуж пута γ из доказа Теореме 4.6.

Дакле, постоји подела $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ интервала $[\alpha, \beta]$, локалне примитивне функције $F_1, \ldots, F_n$ функције f и примитивна функција дуж пута γ која је облика:

$$\Phi(t) = \begin{cases} F_1 \circ \gamma(t), & t \in [\alpha, t_1]; \\ F_2 \circ \gamma(t), & t \in [t_1, t_2]; \\ \vdots & \\ F_n \circ \gamma(t), & t \in [t_{n-1}, \beta]. \end{cases}$$

При том, можемо да претпоставимо да је пут γ гладак на $[t_{k-1}, t_k]$ јер поделу интервала $[\alpha, \beta]$ можемо да добијемо тако што прво одаберемо тачке прекида функције γ' а потом додамо тачке да параметар добијене поделе буде мањи од Лебеговог броја одговарајућег покривача интервала $[\alpha, \beta]$.

На овај начин, пут γ смо поделили на глатке путеве $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{C}$ дате са $\gamma_i(t) = \gamma(t), t \in [t_{i-1}, t_i]$ за које важи:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma_i} f\mathrm{d}z &= \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f[\gamma_i(t)]\gamma_i'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} F_i'[\gamma_i(t)]\gamma_i'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \mathrm{d}\big(F_i \circ \gamma(t)\big) = \int\limits_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \mathrm{d}\big(\Phi(t)\big) = \Phi(\alpha_i) - \Phi(\alpha_{i-1}).\end{aligned}$$

Тада, због адитивности комплексног интеграла, добијамо да је:

$$\int\limits_{\gamma} f\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\gamma_i} f\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \big(\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})\big) = \Phi(t_n) - \Phi(t_0) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Ако је Φ' било која друга примитивна функција функције f дуж пута γ, она је по Теореми 4.7 облика $\Phi + c$ за неко $c \in \mathbb{C}$ па је $\Phi'(\beta) - \Phi'(\alpha) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$. □

Поставља се питање да ли егзистенција примитивне функције дуж сваког пута области $\mathcal{D}$ обезбеђује егзистенцију примитивне функције на области $\mathcal{D}$? Следећи пример даје одговор на ово питање.

Пример 4.3. *Испитати да ли функција аналитичка на области $\mathcal{D}$ мора да има примитивну функцију на $\mathcal{D}$.*

Решење: Као и код скоро сваког „да ли” питања из математике, одговор је: не.

На пример, функција $f(z) = \frac{1}{z}$ је аналитичка на $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 2\}$. Ако би постојала примитивна функција F функције f на $\mathcal{D}$, тада би $\Phi = F \circ \gamma$ била примитивна функција функције f дуж сваког пута γ области $\mathcal{D}$. То би по Теореми 4.8 значило да за произвољан затворен пут γ области $\mathcal{D}$ важи

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = F \circ \gamma(\beta) - F \circ \gamma(\alpha) = 0$$

а у Примеру 4.1 смо видели да то није случај за пут $\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ јер је тада интеграл једнак $2\pi i$. □

Занимљиво је да по Теореми 4.6 функција $f(z) = \frac{1}{z}$ мора да има примитивну функцију дуж пута $\gamma(t) = e^{it}$ с’тим што она у почетној и крајњој тачки пута узима различите вредности иако је у питању иста тачка комплексне равни. То значи да математички објекат чији извод је функција $\frac{1}{z}$ на облсти $\mathcal{D}$ није функција већ нешто друго што ћемо тек да анализирамо.

Последица 4.2. ***(Њутн-Лајбницова формула)*** *Ако функција f има на области $\mathcal{D}$ примитивну функцију F, тада*

$$\int\limits_{\widetilde{ab}} f\mathrm{d}z = F(b) - F(a)$$

где је $\widetilde{ab}$ произвољан пут области $\mathcal{D}$ који повезује тачке $a, b \in \mathcal{D}$.

Доказ: Ако је F примитивна функција функције f на области $\mathcal{D}$, за сваки пут $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{D}$ који повезује тачке a и b, функција $\Phi = F \circ \gamma$ је примитивна функција функције f дуж пута γ. Тада је по Теореми 4.8:

$$\int_\gamma f \mathrm{d}z = \Phi(\alpha) - \Phi(\beta) = F\big(\gamma(\beta)\big) - F\big(\gamma(\alpha)\big) = F(b) - F(a).$$

□

За сада, Њутн-Лајбницову формулу можемо да користимо када је подинтегрална функција аналитичка на кругу (Теорема 4.5) или на унији два круга који се секу (Лема 4.2). У наставку ћемо да опишемо још један специфичан тип области на којима аналитичка функција има примитивну функцију.

4.3 Основна Кошијева теорема

У овом поглављу ћемо да формулишемо и докажемо значајну теорему интегралног рачуна функција комплексне променљиве која обезбеђује егзистенцију примитивне функције на просто-повезаним областима. Препоручује се да читаоци имају бар елементарно познавање теорије хомотопије (Топологија 1). Читаоцима који познају теорију фундаменталних група (Топологија 2), ово поглавље ће да буде врло једноставно.

Као што смо видели, интеграл комплексне функције не зависи од пута који представља дату криву тј. интеграли по еквивалентним путевима су једнаки. Да би скратили запис, надаље претпостављамо да је пут непрекидно пресликавање $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ а интервал $[0,1]$ означавамо са I.

Дефиниција 4.4. *Путеви $\gamma_0, \gamma_1 : I \to \mathcal{D}$ који повезују тачку $a \in \mathbb{C}$ са тачком $b \in \mathbb{C}$ су хомотопни на области $\mathcal{D}$ ако постоји непрекидно пресликавање (хомотопија) $\gamma : I \times I \to \mathcal{D}$ тако да за све $t, s \in I$ важи:*

- $\gamma(0,t) = \gamma_0(t)$ *(почиње се од пута γ_0);*
- $\gamma(1,t) = \gamma_1(t)$ *(завршава се путем γ_1);*
- $\gamma(s,0) = a$ *и* $\gamma(s,1) = b$ *(не дирају се крајње тачке).*

Приметимо да када у хомотопији γ фиксирамо променљиву s, добијамо нови пут $\gamma_s(t) = \gamma(s,t)$ који повезује тачке a и b. Практично, хомотопија два пута је непрекидна деформација једног пута у други кроз време s. Замислите пут у равни као конац чији су крајеви везани и да полако један облик конца без кидања деформишете у други као што је илустровано на Графику 29.

Дефиниција 4.5. *Два затворена пута $\gamma_0, \gamma_1 : I \to \mathcal{D}$ су хомотопна на области $\mathcal{D}$ ако постоји непрекидно пресликавање $\gamma : I \times I \to \mathcal{D}$ тако да за све $t, s \in I$ важи:*

- $\gamma(0,t) = \gamma_0(t)$ *(почиње се од пута γ_0);*
- $\gamma(1,t) = \gamma_1(t)$ *(завршава се путем γ_1);*
- $\gamma(s,0) = \gamma(s,1)$ *(петље се не кидају).*

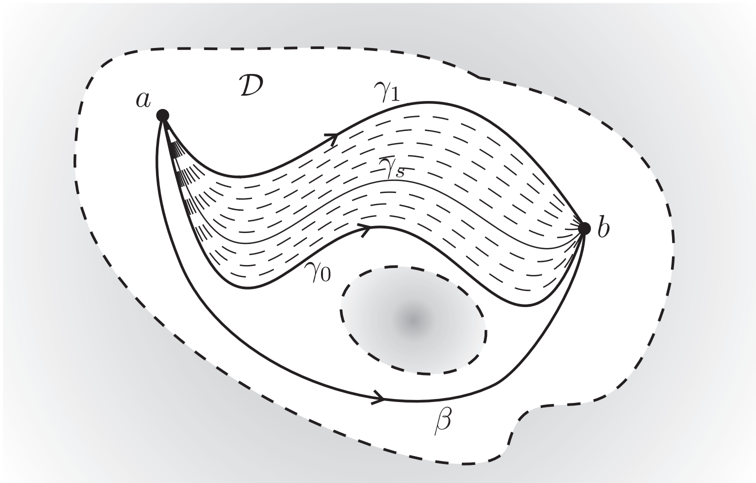


График 29: Путеви γ_0 и γ_1 су хомотопни на $\mathcal{D}$ а γ_0 и β нису.

Затворени путеви се у литератури називају и петље. Хомотопију две петље можемо да замислимо као непрекидну деформацију једне петље до друге кроз време s. Замислите да на столу растегнете гумицу за косу и пустите је да се скупи. На пример, на Графику 29, петље $\gamma_0 \cup \beta^-$ и $\gamma_1 \cup \beta^-$ су хомотопне на области $\mathcal{D}$. Нама ће у овом поглављу да буду најинтересантније петље које непрекидном деформацијом могу да се скупе у тачку као у следећој дефиницији.

Дефиниција 4.6. *Кажемо да је затворени пут $\gamma : I \to \mathcal{D}$ хомотопан нули на области $\mathcal{D}$ ако је хомотопан констатном путу $\gamma_0(t) = c_0 \in \mathbb{C}, t \in I$ на области $\mathcal{D}$. Ако је сваки затворен пут области $\mathcal{D}$ хомотопан нули у области $\mathcal{D}$, кажемо да је $\mathcal{D}$* ***просто повезана****.*

Релација „бити хомотопан пут на $\mathcal{D}$" је релација еквиваленције на скупу свих путева који повезују тачке a и b као и на скупу свих петљи на области $\mathcal{D}$. Занимљиво је да класе еквивелнције у односу на релацију „бити хомотопна петља на $\mathcal{D}$" имају структуру групе која која се у литератури назива фундаментална група области $\mathcal{D}$. Фундаментална група открива многе особине области $\mathcal{D}$, на пример, број генератора групе је једнак броју компоненти повезаности границе области $\mathcal{D}$ минус 1, ако је фундаментална група тривијална, свака петља области $\mathcal{D}$ је хомотопна нули, подгрупе фундаменталне групе класификују сва наткривајућа пресликавања области $\mathcal{D}$, помоћу фундаменталних група може да се врши класификација компактних површи, торусних чворова, алгебарских варијетета итд. Заинтересовани студенти могу да одслушају Топологију 2 и упознају се са материјом.

Сада наводимо главну теорему овог поглавља. Њен доказ је типичан пример доказа теорије хомотопије.

Теорема 4.9. ***(Основна Кошијева теорема)*** *Ако је функција f аналитичка на области $\mathcal{D}$ и ако су $\gamma_0, \gamma_1 : I \to \mathcal{D}$ хомотопни путеви на $\mathcal{D}$ или хомотопне петље на $\mathcal{D}$, тада је:*

$$\int_{\gamma_0} f \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f \mathrm{d}z.$$

Доказ: Нека је $\gamma : I \times I \to \mathcal{D}$ непрекидно пресликавање. Касније ћемо да анализирамо шта се дешава ако је γ хомотопија путева или хомотопија петљи. Конструишимо пресликавање $\Phi : I \times I \to \mathcal{D}$ тако да је $\Phi(s,t)$ примитивна функција функције f дуж пута $\gamma_s(t) = \gamma(s,t)$ за свако $s \in I$.

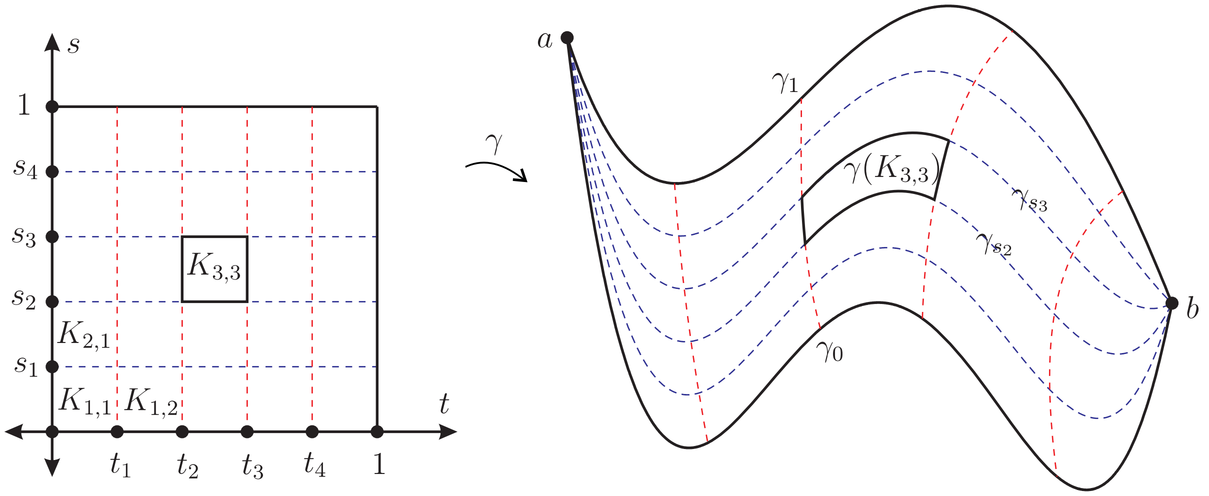


График 30: Подела квадрата $I \times I$ и његова слика хомотопијом γ.

По Теореми 4.5, за свако $(s,t) \in I \times I$ постоји отворена кугла односно круг $\mathcal{U}$ који садржи $\gamma(s,t)$ и примитивна функција F функције f на скупу $\mathcal{U}$. Тада, фамилија $\mathcal{F}$ свих ових кругова је отворени покривач скупа $\gamma(I \times I)$ што значи да је фамилија $\gamma^{-1}(\mathcal{F})$ њихових инверзних слика отворени покривач скупа $I \times I$ који има има Лебегов број $\lambda > 0$ јер је $I \times I$ компактан (слично као у доказу Теореме 4.6).

Нека су $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ и $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ поделе интервала I чији је дијаметар мањи од $\lambda/\sqrt{2}$. Поделимо квадрат $I \times I$ на правоугаонике $K_{i,j} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$, $i,j = 1,\ldots,n$ као што је приказано на Графику 4.3. Како је $t_i - t_{i-1} < \lambda/\sqrt{2}$ и $s_j - s_{j-1} < \lambda/\sqrt{2}$, дијаметар правоугаоника $K_{i,j}$ је мањи од λ па постоји $\mathcal{U}_{i,j} \in \mathcal{F}$ тако да је $\gamma(K_{i,j}) \subseteq \mathcal{U}_{i,j}$. за све $i,j = 1,\ldots,n$.

Нека је $i = 1,\ldots,n$ произвољно. Конструишимо функцију Φ по хоризонталним правоугаоницима $K_i = I \times [s_{i-1,s_i}] = K_{i,1} \cup K_{i,2} \cup \cdots \cup K_{i,n}$. На кругу $\mathcal{U}_{i,1}$ функција f има примитивну функцију $F_{i,1}$. Тада, за $j = 2,\ldots,n$ функција f на кругу $\mathcal{U}_{i,j}$ има примитивну функцију $F_{i,j}$. При том, без губљења општости, можемо да претпоставимо да се функције $F_{i,j}$ и $F_{i,j-1}$ поклапају на пресеку $\mathcal{U}_{i,j-1} \cap \mathcal{U}_{i,j}$ (Лема 4.2). Функцију $\Phi_i : K_i \to \mathcal{U}$ дефинишемо са:

$$\Phi_i(s,t) = \begin{cases} F_{i,1} \circ \gamma(s,t), & (s,t) \in K_{i,1}; \\ F_{i,2} \circ \gamma(s,t), & (s,t) \in K_{i,2}; \\ \vdots & \\ F_{i,n} \circ \gamma(s,t), & (s,t) \in K_{i,n}. \end{cases}$$

Како је $K_{i,j-1} \cap K_{i,j} \subseteq \mathcal{U}_{i,j-1} \cap \mathcal{U}_{i,j}$, функције $F_{i,j}$ и $F_{i,j-1}$ се поклапају на дужи $K_{i,j-1} \cap K_{i,j}$ што обезбеђује непрекидност функције Φ_i. Приметимо да је по Дефиницији 4.3 овако дефинисана функција Φ_i примитивна функција функције f дуж пута $\gamma_s(t) = \gamma(s,t)$ за свако $s \in [s_{i-1}, s_i]$.

Конструишимо сада функцију Φ. По Теореми 4.7, за $c_1 \in \mathbb{C}$ функција $\Phi_1 + c_1$ је примитивна функција функције f дуж пута γ_s за све $s \in [s_0, s_1]$. За $i = 2,\ldots,n$, функције $\Phi_{i-1} + c_{i-1}$ и Φ_i су примитивне функције функције f дуж пута $\gamma_{s_{i-1}}$. Тада, по Теореми 4.7, постоји $c_i \in \mathbb{C}$ тако да је $\Phi_{i-1}(s_{i-1},t) + c_{i-1} = \Phi_i(s_{i-1},t) + c_i$ за све $t \in I$. Дефинишимо функцију $\Phi : I \times I \to \mathcal{D}$ са:

$$\Phi(s,t) = \begin{cases} \Phi_1(s,t) + c_1, & (s,t) \in K_1; \\ \Phi_2(s,t) + c_2, & (s,t) \in K_2; \\ \vdots \\ \Phi_n(s,t) + c_n, & (s,t) \in K_n. \end{cases}$$

Како се правоугаоници K_i и K_{i-1} секу по дужи $\{s_{i-1}\} \times I$, а функције $\Phi_{i-1} + c_{i-1}$ и $\Phi_i + c_i$ поклапају на $\{s_{i-1}\} \times I$, функција Φ је добро дефинисана и непрекидна на $I \times I$. Такође, за свако $s \in I$, функција $\Phi(s,t)$ је примитивна функција функције f дуж пута γ_s па по Теореми 4.8 важи:

$$\int\limits_{\gamma_s} f \mathrm{d}z = \Phi(s,1) - \Phi(s,0).$$

Нека је сада γ хомотопија путева t_0 и t_1 који повезују тачке a и b. Како је тада $\gamma(s,0) = a$ и $\gamma(s,1) = b$ за све $s \in I$, важи да је:

$$\int\limits_{\gamma_0} f \mathrm{d}z = \Phi(0,1) - \Phi(0,0) = \Phi(1,1) - \Phi(1,0) = \int\limits_{\gamma_1} f \mathrm{d}z.$$

Ако је γ хомотопија затворених путева γ_0 и γ_1 тада је $\gamma(s,0) = \gamma(s,1) = z_s$ за све $s \in I$ што значи да је

$$\Phi(s,1) - \Phi(s,0) = \Phi_i(s,1) + c_i - \Phi_i(s,0) - c_i = F_{i,n} \circ \gamma(s,1) - F_{i,1} \circ \gamma(s,0) = (F_{i,n} - F_{i,1})(z_s).$$

Отуда, $\Phi(s,1) - \Phi(s,0)$ се своди на разлику примитивних функција $F_{i,n}, F_{i,1}$ у тачки z_s па је по Теореми 4.3 она једнака константи на некој околини тачке z_s. Дакле, $\Phi(s,1) - \Phi(s,0) : I \to \mathcal{D}$ је локално константна и непрекидна функција па је константна тј. постоји $c_0 \in \mathbb{C}$ тако да је $\Phi(s,1) - \Phi(s,0) = c_0$ за све $s \in I$ што значи да је

$$\oint\limits_{\gamma_0} f \mathrm{d}z = \Phi(0,1) - \Phi(0,0) = c_0 = \Phi(1,1) - \Phi(1,0) = \oint\limits_{\gamma_1} f \mathrm{d}z.$$

$\square$

Сада наводимо занимљиве последице Кошијеве теореме.

Теорема 4.10. *Ако је f аналитичка на области $\mathcal{D}$ и петља γ хомотопна нули на $\mathcal{D}$ тада је*

$$\oint\limits_{\gamma} f \mathrm{d}z = 0.$$

Доказ: Како је γ хомотопна нули, постоји константан пут (петља) $\gamma_0 : I \to \mathcal{D}$ тако да су петље γ и γ_0 хомотопне на $\mathcal{D}$ па је по претходној теореми

$$\oint\limits_{\gamma} f \mathrm{d}z = \oint\limits_{\gamma_0} f \mathrm{d}z = \int\limits_0^1 f[\gamma_0(t)]\gamma_0'(t) \mathrm{d}t = 0$$

јер је $\gamma_0' = 0$ као извод константне функције. $\square$

Постоји неколико тополошких критеријума за проверу да ли је свака петља на области $\mathcal{D}$ хомотопна нули односно да ли је $\mathcal{D}$ просто повезана. Како је $\mathcal{D}$ отворен путевима повезан скуп, најједноставнији критеријум за проверу његове просте-повезаности је помоћу $\partial\mathcal{D}$. Студенти који су слушали Топологију 1 могу да докажу да је отворен, путевима повезан потскуп сфере просто-повезан акко је његова граница празан скуп или има једну компоненту повезаности. Преведено на терминологију комплексне равни, област $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ је просто повезана акко је једноструко повезана тј. акко $\partial\mathcal{D}$ (који се рачуна у простору $(\overline{\mathbb{C}}, \rho)$) има једну компоненту повезаности. Доказ се ради тако што се докаже да је скуп који има наведене особине контрактибилан али то већ превазилази теорију Комплексне анализе.

Последица 4.3. *Ако је функција f аналитичка на једноструко повезаној области $\mathcal{D}$ и $\gamma : I \to \mathcal{D}$ произвољна петља, тада је*

$$\oint_{\gamma} f \mathrm{d}z = 0.$$

Сада помоћу доказаних тврђења можемо да докажемо егзистенцију глобалне примитивне функције функције f на једноструко повезаним областима.

Теорема 4.11. *Аналитичка функција на једноструко повезаној области $\mathcal{D}$ има примитивну функцију на области $\mathcal{D}$.*

Доказ: Докажимо прво да интеграл по путу γ области $\mathcal{D}$ не зависи од пута области $\mathcal{D}$ већ само од крајњих тачака. Нека су $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathcal{D}$ два пута који повезују тачке $a, b \in \mathcal{D}$. Тада, $\gamma_1 \cup \gamma_2^-$ је затворен пут у једноструко повезаној области $\mathcal{D}$ па је по претходној теореми:

$$0 = \oint_{\gamma_1 \cup \gamma_2^-} f \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2^-} f \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f \mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f \mathrm{d}z \quad \text{тј.} \quad \int_{\gamma_1} f \mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f \mathrm{d}z.$$

Нека је $a \in \mathcal{D}$ фиксирана тачка области $\mathcal{D}$ и $z \in \mathcal{D}$ произвољно. Обележимо са $\widetilde{az}$ пут области $\mathcal{D}$ који повезује тачку a са тачком z. Област $\mathcal{D}$ је путевима повезан скуп па пут $\widetilde{az}$ сигурно постоји. Како по горњем закључку интеграл функције f по путу $\widetilde{az}$ не зависи од пута области $\mathcal{D}$ који повезује тачке a и z, можемо добро да дефинишемо функцију:

$$F(z) = \int_{\widetilde{az}} f \mathrm{d}z \quad \text{за све} \quad z \in \mathcal{D}.$$

Остатак доказа је аналоган доказу Леме 4.1 где се интервали $[a, z]$ у дефиницији локалне примитивне функције мењају кривим $\widetilde{az}$. $\square$

Студенти ће на испиту свакако морати да испишу целокупан доказ претходне теореме. Дакле, када рачунамо интеграл функције која је аналитичка на једноструко повезаној области, можемо да применимо Њутн-Лајбницову формулу.

Занимљиво је да ако искористимо знање Анализе 4, теорију овог поглавља смо могли да докажемо доста ефикасније. Нека крива γ ограничава у комплексној равни коначну област $\mathcal{D}$ и нека је оријетисана тако да тачке области $\mathcal{D}$ остају са њене леве стране. Ако је функција $f = u + iv$ аналитичка на области $\mathcal{G}$ која садржи $\overline{\mathcal{D}}$, тада су функције u и v непрекидне и диференцијабилне на $\mathcal{G}$ па је по Гриновој теореми:

$$\int_{\gamma} f\mathrm{d}z = \int_{\gamma} u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_{\gamma} v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{D}} (-v'_x - u'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + i\iint_{\mathcal{D}} (u'_x - v'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

при том, двојни интеграли су једнаки нули због Коши-Риманових услова. Приметите да се у претходном интегралу нигде не захтева проста повезаност области $\mathcal{D}$.

4.4 Интеграција по граници области

Свака затворена крива γ дели комплексну раван на два отворена скупа[10] и то: ограничену, једноструко повезану област $\mathcal{D}$ и неограничен отворен скуп $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Гранична крива γ једноструко повезане области $\mathcal{D}$, оријентисана тако да њеним обиласком тачке области остају са њене леве стране, је хомотопна нули на свакој области $\mathcal{G}$ која саржи $\overline{\mathcal{D}}$. Заиста, ако формирамо затворену криву γ_0 чија се свака тачка $\gamma_0(t)$ налази лево од криве γ и на растојању ϵ од тачке $\gamma(t)$, за довољно мало ϵ крива γ_0 ће да буде садржана у $\mathcal{D}$ као што је илустровано на графику испод.

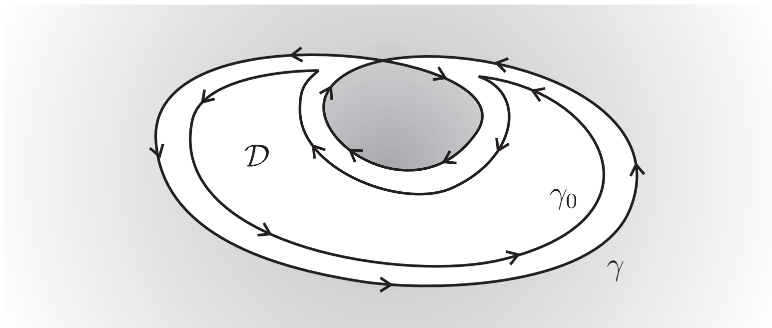


График 31: Граница једноструко повезане области је хомотопна нули.

Како је $\mathcal{D}$ једноструко повезана, крива γ_0 је хомотопна нули на $\mathcal{D}$ па је γ хомотопна нули на $\mathcal{G}$ јер су γ_0 и γ_1 хомотопне на $\mathcal{G}$. Ако је функција f аналитичка на $\mathcal{G}$, по Последици 4.3 добијамо да је:

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} f\mathrm{d}z = 0.$$

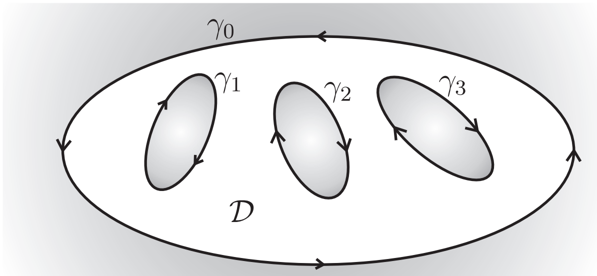
Сличан резултат важи и ако $\partial\mathcal{D}$ има коначно много компоненти повезаности.

Теорема 4.12. ***(Општа Кошијева теорема)*** *Нека је функција f аналитичка на области $\mathcal{G}$ и нека је $\mathcal{D}$ ограничена област таква да $\overline{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{G}$. Ако $\partial\mathcal{D}$ може да се параметризује помоћу коначно много затворених кривих које су оријетисане тако да њиховим обиласком тачке области $\mathcal{D}$ остају са њихове леве стране, тада је*

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} f\mathrm{d}z = 0.$$

Доказ: Елементи доказа су илустровани на Графику 32.

[10] Ово тврђење, иако је перцептивно очигледно, није нимало лако математички доказати.



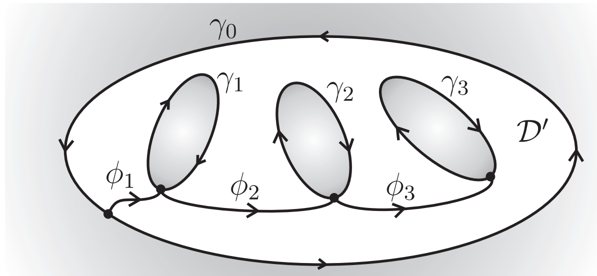


График 32: Тачке области $\mathcal{D}$ су са леве стране кривих γ_i, $i = 0, 1, 2, 3$.

Нека је $\partial\mathcal{D}$ параметризована путевима $\gamma_0, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ са одговарајућом оријентацијом. Како је $\overline{\mathcal{D}}$ путевима повезан (јер $\mathcal{D}$ је путевима повезан), за све $i = 1, \dots, n$ постоји Жорданов пут $\phi_i : [0,1] \to \overline{\mathcal{D}}$ који повезује почетак пута γ_{i-1} са почетком пута γ_i и који сече $\partial\mathcal{D}$ само у крајњим тачкама. Без губљења општости, можемо да претпоставимо да се путеви $\phi_1, \dots, \phi_n$ не секу јер ако из области $\mathcal{D}$ склонимо тачке Жордановог пута који повезује компоненте повезаности границе, добијамо путевима повезану област чија граница има једну мање компоненту повезаности.

Област $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \setminus \ \{\phi_i(t) \mid t \in [0,1], i = 1, \dots, n\}$ ($\mathcal{D}$ без путева ϕ_i) је једноструко повезана а крива:

$$\Gamma = \gamma_0 \cup \phi_1 \cup \gamma_1 \cup \phi_2 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \phi_n \cup \gamma_n \cup (\phi_n^- \cup \phi_{n-1}^- \cup \cdots \cup \phi_1^-)$$

је параметризација границе $\partial\mathcal{D}'$ таква да њеним обиласком тачке области $\mathcal{D}'$ остају са десне стране. Отуда, Γ је хомотопна нули на $\mathcal{G}$ па је по Теореми 4.3 и адитивности комплексног интеграла

$$0 = \oint_{\Gamma} f\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_0} f\mathrm{d}z + \int_{\phi_1} f\mathrm{d}z + \oint_{\gamma_1} f\mathrm{d}z + \cdots + \int_{\phi_n} f\mathrm{d}z + \oint_{\gamma_n} f\mathrm{d}z + \int_{\phi_n^-} f\mathrm{d}z + \cdots + \int_{\phi_1^-} f\mathrm{d}z$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i} f\mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{n} \int_{\phi_i} f\mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{n} \int_{\phi_i} f\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i} f\mathrm{d}z = \oint_{\partial\mathcal{D}} f\mathrm{d}z.$$

Из доказа претходне теореме се види да компоненте повезаности границе $\partial\mathcal{D}$ могу да буду и тачке. □

Пример 4.4. *Израчунати Френелове*[11] *интеграле* $\int\limits_0^\infty \sin x^2 \mathrm{d}x$ *и* $\int\limits_0^\infty \cos x^2 \mathrm{d}x$.

Решење: Нека је $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, 0 < \arg z < \pi/4\}$ једноструко повезана област приказана на Графику 33. Функција $f(z) = e^{iz^2}$ је аналитичка на целој комплексној равни па је по претходној теореми

$$0 = \oint_{\partial\mathcal{D}} e^{iz^2}\mathrm{d}z \overset{(*)}{=} \int_{[0,R]} e^{iz^2}\mathrm{d}z + \int_{\widetilde{RA}} e^{iz^2}\mathrm{d}z + \int_{[A,0]} e^{iz^2}\mathrm{d}z.$$

Дуж $[0, R]$ можемо да параметризујемо са $z = x, x \in [0, R]$ па је

$$I_1(R) = \int_{[0,A]} e^{iz^2}\mathrm{d}z = \int_0^R e^{ix^2}\mathrm{d}x = \int_0^R \cos x^2\mathrm{d}x + i\int_0^R \sin x^2\mathrm{d}x.$$

[11] Augustin-Jean Fresnel 1788-1827, француски инжењер и физичар

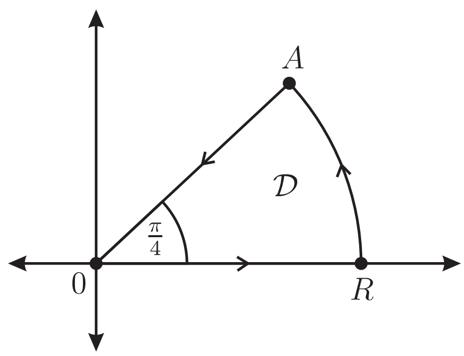


График 33: Област $\mathcal{D}$ из примера.

Тада, тражени интеграли се добијају помоћу граничне вредности $\lim\limits_{R\to\infty} I_1(R)$. Због тога ћемо да израчунамо остала два интеграла једначине $(*)$ и потражимо њихове граничне вредности када R тежи бесконачности.

Кружни лук $\widetilde{RA}$ параметризујемо са $z = Re^{i\varphi}$ где $\varphi \in [0, \pi/4]$. Тада

$$I_2(R) = \int\limits_{\widetilde{RA}} e^{iz^2}\mathrm{d}z = iR\int\limits_0^{\pi/4} e^{iR^2e^{i2\varphi}}e^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi.$$

По Теореми 4.2 важи да је

$$0 \leq |I_2(R)| = \left|\int\limits_{\widetilde{RA}} e^{iz^2}\mathrm{d}z\right| \leq R\int\limits_0^{\pi/4} |e^{iR^2e^{i2\varphi}}e^{i\varphi}|\mathrm{d}\varphi = R\int\limits_0^{\pi/4} |e^{iR^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)}||e^{i\varphi}|\mathrm{d}\varphi$$

$$= R\int\limits_0^{\pi/4} |e^{iR^2\cos 2\varphi}||e^{-R^2\sin 2\varphi}|\mathrm{d}\varphi = R\int\limits_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin 2\varphi}\mathrm{d}\varphi.$$

Како је $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$ за $t \in [0, \pi/2]$ а функција e^{-x} опадајућа, добијамо да је

$$0 \leq |I_2(R)| \leq R\int\limits_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin 2\varphi}\mathrm{d}\varphi \leq R\int\limits_0^{\pi/4} e^{-R^2\frac{2}{\pi}t2\varphi}\mathrm{d}\varphi = \frac{1-e^{-R^2}}{R}\,\frac{\pi}{4}.$$

По теореми о укљштењу за граничне вредности реалних функција добијамо да је $\lim\limits_{R\to\infty} |I_2(R)| = 0$ што имплицира да је $\lim\limits_{R\to\infty} I_2(R) = 0$.

Дуж $[0, A]$ параметризујемо са $z = te^{i\frac{\pi}{4}}$, $t \in [0, R]$. Тада $z^2 = t^2e^{i\frac{\pi}{2}} = it^2$ и $\mathrm{d}z = e^{i\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t$ па је

$$I_3(R) = \int\limits_{[A,0]} e^{iz^2}\mathrm{d}z = -\int\limits_{[0,A]} e^{iz^2}\mathrm{d}z = -e^{i\frac{\pi}{4}}\int\limits_0^R e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Отуда је $\lim\limits_{R\to\infty} I_3(R) = -e^{i\frac{\pi}{4}}\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = -e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Ојлер-Поасонов интеграл).

Заменом добијених граничних вредности у једначину $(*)$ добијамо

$$\int\limits_0^\infty \cos x^2\mathrm{d}x + i\int\limits_0^\infty \sin x^2\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

одакле следи да је
$$\int\limits_0^\infty \sin x^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \cos x^2 \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$
□

4.5 Кошијева интегрална формула

У овом поглављу представљамо теорему која нам омогућава да вредност аналитичке функције на ограниченој области изразимо помоћу интеграла на граници те области што ће да буде од великог значаја у остатку курса Комплексне анализе.

Теорема 4.13. ***(Кошијева интегрална формула)*** *Нека је f аналитичка на области $\mathcal{G}$ и нека је $\mathcal{D}$ област таква да $\partial\mathcal{D}$ формира коначно много затворених кривих и нека је $\overline{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{G}$. Тада, за свако $z \in \mathcal{D}$ важи:*
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$$
где су криве границе $\partial\mathcal{D}$ оријентисане тако да њиховим обиласком тачке области $\mathcal{D}$ остају са леве стране.

Доказ: Нека је $z \in \mathcal{D}$ произвољно. Како је $\mathcal{D}$ отворен скуп, постоји круг $\mathcal{U}_z^\rho = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - z| < \rho\}$ такав да је $\overline{\mathcal{U}_z^\rho} \subseteq \mathcal{D}$. Функција $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ је аналитичка на области $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \setminus \{z\}$, јер f и $\frac{1}{\xi - z}$ су аналитичке на $\mathcal{G}'$. Област $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{U}_z^\rho}$ је таква да $\overline{\mathcal{D}'} \subset \mathcal{G}'$ а границу $\partial\mathcal{D}'$ формира коначно много кривих које су оријентисане тако да тачке области $\mathcal{D}'$ остају са леве стране. При том, $\partial\mathcal{U}_z^\rho$ је негативно оријентисана јер су тачке области $\mathcal{D}'$ ван $\mathcal{U}_z^\rho$ као што је приказано на Графику 34. Тада, по Општој Кошијевој теореми 4.12 важи да је
$$0 = \oint\limits_{\partial\mathcal{D}'} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \oint\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi + \oint\limits_{\partial\mathcal{U}_z^{\rho-}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \oint\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi - \oint\limits_{\partial\mathcal{U}_z^\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$$
што значи да је
$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\mathcal{U}_z^\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi.$$
Приметимо да у претходној конструкцији ρ може да буде произвољно мали позитиван реалан број. Како десна страна претходне једнакости не зависи од ρ добијамо да је
$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\mathcal{U}_z^\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi.$$
Докажимо да је лева гранична вредност једнака $f(z)$.

Присетимо се да је по Примеру 4.1 $\oint\limits_{\partial\mathcal{U}_z^\rho} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z} = 2\pi i$. Тада
$$f(z) - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\mathcal{U}_z^\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \frac{f(z)}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\mathcal{U}_z^\rho} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\mathcal{U}_z^\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d} \overset{f(z) \text{ конст.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\mathcal{U}_z^\rho} \frac{f(z) - f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi.$$
Како је функција $g(\xi) = f(z) - f(\xi)$ непрекидна на $\mathcal{D}$ и $g(z) = 0$, за произвољно $\epsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за све $\xi \in \mathbb{C}$ из $|z - \xi| < \delta$ следи $|f(z) - f(\xi)| < \epsilon$.

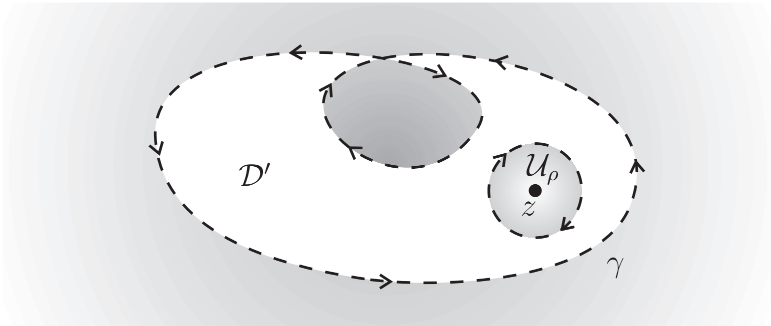


График 34: Област компактно садржи круг око сваке своје тачке.

Тада, за $\rho < \delta$ и све $z \in \mathcal{U}_z^\rho$ важи $|\xi - z| < \rho$. Како за све $z \in \partial\mathcal{U}_z^\rho$ важи $|\xi - z| = \rho$ добијамо:

$$\left|\frac{f(z) - f(\xi)}{\xi - z}\right| = \frac{|f(z) - f(\xi)|}{|\xi - z|} = \frac{|f(z) - f(\xi)|}{\rho} \leq \frac{\epsilon}{\rho}.$$

Обим круга $\mathcal{U}_z^\rho$ једнак $2\pi\rho$ па, по Последици 4.1, добијамо да је:

$$\left|f(z) - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\mathcal{U}_z^\rho}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi\right| = \frac{1}{|2\pi i|}\left|\oint\limits_{\partial\mathcal{U}_z^\rho}\frac{f(z) - f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{\epsilon}{\rho}2\pi\rho = \epsilon$$

чиме смо доказали тражену граничну вредност. $\square$

Кошијева интегрална формула илуструје занимљиву особину аналитичких функција. Наиме, ако је дата аналитичка функција на околини затворене криве и желимо да формирамо њено аналитичко продужење на област коју та крива ограничава, Кошијева интегрална формула тврди да то можемо да урадимо на јединствен начин, односно на области постоји јединствена аналитичка функција која се поклапа са функцијом датом на граници као што илуструје следећи пример.

Пример 4.5. *Нека је $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| < 2\}$. Конструисати аналитичко продужење функције $f : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ дате са $f(z) = z^2$ на област $\mathcal{G} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$.*

Решење: Област $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ компактно припада области $\mathcal{G} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$. Нека је g аналитичка на $\mathcal{G}$ и нека се поклапа са функцијом f на $\mathcal{P}$. Тада $\mathcal{D}, \mathcal{G}$ и g задовољавају услове Кошијеве интегралне формуле 4.13 па је за свако $z \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}
g(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{g(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{\xi^2}{\xi - z}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{\xi^2 - z^2 + z^2}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint\limits_{|\xi|=1}(\xi + z)\mathrm{d}\xi + z^2\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z}\right) \\
&= \frac{z^2}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi - z|=\epsilon}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z} = \frac{z^2}{2\pi i}2\pi i = z^2.
\end{aligned}$$

При том, по Основној Кошијевој теореми 4.9 важи да је

$$\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z} = \oint\limits_{|\xi - z|=\epsilon}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z}$$

зато што су кружнице $|\xi| = 1$ и $|\xi - z| = \epsilon$ хомотопне на области $\mathcal{D} \setminus \{z\}$ на којој је функција $\varphi(\xi) = \frac{1}{\xi - z}$ аналитичка. □

По Кошијевој интегралној формули, вредност аналитичке функције у тачки је једнака њеној аритметичкој средини на кругу довољно малог полупречника око те тачке као што илуструје следеће тврђење.

Последица 4.4. *Ако је функција f аналитичка на области $\mathcal{D}$ тада, за свако $z \in \mathcal{D}$ постоји $\rho_0 > 0$ тако да је за све $0 < \rho < \rho_0$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\varphi}) \mathrm{d}\varphi.$$

Доказ: Нека је $z \in \mathcal{D}$ произвољно. Како је област отворен скуп, постоји ρ_0 тако да је $\mathcal{U}_z^{\rho_0} = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - z| < \rho_0\} \subseteq \mathcal{D}$. Тада, f је аналитичка на скупу $\mathcal{U}_z^{\rho_0}$ који је једноструко повезан и за све $\rho < \rho_0$ круг $\mathcal{U}_z^{\rho}$ компактно припада области $\mathcal{U}_z^{\rho_0}$. Тада, по Кошијевој интегралној формули 4.13 је:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{U}_z^{\rho}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \overset{\xi = z + \rho e^{i\varphi}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{i\varphi})}{z + \rho e^{i\varphi} - z} \mathrm{d}(z + \rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\varphi}) \mathrm{d}\varphi.$$

□

5 Комплексни редови

Као и у реалној анализи, ред комплексних бројева $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ је сума низа комплексних бројева $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Основно питање је да ли је сума реда коначан комплексан број односно да ли ред конвергира. Као и у реалној анализи, конвергенцију комплексног реда проверавамо помоћу конвергенције низа његових парцијалних сума.

Дефиниција 5.1. *Ред* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ *конвергира ако низ* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i$ *конвергира ка* z *где је* $|z| < \infty$.

Еквивалентно, ред комплексних бројева конвергира акко његов низ остатака тежи нули. Сада наводимо класичан пример конвергентног реда комплексних бројева.

Пример 5.1. *Испитати конвергенцију геометријског реда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ *за* $z \in \mathbb{C}$.

Решење: Низ парцијалних сума овог реда има форму:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n.$$

Сума геометријског низа реалних бројева се је позната. Међутим, иста формула важи и за геометријски низ комплексних бројева јер је алгебра иста:

$$zS_n - S_n = z^{n+1} - 1 \quad \text{па је} \quad S_n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

Низ z^n конвергира коначном комплексном броју акко је $|z| < 1$ или $z = 1$ (доказати). За $|z| < 0$, низ z^n тежи нули а за $z = 1$ добијамо очигледно дивергентан ред.

Дакле, ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ конвергира акко је $|z| < 1$ и тада је $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. □

Теорија редова комплексних бројева не доноси ништа претерано значајно. Како се захтева конвергенција низа парцијалних сума ка коначном комплексном броју, она је еквивалентна конвергенцији његовог реалног и конвергенцији његовог имагинарног дела.

Теорема 5.1. *Ред* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ *конвергира акко редови* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ *конвергирају.*

Дакле, сва теорија конвергенције редова реалних бројева има своју примену на конвергенцију редова комплексних бројева. Амбициозни читаоци могу да испишу како би, на пример, изгледао Абелов критеријум за конвергенцију редова комплексних бројева.

Нама ће у даљој анализи да буду више значајни комплексни функционални редови и зато овде наводимо неколико њихових основних особина.

Нека је $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ функција $f_n : D \to \mathbb{C}$ (дефинисаних на истом скупу $D \subseteq \mathbb{C}$). Тада, функцију:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

називамо функционални ред на скупу D. Функција f је дефинисана у свакој тачки $z_0 \in D$ где бројни ред $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ конвергира. Ако је f дефинисана на скупу D кажемо да функционални ред $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ конвергира „тачка по тачка” на скупу D. Као и код реалних функционалних редова, за анализу комплексних функционалних редова је много битнија равномерна конвергенција.

Дефиниција 5.2. *Функционални ред* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *равномерно конвергира на скупу* D *акко функционални низ његових парцијалних сума* $\big(S_n(z)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *равномерно конвергира на* D.

У досадашњем курсу Комплексне анализе се нисмо бавили функционалним низовима и њиховом равномерном конвергенцијом. Укратко, функционални низ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно конвергира ка функцији f_0 на скупу D акко

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall z \in D)|f_n(z) - f_0(z)| < \epsilon$$

или еквивалентно акко низ реалних бројева

$$||f_n||_D = \sup_{z\in D} |f_n(z) - f_0(z)|$$

тежи нули. Дакле, све је аналогно као у случају реалних функционалних низова и редова те зато овде наводимо комплексне пандане добро познатих тврђења а докази су слични као и код одговарајућих теорема из Анализе 3.

Теорема 5.2. ***(Вајерштрасов[12] критеријум)*** *Нека је* $|f_n(z)| \leq c_n$ *за све* $n \in \mathbb{N}$ *и све* $z \in D$. *Ако бројни ред* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *конвергира, тада функционални ред* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *апсолутно и равномерно конвергира на* D.

Последица 5.1. *Нека је* $||f||_D = \sup\{|f(z)| \mid z \in D\}$. *Ако ред* $\sum_{n=0}^{\infty} ||f_n||_D$ *конвергира тада* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *апсолутно и равномерно конвергира на* D.

Теорема 5.3. *Ако су функције* $f_n : D \to \mathbb{C}$ *непрекидне на скупу* D *за све* $n \in \mathbb{N}_0$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *равномерно конвергира на* D, *тада је сума реда* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *непрекидна на* D.

Теорема 5.4. ***(Интеграција суме реда)*** *Нека су функције* f_n *непрекидне на део по део глатком путу* $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ *и нека* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *равномерно конвергира на путу* γ. *Тада, ред* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *може да се интеграли члан по члан на путу* γ *тј.*

$$\int\limits_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\gamma} f_n(z)\mathrm{d}z.$$

5.1 Тејлоров ред

Као и у реалној анализи, најзанимљивији комплексни функционални редови су степени редови облика $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ где су $c_n \in \mathbb{C}$ комплексне константе. Поставља се питање да ли ови редови конвергирају и које све функције могу да буду представљене као суме конвергентних степених редова. Представљање функције конвергентним степеним редом има врло широку примену јер омогућава довољно добру апроксимацију дате функције полиномима што даље омогућава практичан рад са функцијама (Нумеричка математика).

Главна техника којом се реалне функције трансформишу у степене редове је Тејлоров[13] ред. За реалне функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које су једнаке суми својег Тејлоровог реда на околини тачке x се каже да су аналитичке у тачки x. Следећа теорема даје одговор на питање зашто смо комплексне функције које су $\mathbb{C}-$диференцијабилне на некој околини тачке z називали аналитичким у z.

[12] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass 1815-1897, немачки математичар.
[13] Brook Taylor 1685-1731, енглески математичар.

Теорема 5.5. ***(Тејлорова теорема)*** *Ако је функција f аналитичка на области $\mathcal{D}$, тада за произвољно $z_0 \in \mathcal{D}$ и круг $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\} \subseteq \mathcal{D}$ постоји конвергентан степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ такав да је за свако $z \in \mathcal{U}$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n.$$

Доказ: Нека је $z_0 \in \mathcal{D}$ произвољно. Како је $\mathcal{D}$ отворен скуп, постоји круг (отворена кугла) $\mathcal{U}$ са центром у z_0 полупречника R која је садржана у $\mathcal{D}$. Тада, за произвољно $0 < r < R$, круг $\mathcal{U}^r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ компактно припада једноструко повезаној области $\mathcal{U}$. Тада, области $\mathcal{U}^r, \mathcal{U}$ и функција f задовољавају услове Кошијеве интегралне формуле 4.13 па је за свако $z \in \mathcal{U}^r$:

$$f(z) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi.$$

где је γ кружница $\partial\mathcal{U}^r$. Како је у подинтегралној функцији $|\xi - z_0| = r$ а $|z - z_0| < r$, добијамо да је $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| < 1$ па по Примеру 5.1 важи да је:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n}.$$

Заменом у једначини $(*)$ добијамо:

$$f(z) \overset{(**)}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\xi.$$

Очигледно да нам овде одговара да интеграл и сума замене места али да би то урадили морамо да проверимо услове Теореме 5.4. Како се сума интеграли по ξ, променљиву z третирамо као константу.

Прво, функције $\varphi_n(\xi) = \frac{f(\xi)(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}$ су непрекидне на γ за све $n \in \mathbb{N}_0$ (образложити).

Друго, функција f је непрекидна на $\overline{\mathcal{U}^r}$ који је компактан па је ограничена са M на $\overline{\mathcal{U}^r}$ а самим тим и на γ. Такође, на кривој γ важи $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{|\xi-z_0|} = \frac{|z-z_0|}{r} = q < 1$, што значи да је за сваку тачку z криве γ

$$|\varphi_n(z)| = \left|\frac{f(\xi)(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right| = \frac{|f(z)|}{|\xi - z_0|} \left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right|^n \leq \frac{M}{r} q^n.$$

Како ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{r} q^n = \frac{M}{n} \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ конвергира, по Вајерштрасовом критеријуму 5.2 закључујемо да $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\xi)$ равномерно конвергира на путу γ.

Дакле, функционални ред $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\xi)$ може да се интеграли члан по члан што значи да једначина $(**)$ постаје:

$$f(z) \overset{(**)}{=} \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\xi\right)(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

где је $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\xi$. $\square$

Приметимо да у доказу претходне теореме коефицијенти c_n не зависе од полупречника кружнице γ која је садржана у скупу $\mathcal{U}$ јер су кружнице различитих полупречника хомотопне на $\mathcal{U} \setminus \{z_0\}$ па по Основној Кошијевој теореми 4.9 интеграли по њима су једнаки. Тако можемо да закључимо да коефицијенти c_n представљају својеврсну инваријанту аналитичке функције која зависи искључиво од тачке у којој се рачунају.

Дефиниција 5.3. *Нека је f непрекидна функција на околини тачке $z_0 \in \mathbb{C}$. Степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ чији се коефицијенти рачунају помоћу формуле*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\xi$$

где је $r > 0$ полупречник круга на којем је функција f аналитичка, називамо Тејлоров ред функције f у тачки z_0.

Очигледно да су аналитичке функције једнаке својем Тејлоровом развоју у произвољној тачки али ову особину нема свака комплексна функција као што ћемо да видимо у наставку. Сада наводимо неколико особина аналитичких функција које које су последице њиховог развоја у степени ред.

Теорема 5.6. *Ако је функција f аналитичка на затвореној кугли $\overline{\mathcal{U}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ и на $\overline{\mathcal{U}}$ ограничена са M, тада за коефицијенте њеног Тејлоровог развоја у тачки z_0 важи:*

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad \text{за све} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Доказ: Ако потражимо модуо коефицијената датих у претходној дефиницији, по Последици 4.1 добијамо да је за све $n \in \mathbb{N}_0$:

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\xi \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2r\pi = \frac{M}{r^n}$$

јер за све ξ за које је $|\xi - z_0| = r$ важи $\left| \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z_0|^{n+1}} \leq \frac{M}{r^{n+1}}$. $\square$

Сада наводимо једно доста изненађујуће тврђење које важи у Комплексној анализи.

Теорема 5.7. ***(Теорема Лиувила[14])*** *Ако је функција аналитичка и ограничена на целој комплексној равни, тада је она једнака константи.*

Доказ: По Тејлоровј теореми 5.5, функција f је једнака својем Тејлоровм развоју на произвољном кругу $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$. Како вредности коефицијената не зависе од плупречника R, користећи претходну теорему закључујемо да је за свако $R > 0$

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n} \quad \text{за све} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Тада, за све $n > 0$ важи да је $0 \leq |c_n| \leq \lim\limits_{R \to \infty} \frac{M}{R^n} = 0$ па је $c_n = 0$.

Заменом у једнакости $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ добијамо да је $f(z) = c_0$. $\square$

Дакле, једине ограничене функције које су аналитичке на $\mathbb{C}$ су константне функције што имплицира да ако функција која је аналитичка на $\mathbb{C}$ није константна, она није ни ограничена на $\mathbb{C}$! Леп пример неограничених на $\mathbb{C}$ комплексних функција су $\sin z$ и $\cos z$. Теорема Лиувила може да се искаже и мало једноставније.

[14] Joseph Liouville 1809-1882. француски математичар.

Последица 5.2. *Ако је функција f аналитичка на $\overline{\mathbb{C}}$, тада је f једнака константи.*

Доказ: Присетимо се по Дефиницији 2.6 да је функција f аналитичка у бесконачности акко је $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ аналитичка у нули. То имплицира да постоји околина тачке $w = 0$ на којој је функција g аналитичка па самим тим и затворена кугла $\overline{\mathcal{U}} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq R\}$ на којој је g непрекидна. Како је $\overline{\mathcal{U}}$ компактан, g је ограничена на $\overline{\mathcal{U}}$ тј. постоји M тако да је за све $w \in \mathbb{C}$ такве да је $|w| \leq R$

$$|g(w)| = \left|f\left(\frac{1}{w}\right)\right| \leq M.$$

Заменом $w = \frac{1}{z}$ у претходној неједнакости добијамо да је за све $z \in \mathbb{C}$ такве да $|z| \geq \frac{1}{R}$

$$|f(z)| \leq M.$$

Дакле, f је ограничена на скупу $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq \frac{1}{R}\}$. Како је f ограничена и на $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{R}\}$ (јер је скуп компактан а f непрекидна), закључујемо да је f ограничена на $\mathbb{C}$ па је по Теореми Лиувила 5.7 она једнака константи. □

Још једна занимљива последица Лиувилове теореме је следеће тврђење.

Последица 5.3. ***(Основни став алгебре)*** *Сваки полином степена $n \geq 1$ има бар један корен у скупу комплексних бројева.*

Доказ: Нека је p полином степена $n > 0$. Претпоставимо супротно, нека је $p(z) \neq 0$ за све $z \in \mathbb{C}$. Како је полином аналитичка функција на $\mathbb{C}$, закључујемо да је $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ такође аналитичка на $\mathbb{C}$ јер именилац никад није нула. Како је

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{p(z)} = \frac{1}{\lim\limits_{z\to\infty} p(z)} = 0,$$

закључујемо да је f аналитичка у бесконачности. Дакле, f је аналитичка на $\overline{\mathbb{C}}$ па је по петходној последици константна што није случај јер полином p по претпосавци није константна функција. □

До сада смо видели да су аналитичке функције локално једнаке суми степеног реда. Поставља се питање какве особине имају суме степних редова, специјално, да ли је сума степеног реда аналитичка функција на скупу где ред ковергира. Као што ћемо да видимо у наставку, одговор је позитиван.

Лема 5.1. *Ако је низ општих чланова степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ ограничен у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$, тада ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ конвергира на кругу $\mathcal{U} = \{z \in C \mid |z-a| < |z_0-a|\}$. При том, ред конвергира апсолутно и равномерно на сваком компактном потскупу $K \subseteq \mathcal{U}$.*

Доказ: Нека је функционални низ $f_n(z) = c_n(z-a)^n$ ограничен у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$. Тада постоји $M > 0$ тако да је:

$$|c_n(z_0-a)^n| \leq M \quad \text{за све} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Можемо да претпоставимо да је $z_0 \neq a$ јер за $z_0 = a$ добијамо да је $\mathcal{U} = \emptyset$ па тврђење важи. Нека је $|z_0 - a| = \rho > 0$. Нека је K произвољан компактан потскуп скупа $\mathcal{U}$. Тада, за свако $z \in K$ важи:

$$\frac{|z-a|}{|z_0-a|} = \frac{|z-a|}{\rho} = q < 1$$

што имплицира да је $|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0-a)|\frac{|z-a|}{|z_0-a|} \leq Mq^n$. Како ред $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ конвергира, функционални ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ конвергира апсолутно и равномерно на скупу K по Вајерштрасовом критеријуму 5.2.

Како скуп $\mathcal{U}$ садржи компактан скуп око сваке своје тачке (тополошким речником, локално је компактан), закључујемо да дати степени ред конвергира на $\mathcal{U}$. $\square$

Теорема 5.8. ***(Абелова[15] теорема)*** *Ако степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ конвергира у некој тачки $z_0 \in \mathbb{C}$, тада он конвергира на кругу $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < |z_0-a|\}$ а на сваком компактном скупу $K \subset \mathcal{U}$ конвергира апсолутно и равномерно.*

Доказ: Довољно је да приметимо да из конвергениције реда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ у тачки z_0 следи конвергенција низа $\left(c_n(z_0-a)^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ а самим тим и његова ограниченост. Тврђење следи на основу претходне леме. $\square$

Сада наводимо теорему која описује скуп тачака где степени ред конвергира. Присетимо се пре тога да је лимес супериор (у ознаци $\overline{\lim}$) реалног низа његова највећа тачка нагомилавања.

Теорема 5.9. ***(Коши-Адамарова[16] теорема)*** *Нека за степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ важи*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R} \quad \textit{где је} \quad 0 \leq R \leq \infty.$$

Тада, ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ конвергира на скупу $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ а дивергира у свакој тачки скупа $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$.

Доказ: Нека је $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$ где је $0 < R < \infty$. Тада, за свако $\epsilon > 0$, постоји $n_0 \in N$ тако да за све $n > n_0$ важи да је $\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{R} + \epsilon$. Тако добијамо да је:

$$|c_n(z-a)^n| \leq \left(\frac{1}{R} + \epsilon\right)^n |z-a|^n \quad \text{за све} \quad n > n_0.$$

Тада, за $z \in \mathbb{C}$ такве да је $|z-a| < R$, можемо да одаберемо довољно мало ϵ тако да је $\left(\frac{1}{R}+\epsilon\right)|z-a| = q < 1$ (јер $\left(\frac{1}{R}+\epsilon\right)|z-a| = \frac{1}{R}|z-a| + \epsilon|z-a| < \frac{1}{R}R + \epsilon|z-a|$). Тада,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z-a)^n| < \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

што значи да $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ апсолутно конвергира па самим тим и конвергира.

Нека је $z \in \mathbb{C}$ тако да је $|z-a| > R$. По дефиницији лимес супериора, постоји подниз $(\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|})_{k\in\mathbb{N}}$ који конвергира ка $\frac{1}{R}$. Тада, за произвољно $\epsilon > 0$ постоји $k_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $k > k_0$ важи да је $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} \geq \frac{1}{R} - \epsilon$ што имплицира да је

$$|c_{n_k}(z-a)^{n_k}| \geq \left(\frac{1}{R} - \epsilon\right)^{n_k} |z-a|^{n_k}.$$

Сада, за довољно мало ϵ добијамо да је $|c_{n_k}(z-a)^{n_k}| > 1$ за $k > k_0$ што значи да општи члан реда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ не тежи нули па он дивергира. $\square$

[15] Niels Henrik Abel 1802-1829, норвешки математичар.
[16] Jacques Salomon Hadamard 1865-1963, француски математичар.

Видимо да Коши-Адамарова теорема одређује скоро све тачке где степени ред конвергира. Једине тачке које нису обухваћене теоремом су тачке кружнице $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = R\}$ и у њима треба додатно проверити конвергенцију. Како нас углавном занимају особине функција на отвореним скуповима, највећи отворен скуп на којем степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ конвергира је круг са центром у a полупречника R.

Дефиниција 5.4. *Константу* $R = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}$ *називамо полупречник конвергенције а скуп* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ *круг или област конвергенције степеног реда* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Помоћу Вајерштрасовог критеријума, лако може да се покаже да степени ред конвергира апсолутно и равномерно на сваком компактном потскупу круга конвергенције. Сада наводимо пример који илуструје практичну примену Коши-Адамарове теореме.

Пример 5.2. *Одредити тачке у којима степени редови* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$ *конвергирају.*

Решење: На основу Коши-Адамарове теореме, оба реда конвергирају на скупу $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ а дивергирају на $\{z \in C \mid |z| > 1\}$. Остаје да проверимо шта се дешава са тачкама $z \in \mathbb{C}$ где је $|z| = 1$. Заменом $z = e^{i\varphi}$ ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$ постаје:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\varphi + i \sin n\varphi}{n+1}.$$

Како редови реалних бројева $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n+1}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n+1}$ конвергирају за свако φ (Дирихлеов[17] критеријум), закључујемо да ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$ конвергира на скупу $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Заменом $z = e^{i\varphi}$ ред $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$ постаје

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{in\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} (n \cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Како не постоји φ тако да редови $\sum_{n=0}^{\infty} n \cos n\varphi$ и $\sum_{n=0}^{\infty} n \sin n\varphi$ оба конвергирају, закључујемо да ред $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$ не конвергира ни за једно z такво да је $|z| = 1$. □

Теорема 5.10. *Сваки степени ред* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *има на кругу конвергенције примитивну функцију* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$.

Доказ: Докажимо да за функцију $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ на кругу конвергенције $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ важе услови Леме 4.1.

Прво, фунцкије $f_n(z) = c_n(z-a)^n$ су непрекидне за свако $n \in \mathbb{N}_0$. Како степени ред равномерно конвергира на сваком компактном потскупу скупа $\mathcal{U}$, по Теореми 5.3 функција f је непрекидна на сваком компакном потскупу скупа $\mathcal{U}$ па самим тим и на $\mathcal{U}$.

Друго, за сваки троугао $\triangle$ који компактно припада области $\mathcal{U}$, како је f равномерно непрекидна на $\partial\triangle$, важе услови Теореме 5.4 па је

$$\oint_{\partial\triangle} f \mathrm{d}z = \oint_{\partial\triangle} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\partial\triangle} c_n(z-a)^n \mathrm{d}z = 0$$

при том, функције $f_n(z) = c_n(z-a)^n$ су аналитичке на $\mathbb{C}$ за све $n \in \mathbb{N}_0$ па су по Кошијевој Теореми о троуглу 4.4 интеграли $\oint_{\partial\triangle} c_n(z-a)^n \mathrm{d}z$ једнаки нули.

[17] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805-1859, немачки математичар.

Дакле, испуњени су услови Леме 4.1 па функција f на кругу $\mathcal{U}$ има примитивну функцију дату са:

$$F(z)=\int\limits_{[a,z]} f(\xi)\mathrm{d}\xi=\int\limits_{[a,z]}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\xi-a)^n\mathrm{d}\xi\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int\limits_{[a,z]}(\xi-a)^n\mathrm{d}\xi=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}.$$

У једнакости $(*)$, за произвољно $z\in\mathcal{U}$, сегмент $[a,z]$ компактно припада скупу $\mathcal{U}$ па ред $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ равномерно конвергира на $[a,z]$ што значи да на $[a,z]$ може да се интерграли члан по члан. $\square$

Приметимо да је примитвна функција степеног реда такође степени ред што имплицира да претходни процес конструкције примитивне функције можемо да итерирамо произвољан број пута.

Теорема 5.11. *Сума степеног реда је аналитичка функција на кругу конвергенције.*

Доказ: Да би доказали да је функција $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ аналитичка, показаћемо да она има извод на кругу конвергенције. Уочимо функцију

$$\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(z-a)^{n-1}.$$

По претходној теореми, ова функција на свом кругу конвергенције има примитивну функцију дату са

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nc_n}{n-1+1}(z-a)^{n-1+1}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-a)^n=f(z)-c_0.$$

Дакле, функција $f(z)-c_0$, па самим тим и $f(z)$, има извод који је једнак $\varphi(z)$ на кругу конвергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(z-a)^{n-1}$.

Како је

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|nc_n|}=\big(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\big)\big(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}\big)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|},$$

редови $\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(z-a)^{n-1}$ и $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ имају исте кругове конвергенције и тиме је теорема доказана. $\square$

Последица 5.4. *Степени ред на кругу конвергенције може да се диференцира члан по члан произвољан број пута тј. на кругу конвергенције, степени ред има извод произвољног реда.*

Доказ: Из доказа претходне теореме видимо да је:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}n(z-a)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\big(c_n(z-a)^n\big)'$$

а ред извода има исти круг конвергенције као полазни ред што по претходној теореми имплицира да и ред извода може даље да се диференцира на истом скупу. $\square$

Дакле, као и реалне аналитичке функције, аналитичке комплексне функције су бесконачно $\mathbb{C}-$диференцијабилне. Студентима за вежбу остављамо да индукцијом докажу да је:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n\right)^{(k)}=\sum_{n=k}^{\infty}c_n\frac{n!}{(n-k)!}(z-a)^{n-k}$$

за свако z из круга конвергенције датог степеног реда.

5.2 Особине аналитичких функција

У овом одељку наводимо особине аналитичких функција које су последице могућности њихове локалне трансформације у конвергентни степени ред.

Теорема 5.12. *Ако је функција f аналитичка на области $\mathcal{D}$ тада, за произвољно $n \in \mathbb{N}$, функција $f^{(n)}$ је такође аналитичка на области $\mathcal{D}$.*

Доказ: По Тејлоровој теореми 5.5, за произвољно $z_0 \in \mathcal{D}$ постоји круг $\mathcal{U}$ са центром у тачки z_0 на којем је функција f једнака суми свог Тејлоровог реда. Како по Последици 5.4 степени ред на кругу конвергенције има извод произвољног реда, исто ће да важи и за функцију f. Дакле, за произвољно $n \in \mathbb{N}$, на околини $\mathcal{U}$ тачке z_0 постоји извод $f^{(n+1)}$ функције f што по Теореми 2.8 значи да је $f^{(n)}$ аналитичка у z_0. □

Последица 5.5. *Нека је f непрекидна на области $\mathcal{D}$. Ако функција f има на области $\mathcal{D}$ примитивну функцију, тада је f аналитичка на $\mathcal{D}$.*

Доказ: Како је по претпоставци $F'(z) = f(z)$ за све $z \in \mathcal{D}$, функција F има извод на области $\mathcal{D}$ па је аналитичка на $\mathcal{D}$. Тада, по претходној теореми, и њен извод односно f је аналитичка функција на $\mathcal{D}$. □

Ова последица такође тврди да фунцкије које нису аналитичке на некој области немају примитивну функцију на тој области. На пример, $f(z) = \overline{z}$ нема на $\mathbb{C}$ примитивну функцију. Аналитичност функција и њихових извода нам даје још један критеријум за проверу аналитичности неке функције.

Теорема 5.13. *(**Теорема Морера**[18]) Ако непрекидна функција f на области $\mathcal{D}$ има особину да је њен интеграл по граници сваког троугла који компактно припада области $\mathcal{D}$ једнак нули, тада је f аналитичка на $\mathcal{D}$.*

Доказ: Нека је $z_0 \in \mathcal{D}$ произвољно. По Леми 4.1, функција f на кругу $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\} \subseteq \mathcal{D}$ има примитивну функцију дату са

$$F(z) = \int\limits_{[z_0, z]} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

па на основу претходне последице, f је аналитичка на $\mathcal{U}$ па самим тим и у z_0. □

Сада наводимо теорему која нам омогућава да функцију развијамо у Тејлоров ред као што смо навикли у реалној анализи.

Теорема 5.14. *Нека је функција f на кругу $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ једнака суми конвергентног степеног реда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Тада, за све $n \in \mathbb{N}_0$, коефицијенти c_n могу да се израчунају помоћу формуле:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

[18] Giacinto Morera 1856-1909, италијански инжењер и математичар.

Доказ: Како је функција f једнака суми конвергентног степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ на области $\mathcal{U}$, по Последици 5.4, за произвољно $k \in \mathbb{N}_0$ на скупу $\mathcal{U}$ постоји $f^{(k)}$ односно на скупу $\mathcal{U}$ ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ може да се диференцира члан по члан k пута. Тада је:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-k)!}(z-z_0)^{n-k}$$

па, заменом $z = z_0$ у претходној једнакости, добијамо

$$f^{(k)}(z_0) = c_k k!$$

чиме је теорема доказана. □

Пример 5.3. *Развити у степени ред функције* $e^z, \cos z, \sin z$.

Решење: Све три функције су аналитичке на целој комплексној равни па можемо да потражимо њихов Тејлоров развој у нули с'тим што ћемо коефицијенте степеног реда да рачунамо по формули из претходне теореме тј.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Када израчунамо $n-$ти извод датих функција у нули добијамо:

$$(e^z)^{(n)}(0) = e^0 = 1 \quad \text{па је} \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$$

$$(\sin z)^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \mod 4; \\ 1, & n \equiv 1 \mod 4; \\ 0, & n \equiv 2 \mod 4; \\ -1, & n \equiv 3 \mod 4; \end{cases} \quad \text{па је} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Како је $\sin' z = \cos z$ а степени ред може да се диференцијра члан по члан на области конвергенције, добијамо да је:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

□

Овде наводимо једну врло лепу илустрацију која ће додатно да нам помогне да разумемо Ојлерову формулу. Ако израчунамо e^{ix}, али помоћу суме одговарајућег степеног реда, добијамо:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = 1\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - 1\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} - i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}\right) + i\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

Као што смо већ видели, коефицијенти Тејлоровог реда представљају својеврсну инваријанту аналитичких функција независну од полупречника круга на којем се рачунају. Упоређивањем коефицијената степеног реда из Тејлорове теореме 5.5, и Теореме 5.14, добијамо врло практично тврђење комплексне интеграције.

Теорема 5.15. ***(Уопштена Кошијева интегрална формула)*** *Нека је f аналитичка на области $\mathcal{G}$ и нека је $\mathcal{D}$ област таква да $\partial\mathcal{D}$ формира коначно много затворених кривих и нека је $\overline{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{G}$. Тада, за свако $z \in \mathcal{D}$ важи:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \mathrm{d}\xi$$

где су криве границе $\partial\mathcal{D}$ оријетисане тако да њиховим обиласком тачке области $\mathcal{D}$ остају са леве стране.

Доказ: Нека је $z \in \mathcal{D}$ произвољно и $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$ круг са центром у z. Тада, функција $\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}$ је аналитичка на области $\mathcal{D} \setminus \overline{\mathcal{U}}$ па је по Општој Кошијевој теореми 4.12:

$$0 = \oint\limits_{\partial(\mathcal{D}\setminus\overline{\mathcal{U}})} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \mathrm{d}\xi = \oint\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \mathrm{d}\xi - \oint\limits_{\partial\mathcal{U}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \mathrm{d}\xi$$

што имплицира да је

$$\oint\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \mathrm{d}\xi = \oint\limits_{\partial\mathcal{U}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \mathrm{d}\xi.$$

Како је по Тејлоровој теореми 5.5, функција f на кругу $\mathcal{U}$ једнака суми свог Тејлоровог реда, његов $n-$ти коефицијент c_n је једнак:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\mathcal{U}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \mathrm{d}\xi$$

а по Теореми 5.14, исти овај коефицијент је једнак

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$

чиме је теорема доказана. □

Пример 5.4. *Израчунати интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^n} \mathrm{d}z$ за произвољно $n \in \mathbb{N}$.*

Решење: Функција $f(z) = \cos z$ је аналитичка на $\mathbb{C}$ а област $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ је једно-струко повезана па можемо да применимо Уопштену Кошијеву интегралну формулу:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^n} \mathrm{d}z = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{(z - 0)^{n-1+1}} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \cos^{(n-1)} 0 = \begin{cases} \frac{2\pi i}{(n-1)!}, & n \equiv 1 \mod 4; \\ \frac{-2\pi i}{(n-1)!}, & n \equiv 3 \mod 4; \\ 0, & n \equiv 0 \mod 2. \end{cases}$$

□

Сада наводимо све до сада описане еквиваленте аналитичности комплексне функције.

Теорема 5.16. ***(Еквиваленти аналитичности)*** *Нека је f дефинисана на накој околини тачке z. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(R) *f је $\mathbb{C}-$диференцијабилна на некој околини тачке z_0;*

(C) *f је непрекидна на некој околини $\mathcal{U}$ тачке z_0 и њен интеграл по граници сваког троугла који компактно припада области $\mathcal{U}$ је једнак нули;*

(W) *функција f може да се трансформише у степени ред на некој околини тачке z_0.*

Доказ: Присетмо се да је услов **(R)** дефиниција аналитичности функције у тачки z (Дефиниција 2.5).

(R)$\Rightarrow$ **(C)** Коишјева теорема о троуглу 4.4.
(C)$\Rightarrow$ **(W)** Теорема Морера 5.13 и Тејлорова теорема 5.5.
(W)$\Rightarrow$ **(R)** Теорема 5.11. $\square$

Било које од ова три тврђења може да се узме као дефиниција аналитичности комплексне функције и тако развије целокупна до сада приказана теорија. Тврђење **(R)** се назива аналитичност у Римановом смислу, тврђење **(C)** аналитичност у Кошијевом а тврђење **(W)** аналитичност у Вајерштрасовом смислу.

Као што смо већ видели, степени редови на кругу конвергенције могу да се диференцирају члан по члан произвољан број пута. На крају овог одељка, доказаћемо да функционални редови аналитичких функција имају исту особину.

Теорема 5.17. ***(Вајерштрас)*** *Нека је $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ функција које су аналитичке на области $\mathcal{D}$. Ако функционални ред:*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

равномерно конвергира на сваком компактном подскупу области $\mathcal{D}$ тада:

(а) *сума реда је аналитичка функција на области $\mathcal{D}$;*

(б) *функционални ред може на $\mathcal{D}$ да се диференцира члан по члан произвољан број пута.*

Доказ: Нека је $z_0 \in \mathcal{D}$ произвољна тачка. Како је област отворен скуп, постоји круг $\mathcal{U}=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0|<R\}$ који компактно припада области $\mathcal{D}$. По претпоставци ред $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ равномерно конвергира на скупу $\overline{\mathcal{U}}$ а функције f_n су непрекидне на $\overline{\mathcal{U}}$ јер су по препоставци аналитичке на $\mathcal{D}$. Отуда, по Теореми 5.3, функција $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ је непрекидна на $\overline{\mathcal{U}}$.

Даље, нека је $\triangle$ произвољан троугао који компактно припада области $\mathcal{U}$. По претпоставци ред $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ равномерно конвергира на $\partial\triangle$, што по Теореми 5.4 имплицира да он може да се интеграли члан по члан на $\partial\triangle$. Отуда:

$$\oint_{\partial\triangle} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{\partial\triangle}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{\partial\triangle} f_n(z)\mathrm{d}z=0.$$

При том, сви интеграли $\oint_{\partial\triangle} f_n(z)\mathrm{d}z$ су нула по Кошијевој теореми о троуглу 4.4.

Дакле, функција f задовољава услове теореме Морера 5.13 на области $\mathcal{U}$ па је аналитичка на $\mathcal{U}$ а самим тим и у z_0.

Како је f аналитичка на области $\mathcal{D}$, она по Теореми 5.12 има на области $\mathcal{D}$ извод произвољног реда. Пошто је област $\mathcal{U}$ просто повезана, функција f и све функције f_n, задовољавају услове уопштене Кошијеве интегралне формуле 5.15 што значи да за свако $z\in\mathcal{U}$ па самим тим и за z_0 важи:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z_0)&=\frac{k!}{2\pi i}\oint_{\partial\mathcal{U}}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}z=\frac{k!}{2\pi i}\oint_{\partial\mathcal{U}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}z\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k!}{2\pi i}\oint_{\partial\mathcal{U}}\frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z_0).\end{aligned}$$

При том, ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k-1}}$ може да се интеграли члан по члан на $\partial\mathcal{U}$ јер је равномерно конвергентан на $\partial\mathcal{U}$ (доказати) а функције $\frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k-1}}$ су непрекидне на $\partial\mathcal{U}$ односно испуњени су услови Теореме 5.4. □

Приметимо да се претходна теорема доста разликује од одговарајућег критеријума диференцирања функционалних редова реалне анализе. У реалној анализи, да би сума реда била диференцијабилна функција, захтева се равномерна конвергенција реда извода на компактним потскуповима. Такође, ако хоћемо да одредимо $n-$ти извод реалног фунцкионалног реда, теорему о диференцирању морамо да проверавамо $n-$пута што у случају комплексних редова очигледно није случај.

Пример 5.5. *Израчунати суму реда* $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{i^n}{2^n}$.

Решење: Полазимо од геометријског реда $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Тада:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \text{(диференцирамо);}\\
\frac{1}{(1-z)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} \qquad \text{(множимо са } z\text{);}\\
\frac{z}{(1-z)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n} \qquad \text{(диференцирамо);}\\
\frac{z+1}{(1-z)^3} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2z^{n-1} \qquad \text{(множимо са } z\text{);}\\
\frac{z^2+z}{(1-z)^3} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2z^{n}.
\end{aligned}$$

Како геометријски ред има област конвергенције $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ и може на области конвергенције да се диференцира члан по члан произвољан број пута, последњи ред $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ конвергира за свако $z \in \mathcal{U}$ па и за $z = \frac{i}{2}$. Тада:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{i}{2}\right)^n = \frac{\left(\frac{i}{2}\right)^2 + \frac{i}{2}}{\left(1-\frac{i}{2}\right)^3} = -\frac{48}{125} - \frac{14i}{125}.$$

□

5.3 Теорема о јединствености аналитичке функције

У општем случају, провера једнакости две функције се своди на проверу вредности функција у свакој тачки домена. Међутим, посебне гране математике имају своје специфичне функције као и специјалне методе за проверу њихове једнакости. На пример, у Линеарној алгебри, да би проверили једнакост два хомоморфизма, по Основном ставу Линеарне алгебре, довољно је да проверимо да ли се они поклапају на базним векторима. Ако проверавамо једнакост полинома степена n, довољно је да покажемо да се полиноми поклапају у $n+1$ специфичних тачака (на пример у нулама и још једној произвољној). Како су степени редови

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

једна генрализација полинома, проста интуиција нас наводи на закључак: да би показали једнакост два степена реда односно једнакост њихових коефицијената, довољно је да покажемо да се редови поклапају у пребројиво много тачака. На жалост, алгебарски приступ овом проблему подразумева решавање линеарног система пребројиво много једначина са пребројиво много непознатих што је мамутски математички проблем. На срећу, у случају комплексних степених редова односно аналитичких комплексних функција, проблем је решив због јако лепог својства које имају нуле аналитичких функција.

Теорема 5.18. *Нека је $a \in \mathbb{C}$ нула функције f која је аналитичка и није идентички једнака нули на некој околини $\mathcal{U}$ тачке a. Тада постоји јединствено $n \in \mathbb{N}$ тако да је за све $z \in \mathcal{U}$*

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$$

где је φ функција која је аналитичка и различита од нуле на некој околини тачке a.

Доказ: По Тејлоровој теореми 5.5, аналитичка функција f је једнака суми свог Тејлоровог реда на кругу $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ тј. важи да је:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{за све } z \in \mathcal{U}.$$

Из услова $f(a) = 0$ добијамо да је $c_0 = 0$. Како по претпоставци f није једнака нули у свакој тачки скупа $\mathcal{U}$, бар један коефицијент реда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ је различит од нуле јер би у супротном функција f била идентички једнака нули на $\mathcal{U}$. Дакле, постоји $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid c_n \neq 0\}$ и $n_0 \geq 1$ што значи да је за свако $z \in \mathcal{U}$

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n(z-a)^n = (z-a)^{n_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n_0+n}(z-a)^n = (z-a)^{n_0}\varphi(z).$$

При том, функција φ је сума конвергентног степеног реда па је по Теореми 5.11 аналитичка на $\mathcal{U}$. Како је φ и непрекидна на $\mathcal{U}$ и $\varphi(a) = c_{n_0} \neq 0$, постоји околина $\mathcal{V}$ тачке a тако да је $\varphi(z) \neq 0$ за све $z \in \mathcal{V}$. □

Следећа последица јако лепо одражава суштину претходне теореме.

Последица 5.6. *Ако је функција f аналитичка на $\mathcal{U}$ и није идентички једнака нули на $\mathcal{U}$, тада су све нуле функције f на скупу $\mathcal{U}$ изоловане тј. постоје окрњене околине нула на којима је функција f различита од нуле.*

Овде уочавамо још једну фундаменталну разлику између $\mathbb{C}-$диференцијабилних комплексних функција и реалних диференцијабилних функција. На пример, реална функција $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ је диференцијабилна на $\mathbb{R}$ али скуп њених нула $\{\frac{1}{k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\} \cup \{0\}$ има $x = 0$ као тачку нагомилавања тј. $x = 0$ није изолована нула.

Теорема 5.19. ***(Теорема о јединствености аналитичке функције)*** *Нека су функције f_1 и f_2 аналитичке на области $\mathcal{D}$. Ако се функције f_1 и f_2 поклапају на скупу $\mathcal{E}$ који има бар једну тачку нагомилавања у области $\mathcal{D}$, тада се f_1 и f_2 поклапају на целом скупу $\mathcal{D}$ тј. $f_1(z) = f_2(z)$ за све $z \in \mathcal{D}$.*

Доказ: Нека је $a \in \mathcal{D}$ тачка нагомилавања скупа $\mathcal{E}$. Функција $f = f_1 - f_2$ је аналитичка на области $\mathcal{D}$ па самим тим и непрекидна на $\mathcal{D}$. Нека је $\mathcal{F} = \{z \in \mathcal{D} \mid f(z) = 0\} \subseteq \mathcal{E}$ скуп свих нула функције f. Како је $\mathcal{D}$ отворен скуп, постоји низ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ тачака скупа $\mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ који конвергира тачки a. Из непрекидности функције f у тачки a следи да је

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \big(f_1(z_n) - f_2(z_n)\big) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Тада, $a \in \mathcal{D}$ није изолована нула функције f која је аналитичка на $\mathcal{D}$. То по претходној последици имплицира да постоји околина $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{D}$ тачке a таква да је $f(z) = 0$ за све $z \in \mathcal{V}$. Отуда $\mathcal{V} \cap \mathcal{D}$ је непразан потскуп скупа $\mathcal{F}$ што имплицира да унутрашњост скупа $\mathcal{F}$ у релативној топологији области $\mathcal{D}$, у ознаци $\mathcal{F}^\circ$, није празан скуп.

Унутрашњост скупа је по дефиницији отворен скуп. Покажимо да је $\mathcal{F}^\circ$ затворен тј. да $\mathcal{F}^\circ$ садржи све своје тачке нагомилавања. Нека је $z \in \mathbb{C}$ тачка нагомилавања скупа $\mathcal{F}^\circ$. То значи да постоји низ тачака скупа $\mathcal{F}^\circ$ који конвергира ка z што због непрекидности функције f имплицира да је $f(z) = 0$. То значи да z није изолована нула аналитичке функције f што по Последици 5.6 имплицира да постоји околина $\mathcal{V}_z$ на којој је функција f једнака нули. Дакле, $\mathcal{V}_z \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ што значи да је $z \in \mathcal{F}^\circ$.

Дакле, $\mathcal{F}^\circ$ је отворен и затворен потскуп области $\mathcal{D}$. Присетимо се теореме коју смо доказали на уводним предавањима, тема Области границе и крве: Ако је D повеазан скуп и A непразан потскуп скупа D који је у релативној топологији простора D отворен и затворен, тада је $A = D$. Како је $\mathcal{D}$ повезан скуп а $\mathcal{F}^\circ$ непразан, отворен и затворен у релативној топологији простора $\mathcal{D}$, закључујемо да је $\mathcal{F}^\circ = \mathcal{D}$. $\square$

Дакле, да би показали једнакост две аналитичке функције на области довољно је да покажемо да се оне поклапају на пребројивом скупу који има бар једну тачку нагомилавања која припада области. Ово очигледно не мора да важи за реалне диференцијабилне функције. На пример, функције $f_1(x) = x^2 \sin\frac{1}{z}$ и $f_2(x) = x^3 \sin\frac{1}{z}$ су диференцијабилне на $\mathbb{R}$ и поклапају се на супу $\{\frac{1}{k\pi} \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ али су очигледно различите.

Сада се фокусирамо на нуле аналитичких функција. Приметимо да се по Теореми 5.18, нула аналитичке функције понаша као нула полинома тј. из $f(a) = 0$ следи својеврсна дељивост функције f полиномом $(z-a)^n$. Мотивисани овом опсервацијом уведимо следећу дефиницију.

Дефиниција 5.5. *Нека је f аналитичка на некој околини тачке a. Ред нуле $z = a$ функције f је ред најмањег извода функције f који је различит од нуле у тачки a. Прецизније, a је нула реда k функције f акко је*

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0 \quad \text{и} \quad f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Ако је f аналитичка на некој околини тачке a, тада по Тејлоровој теореми 5.5 постоји околина $\mathcal{U}$ тачке a на којој је функција f једнака својем Тејлоровом развоју па је по Теореми 5.14

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \quad \text{за све} \quad z \in \mathcal{U}.$$

Тада, ако је $a \in \mathbb{C}$ нула реда k функције f, први коефицијент Телоровог реда који је различит од нуле је c_k што значи да функција f на околини тачке a има форму:

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-a)^n = (z-a)^k \sum_{n=0}^{\infty} c_{k+n}(z-a)^n.$$

Како је фунцкија $\varphi(z)$ по Теореми 5.11 аналитичка на $\mathcal{U}$ и $\varphi(a) = c_k \neq 0$, добили смо први део следећег тврђења.

Теорема 5.20. *Нека је фунција f аналитичка у тачки a. Тада, $a \in \mathbb{C}$ је нула реда $k > 0$ функције f акко постоји функција φ која је аналитичка и различита од нуле у тачки a таква да је*

$$f(z) = (z-a)^k \varphi(z)$$

на некој околини тачке a.

Доказ: У супротном смеру, ако је $f(z) = (z-a)^k\varphi(z)$ на некој околини $\mathcal{U}$ тачке a где је φ аналитичка $\mathcal{U}$, по Тејлоровој теореми 5.5 на скупу $\mathcal{U}$ функција φ је једнака суми конвергентног степеног реда па је

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

При том, $c_0 \neq 0$ јер $\varphi(a) \neq 0$. Заменом у једнакости $f(z) = (z-a)^k\varphi(z)$ добијамо да је

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+k} = \sum_{n=k}^{\infty} c_{n-k} (z-a)^n.$$

Како су коефицијенти Тејлоровог развоја аналитичке функције у околини тачке a јединствени и по Теореми 5.14 се рачунају помоћу формуле $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, закључујемо да је:

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0 \quad \text{и} \quad f^{(k)}(a) = c_0 \neq 0.$$

□

Пример 5.6. *Одредити ред нуле $z = 0$ функције $f(z) = \sin z - z$.*

Решење: Како је $f'(z) = \cos z - 1$, $f''(z) = -\sin z$, $f'''(z) = -\cos z$ добијамо да је $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ и $f'''(0) \neq 0$ па је ред нуле $z = 0$ функције f једнак 3. □

На крају овог одељка, анализираћемо шта се дешава када је вредност функције у бесконачности једнака нули. Присетимо се да је по Дефиницији 2.6 функција f аналитичка у $z = \infty$ акко је $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ аналитичка у нули. Тада, $z = \infty$ је нула функције f акко $w = \frac{1}{z} = 0$ је нула функције g. Отуда, сва тврђења овог одељка можемо да формулишемо и за нулу $z = \infty$ где $(z-a)^n$ мењамо са $\frac{1}{z^n} = z^{-n}$.

Теорема 5.21. *Нека је фунција f аналитичка и једнака нули за $z = \infty$. Ако функција није идентички једнака нули на околини тачке ∞, постоји јединствено $k > 0$ и функција φ која је аналитичка и различита од нуле у некој околини тачке $z = \infty$ таква да је*

$$f(z) = z^{-k}\varphi(z).$$

5.4 Апроксимације комплексних функција

Као и са реалим функцијама, у свим применама ван математике постоји потреба да се ради са приближним вредностима комплексних бројева односно апроскимацијама комплексних функција. Како свака комплекна функција има као координатне фунцкије реалне функције две променљиве, све технике апроскимација реалних функција могу да се примене на апроксимације комплексних функција.

У овом одељку ћемо да анализирамо апроксимације комплексних функција (специјално, аналитичких функција) рационалним комплексним функцијама и полиномима са комплексним коефицијетима са циљем да докажемо основну теорему теорије апроксимације комплексних функција, Рунгеову теорему.

Дефиниција 5.6. *Кажемо да функција $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ може да се равномерно апроксимира рационалном функцијом (полиномом) на скупу $K \subseteq \mathcal{D}$ акко за свако $\epsilon > 0$ постоји рационална функција (полином) $g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ тако да је:*

$$\sup_{z \in K} |f(z) - g(z)| = ||f - g||_K < \epsilon.$$

Приметимо да дефиниција равномерне апроксимације функције f на скупу K много потсећа на дефиницију равномерне конвергенције функционалних низова на скупу K. Штавише, ако за произвољно $n \in \mathbb{N}$ одредимо функцију g_n такву да је $||f - g_n||_K < \frac{1}{n}$, добијамо функционални низ $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ који равномерно конвергира функцији f на скупу K што доказује следеће тврђење.

Лема 5.2. *Функција f може на скупу K да се равномерно апроксимира рационалним функцијама (полиномима) акко постоји низ $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ рационалних функција (полинома) који равномерно конвергира функцији f на скупу K.*

Како на скупу K из равномерне конвергенције низова $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ следи равномерна конвергенција низова $(p\ q)_{n \in N}$ и $(\alpha p_n + \beta q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ за произвољне $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (Анализа 3), добијамо врло практична тврђења теорије апроксимације.

Лема 5.3. *Ако функције f и g могу на скупу K да се равномерно апроксимирају рационалним функцијама (полиномима), тада функције fg и $\alpha f + \beta g$ за произвољне $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ могу да се равномерно апроксимирају рационалним функцијама (полиномима).*

Лема 5.4. *Ако је $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ функција који равномерно конвергира функцији f на скупу K и ако функције f_n могу да се равномерно апроскимирају рационалним функцијама (полинома) на K, тада и гранична функција f може да се равномерно апроскимира рационалним функцијама (полиномима) на K.*

Сада се осврћемо на апроксимацију аналитичких функција. Као и многе особине комплексних функција, апроксимација пре свега зависи од скупа на којем се врши. На пример, функција $f(z) = \frac{1}{z}$ је аналитичка на скупу $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq 1\}$. Ако би на $\mathcal{D}$ постојала њена равномерна апроксимација полиномима, тада би за $\epsilon = \frac{1}{2}$ постојао полином p такав да $||f - p||_{\mathcal{D}} < \frac{1}{2}$ што би по Последици 4.1 имплицирало да је

$$\left| \oint_{|\gamma = 1|} (f - p)\mathrm{d}z \right| < \pi.$$

Међутим, како је полином аналитичка функција на $\mathbb{C}$, интеграл полинома по свакој затвореној кривој је једнак нули па је

$$\oint_{|z|=1} (f - p)\mathrm{d}z = \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \oint_{|z|=1} p(z)\mathrm{d}z = 2\pi i$$

и ту долазимо до контрадикције.

Теорема 5.22. *Нека је функција f аналитичка на кругу $\mathcal{U}$ и нека је K компактан подскуп круга $\mathcal{U}$. Тада, функција f на скупу K може да се равномерно апроксимира полиномима.*

Доказ: С' обзиром на до сада доказана тврђења, ово је доста очигледно. По Тејлоровој теореми 5.5 свака функција која је аналитичка на кругу, једнака је суми свог Тејлоровог реда на том кругу. То значи да је

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad \text{за све} \quad z \in \mathcal{U}.$$

Сада, степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ је равномерно конвергентан на сваком компактном потскупу $K \subseteq \mathcal{U}$ што по дефиницији равномерне конвергенције функционалних редова значи да функционални низ парцијалних сума:

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k(z-a)^k = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n$$

равномерно конвергира ка функцији f на скупу K. □

Поставља се питање како проширити апроксимацију полиномима на скупове који нису кругови. Приметимо да ако је функција аналитичка на круговима који се секу, тада Тејлоровом теоремом скоро да није могуће конструисати степени ред који се поклапа са функцијом на унији тих кругова. Дакле, Теоремом 5.22 су описане све могућности апроксимације комплексних функција помоћу Тејлорових редова. Зато се сада враћамо изворној теорији.

Присетимо се из доказа Кошијеве интегралне формуле 4.13 да ако крива γ параметризује границу ограничене, једноструко повезане области $\mathcal{D}$ тако да тачке области $\mathcal{D}$ остају са њене леве стране, тада је γ хомотопна нули на свакој области $\mathcal{G}$ која компактно садржи област $\mathcal{D}$. То смо образложили чињеницом да можемо да конструишемо затворену криву γ_0 која припада области $\mathcal{D}$ и која се налази на растојању ϵ лево од криве γ (погледајте График 4.4).

Нека је сада K компактан потскуп ограничене једноструко повезане области $\mathcal{D}$. Како је $\mathcal{D}$ отворен скуп а K затворен, растојање скупа K и $\partial\mathcal{D}$ је позитивно тј.

$$d(K, \partial\mathcal{D}) = \inf_{z\in K, w\in\partial\mathcal{D}} d(z,w) = r > 0.$$

То значи да можемо да конструишемо криву γ која се налази лево од $\partial\mathcal{D}$ на растојању $\epsilon < r$ тако да γ ограничава једносутруко повезану област $\mathcal{V}$ која садржи скуп K и која је компактно садржана у области $\mathcal{D}$ као што је илустровано на Графику 35.

Тада, области $\mathcal{V}$, $\mathcal{D}$ и функција f задовољавају услове Кошијеве интегралне формуле што нам омогућава да спроведемо следећу конструкцију.

Теорема 5.23. *Нека је функција f аналитичка на ограниченој, једноструко повезаној области $\mathcal{D}$. Тада, функција f може да се равномерно апроксимира рационалним функцијама на сваком компактном потскупу области $\mathcal{D}$.*

Доказ: Нека је $K \subseteq \mathcal{D}$ компактан. Тада, као што смо већ видели, постоји једноструко повезана област $\mathcal{V}$ коју ограничава крива γ тако да је $K \subseteq \mathcal{V}$ и $\mathcal{V}$ компактно припада области $\mathcal{D}$. По Кошијевој интегралној формули 4.13 важи да је:

$$f(z) \overset{(*)}{=} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \quad \text{за све} \quad z \in K.$$

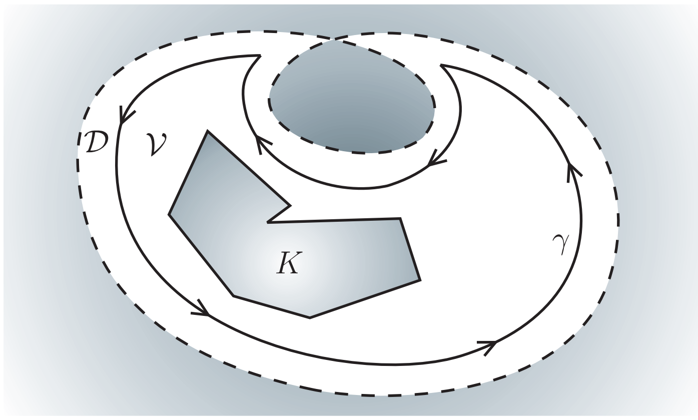


График 35: Компактан скуп K у једноструко повезаној области $\mathcal{D}$ може да се окружи кривом γ која је хомотопна нули на $\mathcal{D}$.

Вратимо се сада на почетак интегралног рачуна комплексних функција. Присетимо се да је комплексни интеграл уведен као гранична вредност

$$\int_\gamma f \mathrm{d}z = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k.$$

То по дефиницији значи да за свако $\epsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за све поделе $\mathcal{P}$ криве γ чији је параметар $\lambda(\mathcal{P})$ мањи од δ важи

$$\left| \int_\gamma f \mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \right| < \epsilon.$$

Покажимо да функција f може равномерно да се апроксимира рационалним функцијама по дефиницији. Нека је $\epsilon > 0$. За произвољно $z \in K$, због интеграла $(*)$, постоји $\delta_z > 0$ тако да за сваку поделу $\mathcal{P}$ криве γ дијаметра мањег од δ_z важи

$$\left| \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi - \sum_{k=1}^{n_z} \frac{f(\xi_k)}{\xi_k - z}\Delta \xi_k \right| < \epsilon.$$

Означимо једну интегралну суму интеграла $(*)$ у тачки z која одговара подели чији је параметар мањи од δ_z са:

$$\sigma_z(w) = \sum_{k=1}^{n_z} \frac{f(\xi_k)}{\xi_k - w}\Delta \xi_k.$$

За свако $z \in K$, рационална функција σ_z је непрекидна јер ни једна тачка ξ_k не припада скупу K (ξ_k су тачке криве γ) и за $z = w$ важи

$$|f(w) - \sigma_z(w)| < \epsilon.$$

Како је функција $f - \sigma_z$ непрекидна за $w = z$, постоји околина $\mathcal{U}_z$ тачке z таква да је:

$$|f(w) - \sigma_z(w)| < \epsilon \quad \text{за све} \quad w \in \mathcal{U}_z.$$

Сада, фамилија $\{\mathcal{U}_z \mid z \in K\}$ је отворени покривач компактног скупа K па има коначан потпокривач $\{\mathcal{U}_{z_i} \mid i = 1, \ldots, m\}$. Тада за свако $w \in K$ постоји рационална функција

σ_{z_i} таква да је $|f(w)-\sigma_{z_i}(w)| < \epsilon$. Међутим, ако од функција односно интегралних сума $\sigma_{z_1},\dots,\sigma_{z_m}$ одаберемо функцију σ_{z_0} која одговара подели најмањег параметра, тада по дефиницији интеграла важи да је:

$$|f(w)-\sigma_{z_0}(w)| < \epsilon \quad \text{за све} \quad w \in K$$

што значи да је $||f-\sigma_{z_0}||_K \leq \epsilon$. □

Приметимо у доказу претходне теореме да ако скуп K није компактан али компактно припада области $\mathcal{D}$, описаном техником би могли да одредимо рационалну функцију σ_z која довољно добро апроксимира функцију f у свакој тачки $z \in K$. Очигледно да ако σ_{z_1} одговара подели чији је параметар мањи од параметра поделе интегралне суме σ_{z_2}, тада σ_{z_1} добро апроксимира функцију f у тачкама z_1 и z_2. Отуда, ако од свих апроксимација σ_z, за све $z \in K$ одеберемо ону која одговара подели најмањег параметра, она ће да буде апроксимација на целом скупу K. Наведени избор се практично своди на налажење минимума скупа $\{\delta_z \mid z \in K\}$ али ништа нам не гарантује да он уопште постоји.

Видели смо да аналитичке функције на компактним потскуповима једноструко повезаних области имају равномерне апроксимације рационалним функцијама. Поставља се питање да ли овакве функције могу да се равномерно апроксимирају и полиномима јер су полиноми свакако практичнији за рад. Зато ћемо сада да се фокусирамо на апроксимације рационалних функција полиномима.

Теорема 5.24. *Нека је $\mathcal{V}$ ограничен скуп такав да је његов комплемент $\mathbb{C} \setminus \mathcal{V}$ путевима повезан. Тада, за свако $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{V}$, функција $f(z) = \frac{1}{\alpha - z}$ може да се равномерно апроксимира полиномима на сваком копактном потскупу скупа $\mathcal{V}$.*

Доказ: Нека је $K \subset \mathcal{V}$ компактан. Нека је $\mathcal{S}$ скуп свих комплексних бројева $\alpha \in \mathbb{C}$ таквих да функција $\frac{1}{\alpha - z}$ може да се равномерно апроксимира полиномима на скупу K. Покажимо да је $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Како је $\mathcal{V}$ ограничен, постоји $\alpha \in \mathbb{C}$ тако да је $|\alpha| > |z|$ за све $z \in \mathcal{V}$. То значи да је $|\frac{z}{\alpha}| < 1$ за за све $z \in \mathcal{V}$ па је:

$$\frac{1}{\alpha - z} = \frac{1}{\alpha(1-\frac{z}{\alpha})} = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\alpha^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\alpha^{n+1}}.$$

Отуда, K је комактан потскуп круга конвергенције степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\alpha^{n+1}}$ па по Теореми 5.22, функција $\frac{1}{\alpha - z}$ може равномерно да се апроксимира полиномима на K тј. $\alpha \in \mathcal{S}$.

Нека је сада $\alpha \in \mathcal{S}$ и $\beta \in \mathbb{C}$ тако да је $|\beta - \alpha| < d(\alpha, K)$. Тада, за све $z \in K$ важи да је $|\beta - \alpha| < |\alpha - z|$ односно $\frac{|\beta-\alpha|}{|\alpha - z|} < 1$ па је:

$$\frac{1}{\beta - z} = \frac{1}{(\alpha - z)\big(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha - z}\big)} = \frac{1}{\alpha - z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha-\beta)^n}{(\alpha-z)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha-\beta)^n}{(\alpha-z)^{n+1}}.$$

По претпоставци $\frac{1}{\alpha - z}$ може да се равномерно апроксимира полиномима на K па, применом Леме 5.3 функције $\frac{(\alpha-\beta)^n}{(\alpha-z)^n}$ могу да се равномерно апроксимирају полиномима на K за све $n \in \mathbb{N}$ ($(\alpha-\beta)^n$ су константе). Како ред $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha-\beta)^n}{(\alpha-z)^{n+1}}$ равномерно конвергира на скупу K (Вајерштрасов критеријм), по Леми 5.4 функција $\frac{1}{\beta - z}$, као гранична вредност равномерно конвергентног низа парцијалних сума реда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha-\beta)^n}{(\alpha-z)^{n+1}}$, може да се равномерно апроксимира полиномима на K тј. $\beta \in \mathcal{S}$.

Нека је сада $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{V}$ произвољно. Како је по претпоставци $\mathbb{C} \setminus \mathcal{V}$ путевима повезан, а знамо да је $\mathcal{S}$ непразан, постоји пут $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \mathcal{V}$ који повезује тачку $\alpha \in \mathcal{S}$ са тачком β. Пут је по дефиницији непрекидно пресликавање, а како је $[0,1]$ компактан скуп, његова слика $\gamma\big([0,1]\big)$ је такође компактан скуп. То значи да су $\gamma\big([0,1]\big)$ и K дисјунктни компактни скупови па је њихово растојање $\delta > 0$. Тада, ако пут γ поделимо тачкама $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ тако да је $|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| < \delta$ за све $i = 1, \ldots, n$ добијамо низ тачака таквих да је $|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| < d(\gamma(t_{i-1}), K)$ за све $i = 1, \ldots, n$. Како $\gamma(t_0) = \alpha \in \mathcal{S}$, по претходном закључку следи да $\gamma(t_1) \in \mathcal{S}$ а самим тим $\gamma(t_2) \in \mathcal{S}$ итд. Дакле, $\gamma(t_n) = \beta \in \mathcal{S}$. □

Сада имамо све потребне аргументе да докажемо главну теeорему овог одељка.

Теорема 5.25. ***(Рунгеова теорема)*** *Нека је функција f аналитичка на ограниченој, једноструко повезаној области $\mathcal{D}$. Тада, функција f може да се равномерно апроксимира полинома на сваком компактном потскупу области $\mathcal{D}$*

Доказ: У Теореми 5.23, функцију f смо под истим условима апроксимирали рационалним функцијама облика.

$$\sigma(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(\xi_k)}{\xi_k - z} \frac{\Delta \xi_k}{2\pi i}.$$

При том, функције σ смо добили помоћу апроксимације интеграла функције $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ по кривој γ која ограничава област $\mathcal{V}$ а ξ_k су тачке криве γ. Пошто област $\mathcal{V}$ садржи скуп K а скуп $\mathbb{C} \setminus \mathcal{V}$ је путевима повезан по конструкцији, претходна теорема имплицира да функције $\frac{1}{\xi_k - z}$ могу да се равномерно апроксимирају полиномима јер ξ_k су тачке скупа $\mathbb{C} \setminus \mathcal{V}$ за све $k = 1, \ldots, n$. Како су $f(\xi_k)$ и $\Delta \xi_k$ и $2\pi i$ константе, по Леми 5.3 функције σ могу да се равномерно апроксимирају полиномима на скупу K а по Леми 5.4, исто ће да важи и за функцију f. □

Ова теорему је доказао немачки математичар Карл Рунге[19] 1885. године и сматра се једном од основних теорема Нумеричке анализе.

5.5 Лоранови редови

Досадашња теорија комплексних функционалних редова је била базирана на редовима чије су суме аналитичке функције на круговима. Поставља се питање постоји ли техника којом функције које нису аналитичке могу да се трансформишу у конвергентне функционалне редове степених функција али са целобројним изложиоцима. Као што ћемо да видимо у овом одељку, функције које су аналитичке на окрњеном околинама неке тачке могу да се трансформишу у специјални тип редова које називамо Лоранови[20] редови.

Теорема 5.26. ***(Лоранова теорема)*** *Нека је функција $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ аналитичка на прстену $\mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}$. Тада:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \textit{за све} \quad z \in \mathcal{V}.$$

[19] Carl David Tolme Runge 1856-1927, немачки математичар.

[20] Pierre Alphonse Laurent 1813-1854, француски математичар, инжењер и официр француске војске.

При том, ако је $r < \rho < R$, коефицијенте c_n рачунамо помоћу формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - a| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \mathrm{d}\xi \quad \text{за све} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Доказ: Нека је $z \in \mathcal{V}$ произвољно. Тада, за $r', R' > 0$ такве да је $r < r' < |z-a| < R' < R$, прстен $\mathcal{V}' = \{\xi \in \mathbb{C} \mid r' < |\xi - a| < R'\}$ садржи z и компактно припада области $\mathcal{V}$ (График 36). Тада, $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ и f задовољавају услове Кошијеве интегралне формуле 4.13 па је:

$$f(z) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial \mathcal{V}'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - a| = R'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - a| = r'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi$$

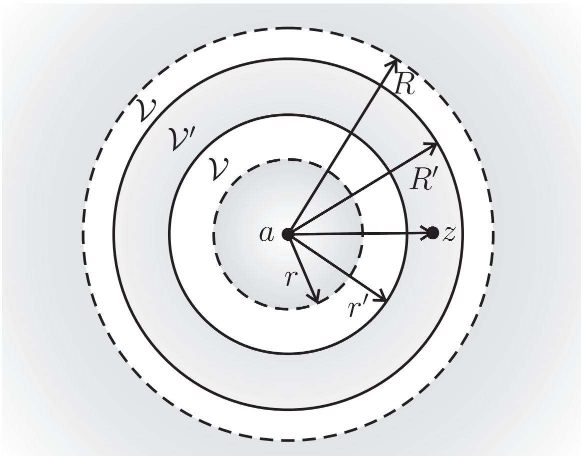


График 36: Прстен компактно садржи концетричан прстен око сваке своје тачке.

При том, кружнице су позитивно оријентисане у оба интеграла. Нека је ξ са шире кружнице тј. нека је $|\xi - a| = R'$. Тада $\frac{|z-a|}{|\xi - a|} = q < 1$ па је:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a)\left(1 - \frac{z-a}{\xi - a}\right)} = \frac{1}{\xi - a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi - a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}}.$$

Пре него што добијену суму заменимо у први интеграл, покажимо да $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)} \frac{(z-a)^n}{(\xi - a)^n}$ може да се интеграли члан по члан на кружници $K' = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - a| = R'\}$. Како је K' компактан скуп а функција f непрекидна на K', постоји $M > 0$ тако да је $|f(\xi)| < M$ за све $\xi \in K'$. Тада, за свако $\xi \in K'$

$$\left| \frac{f(\xi)}{(\xi - a)} \frac{(z-a)^n}{(\xi - a)^n} \right| = \frac{|f(\xi)|}{|\xi - a|} \left| \frac{z-a}{\xi - a} \right|^n \leq \frac{M}{R'} q^n$$

а како ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{R'} q^n$ конвергира, по Вајерштрасовом критеријуму $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)} \frac{(z-a)^n}{(\xi - a)^n}$ равномерно конвергира на K' што по Теореми 5.4 значи да може да се интеграли члан по члан. Сада:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - a| = R'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - a| = R'} f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}} \mathrm{d}\xi$$

$$\overset{(\triangle)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - a| = R'} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \mathrm{d}\xi \right) (z-a)^n.$$

Дакле, за сада је све исто као у доказу Тејлорове теореме.

Нека је ξ тачка са мање кружнице $k' = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - a| = r'\}$. Тада, $|\xi - a| < |z - a|$ па је $\frac{|\xi-a|}{|z-a|} < 1$ што имплицира да је:

$$-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \frac{\xi-a}{z-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi-a)^{n-1}}{(z-a)^n}.$$

Како ред $\sum_{n=1}^{\infty} f(\xi)\frac{(\xi-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$ може на k' да се интерграли члан по члан (доказати), заменом у други интеграл једначине $(*)$ добијамо:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-a|=r'} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-a|=r'} f(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\xi-a)^{n-1}}{(z-a)^n}\mathrm{d}\xi \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-a|=r'} f(\xi)(\xi-a)^{n-1}\mathrm{d}\xi\right)\frac{1}{(z-a)^n} \\
&\overset{(\square)}{=} \sum_{-\infty}^{n=-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-a|=r'} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right)(z-a)^n.
\end{aligned}$$

Како су функције $\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}$ аналитичке на прстену $\mathcal{V}$ за произвољно $n \in \mathbb{Z}$, а кружнице K' и k' хомотопне на $\mathcal{V}$ кружници $\{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - a| = \rho\}$ за произвољно $\rho \in (r, R)$, по Основној Кошијевој теореми 4.9, за све $n \in \mathbb{Z}$ важи да је:

$$\oint\limits_{|\xi-a|=R'} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi = \oint\limits_{|\xi-a|=r'} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi = \oint\limits_{|\xi-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi.$$

Заменом једначина $(\square)$ и $(\triangle)$ у једначину $(*)$ добијамо да је:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right)(z-a)^n + \sum_{-\infty}^{n=-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right)(z-a)^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right)(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n
\end{aligned}$$

где коефицијенте c_n, $n \in \mathbb{Z}$, рачунамо као што је наведено у поставци теореме. □

Ред $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ из претходне теореме називамо Лоранов ред функције f на прстену $\mathcal{V}$. Ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ називамо **правилни део** Лорановог реда а $\sum_{-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ **главни део** Лорановог реда. Приметимо да ако је главни део Лорановог реда једнак нули, Лоранов ред функције f постаје степени ред а по Теореми 5.11 то ће да буде случај акко је функција f аналитичка на кругу $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < R\}$. Отуда, трансформација фунцкије у Лоранов ред има смисла када функција није аналитичка на неком ограниченом потскупу скупа $\mathbb{C}$.

Анализирајмо сада својства произвољних редова који имају форму:

$$\cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Правилни део овог реда је класичан степени ред који конвергира на кругу $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ и евентуално у тачкама његове границе. При том, константа R се рачуна по Коши-Адамаровој теореми 5.9. Главни део овог реда је облика:

$$\sum_{-\infty}^{n=-1} c_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}.$$

Сменом $\frac{1}{z-a} = w$ добијамо опет степени ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n$ који по Коши-Адамаровој теореми има полупречник конвергенције r који се рачуна помоћу формуле

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_{-n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|} = \overline{\lim_{n\to-\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Тако добијамо први део следећег тврђења:

Теорема 5.27. *Ред $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ конвергира на $\mathcal{V} = \{z \in C \mid \frac{1}{r} < |z-a| < R\}$ где је:*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad \frac{1}{r} = \overline{\lim_{n\to-\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$$

а његова сума је аналитичка функција на $\mathcal{V}$.

Доказ: По Абеловој теореми 5.8, ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ равномерно конвергира на сваком компактном потскупу круга $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$. Такође, ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n$ равномерно конвергира на сваком компактном потскупу круга $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < r\}$ што имплицира да $\sum_{-\infty}^{n=-1} c_n(z-a)^n$ равномерно конвергира на сваком компактном потскупу скупа $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| > \frac{1}{r}\}$. Отуда, ред $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ равномерно конвергира на сваком компактном потскупу скупа $\mathcal{V}$ што по Вајерштрасовој теореми (Теорема 5.17) доказује да је његова сума аналитичка на $\mathcal{V}$. □

Дакле, аналитичким функцијама на прстену можемо да придружимо Лоранов ред а важи и обрнуто, редови $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ су функције које су аналитичке на прстеновима. Поставља се питање да ли је конвергентни ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ Лоранов ред своје суме као у случају Тејлорових редова. Као што ћемо да видимо у слдећем тврђењу, одоговор је позитиван.

Теорема 5.28. *Ако функција f може на прстену $\mathcal{V} = \{z \in C \mid r < |z-a| < R\}$ да се представи конвергентним функционалним редом облика:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

тада, за $\rho \in (r, R)$, коефицијенти c_n се рачунају помоћу формуле:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} \mathrm{d}\xi \quad \text{за све} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Доказ: Нека је $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = \rho\}$ за неко $\rho \in (r, R)$. Тада, по Теореми 5.27, ред

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k$$

равномерно конвергира на K. Како је функција $\frac{1}{(z-a)^{n+1}}$ ограничена на K, закључујемо да ред:

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^{k-n-1}$$

равномерно конвергира на K што по Теореми 5.4 имплицира да овај ред на K може да се интеграли члан по члан. Тако добијамо да је:

$$\begin{aligned} \oint\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z &= \oint\limits_{|z-a|=\rho} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^{k-n-1}\mathrm{d}z \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint\limits_{|z-a|=\rho} (z-a)^{k-n-1}\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Како је по Примеру 4.1

$$\oint\limits_{|z-a|=\rho} (z-a)^{k-n-1}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & k=n; \\ 0, & k\neq n, \end{cases}$$

заменом у $(*)$ добијамо да је:

$$\oint\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z = 2\pi i c_n$$

чиме је теорема доказана. $\square$

За разлику од Тејлоровог реда, не постоји лепа формула којом се помоћу извода рачунају коефицијенти Лорановог реда произвољне функције. На срећу, неке рационалне фунцкије могу без интеграције да се трансформишу у Лоранов ред као што је показано у више задатака урађених на вежбама (погледати материјал из Лоранових редова постављен на сајту).

На крају, наводимо теорему чији је доказ аналоган доказу Теореме 5.6 те га остављамо читаоцима.

Теорема 5.29. ***(Кошијева неједнакост за коефицијенте Лорановог реда)*** *Нека је функција f аналитичка на прстену $\mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}$. Тада за коефицијенте Лорановог реда функције f важи:*

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \quad \text{за све} \quad n \in \mathbb{Z}$$

где је $\rho \in (r, R)$ произвољно а M максимум функције $|f|$ на кругу $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = \rho\}$.

Лоранови редови ће да буду врло значајни у следећем поглављу када будемо анализирали сингуларитете комплексних функција.

6 Сингуларитети комплексних функција

Целокупна до сада приказана анализа комплексних функција је базирана на функцијама које су аналитичке на некој области. У овом поглављу, приказаћемо особине функција које нису аналитичке, специјално, функција које нису аналитичке у тачкама које ћемо да називамо сингуларитети комплексне функције.

Присетимо се да комплексне функције $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ могу да имају непрекидне екстензије $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ (на пример, билинеарне функције) што илуструје собину да, за разлику од реалних функција, комплексне функције имају знатно мање проблема у бесконачној тачки. Ова суштинска разлика се врло лепо види приликом интеграције, док сингуларитети значајно компликују интеграцију реалних функција, сингуларитети комплексних функција у специјалним случајевима значајно поједностављују њихову интеграцију.

6.1 Изоловани сингуларитети

У реалној анализи, сингуларитети представљају тачке у којима функција није непрекидна. У комплексној анализи захтеваћемо нешто јачи услов, тј. захтеваћемо да функција не буде аналитичка у сингуларитету. Зато у овом одељку, када кажемо да функција нема сингуларитета на $\mathcal{D}$, подразумева се да је она аналитичка на $\mathcal{D}$. Наравно, аналитичке функције су непрекидне међутим, постоје комплексне функције које су непрекидне али нису аналитичке.

Дефиниција 6.1. *Тачка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ се назива изоловани сингуларитет функције f ако је функција f аналитичка на некој окрњеној околини тачке a.*

Присетимо се да је окрњена околина тачке $a \in \overline{\mathbb{C}}$ полупречника $\rho > 0$ скуп:

$$\mathcal{U}_a^\circ = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < \rho\}; \quad \text{односно} \quad \mathcal{U}_\infty^\circ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1/\rho\}.$$

Практично, тачка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ је изоловани сингуларитет функције f ако је a једина тачка неког отвореног скупа у којој функција f није аналитичка.

Сада ћемо као у реалној анализи да извршимо класификацију сингуларитета у зависности од граничне вредности функције.

Дефиниција 6.2. *Изоловани сингуларитет $a \in \overline{\mathbb{C}}$ функције f је:*

- ***отклоњив**, ако постоји $\lim\limits_{z\to a} f(z) = w$ где је $|w| < \infty$;*
- ***пол**, ако је $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$;*
- ***есенцијалан**, ако $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не постоји у простору $(\overline{\mathbb{C}}, \rho)$.*

Дакле, као у реалној анализи, ако је сингуларитет a функције f отклоњив, функција може да се додефинише у тачки a тако да добијена функција буде непрекидна. Слично, ако је a пол функције f и њу у тачки a дефинишемо са $f(a) = \infty$, резултат је непрекидна функција $f : \mathcal{U}_a \to \overline{\mathbb{C}}$ (присетимо се билинеарних функција).

Пример 6.1. *Класификовати сингуларитет $z = 0$ функција $f_1(z) = \frac{\sin z}{z}$, $f_2(z) = \frac{1}{z^n}$, $f_3(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $f_4(z) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}$.*

Решење: Приметимо да ни једна од наведених функција није аналитичка за $z = 0$.

- Тејлоров развој функције $\sin z$ је степени ред:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{па је} \quad \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

  Отуда, $f_1(z)$ је сума конвергентног степеног реда што значи да је f_1 аналитичка, а самим тим и непрекидна у $z = 0$. Тако добијамо да је $\lim\limits_{z\to 0} f_1(z) = 1$ (сума реда за $z = 0$) тј. $z = 0$ је отклоњив сингуларитет функције f_1.

- Како за $n > 0$ важи да је $\lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{z^n} = \infty$, сингуларитет $z = 0$ је пол функције f_2.

- Анализирајмо $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$. Фиксирајмо $z = iy$. Тада,

$$\lim_{y\to 0} e^{\frac{1}{iy}} = \lim_{y\to 0} e^{-i\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0} \big(\cos\frac{1}{y} - i\sin\frac{1}{y}\big).$$

  Како лимеси $\lim\limits_{y\to 0}\cos\frac{1}{y}$ и $\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$ не постоје, закључујемо да $\lim\limits_{z\to 0} f_3(z)$ не постоји па $z = 0$ је есенцијални сингуларитет функције f_3.

- Функција $f_4(z)$ има сингуларитете у свим тачкама $z \in \mathbb{C}$ где је $\sin\frac{\pi}{z} = 0$ односно $\frac{\pi}{z} = k\pi$ за све $k \in \mathbb{Z}$ што значи да је свака тачка скупа $\{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ сингуларитет функције f_4. Како је $z = 0$ тачка нагомилавања сингуларитета, закључујемо да она није изоловани сингуларитет функције f_4.

□

Приметимо да је по Лорановој теореми 5.26 функција f једнака суми свог Лорановог реда на окрњеној околини сингуларитета. Сада ћемо помоћу кефицијената овог реда да извршимо класификацију сингуларитета.

Теорема 6.1. *Изоловани сингуларитет $a \in \mathbb{C}$ функције f је отклоњив акко Лоранов ред функције f у окрњеној околини тачке a има форму:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Доказ:($\Leftarrow$) Ако је $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ тј. f једнака суми конвергентног степеног реда, она је аналитичка па самим тим и непрекидна на кругу конвергенције тог реда па је $\lim\limits_{z\to a} f(z) = c_0$.

($\Rightarrow$) Нека је $z = a$ отклоњив сингуларитет функције f и нека је $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ њен Лоранов ред на окрњеној околини тачке a. Како је по претпоставци:

$$\lim_{z\to a} f(z) = w \quad \text{где је} \quad |w| < \infty,$$

постоји $R > 0$ тако да је f ограничена на скупу $\mathcal{U}^\circ = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < R\}$ односно, за све $z \in \mathcal{U}^\circ$ важи да је $|f(z)| < M$. Тада, по Кошијевој неједнакости за коефицијенте Лорановог реда 5.29, за произвољно $0 < \rho < R$ важи да је

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \quad \text{за све} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Специјално, за $n < 0$ важи да је $-n > 0$ па је $|c_n| < M\rho^{-n}$ а како је $\rho \in (0, R)$ произвољно, закључујемо да је $c_n = 0$. □

Као што видимо, у изолованом сингуларитету Лоранов ред је конвергентан степени ред што илуструје особину да, ако функција f има отклоњив изоловани сингулатитет у тачки a, она може да се додефинише не само до непрекидне, већ и до аналитичке функције у тачки a (Теорема 5.11). При том, Тејлоров ред добијене функције једнак је Лорановом реду полазне функције.

Приметимо у доказу претходне теореме да ако је функција f ограничена на некој окрњеној околини $\mathcal{U}^\circ$ тачке a, тада Лоранов ред функције f на $\mathcal{U}^\circ$ нема главни део што опет имплицира да је a отклоњив изоловани сингуларитет функције f. Тако добијамо још један критеријум отклоњивости изолованог сингуларитета.

Теорема 6.2. *Изоловани сингуларитет $a \in \mathbb{C}$ функције f је отклоњив акко је функција f ограничена на некој окрњеној околини тачке a.*

Сада ћемо да опишемо како се помоћу Лорановог реда детектују полови функције.

Теорема 6.3. *Изоловани сингуларитет $a \in \mathbb{C}$ функције f је пол акко постоји $n_0 > 0$ тако да Лоранов ред функције f на окрњеној околини тачке a има форму:*

$$f(z) = \sum_{n=-n_0}^{\infty} c_n(z-a)^n = \frac{c_{-n_0}}{(z-a)^{n_0}} + \frac{c_{-n_0+1}}{(z-a)^{n_0-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Доказ:($\Leftarrow$) Ако је функција f на $\mathcal{U}_a^\circ$ једнака

$$f(z) = \frac{c_{-n_0}}{(z-a)^{n_0}} + \frac{c_{-n_0+1}}{(z-a)^{n_0-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

она је збир рационалне функције $r : \mathcal{U}_a^\circ \to \mathbb{C}$ и аналитичке функције $\varphi : \mathcal{U}_a^\circ \to \mathbb{C}$ где је:

$$r(z) = \frac{c_{-n_0} + c_{-n_0+1}(z-a) + \cdots + c_{-1}(z-a)^{n_0}}{(z-a)^{n_0}} \quad \text{и} \quad \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Тада је

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} r(z) + \lim_{z\to a} \varphi(z) = \lim_{z\to a} r(z) + c_0 = \infty.$$

($\Rightarrow$) Нека је $z = a$ пол функције f. Тада постоји окрњена околина $\mathcal{U}_a^\circ$ тачке a тако да је $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ различита од нуле за све $z \in \mathcal{U}_a^\circ$. Такође, функција g је аналитичка на $\mathcal{U}_a^\circ$ јер је таква и функција f. Како је

$$\lim_{z\to a} g(z) = \lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0,$$

закључујемо да је $z = a$ отклоњив сингуларитет фунције g што имплицира да је функција g аналитичка у тачки a а тиме и на целој околини $\mathcal{U}_a$. Дакле, $z = a$ је нула аналитичке функције g па по Теореми 5.18 постоји јединствено $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је

$$g(z) = (z-a)^{n_0}\varphi(z)$$

где је $\varphi(z)$ функција која је аналитичка и различита од нуле на некој околини $\mathcal{V}_a$ тачке a. Тада је и $\frac{1}{\varphi}$ аналитичка на околини $\mathcal{V}_a$ па је по Тејлоровој теореми 5.5 једнака својем Тејлоровом развоју у тачки a. Тако добијамо да је за све $z \in \mathcal{V}_a^\circ$:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)^{n_0}} \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-a)^{n_0}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n-n_0} = \sum_{n=-n_0}^{\infty} c_{n+n_0} (z-a)^n.$$

Како су по Теореми 5.28 коефицијенти Лорановог реда функције f на прстену а тиме и на окрњеној околини тачке a јединствени, теорема је доказана. $\square$

Главни аргумент претходне теореме је чињеница да је пол $z = a$ функције f изолован што нам омогућава да конструишемо функцију $g = \frac{1}{f}$ која је аналитичка у тачки a где је $z = a$ њена изолована нула. Отуда, постоји врло једноставан критеријум детекције пола функције.

Теорема 6.4. *Изоловани сингуларитет $a \in \mathbb{C}$ је пол функције f акко је нула функције $\frac{1}{f}$ која је аналитичка и није идентички једнака нули на некој околини тачке a.*

Доказ:($\Rightarrow$) Претходна теорема.

($\Leftarrow$) Нека је $g = \frac{1}{f}$ аналитичка и није идентички једнака нули на околини тачке a и нека је $g(a) = 0$. Тада, функција g испуњава услове Теореме 5.18 па је $g(z) = (z-a)^n \varphi(z)$ где је $\varphi(z) \neq 0$ за све z из неке околине $\mathcal{V}$ тачке a. Тада је

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n} \frac{1}{\varphi(z)} \quad \text{за све} \quad z \in \mathcal{V}$$

што имплицира да је $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$ јер је $\frac{1}{\varphi}$ аналитичка на $\mathcal{V}$. $\square$

Како се пол функције f детектује као нула аналитичке функције, има смисла да дефинишемо његов ред.

Дефиниција 6.3. *Ред пола $z = a$ функције f је ред нуле $z = a$ функције $\frac{1}{f}$.*

Осим препознавања пола, Лоранов ред функције нам омогућава и да одредимо његов ред као што илуструје следеће тврђење.

Теорема 6.5. *Ред пола $z = a$ функције f је једнак $-\min\{n \in \mathbb{Z} \mid c_n \neq 0\}$ где су c_n, $n \in \mathbb{Z}$ коефицијенти Лорановог развоја функције f на окрњеној околини тачке a.*

Доказ: Ако је $z = a$ пол реда k функције f, тада је по Теореми 5.18 функција $\frac{1}{f}$ облика $\frac{1}{f(z)} = (z-a)^k \varphi(z)$ односно $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n} \frac{1}{\varphi(z)}$ где је функција $\frac{1}{\varphi}$ аналитичка и различита од нуле на некој околини тачке a. По Тејлоровој теореми 5.5, $\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ и важи да је $c_0 \neq 0$ јер је $\frac{1}{\varphi(a)} \neq 0$. Отуда,

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} c_{n+k} (z-a)^n$$

је Лоранов развој функције f у тачи a где је коефицијент који одговара најмањем степену од $(z-a)$ односно степену $n = -k$ управо $c_0 \neq 0$. $\square$

Присетимо се да $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ називамо главни део Лорановог реда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Отуда, на основу до сада доказаних тврђења, класификацију изолованог синуларитета функције f можемо да извршимо простим пребројавањем сабирака који су различити од нуле реда $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$.

Теорема 6.6. ***(Класификација изолованих сингуларитета)*** *Изоловани сингуларитет $z \in \mathbb{C}$ функције f је отклоњив, пол или есенцијалан акко главни део Лорановог реда функције f на окрњеној околини тачке a има редом, ни један, коначно мого, бесконачно много сабирака различитих од нуле.*

Доказ: Ако главни део Лорановог реда у тачки a има бесконачно много чланова, тада по Теореми 6.3 $z=a$ није пол а по Теореми 6.1 $z=a$ није отклоњив што значи да $z=a$ мора да буде есенцијалан сингуларитет јер других нема. □

Занимљива је разлика између сингуларитета комплексне и сингуларитета реалне функције. На пример, реална фунцкија $\sin\frac{1}{x}$ има у тачки $x=0$ есенцијални сингуларитет зато што за произвољно $x \in [-1,1]$ постоји низ који тежи нули а чија слика тежи тачки x. Наравно, што је много чешћи случај, детекција есенцијалног сингуларитета реалне функције се своди на налажење два низа који конвергирају ка истој тачки али чије слике теже двема различитим тачкама. Као што ћемо да видимо у следећем тврђењу, ситуација је значајно другачија у случају комплексних функција.

Теорема 6.7. ***(Теорема Сохоцког[21])*** *Ако је $a \in \mathbb{C}$ есенцијални сингуларитет функције f, тада за произвољно $w \in \overline{\mathbb{C}}$, постоји низ комплексних бројева $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такав да је:*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \quad \text{\textit{и}} \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = w.$$

Доказ: Нека је $w=\infty$. Како је $z=a$ изоловани сингуларитет, функција f је аналитичка на $\mathcal{U}^\circ = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < R\}$. Како је сингуларитет $z=a$ есенцијалан, по Теореми 6.2, функција f није ограничена на свакој окрњеној околини тачке a па, за свако $n \in \mathbb{N}$, постоји $z_n \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < \frac{R}{n}\}$ тако да је $|f(z_n)| > n$ (јер n није мајоранта функције $|f|$). Тада, низ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ тежи ка a а његова слика тј. $\big(f(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ тежи бесконачности.

Нека је сада $w \in \mathbb{C}$ произвољно и нека је $f^{-1}\big(\{w\}\big) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = w\}$.

Ако је $z=a$ тачка нагомилавања скупа $f^{-1}\big(\{w\}\big)$, тада постоји низ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ тачака скупа $f^{-1}\big(\{w\}\big)$ који конвергира ка a такав да је $\big(f(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} = (w)_{n\in\mathbb{N}}$ константан низ који конвергира ка w.

Ако $z=a$ није тачка нагомилавања скупа $f^{-1}\big(\{w\}\big)$, постоји окрњена околина $\mathcal{U}_a^\circ$ тачке a таква да је $f(z) \neq w$ за све $z \in \mathcal{U}_a^\circ$. То значи да можемо да дефинишемо аналитичку функцију $\varphi : \mathcal{U}_a^\circ :\to \mathbb{C}$ са:

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-w} \quad \text{односно} \quad f(z) = w + \frac{1}{\varphi(z)}.$$

Тада, тачка $z=a$ мора да буде есенцијални сингуларитет функције φ јер у супротном не би била есенцијални сингуларитет функције f. Отуда, као што смо видели на почетку доказа, постоји низ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ који тежи ка a а његова слика тј. $\big(\varphi(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ тежи бесконачности. Дакле, низ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је такав да:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = w + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\varphi(z_n)} = w$$

[21] Јулијан Васиљевич Сохоцкиј 1842-1927 руско-пољски математичар

чиме је теорема доказана. □

Претходна теорема илуструје да, ако постоје два низа који конвергирају ка $a \in \mathbb{C}$ а чије слике конвергирају различитим вредностима, тада за произвољно $w \in \mathbb{C}$ можемо да одредимо низ који конвергира ка a такав да његова слика конвергира ка w.

У до сада приказаним тврђењима анализирали смо сингуларитете који су коначне тачке. Сада ћемо да се позабавимо сингуларитетом $z = \infty$.

Овде је ситуација прилично једноставна имајући у виду да за произвољну функцију f, гранична вредност $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ постоји акко $\lim\limits_{w\to 0} f\left(\frac{1}{w}\right)$ постоји и да је тада

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{w\to 0} f\left(\frac{1}{w}\right).$$

Отуда, $z = \infty$ је отклоњив, пол или есенцијални сингуларитет функције $f(z)$ акко је $w = 0$ редом отклоњив, пол или есенцијални сингуларитет функције $f\left(\frac{1}{w}\right)$. Ако је

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \cdots + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

Лоранов развој функције f на прстену $\mathcal{U}_\infty^\circ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ (окрњеној околини бесконачности), заменом $z = \frac{1}{w}$ добијамо

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{w}\right)^n = \cdots + c_{-2}w^2 + c_{-1}w + c_0 + c_1\frac{1}{w} + c_2\frac{1}{w^2} + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} w^n$$

тј. Лоранов развој функције $f\left(\frac{1}{w}\right)$ на окрњеној околини $\mathcal{U}_0^\circ = \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < |w| < 1/R\}$ тачке $w = 0$. Приметимо да при овој трансформацији правилни део $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ Лорановог реда функције $f(z)$ постаје главни део Лорановог реда функције $f\left(\frac{1}{w}\right)$ плус константа c_0. Ако сада применимо Теорему 6.6 на класификацију сингуларитета $w = 0$ функције $f\left(\frac{1}{w}\right)$, добијамо следеће тврђење.

Теорема 6.8. *Изоловани сингуларитет $z = \infty$ функције f је отклоњив, пол или есенцијалан акко правилни део Лорановог реда функције f без константе c_0 на окрњеној околини тачке $z = \infty$ има редом, ни један, коначно много, бесконачно много сабирака различитих од нуле.*

Пример 6.2. *Класификовати сингуларитет $z = \infty$ функција* $\sin z$, e^z, $\sin\frac{1}{z}$.

Решење: Функција $\sin z$ је аналитичка на целом скупу комплексних бројева па се њен Лоранов развој на орњеној околини бесконачности поклапа са Тејлоровим развојем у нули (доказати!):

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Дакле, правилни део Лорановог развоја синуса на околини бесконачности има бесконачно много чланова различитих од нуле па $\sin z$ има есенцијални сингуларитет у тачки $z = \infty$. Слично важи и за функцију e^z.

Заменом $z = \frac{1}{w}$ у Лоранов развој функције $\sin z$, добијамо Лоранов развој функције $\sin\frac{1}{z}$ на окрњеној околини тачке $z = \infty$

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{1}{z^{2n+1}}$$

чији правилни део је једнак нули што имлицира да је $z = \infty$ отклоњив сингуларитет функције $\sin \frac{1}{z}$. $\square$

Сада ћемо да опишемо посебне класе функција у односу на природу њихових сингуларитета. Приметимо да занимљиве функције морају да имају сингуларитете на скупу $\overline{\mathbb{C}}$ јер у супротном би биле биле аналитичке на $\overline{\mathbb{C}}$ што би по теореми Лиувила 5.2 имплицирало да су константне.

Дефиниција 6.4. *Функције које немају коначних сингуларних тачака називамо* ***целе*** *функције.*

Дакле, целе функције су аналитичке на скупу $\mathbb{C}$ и имају сингуларитет само за $z = \infty$. Ако је $z = \infty$ отклоњив сингуларитет целе функције f, она може у бесконачности да се додефинише до функције која је аналитичка на целом скупу $\overline{\mathbb{C}}$ а таква функција је теореми Лиувила константна па ће самим тим и функција f да буде константна. Целе функције којима је $z = \infty$ пол су врло једноставне.

Теорема 6.9. *Ако цела функција f има пол у бесконачности, тада је f полином.*

Доказ: Нека је $z = \infty$ пол функције f. Тада, по Теореми 6.8, Лоранов развој функције f на скупу $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (који је окрњена околина бесконачности) има правилни део којег формира коначно много сабирака. Отуда,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n \quad \text{за све} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Коефицијенти c_{-n}, за све $n \in \mathbb{N}$ се по Теореми 5.26 рачунају помоћу формуле

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=\rho} f(z) z^{n-1} \mathrm{d}z.$$

Како је функција $f(z)z^{n-1}$ аналитичка на $\mathbb{C}$, по Последици 4.3 важи да је $c_{-n} = 0$ за све $n \in \mathbb{N}$. Дакле, функција f је полином. $\square$

Као што смо показали, целе функције које нису полиноми, на пример $\cos z$, $\sin z$, e^z, морају у бесконачности да имају есенцијални сингуларитет. Ове функције се у литератури називају трансцендентне целе функције.

Дефиниција 6.5. *За функцију која на области $\mathcal{D}$ нема других сингуларитета осим полова кажемо да је* ***мероморфна*** *на $\mathcal{D}$. Ако је функција мероморфна на $\mathbb{C}$ кажемо само да је мероморфна.*

Полови су по дефиницији изоловани сингуларитети. То значи да око сваког пола постоји окрњена околина на којој је функција аналитичка односно која на њој нема других сингуларитета. Покажимо да за произвољно $n \in \mathbb{N}$ круг $K_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < n\}$ може да садржи само коначно много полова мероморфне функције f. Претпоставимо супротно тј. да K_n садржи бесконачно много полова. Како је K_n ограничен, због принципа компактности, фамилија полова функције f би морала да има тачку нагомилавања $z = a$ на скупу $\overline{K_n}$ а самим тим и на $\mathbb{C}$. То даље имплицира да је $f(a) = \infty$ али a није изоловани сингуларитет јер у свакој својој околини мора да има бар још један пол и ту долазимо до контрадикције. Како је:

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

а сваки скуп K_n садржи коначно полова, закључујемо да мероморфна функција f може да има највише пребројиво много полова. Примери мероморфних функција које имају пребројиво полова су $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$.

Аналогном аргуметацијом може да се докаже и следеће тврђење.

Лема 6.1. *Ако функција f има на области $\mathcal{D}$ само изоловане сингуларитете, тада сваки ограничен подскуп који компактно припада области $\mathcal{D}$ може да садржи само коначно много сингуларитета функције f.*

Као и код целих функција, особине функција које су мероморфне на скупу $\mathbb{C}$ зависе од сингуларитета $z = \infty$.

Теорема 6.10. *Ако мероморфна функција f у бесконачности има отклоњив сингуларитет или пол, тада је f рационална функција.*

Доказ: По претпоставци, $z = \infty$ је изоловани сингуларитет функције f што значи да постоји окрњена околина бесконачности тј. скуп $\mathcal{U}^\circ_\infty = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ на којем функција f нема сингуларитета. То имплицира да једини преостали сингуларитети функције f припадају скупу $\mathbb{C} \setminus \mathcal{U}^\circ_\infty$ који је ограничен и компактно припада простору $\mathbb{C}$. По претходној леми, закључујемо да функција f има коначно сингуларитета на $\overline{\mathbb{C}}$.

Нека су $a_1, a_2, \cdots, a_n$ коначни полови функције f. По Теореми 6.6, главни део Лорановог реда функције f на окрњеној околини $\mathcal{U}^\circ_{a_i}$ тачке a_i има коначно много сабирака па је облика:

$$g_i(z) = \frac{c_{-n_i}}{(z - a_i)^{n_i}} + \frac{c_{-n_i+1}}{(z - a_i)^{n_i - 1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - a_i}$$

што значи да за свако $z \in \mathcal{U}^\circ_{a_i}$ важи $f(z) = g_i(z) + \varphi_i(z)$ где је φ_i сума правилног дела Лорановог реда функције f на $\mathcal{U}^\circ_{a_i}$ па је аналитичка на $\mathcal{U}_{a_i}$. Приметимо да је $g_i : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ рационална функција чији је једини сингуларитет тачка $z = a_i$.

Дефинишимо полином $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ са:

- ако је $z = \infty$ отклоњив сингуларитет функције f, нека је $g \equiv 0$;
- ако је $z = \infty$ пол функције f, нека је g правилни део Лорановог развоја функције f на окрњеној околини бесконачности односно на скупу $\mathcal{U}^\circ_\infty$.

По Теореми 6.8, функција g је полином а за свако $z \in \mathcal{U}^\circ_\infty$ важи да је $f(z) = r(z) + g(z)$ где је $r(z)$ сума главног дела Лорановог реда функције f на $\mathcal{U}^\circ_\infty$ који је у бесконачности једнак нули. Анализирајмо сада функцију:

$$\Phi(z) = f(z) - g(z) - \sum_{i=1}^{n} g_i(z).$$

Прво, сингуларитети функције Φ су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $z = \infty$. Друго за свако $z \in \mathcal{U}^\circ_{a_i}$ важи:

$$\Phi(z) = g_i(z) + \varphi_i(z) - g(z) - \sum_{j=1}^{n} g_j(z) = \varphi_i(z) - g(z) - \sum_{j \neq i} g_j(z)$$

што имплицира да је $z = a_i$ отклоњив сингуларитет функције Φ. Треће, за свако $z \in \mathcal{U}^\circ_\infty$

$$\Phi(z) = r(z) + g(z) - g(z) - \sum_{j=1}^{n} g_j(z) = r(z) - \sum_{j=1}^{n} g_j(z)$$

што значи да је $z = \infty$ такође отклоњив сингуларитет функције Φ. Дакле, функција Φ има на $\overline{\mathbb{C}}$ само отклоњиве сингуларитете што значи да може да се додефинише до функције која је аналитичка на $\overline{\mathbb{C}}$. Како су по теореми Лиувила 5.7 аналитичке функције на $\overline{\mathbb{C}}$ константне, закључујемо да је и Φ константна односно да је $\Phi(z) = c$. Отуда

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{n} g_j(z) + c$$

а ово је рационална функција. □

Ову теорему смо могли једноставније да искажемо са: функција која је мероморфна на $\overline{\mathbb{C}}$ је рационална. Као што ћемо да видимо у следећем одељку, посебно су интересантни интеграли мероморфних функција.

6.2 Остатак комплексне функције

У већини уџбеника, наслов овог поглавља би гласио: резидууми. Термин резидуум се ван математике и пар наука вероватно нигде више не користи. Настао је од латинске речи rezíduum или сличне енглеске residue које у букваном преводу значе остатак. Разлог зашто се у литератури не користи Богом дани термин је што у математици термин остатак већ има врло велику примену: остатак конвергентног реда, остатак дељења и слично. Конкретан „остатак” који ћемо овде да анализирамо је врло специфичан и тиче се особине да приликом интеграције комплексне функције по граници коначне области, можемо да занемаримо делове области у којима је функција аналитичка и њих одбацимо док не остане „остатак” или „вишак” или „ресто” у изолованом сингуларитету. Првобитни преводиоци математике на српски језик можда нису имали разлога да овај прелепи концепт комплексне анализе крсте латинским термином али ми ћемо овде свакако да користимо интуитивни српски термин.

Дефиниција 6.6. *Остатак (резидуум) аналитичке функције $f : \mathcal{U}_a^\circ \to \mathbb{C}$ у коначном изолованом сингуларитету $a \in \mathbb{C}$ је комплексан број*

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f \mathrm{d}z$$

где је γ позитивно оријентисана кружница са центром у тачки a која је садржана у окрњеној околини $\mathcal{U}_a^\circ$.

Приметимо да остатак функције не зависи од полупречника кружнице γ зато што су кружнице различитих полупречника хомотопне на $\mathcal{U}_a^\circ$ па су по Основној Кошијевој теореми 4.9 интеграли аналитичке функције по њима једнаки. Сада наводимо можда најлепшу теорему комплексне интеграције.

Теорема 6.11. ***(Кошијева теорема о остатку)*** *Нека је функција f аналитичка на области $\mathcal{D}$ осим у изолованим сингуларитетима. Нека је γ део по део глатка крива која ограничава област $\mathcal{V}$ која компактно припада области $\mathcal{D}$ и нека је f аналитичка дуж криве γ. Тада:*

$$\oint_\gamma f \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{a_i \in \mathcal{V}} \operatorname{Res}(f, a_i)$$

где су a_i изоловани сингуларитети функције f из области $\mathcal{V}$.

Доказ: Очигледно да је област $\mathcal{V}$ ограничена па због Леме 6.1 садржи коначно много сингуларитета $a_1, a_2, \ldots, a_n$ функције f. Сада, око сваког сингуларитета a_i постоји околина $\mathcal{U}_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_i| < \rho_i\}$ ограничена кружницом γ_i која компактно припада области $\mathcal{V}$. Тада, функција f је аналитичка на области $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \setminus \overline{\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_n}$. Како границу области $\mathcal{V}'$ параметризују криве $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (где су $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ негативно оријетисане), област $\mathcal{V}'$ и функција f задовољавају услове Опште Кошијеве теореме 4.12 па је

$$0 = \oint\limits_{\partial \mathcal{V}'} f \mathrm{d}z = \oint\limits_{\gamma} f \mathrm{d}z - \oint\limits_{\gamma_1} f \mathrm{d}z - \cdots - \oint\limits_{\gamma_n} f \mathrm{d}z,$$

што по дефиницији остатка функције имплицира да је

$$\oint\limits_{\gamma} f \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_i} f \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_i).$$

□

Читаоци се у овом тренутку вероватно питају чему $2\pi i$ у дефиницији остатка функције. Разлог је врло једноставан, по Лорановој теореми 5.26, остатак функције f у изолованом сингуларитету $a \in \mathbb{C}$ је ништа друго до коефицијент c_{-1} Лорановог развоја функције f на окрњеној околини сингуларитета a!

Теорема 6.12. *Ако је a изоловани сингуларитет функције f, тада* $\operatorname{Res}(f, a) = c_{-1}$ *где је* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$ *Лоранов развој функције f на окрњеној околини тачке a.*

Доказ: По дефиницији изолованог сингуларитета, функција f мора да буде аналитичка на $\mathcal{U}_a^{\circ} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < \rho\}$ а ово је својеврстан прстен са центром у тачки a на којем по Лорановој теореми 5.26 функција f има развој у ред $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$ где се коефицијенти $c_n, n \in \mathbb{Z}$ рачунају помоћу формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

а γ_r је кружница са центром у a полупречника $0 < r < \rho$. Заменом $n = -1$, са десне стране добијамо по дефиницији остатак функције f у тачки a □

Дакле, ради рачунања интеграла функције која има изоловане сингуларитете, можемо да израчунамо коефицијент c_{-1} њеног Лорановог развоја на окрњеним околинама изолованих сингуларитета који се и сами рачунају помоћу интеграла? Претходна речница треба да се прочита саркастично. На срећу, постоји практичнији начин за рачунање коефицијента c_{-1} и представићемо га у наставку. Крећемо од најједноставнијег случаја.

Последица 6.1. *Ако је a отклоњив сингуларитет функције f, тада је* $\operatorname{Res}(f, a) = 0$.

Доказ: Теорема 6.6. □

Нека је сада $z = a$ пол реда k. По Теореми 6.5, Лоранов ред функције f на окрњеној околини тачке a је облика:

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - a)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - a)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{-2}}{(z - a)^2} + \frac{c_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Ако претходну једначину помножимо са $(z-a)^k$ добијамо:

$$(z-a)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-a) + \cdots + c_{-2}(z-a)^{k-2} + c_{-1}(z-a)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+k}.$$

Сада, ако диференцирамо леву и десну страну добијене једначине $k-1$ пута, користећи особину да степени редови могу да се диференцирају члан по члан произвољан број пута на области конвергенције, добијамо:

$$\big(f(z)(z-a)^k\big)^{(k-1)} = \ c_{-1}(k-1)! + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{(n+1)!} c_n (z-a)^{n+1}.$$

На крају, не можемо одмах да заменимо $z=a$ у претходној једначини јер $z=a$ је пол односно сингуларитет функције f али, овај се пробллем лако решава помоћу граничне вредности.

Теорема 6.13. *Ако је $z=a$ пол реда k функције f тада је*

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \big((z-a)^k f(z)\big)^{(k-1)}.$$

Дакле, уместо да рачунамо интеграл функције по граници области на којој је функција мероморфна, можемо да израчунамо њене остатке у половима помоћу граничне вредности што је вишеструко једноставније. Ово је врло лепо својство комплексне интеграције, уместо да компликују интегрални рачун, сингуларитети га некада значајно појedносављују.

Пре него што наведемо примере интеграције помоћу остатака, анализирајмо остатак функције која има $z=\infty$ као изоловани сингуларитет.

Дефиниција 6.7. *Остатак аналитичке функције $f : \mathcal{U}_\infty^\circ \to \mathbb{C}$ у изолованом сингуларитету $z=\infty$ је комплексан број*

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f \mathrm{d}z$$

где је γ^- негативно оријентисана кружница са центром у $z=0$ која ограничава $\mathcal{U}_\infty^\circ$.

У претходној дефиницији бирамо да γ буде негативно оријентисана да би се са њене леве стране налазиле тачке окрњене околине бесконачности $\mathcal{U}_\infty^\circ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$. На скупу $\mathcal{U}_\infty^\circ$ функција f је једнака суми својег Лорановог реда који се рачуна по степенима од $(z-0)$ јер $z=0$ је центар прстена $\mathcal{U}_\infty^\circ$. Дакле,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad \text{за све} \quad z \in U_\infty^\circ$$

а коефицијенти овог реда се рачунају по стандардној формули:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z \quad \text{за} \quad b \in \mathbb{Z}.$$

Једноставним упоређивањем, добијамо да је $\operatorname{Res}(f,\infty) = -c_{-1}$. Како је класификација бесконачног изолованог сингуларитета по Теореми 6.8 везана за правилни део Лорановог реда, од интеграла не постоји једноставнија формула за рачунање остатка у бесконачности. Међутим, овај недостатак може да се надомести у једном специјалном случају.

Теорема 6.14. *Ако функција f има на $\mathbb{C}$ коначно сингуларитета $a_1, a_2, \ldots, a_n$, тада је:*

$$\operatorname{Res}(f, \infty) + \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_i) = 0.$$

Доказ: Јасно је да ако функција има коначно сингуларитета, сви они су изоловани сингуларитети и $z = \infty$ је такође њен изоловани сингуларитет (доказати). Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ коначни изоловани сингуларитети функције f и нека је $R = 1 + \max\{|a_i| \mid i = 1, \ldots, n\}$. Тада, област $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ садржи све коначне сингуларитете функције f тј. функција f је аналитичка на њеном комплементу што значи да остатак у бесконачности можемо да рачунамо помоћу интеграла:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{U}^-} f \mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{U}} f \mathrm{d}z.$$

Како област $\mathcal{U}$ и функција f задовољавају услове Кошијеве теореме о остатку 6.11, добијамо да је

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_i)\right) = -\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_i)$$

чиме је теорема доказана. □

Пример 6.3. *Израчунати* $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^8+1)^2}$.

Решење: Функција $f(z) = \frac{1}{(z^8+1)^2}$ има осам полова другог реда и сви су они по модулу мањи од 2 тј. припадају области коју ограничава кружница $\{z \in C \mid |z| = 2\}$. Да не би рачунали остатке у свих осам полова, по претходној теореми, лакше је да израчунамо остатак у бесконачности. Како је тачка $z = \infty$ нула шеснестог реда функције f, коефицијенти c_n њеног Лорановог развоја за $n > -16$ су једнаки нули што значи да је и $c_{-1} = 0$. Отуда:

$$\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^8+1)^2} = 2\pi i \sum_{k=0}^{7} \operatorname{Res}(f, e^{i(\pi/8 + 2k\pi/8)}) = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) = 0.$$

□

Пример 6.4. *Израчунати интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} \mathrm{d}x$ *где је* $t \in \mathbb{R}$.

Решење: Дати интеграл конвергира зато што је $\left|\frac{e^{itx}}{1+x^2}\right| = \frac{1}{1+x^2}$ и важи да је $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi$.

Разликујемо два случаја $t \geq 0$ и $t < 0$. Нека је $f(z) = \frac{e^{itz}}{1+z^2}$.

Нека је $t \geq 0$. Посматрајмо област $\mathcal{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$. Њену границу чине полу-кружница $\gamma_R(\varphi) = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$ и сегмент $[-R, R]$. Тада је

$$\oint_{\partial\mathcal{D}_R} f \mathrm{d}z = \oint_{[-R,R]} f \mathrm{d}z + \oint_{\gamma_R} f \mathrm{d}z.$$

Како функција f на области $\mathcal{D}_R$ има само један пол $z = i$ у којем је остатак:

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} (z-i) f(z) = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{e^{itz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-t}}{2i},$$

добијамо да је

$$\oint_{[-R,R]} f \mathrm{d}z + \oint_{\gamma_R} f \mathrm{d}z \overset{(*)}{=} 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = \pi e^{-t}.$$

Ако потражимо граничну вредност леве и десне стране једнакости $(*)$ када R тежи бесконачности, први интеграл постаје интеграл који хоћемо да израчунамо. За други интергал, користимо особину да за свако $z \in \overline{\mathcal{D}_R}$ важи $|e^{itz}| = |e^{it(x+iy)}| = |e^{itx}|\,|e^{-ty}| < 1$ што имплицира да је $|f(z)| \leq \frac{1}{|1+z^2|}$. Такође, како за тачке кружнице γ_r важи да је $|z| = R$ добијамо да је $|z^2+1| \geq R^2 - 1$ (можемо да претпоставимо да је $R > 1$) што значи да је $|f(z)| \leq \frac{1}{R^2-1}$ па по Последици 4.1 добијамо да је

$$0 < \left| \int_{\gamma_R} f \mathrm{d}z \right| < \frac{R\pi}{R^2 - 1}.$$

По теореми о укљештењу за реалне низове, закључујемо да је

$$\lim_{R \to \infty} \left| \int_{\gamma_R} f \mathrm{d}z \right| = 0 \quad \text{па је} \quad \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f \mathrm{d}z = 0$$

што заменом у једначини $(*)$ имплицира да је

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} \mathrm{d}x = \pi e^{-t}.$$

Сада, за $t < 0$. Приметимо да је једино место из претходног рачуна где имамо проблем са $t < 0$ ограничење $|e^{itz}| = |e^{it(x+iy)}| = |e^{-ty}| < 1$ јер је t негативно па је $-ty$ позитиван за $y = \operatorname{Im} z > 0$. Због тога, у овом случају интеграцију радимо по граници области $\mathcal{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, \operatorname{Im} z < 0\}$ јер је тада производ $-ty$ негативан па можемо да формирамо исто ограничење. Остатак је аналоган као у претходном рачуну с'тим што је интеграл једнак:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} \mathrm{d}x = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -i) = \pi e^{t}$$

зато што пол $z = -i$ сада припада области $\mathcal{D}_R$.

На крају, тражени интеграл је:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} \mathrm{d}x = \pi e^{-|t|} \quad \text{за све} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Пример 6.5. *Израчунати интеграле* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos nx}{1+x^2}\mathrm{d}x$ *за произвољно* $n \in \mathbb{N}$.

Решење: На основу претходног примера, за произвољно $t \in \mathbb{R}$ важи

$$\pi e^{-|t|} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx + i \sin tx}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2}\mathrm{d}x + i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tx}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Како је $\pi e^{-|t|}$ реалан број, закључујемо да је

$$\pi e^{-|t|} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

за произвољно $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Ако анализирамо решење у претходна два примера, приметимо да именилац функције f може да буде било који полином степена $n \geq 2$ који нема нула на реалној оси а решење интеграла би било потпуно аналогно. Зато овде наводимо једну практичну теорему која ће да нам значајно убрза рачун код оваквих интеграла.

Теорема 6.15. *Нека функција* f *на горњој полу-равни* $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ *има само изоловане сингуларитете. Ако је* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *низ који тежи бесконачности такав да низ* $M(R_n) = \max\{|f(z)| \mid z = \gamma_{R_n}(\varphi) = R_n e^{i\varphi}, \varphi \in (0,\pi)\}$ *тежи нули, тада за произвољно* $t > 0$ *низ интеграла*

$$\int\limits_{\gamma_{R_n}} f(z)e^{itz}\mathrm{d}z$$

тежи нули када R_n *тежи бесконачности.*

Доказ: У теореми не узимамо полу-кружнице γ_R произвољног полупречника зато што тада може да се деси да γ_R пролази кроз неки сингуларитет па не би постојао максимум функције $|f|$ на њој (штавише, максимум би био бесконачно, размислите зашто).

Претпоставимо прво да $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ тј. посматрајмо десну половину γ'_{R_n} полу-кружнице γ_{R_n}. Како за $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ важи да је $\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi$ добијамо да је:

$$|e^{itz}| = |e^{itR_n e^{i\varphi}}| = |e^{itR_n(\cos\varphi + i\sin\varphi)}| = e^{-tR_n \sin\varphi} \leq e^{-\frac{2tr}{\pi}\varphi}.$$

Заменом $z = R_n e^{i\varphi}$ и $\mathrm{d}z = R_n i e^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi$ добијамо да је

$$\left|\int\limits_{\gamma'_{R_n}} f(z)e^{itz}\mathrm{d}z\right| \leq M(R_n)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2tr}{\pi}\varphi}R_n\mathrm{d}\varphi = M(R_n)\frac{\pi}{2t}(1 - e^{-tR_n})$$

а овај низ тежи нули када R_n тежи бесконачности.

За $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ користимо особину да је $\sin(\varphi) = \sin(\pi - \varphi)$ што нам омогућава да после смене $\varphi = \pi - \varphi'$ где $\varphi' \in (0, \frac{\pi}{2})$ добијемо исто ограничење и у интегралу по левој полу-кружници. $\square$

Користећи ову теорему, за свако $t > 0$ може да се израчуна интергал

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}\mathrm{d}x$$

где је $f(z)$ комплексна функција која има само изоловане сингуларитете који нису на реалној оси и која у бесконачности има отклоњив сингуларитет $f(\infty) = 0$.

7 Вишезначне комплексне функције

У овом поглављу ћемо да анализирамо својства специфичних комплексних „функција” попут корена и комплексног логаритма које на крају крајева и не могу да буду дефинисане као функције у класичном смислу. Узмимо на пример комплексан корен. Знамо да једначина $f(z) = z^n$ има у скупу комплексних бројева n различитих решења:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\arg z}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \quad \text{где је} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Поставља се питање на који начин да дефинишемо комплексни корен? Ако на пример корен дефинишемо са:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z}{n}},$$

резултат корена ће да зависи од избора аргумента комплексног броја z тј. ако на исти комплексни број $z = e^{i\pi}$ и $z = e^{3i\pi}$ применимо овако дефинисани корен, добијамо две различите вредности. Овај проблем наизглед може да се реши ако захтевамо да аргумент броја z припада интервалу $(-\pi, \pi)$. Међутим, шта да радимо за комплексне бројеве $z \in \mathbb{C}$ за које је $\arg z = \pi$? Како је функција $f(z) = z^n$ „на”, природно је да $n-$ти комплексан корен буде дефинисан за свако $z \in \mathbb{C}$. Међутим, како год дефинисали $n-$ти корен на негативном делу реалне осе, функцјa $\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z}{n}}$ неће да буде непрекидна. Са друге стране, ако захтевамо да аргумент комплексног броја припада интервалу $(0, 2\pi)$, функција $\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z}{n}}$ ће да буде непрекидна свуда осим на позитивном делу реалне осе. Због тога, да би добро дефинисали комплексни корен, применићемо мало компликованију математичку конструкцију базирану на екстензији комплексних функција.

7.1 Глобална аналитичка функција

Као што смо већ показали, комплексан корен можемо без већих потешкоћа да дефинишемо на одређеним потскуповима комплексних бројева. Зато, природна интуиција наводи на закључак да функцију која је аналитичка на целој комплексној равни можемо да добијемо простим продужењем (екстензијом) функција на потскуповима.

Дефиниција 7.1. *Нека је $f_0 : D \to \mathbb{C}$ аналитичка на $D \subseteq \mathbb{C}$ и нека је $D \subseteq \mathcal{V}$. Аналитичка функција $f : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ је аналитичко продужење функције f_0 ако је*

$$f(z) = f_0(z) \quad \text{за све} \quad z \in D$$

.

Пример 7.1. *Комплексне функције $z^n, e^z, \sin z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, представљају* ***јединствена*** *аналитичка продужења реалних функција $x^n, e^x, \sin x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на скуп комплексних бројева.*

Решење: Заиста, ако је $f(z)$ било која од наведених функција, она се по дефиницији поклапа са одговарајућом реалном функцијом на скупу $\mathbb{R}$. Наравно, свака од наведених функција је аналитичка на целом скупу комплексних бројева.

Што се тиче јединствености, претпоставимо да је $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ аналитичка функција која се на скупу реалних бројева поклапа, на пример, са e^x. Тада,

$$g(z) = e^z \quad \text{за све} \quad z \in \mathbb{R}$$

што значи да скуп $\{z \in \mathbb{C} \mid g(z) = e^z\} = \mathbb{R}$ има непребројиво много тачака нагомилавања на скупу $\mathbb{C}$ што по Теореми о јединствености аналитичке функције 5.19 имплицира да је $g(z) = e^z$ за све $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Сада ћемо да опишемо најједноставнију ситуацију када можемо да извршимо екстензију аналитичке функције.

Дефиниција 7.2. *Уређени пар $(\mathcal{U}_a, f_a)$, где је $\mathcal{U}_a$ круг са центром у тачки $z = a$ а f_a функција која је аналитичка на $\mathcal{U}_a$, називамо канонски аналитички елемент или кратко елемент. Елементи $(\mathcal{U}_a, f_a)$ и $(\mathcal{U}_b, f_b)$ су непосредно еквивалентни, пишемо $(\mathcal{U}_a, f_a) \sim (\mathcal{U}_b, f_b)$ акко*

$$\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b \neq \emptyset \quad \text{и} \quad f_1(z) = f_2(z) \quad \text{за све} \quad z \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2.$$

Очигледно да ако су елементи $(\mathcal{U}_1, f_1)$ и $(\mathcal{U}_2, f_2)$ непосредно еквивалентни, можемо да дефинишемо аналитичку функцију $f : \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \to \mathbb{C}$ са

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in \mathcal{U}_1; \\ f_2(z), & z \in \mathcal{U}_2 \setminus \mathcal{U}_1 \end{cases}$$

која је јединствено аналитичко продужење функција f_1 и f_2 на скуп $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$. Ако на овај начин желимо да наставимо процес продужења аналитичке функције, наилазимо на сличне потешкоће као приликом конструкције примитивне функције (потсетимо се поглавља 4.2). Међутим, проблем ћемо да решимо на сличан начин.

Дефиниција 7.3. *Елементи $(\mathcal{U}_a, f_a)$ и $(\mathcal{U}_b, f_b)$ су глобално еквивалентни, пишемо $(\mathcal{U}_a, f_a) \approx (\mathcal{U}_b, f_b)$, акко постоји пут $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ који повезује тачке a и b и фамилија елемената*

$$\mathcal{F} = \{(\mathcal{U}_{\gamma(t_i)}, f_{\gamma(t_i)}) \mid \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta\}$$

таквих да је $(\mathcal{U}_{\gamma(t_{i-1})}, f_{\gamma(t_{i-1})}) \sim (\mathcal{U}_{\gamma(t_i)}, f_{\gamma(t_i)})$ за све $i = 1, \ldots, n$ и $(\mathcal{U}_{\gamma(t_0)}, f_{\gamma(t_0)}) = (\mathcal{U}_a, f_a)$ а $(\mathcal{U}_{\gamma(t_n)}, f_{\gamma(t_n)}) = (\mathcal{U}_b, f_b)$.

Практично, приликом провере глобалне еквивалентности елемената $(\mathcal{U}_a, f_a)$ и $(\mathcal{U}_b, f_b)$, конструишемо пут који повезује тачке a и b и његов отворени покривач круговима таквим да на унији суседних кругова може да се изврши аналитичко продужење одговарајућих функција као што је илустровано на графику испод.

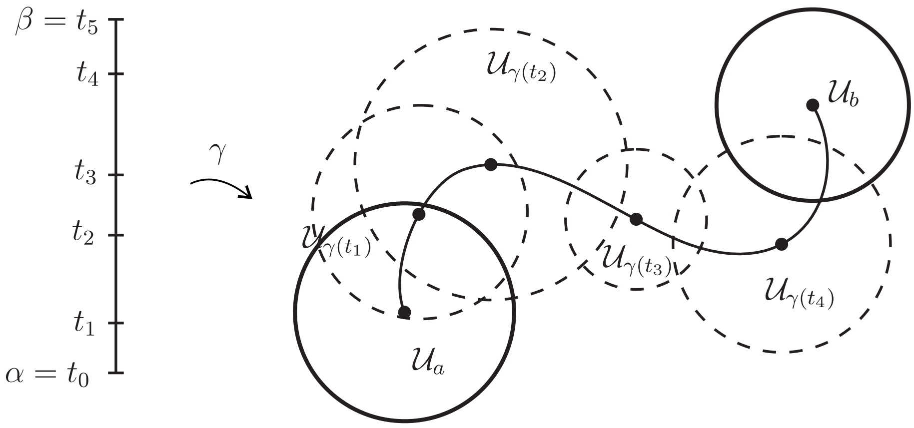


График 37: Глобална еквиваленција канонских елемената $(\mathcal{U}_a, f_a)$ и $(\mathcal{U}_b, f_b)$, приметимо да $f_{\gamma(t_2)}$ и f_a не морају да се поклапају на $\mathcal{U}_{\gamma(t_2)} \cap \mathcal{U}_a$.

Теорема 7.1. *Релација $\approx$ је релација еквиваленције на фамилији свих канонских аналитичких елемената.*

Доказ: Очигледно да из непосредне еквивалентности елемената следи њихова глобална еквивалентност па је зато сваки канонски елемент глобално еквивалентан самом себи.

Докажимо симетричност релације $\approx$. Нека пут $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ и фамилија елемената

$$\mathcal{F} = \{(\mathcal{U}_{\gamma(t_i)}, f_{\gamma(t_i)}) \mid 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$$

обезбеђују релацију $(\mathcal{U}_a, f_a) \approx (\mathcal{U}_b, f_b)$. Тада пут $\gamma^- : [0,1] \to \mathbb{C}$ дат са $\gamma^-(t) = \gamma(1-t)$ (супротан пут путу γ) и фамилија елемената

$$\mathcal{F}^- = \{(\mathcal{U}_{\gamma(1-t_i)}, f_{\gamma(1-t_i)}) \mid 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 0\}$$

обезбеђују релацију $(\mathcal{U}_b, f_b) \approx (\mathcal{U}_a, f_a)$.

Докажимо још транзитивност релације $\approx$. Нека је $(\mathcal{U}_a, f_a) \approx (\mathcal{U}_b, f_b)$ и $(\mathcal{U}_b, f_b) \approx (\mathcal{U}_c, f_c)$. То значи да постоје путеви $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ и $\gamma_2 : [1,2] \to \mathbb{C}$ такви да је $\gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(1) = b = \gamma_2(1)$, $\gamma_2(2) = c$ и фамилије елемената:

$$\mathcal{F}_1 = \{(\mathcal{U}_{\gamma_1(t_i)}, f_{\gamma_1(t_i)}) \mid 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n_1} = 1\},$$

$$\mathcal{F}_1 = \{(\mathcal{U}_{\gamma_2(s_i)}, f_{\gamma_2(s_i)}) \mid 1 = s_0 < s_1 < \cdots < s_{n_2} = 2\}.$$

којима су суседни елементи у релацији $\sim$. Тада, пут $\gamma : [1,2] \to \mathbb{C}$ дат са

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [0,1); \\ \gamma_2(t), & t \in [1,2]. \end{cases}$$

повезује тачке a и c а фамилија елемената

$$\mathcal{F}_1 = \{(\mathcal{U}_{\gamma(r_i)}, f_{\gamma(r_i)}) \mid 0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_{n_1+n_2} = 2\},$$

где је $r_i = t_i$ ако је $i < n_1$ а $r_i = s_{i-n_1}$ ако је $i \geq n_1$ обезбеђује релацију $(\mathcal{U}_a, f_a) \approx (\mathcal{U}_c, f_c)$ (исписати детаље). $\square$

Дакле, релација $\approx$ разбија све канонске аналитичке елементе на класе еквиваленције. Штавише, функцију која је аналитичка на области $\mathcal{D}$ можемо да посматрамо као класу еквиваленције елемента $\mathcal{F} = (\mathcal{U}_a, f_a)$ у односу на релацију $\approx$ (пишемо $[\mathcal{F}]_\approx$) где је $\mathcal{U}_a \subseteq \mathcal{D}$ и $f_a(z) = f(z)$ за све $z \in \mathcal{U}_a$. То је због тога што било који други други аналитички елемент $(\mathcal{U}_b, f_b)$ који има исте особине мора да буде глобално еквивалентан елементу $(\mathcal{U}_a, f_a)$ зато што је област путевима повезан и отворен скуп па лако може да се конструише одговарајући пут и низ канонских елемената који их повезују. Како је свака област унија кругова, уместо канонског аналитичког елемента можемо да посматрамо тзв. класични аналитички елемент односно пар $(\mathcal{D}, f)$ где је $\mathcal{D}$ област а f функција која је аналитичка на њој.

Претходни приступ нам омогућава да поистоветимо канонске елементе на истим областима који одговарају различитим функцијама.

Пример 7.2. *Нека је* $\mathcal{U}_1 = \{z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid |\rho - 1| < 1, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$. *Доказати да су канонски елементи* $(\mathcal{U}_1, \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}})$, $(\mathcal{U}_1, \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2} + i\pi})$ *глобално еквивалентни*

Решење: Уочимо пут $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ дат са $\gamma_t = e^{it}$ који почиње и завршава се у тачки $z = 1$. Тада, аналитички елементи

$$\begin{array}{lll}
(\mathcal{U}_1, f_1), & \mathcal{U}_1 = \{z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid \ |\rho - 1| < 1, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\}, & f_1(\rho e^{i\varphi}) = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}}; \\
(\mathcal{U}_i, f_i), & \mathcal{U}_i = \{z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid \ |\rho - i| < 1, 0 < \varphi < \pi\}, & f_i(\rho e^{i\varphi}) = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}}; \\
(\mathcal{U}_{-1}, f_{-1}), & \mathcal{U}_{-1} = \{z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid \ |\rho + 1| < 1, \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}\}, & f_{-1}(\rho e^{i\varphi}) = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}}; \\
(\mathcal{U}_{-i}, f_{-i}), & \mathcal{U}_{-i} = \{z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid \ |\rho + i| < 1, \pi < \varphi < 2\pi\}, & f_{-1}(\rho e^{i\varphi}) = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}}; \\
(\mathcal{U}_1, g_1), & \mathcal{U}_1 = \{z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid \ |\rho - 1| < 1, \frac{3\pi}{2} < \varphi < \frac{5\pi}{2}\}, & g_1(\rho e^{i\varphi}) = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi}{2}};
\end{array}$$

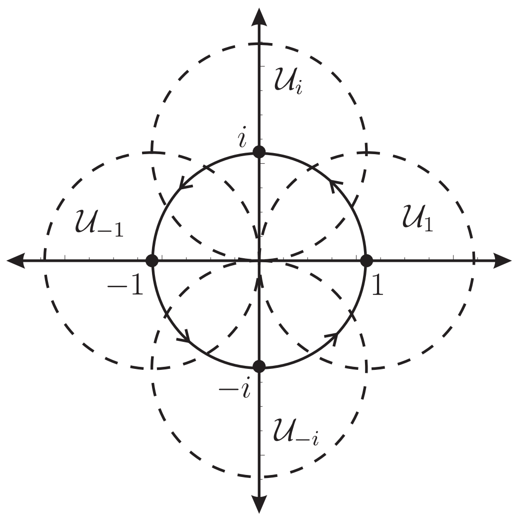


График 38: Аналитичко продужење елемента $(\mathcal{U}_1, f_1)$ дуж кружнице $|z| = 1$.

покривају пут γ и суседни елементи су непосредно еквивалентни јер је функција дефинисана на исти начин на пресеку суседних кругова (График 38). Сменом $\varphi = \phi + 2\pi$, добијамо да је $g_1(\rho e^{i\phi}) = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\phi}{2} + i\pi}$ за $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. $\square$

Дакле, у ситуацији када не можемо да дефинишемо функције глобално али можемо да их дефинишемо локално тј. на круговима довољно малог полупречника, релација глобалне еквиваленције канонских елемената нам омогућава да локално дефинисане функције поистоветимо и тако извршимо даљу анализу глобалне функције.

Дефиниција 7.4. *Глобална аналитичка функција је класа еквиваленције канонског аналитичког елемента $\mathcal{F} = (\mathcal{U}_a, f_a)$ у односу на релацију $\approx$. Класу $[\mathcal{F}]_\approx$ називамо аналитичко продужење канонског елемента $\mathcal{F} = (\mathcal{U}_a, f_a)$.*

Глобалну аналитичку функцију можемо да посматрамо и као аналитичко продужење аналитичког елемента $(\mathcal{D}, f)$ прецизније, као класу еквиваленције $\big[(\mathcal{U}_a, f)\big]_\approx$ где је $\mathcal{U}_a$ произвољан круг који је садржан у области $\mathcal{D}$ јер смо показали да су за произвољне кругове $\mathcal{U}_a$ и $\mathcal{U}_b$ садржане у $\mathcal{D}$, канонски аналитички елементи $(\mathcal{U}_a, f)$ и $(\mathcal{U}_b, f)$ глобално еквивалентни. То значи да, ако успемо да дефинишемо функцију f на било којој области, њеним аналитичким продужењем добијамо, можда функцију, можда вишезначну функцију која ће да буде дефинисана на максималној области (у односу на релацију бити потскуп) која садржи област $\mathcal{D}$.

Доста труда је уложено у анализу глобалних аналитичих функција, специјално за одређивање услова под којим $[\mathcal{F}]_\approx$ одређује јединствену (не вишезначну) функцију на области (теорема о монодромији). Због одлуке Института о скраћивању градива због ванредног стања, овде завршавамо са теоријом аналитичких продужења а заинтересовани студенти могу да се упознају са материјом из препоручене литературе. У наставку ћемо у кратким цртама да прецизно дефинишемо елементарне вишезначне функције.

7.2 Елементарне вишезначне функције комплексне променљиве

Функција $f_0(\rho e^{i\varphi}) = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi}{n}}$ на области $\mathcal{D} = \{\rho e^{i\varphi} \mid -\pi < \varphi < \pi\} = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ има инверзну функцију $g(z) = z^n$. Како је g аналитичка функција а g' различит од нуле за све $z \in \mathcal{D}_0^* = f_0(\mathcal{D}) = \{\rho e^{i\varphi} \mid -\frac{\pi}{n} < \varphi < \frac{\pi}{n}\}$, по теореми о изводу сложене функције из $g \circ f_k = \mathbb{1}$ добијамо да је:

$$f_0'(z) = \frac{1}{n\big(f_k(z)\big)^{n-1}} \quad \text{за све} \quad z \in \mathcal{D}.$$

Отуда, пар $(\mathcal{D}, f)$ представља аналитички елемент.

Дефиниција 7.5. *Аналитичко продужење елемента $(\mathcal{D}, f_0)$ називамо n-ти корен комплексног броја z и обелешавамо са $\sqrt[n]{z}$.*

Дакле, када убудуће у литератури видидите $\sqrt[n]{z}$, знајте да је ово ништа више до ознаке за све канонске аналитичке елементе који су глобално еквивалентни елементу $(\mathcal{D}, f)$. Техникама из Примера 7.2 може да се покаже да за круг $\mathcal{U}$ који не садржи координатни почетак, канонски елементи $\mathcal{F}_k = (\mathcal{U}_a, \sqrt[n]{\rho}\, e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n})}), k = 0, 1, \ldots, n-1$ су глобално еквивалентни односно да представљају јединствену глобалну аналитичку функцију односно у овом случају, $n-$ти комплексан корен. Посебне функције $f_k(\rho e^{i\varphi}) = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$ за $k = 0, 1, \ldots, n-1$ називамо гране комплексног корена и оне су за $n = 3$ илустроване за на графику испод.

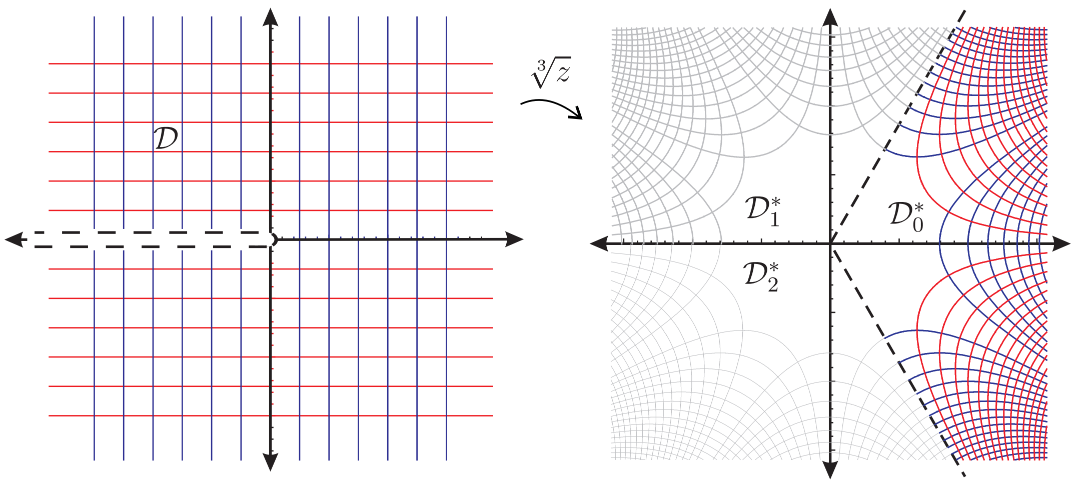


График 39: Три гране вишезначне комплексне функције $\sqrt[3]{z}$.

Анализирајмо сада комплексни логаритам. Посматрајмо исту област $\mathcal{D} = \{\rho e^{i\varphi} \mid -\pi < \varphi < \pi\}$ и на њој дефинисану функцију $l_0(\rho e^{i\varphi}) = \ln \rho + i\varphi$. Функција l_0 бијективно пресликава област $\mathcal{D}$ на област $\mathcal{D}_0^* = \{z \mid -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ а њена инверзна функција $g : \mathcal{D}_0^* \to \mathcal{D}$ је управо $g(z) = e^z$. Како је $g'(z) = e^z$ различит од нуле на $\mathcal{D}_0^*$, закључујемо да је

$$l_0'(z) = \frac{1}{e^{l_0(z)}} = \frac{1}{z} \quad \text{за све} \quad z \in \mathcal{D}$$

што имплицира да је $(\mathcal{D}, l_0)$ аналитички елемент.

Дефиниција 7.6. *Комплексни логаритам, у ознаци* $\operatorname{Ln} z$, *представља аналитичко продужење аналитичког елемента* $(\mathcal{D}, l_0)$.

Приметимо да у претходној конструкцији, функцију $l_0(\rho e^{i\varphi}) = \ln\rho + i\varphi$ можемо да заменимо функцијом $l_k(\rho e^{i\varphi}) = \ln\rho + i(\varphi + 2k\pi)$ за произвољно $k \in \mathbb{Z}$ која такође има e^z као инверзну функцију на свом кодомену. Такође, лако може да се покаже да су за круг $\mathcal{U}_a$ који не садржи координатни почетак, канонски аналитички елементи $(\mathcal{U}_a, l_i)$ и $(\mathcal{U}_a, l_j)$ глобално еквивалентни за произвољно $i, j \in \mathbb{Z}$ (крива из Дефиниције 7.3 је кружница $\{z \mid |z| = |a|\}$ што имплицира да комплексни логаритам има пребројиво много грана l_k, $k \in \mathbb{Z}$ као што може да се види на Графику 23.

На крају, анализирајмо инверзне тригонометријске функције. Како је по дефиницији

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

заменом $\cos z = w$ добијамо да је

$$e^{2iz} - 2we^{iz} + 1 = 0 \quad \text{или еквивалентно} \quad e^{iz} = w + \sqrt{w^2 - 1}.$$

при том, овде водимо рачуна да је комплексни корен вишезначна функција. Тако закључујемо да је инверзна функција комплексног косинуса вишезначна функција која има форму:

$$\operatorname{Arccos} z = i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

На сличан начин се добијају формуле:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}), \quad \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

8 Геометријски принципи

У овом последњем поглављу курса Комплексне анализе упознаћемо се са још неколико лепих особина аналитичких функција.

8.1 Принцип аргумента

Као што смо видели у Теореми 4.13, ако познајемо својства функције на околини граничне криве, под одређеним условима можемо да знамо шта се дешава на целој области коју та крива ограничава (Пример 4.5). У овом одељку анализираћемо какве све информације о аналитичкој функцији откривају слике део по део глатких, затворених кривих.

Дефиниција 8.1. *Нека је функција аналитичка и различита од нуле на окрњеној околини $\mathcal{U}_a^\circ = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < \rho\}$ тачке $a \in \mathbb{C}$. Логаритамски остатак (резидуум) функције f у тачки a је остатак извода функције $\operatorname{Ln} f$ у тачки a односно*

$$\operatorname{Res}(\operatorname{Ln}' f, a) = \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right).$$

Да би избегли недоумице са дефинисаношћу комплексног логаритма, за логаритамски остатак користићемо формулу са десне стране. Опишимо какве информације о функцији f у тачи a открива логаритамски остатак.

Нека је $z = a$ нула реда k функције f. Тада можемо да претпоставимо да је функција f аналитичка на целој околини $\mathcal{U}_a$ тачке a. По Теореми 5.18, функција f на околини $\mathcal{U}_a$ може да се представи са

$$f(z) = (z-a)^k \varphi(z)$$

где је функција φ аналитичка и различита од нуле за свако $z \in \mathcal{U}_a$. Тада, за свако $z \in \mathcal{U}_a$ важи да је:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z-a)^{k-1}\varphi(z) + (z-a)^k\varphi'(z)}{(z-a)^k\varphi(z)} = \frac{1}{z-a}\,\frac{k\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{z-a}\,\phi(z).$$

Како је $\varphi(z) \neq 0$ за све $z \in \mathcal{U}_a$, функција ϕ је аналитичка на скупу $\mathcal{U}_a$ па, по Тејлоровој теореми 5.5, функција φ је на скупу $\mathcal{U}_a$ једнака суми конвергентног степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ чији је коефицијент c_0 по Теореми 5.14 једнак

$$c_0 = \phi(a) = \frac{k\varphi(a) + (a-a)\varphi'(a)}{\varphi(a)} = k.$$

Отуда,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a}\left(k + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n\right) = \frac{k}{z-a} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^{n-1}$$

је Лоранов развој функције $\frac{f'}{f}$ на прстену $\mathcal{U}_a^\circ$ што по Теореми 6.12 имплицира да је логаритамски остатак функције f у нули реда k једнак коефицијенту уз $(z-a)^{-1}$ тј.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = k.$$

Дакле, логаритамски остатак у изолованој нули аналитичке функције је једнак реду те нуле. Присетимо се да је једина аналитичка функција која има не-изоловану нулу константна функција која је једнака нули.

Нека је $z = a$ пол реда k функције f. То по Дефиницији 6.3 значи да је $z = a$ нула реда k функције $\frac{1}{f}$ што на основу претходног рачуна имплицира да је логаритамски остатак функције $\frac{1}{f}$:

$$k = \operatorname{Res}\left(\frac{\left(\frac{1}{f}\right)'}{\frac{1}{f}}, a\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{-\frac{f'}{f^2}}{\frac{1}{f}}, a\right) = -\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right)$$

тј. добили смо логаритамски остатак функције f у тачки a. Дакле, логаритамски остатак функције f у полу реда k, једнак је $-k$.

Осим што омогућавају одређивање реда нула односно реда полова функција код којих то није довољно очигледно (на пример, код функција $\sin z$, $\tan z$ и сл.), логаритамски остатак нам омогућава да опишемо једно прелепо својство мероморфних функција. Присетимо се да су мероморфне функције оне које осим полова немају других сингуларитета.

Теорема 8.1. *Нека је функција f мероморфна на области $\mathcal{G}$ и нека је $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{G}$ ограничена област таква да је $\partial\mathcal{D}$ део по део глатка крива која не садржи ни нуле ни полове функције f. Ако је N број нула а P број полова функције f који припадају области $\mathcal{D}$ рачунајући вишеструкости, тада је:*

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$$

при том, интеграција се врши у смеру тако да тачке области $\mathcal{D}$ остају са леве стране криве $\partial\mathcal{D}$.

Доказ: По Леми 6.1, функција f на области $\mathcal{D}$ има коначно полова $p_1, \dots, p_m$. Како функција f на $\partial\mathcal{D}$ нема ни једну нулу, она није константна и једнака нули па су по Последици 5.6, све њене нуле изоловане што значи да на ограниченој области $\mathcal{D}$ она има коначан број нула $a_1, \dots, a_n$. Нека је k_i ред нуле a_i а l_j ред пола p_j функције f за све $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ односно нека је

$$N = k_1 + \cdots + k_n, \qquad P = l_1 + \cdots + l_m.$$

Како су полови и нуле функције f сингуларитети функције $\frac{f'}{f}$, закључујемо да $\frac{f'}{f}$ има на $\mathcal{D}$ коначно сингуларитета и да је непрекидна на $\partial\mathcal{D}$. Отуда, задовољени су услови Кошијеве теореме о остатку 6.11 па је:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a_i\right) + \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, p_j\right)$$

Сабирци са десне стране једнакости су по дефиницији логаритамски остаци функције f у нулама односно половима за које смо показали да је

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a_i\right) = k_i, \qquad \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, p_j\right) = -l_j$$

што имплицира да је

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{n}k_i+\sum_{j=1}^{m}l_j=N-P.$$

□

Као што илуструје претходна теорема, да би одредили интеграл $\oint_\gamma \frac{f'}{f}\mathrm{d}z$, довољно је да знамо редове нула и полова мероморфне функције f који припадају области коју крива γ ограничава. Претходна теорема има јако лепу геометријску интерпретацију.

Присетимо се да ако је $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ параметризација криве $\partial\mathcal{D}$, по Теореми 4.8 важи да је:

$$\oint\limits_{\partial\mathcal{D}}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha),$$

где је $\Phi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ примитивна функција функције $\frac{f'}{f}$ дуж пута γ (Дефиниција 4.3). Ако аргумент комплексног броја дефинишемо тако да композиција $\arg\circ f$ буде непрекидна функција дуж пута γ, тада

$$\ln|f|+i\arg f=\mathrm{Ln}\, f$$

је једна грана комплексног логаритма таква да је $(\mathrm{Ln}\, f)\circ\gamma$ непрекидна функција и важи да је

$$\big((\mathrm{Ln}\, f)\circ\gamma\big)'=\left(\frac{f'}{f}\circ\gamma\right)\gamma'$$

што имплицира да је $(\mathrm{Ln}\, f)\circ\gamma$ једна примитивна функција функције $\frac{f'}{f}$ дуж пута γ. Тако добијамо да је

$$\oint\limits_{\partial\mathcal{D}}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\mathrm{Ln}\, f\big(\gamma(\beta)\big)-\mathrm{Ln}\, f\big(\gamma(\alpha)\big)=i\big(\arg f\big(\gamma(\beta)\big)-\arg f\big(\gamma(\alpha)\big)\big).$$

Приметимо да разлика $i\big(\arg f\big(\gamma(\beta)\big)-\arg f\big(\gamma(\alpha)\big)\big)$ не зависи од параметризације γ границе $\partial\mathcal{D}$ што значи да представља својеврсну инваријанту мероморфне функције f на граници $\partial\mathcal{D}$ коју ћемо да означимо са:

$$\Delta\arg f(\partial\mathcal{D}).$$

Величина $\Delta\arg f(\gamma)$ представља промену аргумента вектора $w=f(z)$ када вектор обиђе криву $f(\gamma)$. Ако је γ затворена крива, и $f(\gamma)$ је такође затворена крива а цео број $\frac{1}{2\pi}\Delta\arg f(\gamma)$ илуструје колико пута крива $f(\gamma)$ обиђе око координатног почетка као што је илустровано на Графику 40. У литератури, број обилазака затворене криве γ око координатног почетка се назива и индекс криве γ у ознаци $\mathrm{ind}\,\gamma$. Ако уведене величине заменимо у Теореми 8.1, добијамо главно тврђење овог одељка.

Теорема 8.2. ***(Принцип аргумента)*** *Нека области $\mathcal{G}$, $\mathcal{D}$ и функција f задовољавају услове Теореме 8.1. Ако је N број нула а P број полова функције f који припадају области $\mathcal{D}$ рачунајући вишеструкости, тада је:*

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta\arg f(\partial\mathcal{D})=\mathrm{ind}\, f(\partial\mathcal{D}).$$

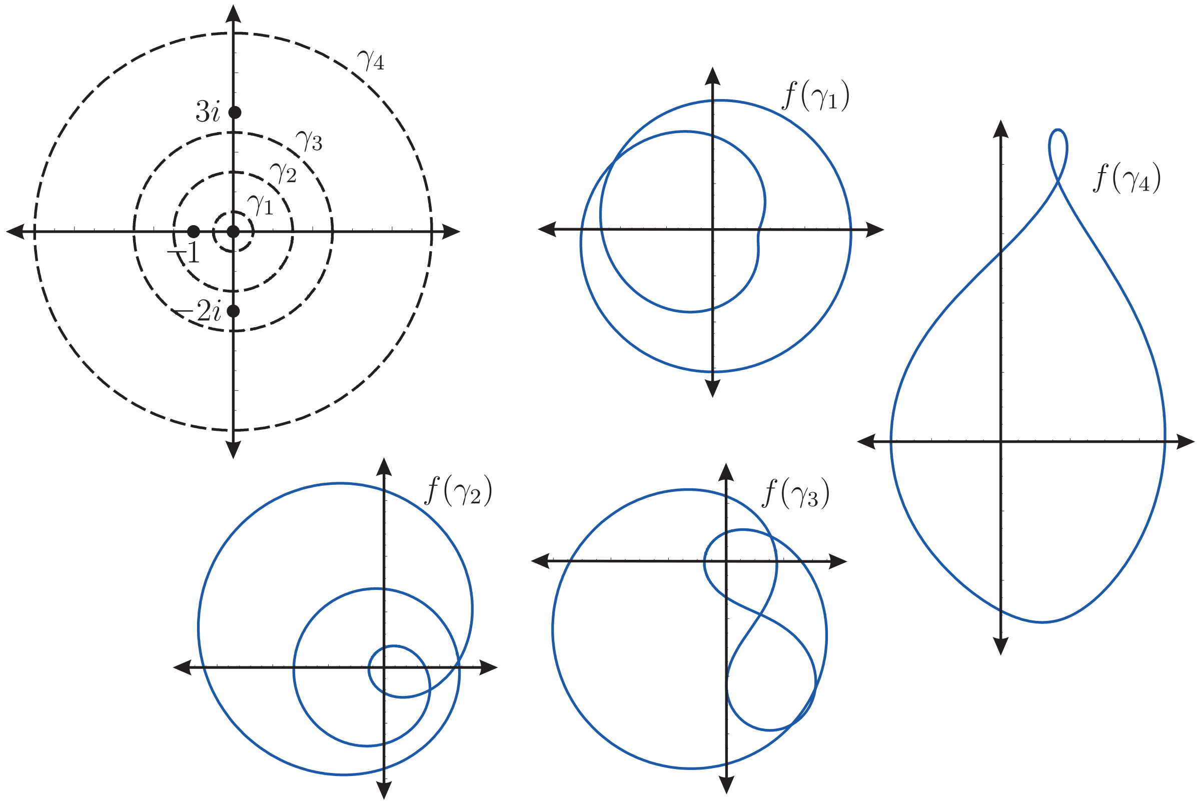


График 40: Слика кружница са центром у координатном почетку полупречника $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ и 5 пресликавањем $f(z) = \frac{z^3+z^2}{(z+2i)(z-3i)}$

График 40 лепо илустује суштину принципа аргумента мероморфних функција, повећавањем полупречника кружнице, њихове слике обилазе координатни почетак тачно $N-P$-пута где је $N-P$-разлика броја нула и броја полова функције f (рачунајући вишеструкости) који припадају одговарајућем кругу.

На крају, доказаћемо једну корисну последицу Принципа аргумента.

Теорема 8.3. ***(Теорема Рушеа[22])*** *Нека су функције f и g аналитичке на $\overline{\mathcal{D}}$ и нека је $\partial\mathcal{D}$ део по део глатка, затворена крива. Ако је за свако $z \in \partial\mathcal{D}$*

$$|f(z)| > |g(z)|,$$

тада функције f и $f+g$ имају на области $\mathcal{D}$ исти број нула.

Доказ: Како функције f и $f+g$ немају полове на области $\mathcal{D}$, доказаћемо да криве $f(\partial\mathcal{D})$ и $(f+g)(\partial\mathcal{D})$ обилазе око координатног почетка исти број пута.

Прво, на граници $\partial\mathcal{D}$, знамо да је $f \neq 0$ и $f+g \neq 0$ јер по претпоставци за свако $z \in \partial\mathcal{D}$ важи $|f(z)| > |g(z)| \geq 0$ што значи да је и $|f(z)+g(z)| \geq |f| - |g| > 0$. Тада, функција $\frac{g}{f}$ је непрекидна на области $\mathcal{D}$ што значи да је

$$\Delta \arg(f+g)(\partial\mathcal{D}) = \Delta \arg f\Big(1+\frac{g}{f}\Big)(\partial\mathcal{D}) \stackrel{(*)}{=} \Delta \arg f(\partial\mathcal{D}) + \Delta \arg \Big(1+\frac{g}{f}\Big)(\partial\mathcal{D}).$$

При том, у кораку $(*)$ смо користили особину да је аргумент производа једнак збиру аргумената. Сада, како за свако $z \in \partial\mathcal{D}$ важи да је $\frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$, слика криве $\partial\mathcal{D}$ пресликавањем $\frac{g}{f}$ припада кругу $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ што значи да њена транслација за вектор

[22] Eugène Rouché 1832-1910, француски математичар.

$z = 1$, односно слика пресливавањем $1 + \frac{g}{f}$, не може да обиђе координатни почетак. Отуда

$$\Delta \arg \big(1 + \frac{g}{f}\big)(\partial \mathcal{D}) = 0$$

чиме смо доказали да је

$$\Delta \arg(f + g)(\partial \mathcal{D}) = \Delta \arg f(\partial \mathcal{D})$$

што по принципу аргумента имплицира да f и $f + g$ имају на $\mathcal{D}$ исти број нула. $\square$

Следећа теорема је лепа последица Рушеове теореме.

Теорема 8.4. *Полином $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ степена n има тачно n комплексних коренова рачунајући вишеструкости.*

Доказ: Нека је $p_n(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$ полином са комплексним коефицијентима где је $n > 1$ и $c_n \neq 0$. Како је

$$\lim_{z\to\infty} p_n(z) = \lim_{z\to\infty} (c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0) \overset{(*)}{=} \infty,$$

тачка $z = \infty$ је пол полинома. То имплицира да је скуп нула полинома p_n ограничен јер ако би за свако $m > 0$ постојала нула z_m таква да је $|z_m| > m$, тада би низ $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ тежио бесконачности а његова слика $\big(p_n(z_m)\big)_{m\in\mathbb{N}}$ би био константан нула-низ који тежи нули што је у супротности са $(*)$. Дакле, нуле полинома p_n припадају скупу $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.

Нека је $f(z) = c_n z^n$ и $g(z) = c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$. Приметимо да за све $z \in \mathbb{C}$ такве да је $|z| = R$ односно $z \in \partial\mathcal{U}$ важи $|f(z)| = |c_n z^n| = |c_n| R^n$ што имплицира да је

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0| \leq |c_{n-1}| R^{n-1} + \cdots + |c_1| R + |c_0| \\ &\overset{(**)}{\leq} (|c_{n-1}| + \cdots + |c_1| + |c_0|) R^{n-1} \end{aligned}$$

Можемо да претпоставимо да је $R > 1$ па релација $(**)$ важи. Отуда, за $R > \frac{|c_{n-1}| + \cdots + |c_1| + |c_0|}{|c_n|}$ важи да је $|f(z)| > |g(z)|$ за све $z \in \partial\mathcal{U}$ што по Теореми Рушеа имплицира да функције f и $f + g = p_n$ имају на скупу $\mathcal{U}$ исти број нула. $\square$

8.2 Отвореност аналитичких пресликавања

Из реалне анализе смо научили да је инверзна слика отвореног скупа непрекидним пресликавањем увек отворен скуп. Иста је ситуација ако посматрамо инверзне слике отворених скупова реалних диференцијабилних функција. У случају $\mathbb{C}-$диференцијабилних односно аналитичких функција, инверзне слике али и слике отворених скупова су отворени скупови што наравно не мора да важи у реалној анализи. Тополошким речником, аналитичка прескилавања комплексне равни су отворена што ћемо да докажемо у следећој теореми.

Теорема 8.5. ***(Принцип чувања области)*** *Ако је функција f аналитичка и различита од константе на области $\mathcal{D}$, тада је $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^*$ такође област.*

Доказ: Докажимо да је $\mathcal{D}^* = \{f(z) \mid z \in \mathcal{D}\}$ путевима повезан и отворен скуп.

Нека су $w_1, w_2 \in \mathcal{D}^*$ произвољни. Тада, за $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ такве да је $f(z_1) = w_1$ и $f(z_2) = w_2$, постоји пут $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{D}$ такав да је $\gamma(0) = z_1$ и $\gamma(1) = z_2$ (јер, $\mathcal{D}$ је путевима повезан скуп). Тада, $\gamma_f = f \circ \gamma : [0,1] \to \mathcal{D}^*$ је непрекидно пресликавање односно пут који повезује $\gamma_f(0) = f\big(\gamma(0)\big) = f(z_1) = w_1$ и $\gamma_f(1) = f\big(\gamma(1)\big) = f(z_2) = w_2$. Отуда, $\mathcal{D}^*$ је путевима повезан.

Покажимо да је $\mathcal{D}^*$ отворен односно да садржи отворену куглу око сваке своје тачке. Нека је $w_0 \in \mathcal{D}^*$ произвољно. Уочимо скуп $f^{-1}(\{w_0\}) = \{z \in \mathcal{D} \mid f(z) = w_0\}$. Скуп $f^{-1}(\{w_0\})$ не сме да има тачку нагомилавања у скупу $\mathcal{D}$ јер. Заиста, ако би $f^{-1}(\{w_0\})$ имао тачку нагомилавања на $\mathcal{D}$, по Теореми о јединствености аналитичке функције 5.19, функција f би се на скупу $\mathcal{D}$ поклапала са константом функцијом $g(z) = w_0$ па би самим тим и f била константна на $\mathcal{D}$. Отуда, постоји $z_0 \in \mathcal{D}$ и околина $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho\}$ која компактно припада области $\mathcal{D}$ таква да је $f(z_0) = w_0$ и $f(z) \neq w_0$ за све $z \in \mathcal{U}^\circ$. При том, можемо да претпоставимо да је $f(z) \neq w_0$ за све $z \in \partial\mathcal{U}$.

Тада, непрекидна функција $|f - w_0| : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ има минимум $|f(z_m) - w_0| = \mu$ на компактном скупу $\partial\mathcal{U}$. При том, $\mu > 0$ јер у супротном из $|f(z_m) - w_0| = 0$ следи $f(z_m) = w_0$ и $z_m \in \partial\mathcal{U}$ што смо се трудили да избегнемо. Докажимо да је круг $\mathcal{U}_{w_0} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - w_0| < \mu\}$ садржан у $\mathcal{D}^*$. Нека је $w_1 \in \mathcal{U}_{w_0}$ произвољно. Тада, за све $z \in \partial\mathcal{U}$ важи да је $|f(z) - w_0| \geq \mu > |w_0 - w_1|$ што по Теореми Рушеа 8.3 имплицира да функције $f - w_0$ и $f - w_0 + (w_1 - w_0) = f - w_1$ имају на $\mathcal{U}$ исти број нула. Како $f - w_0$ има на $\mathcal{U}$ бар једну нулу z_0, закључујемо да и $f - w_1$ има бар једну нулу z_1 на скупу $\mathcal{U}$. Дакле, постоји $z_1 \in \mathcal{U} \subset \mathcal{D}$ тако да је $f(z_1) = w_1$ што имплицира да $w_1 \in \mathcal{D}^*$.

Отуда, отворена кугла $\mathcal{U}_{w_0}$ је садржана у $\mathcal{D}^*$. □

Дакле, аналитичке функције су непрекидна и отворена пресликавања. Доказаћемо још једно значајно својство конформних функција. Пре тога, докажимо једну помоћну лему.

Лема 8.1. *Ако је f аналитичка у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$, тада је:*

$$\lim_{(z_1,z_2)\to(z_0,z_0)} \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} = f'(z_0).$$

Доказ: Како је по Дефиницији 2.5 функција f аналитичка на околини $\mathcal{U}$ тачке z_0, по Теореми 5.12 функција f' је такође аналитичка, па самим тим и непрекидна на $\mathcal{U}$.

Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Тада, због непрекидности функције f', постоји $\delta > 0$ тако да из $|z - z_0| < \delta$ следи $|f'(z) - f'(z_0)| < \epsilon$. При том, δ је довољно мало тако да је f аналитичка на $\mathcal{U}^\delta_{z_0} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$. Тада, за произвољно $z_1, z_2 \in \mathcal{U}^\delta_{z_0}$, сегмент $[z_1, z_2] = \{tz_2 + (1-t)z_1 \mid t \in [0,1]\}$ припада $\mathcal{U}^\delta_{z_0}$ и важи:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} - f'(z_0)\right| &= \left|\frac{1}{z_1 - z_2}\Big(\big(f(z_1) - f(z_2)\big) - f'(z_0)(z_1 - z_2)\Big)\right| \\
&= \frac{1}{|z_1 - z_2|}\left|\int\limits_{[z_1,z_2]} f'(z)\mathrm{d}z - \int\limits_{[z_1,z_2]} f'(z_0)\mathrm{d}z\right| \\
&= \frac{1}{|z_1 - z_2|}\left|\int\limits_{[z_1,z_2]} \big(f'(z) - f'(z_0)\big)\mathrm{d}z\right| \\
&\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{|z_1 - z_2|}\,\epsilon\,|z_1 - z_2| = \epsilon.
\end{aligned}$$

При том, неједнакост $(*)$ следи из Последице 4.1 и чињенице да је дужина сегмента $[z_1, z_2]$ управо $|z_1 - z_2|$. □

Теорема 8.6. *Нека је f аналитичка у тачки z_0. Тада, постоји околина $\mathcal{U}$ тачке z_0 таква да је пресликавање $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^*$ бијекција акко је $f'(z_0) \neq 0$.*

Доказ:($\Rightarrow$) Претпоставимо да је $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^*$ бијекција и $\mathbb{C}-$диференцијабилна у $z_0 \in \mathcal{U}$. Тада, f^{-1} је бијекција и $\mathbb{C}-$диференцијабилна у $w_0 = f(z_0)$ и важи:

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Како је $|(f^{-1})'(w_0)| < 0$ закључујемо да је $f'(z_0) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Нека је $f'(z_0) \neq 0$. Претпоставимо супротно тј. нека f није „1-1" ни на једној околини тачке z_0. То значи да, за свако $n \in \mathbb{N}$, постоје $z_{1n}, z_{2n} \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \frac{1}{n}\}$ такви да је $z_{1n} \neq z_{2n}$ и $f(z_{1n}) = f(z_{2n})$. Тада:

$$\lim_{n\to\infty} (z_{1n}, z_{2n}) = (z_0, z_0) \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_{1n}) - f(z_{2n})}{z_{1n} - z_{2n}} = 0$$

што није могуће јер по Леми 8.1 последња гранична вредност је једнака $f'(z_0) \neq 0$. □

Дакле, ако је функција $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}^*$ аналитичка и таква да је њен извод различит од нуле на $\mathcal{D}$, тада је f пресликавање које се у топологији назива локални хомеоморфизам, односно пресликавање које чува локална својства простора.

8.3 Принцип максимума модула, Шварцова лема

Занимљиво својство аналитичких функција је да оне на областима не могу да имају локалне маскимуме модула већ се максимуми модула аналитичких функција увек достижу на рубу области ка што ћемо да докажемо у овом одељку.

Теорема 8.7. ***(Принцип максимума модула)*** *Једине функције које имају максимум модула на унутрашњости области $\mathcal{D}$ су константне функције. Еквивалентно, аналитичке функције које нису константне немју локални максимум модула на областима.*

Доказ: Нека функција $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ није константна. Тада, по Принципу чувања области 8.5, слика области $\mathcal{D}$ је такође област $\mathcal{D}^*$. Нека је:

$$\max_{z\in\mathcal{D}} |f(z)| = |f(z_0)| = |w_0|.$$

Како је $\mathcal{D}^*$ област, постоји круг (отворена кугла) $\mathcal{U}_{w_0} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - w_0| < \rho\}$ тако да је $\mathcal{U}_{w_0} \subset \mathcal{D}^*$. То значи да за тачку $w_1 = \big(1 + \frac{\rho}{2|w_0|}\big)w_0$ која припада кругу $\mathcal{U}_{w_0}$ важи:

$$\big|\big(1 + \frac{\rho}{2|w_0|}\big)w_0\big| = |w_0| + \frac{\rho}{2} > |w_0|.$$

Како $w_1 \in \mathcal{D}^*$ односно, w_1 је слика неке тачке области $\mathcal{D}$, добијамо да је максимум функције $|f|$ на области $\mathcal{D}$ већи од $|w_0|$ и ту долазимо до контрадикције. □

Овде напомињемо да $|f|$ увек има супремум (укључујући бесконачност) на било којем скупу.

Теорема 8.8. *Ако је функција f аналитичка на области $\mathcal{D}$ и непрекидна на $\overline{\mathcal{D}}$ (затворење се рачуна у простору $(\overline{\mathbb{C}}, \rho)$) тада $|f|$ достиже максимум на $\partial\mathcal{D}$.*

Доказ: Приметимо да непрекидна функција $f : \overline{\mathcal{D}} \to \overline{\mathbb{C}}$ има максимум на затвореном скупу $\overline{\mathcal{D}}$. Ако је функција f константна, тада је свака тачка затворења $\overline{\mathcal{D}}$ максимум функције $|f|$. Ако f није константна, по претходној теореми максимум њеног модула не може да се достиже на унутрашњсти скупа $\overline{\mathcal{D}}$ односно на области $\mathcal{D}$ па једини потенцијални максимуми су тачке скупа $\overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D} = \partial\mathcal{D}$. □

Очигледно да функција $|f|$ достиже свој минимум у свим нулама функције f. Међутим, других минимума модуо аналитичке функције и не може да има као што илуструје следеће тврђење.

Теорема 8.9. *Једине аналитичке функције које на областима имају локални минимум већи од нуле су константне функције.*

Доказ: Нека је $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ аналитичка функција таква да је $\min\limits_{z\in\mathcal{D}} |f(z)| = |f(z_0)| > 0$.

Тада, $f(z) \neq 0$ за све $z \in \mathcal{D}$ што имплицира да је $\frac{1}{f}$ функција која је аналитичка на $\mathcal{D}$ таква да се максимум њеног модула достиже у тачки $z_0 \in \mathcal{D}$. По Теореми 8.7, функција $\frac{1}{f}$, па самим тим и f је константна на $\mathcal{D}$. □

На Графику 41 су графички приказане функције $|f| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ неких елементарних комплексних функција. Као што смо теоријски показали, $|f|$ може да има само локални минимум и то у нулама функције f.

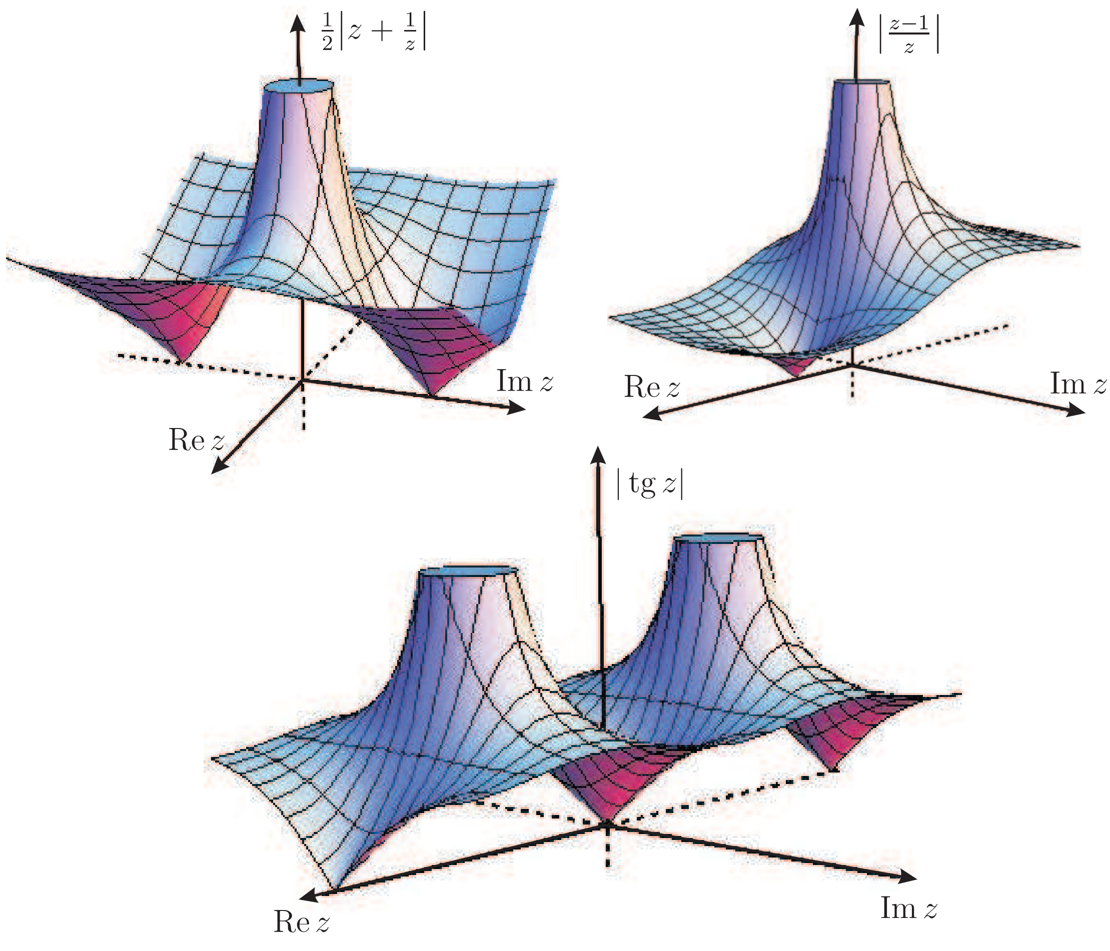


График 41: Представљање модула комплексне функције као реалне функције две променљиве.

На крају наводимо једно занимљиво својство аналитичких пресликавања кругова.

Теорема 8.10. ***(Шварцова[23] лема)*** *Нека је f аналитичка на кругу $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ таква да је $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leq 1$ за све $z \in \mathcal{U}$ ($f(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$). Тада је за свако $z \in \mathcal{U}$*

$$|f(z)| \leq |z|.$$

Ако је $|f(z_0)| = |z_0|$ бар за једно $z_0 \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$, тада је $|f(z)| = |z|$ за свако $z \in \mathcal{U}$ а функција f је ротација за угао φ.

Доказ: Како је f аналитичка на кругу $\mathcal{U}$, она је по Теореми 5.5 једнака својем Тејлоровом развоју на $\mathcal{U}$. При том, коефицијент c_0 Тејлоровог развоја је по Теореми 5.14 једнак $f(0) = 0$. Дакле, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ за све $z \in \mathcal{U}$ па је $g(z) = \frac{f(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}$ за све $z \in \mathcal{U}$ што имплицира да је $g : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ такође аналитичка на $\mathcal{U}$. Нека је $\mathcal{U}^r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ где је $r < 1$ (График 42). На основу Теореме 8.7, функција g достиже максимум на $\partial\mathcal{U}^r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$. Како је по претпоставци $|f(z)| < 1$ за све $z \in \mathcal{U}$, закључујемо да је за све $z \in \partial\mathcal{U}^r$

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{1}{r}.$$

што значи да је максимум функције g на $\mathcal{U}^r$ мањи или једнак од $\frac{1}{r}$ па је $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ за све $z \in \mathcal{U}^r$. Како свако $z \in \mathcal{U}$ припада неком $\mathcal{U}^r$, ако фиксирамо $z \in \mathcal{U}$ и пустимо да полупречник r тежи јединици добијамо да је

$$|g(z)| \leq 1$$

што имплицира да је за за свако $z \in \mathcal{U}$

$$|f(z)| \leq |z|.$$

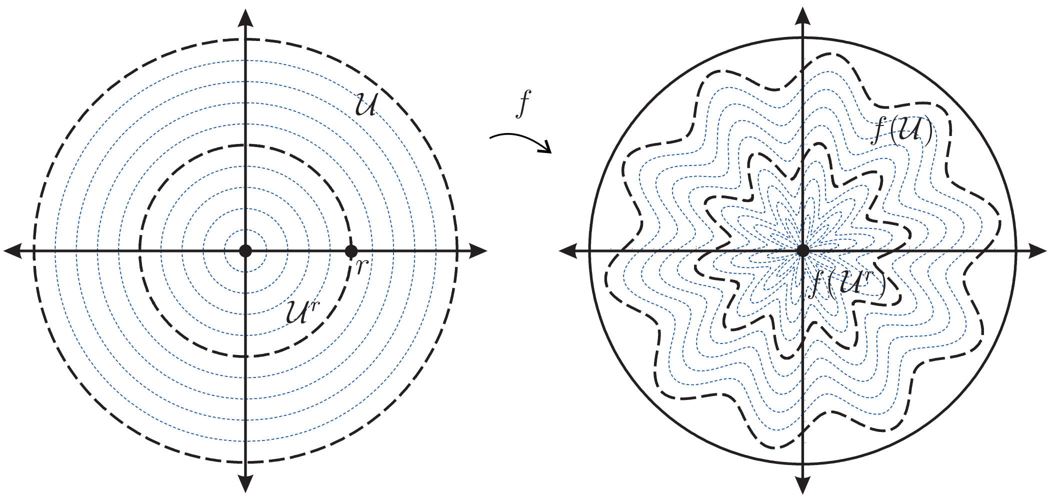


График 42: Пресликавање јединичног круга у јединични круг.

Ако постоји тачка $z_0 \in \mathcal{U}$ таква да је $|f(z_0)| = |z_0|$ тада,

$$1 = \frac{|f(z_0)|}{|z_0|} \leq \max_{z \in \mathcal{U}} |g(z)| \leq 1$$

[23] Karl Hermann Amandus Schwarz 1843-1921, немачки математичар

што значи да је z_0 максимум функције $|g|$ на области $\mathcal{U}$. По Принципу максимума модула 8.7, то имплицира да је функција g константна на $\mathcal{U}$ и облика $g(z) = e^{i\varphi}$ па је самим тим функција f облика $f(z) = ze^{i\varphi}$ за све $z \in \mathcal{U}$. □

Шварцова лема је значајна због своје много познатије последице тзв. Риманове теореме о пресликавањима која тврди да постоји аналитички хомеоморфизам који пресликава сваку просто повезану (једноструко повезану) област комплексне равни у јединични круг.

𝒪⊑≀ |⌉ ∥∇⊣| ∥⊓∇∫⊣ 𝒦≀⇕√↕⌉∥∫∖⌉ ⊣∖⊣↕⟩‡⌉.

𝒱≀↕⟩ ⊑⊣∫ ⊑⊣ш √∇≀{⌉∫≀∇, ℳ⊣∇⟩∖∥≀ 𝒯⟩⇕≀⊔⟩|⌉⊑⟩ħ.