

Поправни колоквијум из Комплексне анализе 1

1. фебруар 2024. године

Први колоквијум

- (а) Решити једначину $\cos z + \operatorname{sh}(iz) = 3$ у скупу комплексних бројева.
(б) За комплексан број z важи $\arg(z + 3) = \frac{\pi}{3}$. Одредити најмању могућу вредност $|z|$.
- Одредити аналитичку функцију $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ чији је реални део функција
$$u(x, y) = -\sin y \operatorname{ch} x$$
и која задовољава услов $f(0) = 0$.
- Одредити аналитичку функцију $f(\rho e^{i\theta}) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta)$ за коју је
$$u = 2\rho \cos \theta - \rho^2 \sin(2\theta),$$
при чему је $f(0) = 0$.

Други колоквијум

- У комплексној равни тачке z уочити тачке $z_1 = -1$, $z_2 = 1$ и над дужи $z_1 z_2$ као над пречником (у полуравни $y \geq 0$) конструисати полукруг. На шта се функцијом $w = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$ пресликава тај полукруг?
- Пресликати област $D_z = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0, |z - 1| > 1\}$ на унутрашњост јединичног круга с центром у координатном почетку.
- (а) Развити у Лоранов ред функцију

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 2z}$$

у околини тачке $z_0 = i$ у области D таквој да $1 \in D$. Одредити и скицирати област конвергенције добијеног реда.

- (б) Функцију

$$f(z) = \operatorname{Ln}(z^2 - 5z + 6)$$

развити у Тејлоров ред у околини тачке $z = 0$. Одредити и скицирати област конвергенције добијеног реда.

Трећи колоквијум

1. Израчунати

$$\int_{\partial D} \frac{(1 - z^2)^2}{z(az^2 - (a^2 + 1)z + a)} dz, \quad \text{при чему је } D = \{z \mid |z| < 1\} \text{ и } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

2. Применом Кошијеве интегралне формуле израчунати

$$\int_{\partial D} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz, \quad \text{при чему је } D = \{z \mid |z| < 2\}.$$

3. Израчунати интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}, \quad \text{при чему је } a > 0, b > 0 \text{ и } b \neq a.$$

Напомена. Студенти који слушају предмет **Комплексна анализа** (по старом програму) могу освојити на првом колоквијуму највише **15 поена** а на другом колоквијуму највише **16 поена** (поени ће им бити скалирани).