Изоловани сингуларитети регуларних функција

Дефиниција:

Нека је фја $f(z)$ регуларна у области $D_1=\{z \mid 0<|z-a|<R\}$, $a\neq+\infty$ односно у области $D_2=\{z \mid r<|z|<+\infty\}$, $a=+\infty$, а није регуларна у тачки a, тада се тачка a назива изолованим сингуларитетом фје $f(z)$.

1° Ако је $\lim\limits_{z\to a} f(z)=A\neq+\infty$ тачка a је тада отклоњив сингуларитет. (Неће имати главни део)

2° Ако је $\lim\limits_{z\to a} f(z)=+\infty$, a је пол фје $f(z)$ (Лоранов развој имаће коначан главни део)

3° Ако $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не постоји тада је a есенцијални сингуларитет фје $f(z)$. (главни део је бесконачан)

Напомена:

Испитивање понашања фје $f(z)$ у околини тачке $z=\infty$ своди се на испитивање фје $F(\xi)$, $\xi=\frac{1}{z}$ у околини тачке $\xi=0$. Ако је $\xi=0$ сингуларитет фје $F(\xi)$ тада је $z=\infty$ сингуларитет фје $f(z)$ и то истог типа.

1. Одредити природу сингуларних тачака за следеће фје:

1) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$, $z=0$

2) $f(z)=\dfrac{z}{e^z+1}$, $z=\pi i$

3) $f(z)=\sin\dfrac{z}{z+1}$, $z=-1$

4) $f(z)=e^{\operatorname{ctg} z}$, $z=0$

1) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$, $z=0$

I начин

$$f(z)=\frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{z^2}=\frac{2}{4}\left(\frac{\sin\frac{z}{2}}{\frac{z}{2}}\right)^2 \xrightarrow[z\to 0]{} \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow z=0$ је отклоњив сингуларитет

II начин

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots\right)}{z^2}=\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4!}+\dots$$ (нема главни део)

2) $f(z)=\dfrac{z}{e^z+1} \ulcorner = \dfrac{\pi i}{e^{\pi i}+1}=\dfrac{\pi i}{0} \lrcorner \xrightarrow[z\to\pi i]{} \infty$

$e^{\pi i} = \cos\pi + i\cdot\sin\pi$, $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$

3) $f(z)=\sin\dfrac{z}{z+1}=\sin\dfrac{z+1-1}{z+1}=\sin\left(1-\dfrac{1}{z+1}\right)$

$=\sin 1\cdot\cos\dfrac{1}{z+1}-\cos 1\cdot\sin\dfrac{1}{z+1}$

$=\sin 1\cdot\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(z+1)^{2n}\cdot(2n)!}-\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(z+1)^{2n+1}\cdot(2n+1)!}$

$\ulcorner$ Смена: $n=-\nu$

Есенцијални сингуларитет јер је главни део бесконачан.
(има бесконачно много $(z+1)$ на негативан степен)

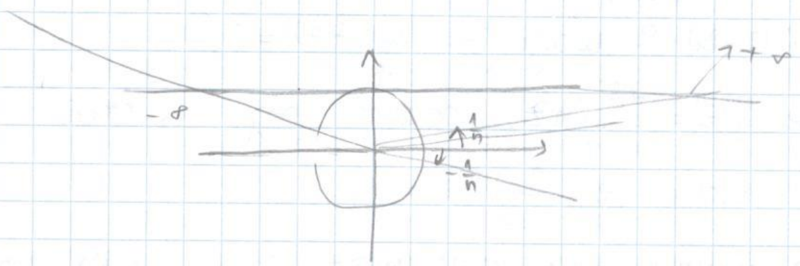
4) $f(z)=e^{\operatorname{ctg} z}=$

$z_n=\dfrac{1}{n}\xrightarrow{n\to+\infty}0$

$z_n'=-\dfrac{1}{n}\xrightarrow{n\to+\infty}0$

$f(z_n)=e^{\overbrace{\operatorname{ctg}\frac{1}{n}}^{\to+\infty}}\xrightarrow{n\to+\infty}+\infty$

$f(z_n')=e^{\underbrace{\operatorname{ctg}(-\frac{1}{n})}_{-\infty}}\xrightarrow{n\to+\infty}0$



$\Rightarrow$ есенцијални сингуларитет

Резидијуми комплексних ф-ја

Нека је $f(z)$ регуларна у области $D=\{z \mid 0<|z-z_0|<R\}$, остатак ф-је $f(z)$ у тачки z_0 једнак је $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot \oint\limits_{\substack{|z-z_0|=r \\ 0<r<R}} f(z)\,dz$.

Ако је $f(z)$ регуларна у области $D=\{z \mid |z|>R\}$ тада је $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\cdot \oint\limits_{\substack{|z|=R_1 \\ R_1>R}} f(z)\,dz$

Израчунавање остатка

1° Ако је $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ Лоранов ред за скуп свих тачака z, таквих да је $0<|z-z_0|<R$ тада је $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1} \to$ члан уз $(z-z_0)^{-1}$.

2° Ако је $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ Лоранов ред за скуп тачака z таквих да је $R<|z|<+\infty$ тада је $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1}$.

3° Ако је тачка $z=z_0$ различита од ∞ отклоњив сингуларитет тада је остатак ф-је $f(z)$ односно $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$

За тачку $z=\infty$ ово не важи јер за ф-ју $f(z)=\frac{1}{z}$, $z=\infty$ је отклоњив сингуларитет, тј. $C_{-1}=1$

4° Ако је $z=z_0$ пол n-тог реда ф-је $f(z)$ тада је $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\cdot \lim\limits_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}((z-z_0)^n f(z))}{dz^{n-1}}$

5° Ако је $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, и у тачки $z_0\neq\infty$, $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$ онда је $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$

① Одредити остатак ф-је $f(z)$ у тачки $z=1$, ако је $f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^2}$.

$z=1$ је пол другог реда (због квадрата)

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=1} f(z) \overset{4°}{=} \frac{1}{(2-1)!}\cdot\lim_{z\to 1}\left(\cancel{(z-1)^2}\cdot\frac{e^z}{\cancel{(z-1)^2}}\right)' = \lim_{z\to 1} e^z = e$$

② Одредити остатак $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)$, $f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$.

$$f(z)=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots}{z^2} = \frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\dots$$

$C_{-1}=1$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -1$$

③ Израчунати $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}$.

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z^{n-1}}{\sin^n z} = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\overbrace{\dfrac{z^{n-1}}{\sin^{n-1} z}}^{=\varphi(z)}}{\underbrace{\sin z}_{=\psi(z)}} = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z^{n-1}}{\sin^n z} = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

$\psi(0) = \sin 0 = 0$

$\psi'(0) = \cos 0 = 1$

④ Одредити $\operatorname*{Res}_{z=\infty} \cos\left(\pi \cdot \dfrac{z+2}{2z}\right)$

$$\cos\left(\pi \cdot \frac{z+2}{2z}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{z}\right) = -\sin\frac{\pi}{z} = -\frac{\pi}{z} + \frac{\pi^3}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^5}{5!} \cdot \frac{1}{z^5} + \ldots$$

$C_{-1} = -\pi$

$$\operatorname*{Res}_{z=+\infty} \cos\left(\pi \cdot \frac{z+2}{2z}\right) = \pi$$

⑤ Одредити коначне сингуларитете и остатке у њима за ф-ју $f(z) = \dfrac{1}{z+z^3}$.

$$f(z) = \frac{1}{z+z^3} = \frac{1}{z(1+z^2)} = \frac{1}{z(z-i)(z+i)}$$

полови првог реда $z=0,\ z=i,\ z=-i$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{0!} \cdot \lim_{z\to 0}\left(\cancel{z} \cdot \frac{1}{\cancel{z}(z-i)(z+i)}\right) = 1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{0!} \cdot \lim_{z\to i}\left(\cancel{(z-i)} \cdot \frac{1}{z\cancel{(z-i)}(z+i)}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \frac{1}{0!} \cdot \lim_{z\to -i}\left(\cancel{(z+i)} \cdot \frac{1}{z(z-i)\cancel{(z+i)}}\right) = -\frac{1}{2}$$

⑥ За ф-ју $f(z) = \dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$ одредити изоловани сингуларитет и остатак у њему.

$z=1$ – пол n-тог реда

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z^{2n}}{(z-1)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z\to 1}\left(\cancel{(z-1)^n} \cdot \frac{z^{2n}}{\cancel{(z-1)^n}}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to 1} 2n(2n-1)(2n-2)\cdot\ldots\cdot(2n-n+2) \cdot z^{2n-n+1}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to 1} 2n(2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+2)\cdot z^{n+1} \to 1$$

$$= \frac{2n(2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+2)}{(n-1)!}$$

⑦ Одредити изоловане сингуларитете и остатке $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$.

$e^z - 1 = 0$

$e^z = 1$

$e^{2k\pi i} = 1$, $k \in \mathbb{Z}$

$z = 2k\pi i$ - биће сингуларитети и полови првог реда

$$\operatorname*{Res}_{z=2k\pi i} f(z) = \frac{1}{0!}\lim_{z\to 2k\pi i}(z-2k\pi i)\cdot\frac{1}{e^z-1} = \lim_{z\to 2k\pi i}\frac{z-2k\pi i}{e^z-1} \overset{Л.П.}{=} \lim_{z\to 2k\pi i}\frac{1}{e^z} = 1$$

⑧ Одредити сингуларитете фје и остатке у њему $f(z)=\frac{z^2}{(1+z)^3}$.

$f(z)=\frac{z^2}{(1+z)^3}$

$z=-1$ је пол трећег реда

$$\operatorname*{Res}_{z\to -1} f(z) = \frac{1}{(3-1)!}\cdot\lim_{z\to -1}\left(\cancel{(z+1)^3}\cdot\frac{z^2}{\cancel{(1+z)^3}}\right)'' = \frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to -1} 2 = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

Теорема:

Ако је фја $f(z)$ регуларна у комплексној равни сем искључена у коначном броју сингуларитета $z_1,\dots,z_n$ тада важи:

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

⑨ За фју $f(z)=\frac{1+z^8}{z^6(z+2)}$ испитати сингуларитете и одредити остатке у њима.

$z=0$ - пол 6-ог реда

$z=-2$ - пол 1-ог реда } сингуларитети

$$\operatorname*{Res}_{z=-2} f(z) = \lim_{z\to -2}\left(\cancel{(z+2)}\cdot\frac{1+z^8}{\cancel{(z+2)}\cdot z^6}\right) = \lim_{z\to -2}\frac{1+z^8}{z^6} = \frac{1+(-2)^8}{(-2)^6} = 4 + \frac{1}{2^6}$$

Када је $z=0$ по формули се добија $\left(\frac{1+z^8}{z+2}\right)^5$, што је компликовано због 5-ог степена.

Други начин је:

извлачимо z јер нам треба ова област

$$f(z) = \frac{1+z^8}{z^6(z+2)} = \frac{1+z^8}{z^6}\cdot\frac{1}{z+2} = \frac{1+z^8}{z^6}\cdot\frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)} = \frac{1+z^8}{z^6}\cdot\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^n}{z^n}$$

$\left|\frac{2}{z}\right|<1$

$2<|z|$

$$=\left(\frac{1}{z^7}+z\right)\left(1-\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-\frac{2^3}{z^3}+\dots\right)$$

$\Rightarrow c_{-1} = 4$

$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -4$

$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) \overset{\text{ТЕ.}}{=} -\operatorname{Res}_{z=-2} f(z) - \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{26}$

(10) Одредити остатке ф-је $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}} \cdot z^n}{1+z}$, $n \in \mathbb{N}$ за њене полове и есенцијалне сингуларитете у проширеној комплексној равни.

$z=-1$ пол 1.-ог реда

$z=0$ - есенцијални сингуларитет (због $e^{\frac{1}{z}}$)

Када је у питању проширена комплексна раван, треба да проверимо да ли је $z=\infty$ сингуларитет.

(Преко Лорановог реда или преко напомене) $\xi = \frac{1}{z}$ за ово проверимо

$$\xi = \frac{1}{z} \Rightarrow F(\xi) = \frac{e^{\xi} \cdot \frac{1}{\xi^n}}{1+\frac{1}{\xi}} = \frac{\frac{e^{\xi}}{\xi^n}}{\frac{\xi+1}{\xi}} = \frac{e^{\xi}}{\xi^{n-1}(\xi+1)}$$

$\xi = 0$ пол $(n-1)$ реда за ф-ју $F(\xi)$.

$\Rightarrow z=\infty$ је пол $(n-1)$ реда за ф-ју $f(z)$.

$$\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1} \cancel{(z+1)} \cdot \frac{e^{\frac{1}{z}} \cdot z^n}{\cancel{1+z}} = \lim_{z\to -1} e^{\frac{1}{z}} \cdot z^n = (-1)^n \cdot \frac{1}{e} = \frac{(-1)^n}{e}$$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3} + \dots$$

$$\frac{1}{1+z} \underset{|z|<1}{=} 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

$$n=2k+1: \quad f(z) = z^{2k+1} \cdot \left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\dots\right)\left(1-z+z^2-z^3+\dots\right)$$

$$= \left(z^{2k+1} - z^{2k+2} + z^{2k+3} - z^{2k+4} + \dots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\dots\right)$$

овај члан множи $\frac{1}{(2k+2)!}\cdot\frac{1}{z^{2k+2}}$

овај члан множи $\frac{1}{(2k+3)!}\cdot\frac{1}{z^{2k+3}}$

Тада се за све њих добија:

$$C_{-1} = \frac{1}{(2k+2)!} - \frac{1}{(2k+3)!} + \frac{1}{(2k+4)!} - \dots$$

Намештамо да C_{-1} буде коначна сума:

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \underbrace{\frac{1}{(2k+2)!} - \frac{1}{(2k+3)!} + \frac{1}{(2k+4)!} - \ldots}_{C_{-1}}$$

$$\Rightarrow C_{-1} = e^{-1} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{1}{(2k+1)!}$$

$n = 2k$:

$\vdots$

$$C_{-1} = \frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{(2k+2)!} + \frac{1}{(2k-3)!} - \ldots$$

$$= -e^{-1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(2k)!}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = C_{-1} = \begin{cases} \frac{1}{e} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{1}{n!}, & n\text{ - непарно} \\ -\frac{1}{e} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}, & n\text{ - парно} \end{cases}$$

I начин (лакше)

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) - \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$$

II начин

Развити у Лоранов ред по z^n али у $|z| > R$, C_{-1} ($\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1}$)

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{e^{\frac{1}{z}} \cdot z^n}{1+z}$$