IV G L A V A

Algebarski polinomi i racionalne funkcije

1. ALGEBARSKI POLINOMI

1.1. Prsten polinoma

Neka je $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ polje koje ćemo označavati prosto sa $\mathbb{K}$ i neka su 0 i 1 neutralni elementi u odnosu na operacije $+$ i $\cdot$, respektivno[55)]. Umesto $a \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{K})$ pisaćemo jednostavno ab. Neka je, dalje, operacija stepenovanja uvedena na uobičajeni način pomoću

$$(\forall x \in \mathbb{K}) \qquad x^0 = 1, \quad x^k = xx^{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Definicija 1.1.1. Ako $x \in \mathbb{K}$ i $a_k \in \mathbb{K}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, formalni izraz

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{1.1.1}$$

naziva se *algebarski polinom po* x *nad poljem* $\mathbb{K}$. Za elemente a_k kažemo da su *koeficijenti polinoma* $P(x)$. Ako je koeficijent $a_n \neq 0$, za polinom $P(x)$ kažemo da je *stepena* n i to označavamo sa $\operatorname{dg} P(x) = n$. Za koeficijent $a_n \neq 0$ kažemo da je *vodeći* ili *najstariji koeficijent* polinoma $P(x)$.

Dakle, stepen polinoma $P(x)$ je najviši stepen od x koji se pojavljuje u izrazu za $P(x)$ sa nenula koeficijentima.

---

55) Dobar deo materijala za ovu glavu preuzet je iz monografije: G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias, *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, World Scientific, Singapore – New Jersey – London – Hong Kong, 1994.

Definicija 1.1.2. Za polinom

$$O(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^{n-1} + 0x^n$$

kažemo da je *nula polinom* i označavamo ga prosto sa 0.

Stepen nula polinoma $O(x)$ $(\equiv 0)$ se ne definiše.

Polinomi stepena nula se nazivaju konstante i to su elementi polja $\mathbb{K}$. Element $x \in \mathbb{K}$ može se interpretirati kao polinom prvog stepena definisan sa $P(x) = x$. Za element x koristi se termin *neodređena*. Za polinom $P(x)$ definisan sa (1.1.1) kaže se da je *polinom po neodređenoj* x.

Definicija 1.1.3. Za polinom čiji je vodeći koeficijent jednak jedinici kažemo da je *moničan*.

Dakle, monični polinom ima oblik

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

Skup svih polinoma nad poljem $\mathbb{K}$ označavamo sa $\mathbb{K}[x]$. Od interesa je često uočiti skup svih onih polinoma čiji stepen nije veći od n. Taj podskup ćemo označavati sa $\mathcal{P}_n[x]$ (videti primer 1.1.3, glava III). Proizvoljni polinom iz $\mathcal{P}_n[x]$ ima oblik

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (a_k \in \mathbb{K}),$$

pri čemu ako je $\operatorname{dg} P(x) = m < n$ imamo da je $a_{m+1} = \cdots = a_n = 0$.

U skup $\mathbb{K}[x]$ možemo uvesti relaciju *jednakost* kao i operacije: *sabiranje* i *množenje* polinoma na sledeći način:

Definicija 1.1.4. Polinomi

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad \text{i} \quad Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$$

su *jednaki* ako i samo ako je $a_k = b_k$ za svako $k \geq 0$, tj. kada su njihovi koeficijenti jednaki.

Definicija 1.1.5. Za dva polinoma

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad \text{i} \quad Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$$

zbir i *proizvod* su redom

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_rx^r$$

i

$$(PQ)(x) = P(x)Q(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_sx^s,$$

gde su

$$c_k = a_k + b_k \qquad \big(0 \le k \le r = \max(n,m)\big)$$

i

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \qquad (0 \le k \le s = n+m).$$

Dakle, ako $P(x) \in \mathcal{P}_n[x]$ i $Q(x) \in \mathcal{P}_m[x]$, tada $(P+Q)(x) \in \mathcal{P}_r[x]$ i $(PQ)(x) \in \mathcal{P}_s[x]$, gde su $r = \max(n,m)$ i $s = n+m$. Napomenimo da za nenula polinome $P(x)$ i $Q(x)$ važi

$$\operatorname{dg}(PQ)(x) = \operatorname{dg} P(x) + \operatorname{dg} Q(x).$$

Takođe, ako $P(x), Q(x) \in \mathbb{K}[x]$ and $P(x) + Q(x) \not\equiv 0$, tada je

$$\operatorname{dg}(P+Q)(x) \le \max\big\{\operatorname{dg} P(x), \operatorname{dg} Q(x)\big\}.$$

Primer 1.1.1. Neka je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i

$$P(x) = 2 - 3x + 5x^2 \quad \text{ i } \quad Q(x) = 2x - x^2 + 2x^3.$$

Tada je

$$S(x) = (P+Q)(x) = 2 - x + 4x^2 + 2x^3$$

i

$$R(x) = (PQ)(x) = 4x - 8x^2 + 17x^3 - 11x^4 + 10x^5.$$

Dakle, $\operatorname{dg} S(x) = 3$ i $\operatorname{dg} R(x) = 5$.

Ako je, međutim, $P(x) = 2 - 3x + x^2 - 2x^3$, tada je $(P+Q)(x) = 2 - x$, što znači da je zbir ova dva polinoma polinom prvog stepena. $\triangle$

Kao specijalan slučaj proizvoda polinoma imamo proizvod polinoma $P(x)$ skalarom α $(\in \mathbb{K})$, koji se može tretirati kao polinom nultog stepena. Dakle,

$$\alpha P(x) = \alpha(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \cdots + (\alpha a_n)x^n.$$

Nije teško dokazati sledeći rezultat:

Teorema 1.1.1. *Skup* $\mathbb{K}[x]$ *snabdeven sabiranjem i množenjem polinoma čini komutativni prsten sa jedinicom.*

Inverzni element od $Q(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$ $\big(\in \mathbb{K}[x]\big)$ u odnosu na sabiranje je $\sum\limits_{k=0}^{m} (-b_k) x^k$, koji ćemo označavati sa $-Q(x)$. Tada možemo definisati *oduzimanje* polinoma pomoću

$$(P - Q)(x) = P(x) + \big(-Q(x)\big).$$

Napomenimo da za polinome u skupu $\mathbb{K}[x]$ ne postoji operacija deljenje, tj. operacija inverzna operaciji množenja (videti sledeći odeljak).

Slično prethodnom, možemo definisati *polinom po* m *neodređenih* $x_1, \ldots,$ x_m *nad poljem* $\mathbb{K}$:

Definicija 1.1.6. Neka su $k_1, \ldots, k_m$ nenegativni celi brojevi i

$$\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m), \quad |\boldsymbol{k}| = k_1 + \cdots + k_m, \quad \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} = x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}.$$

Polinom po m nedređenih $x_1, \ldots, x_m$ nad poljem $\mathbb{K}$ je izraz oblika

$$P(\boldsymbol{x}) = P(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{|\boldsymbol{k}| \le n} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}, \tag{1.1.2}$$

gde su $a_{\boldsymbol{k}}$ $(\in \mathbb{K})$ njegovi koeficijenti.

Skup takvih polinoma, u oznaci $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$, sa uvedenim odgovarajućim operacijama sabiranja i množenja polinoma, čini, takođe, komutativni prsten sa jedinicom.

Definicija 1.1.7. Proizvod $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} = x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}$ se naziva *primitivni monom* stepena $|\boldsymbol{k}| = k_1 + \cdots + k_m$. Polinom

$$a x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m} \qquad (a \in \mathbb{K})$$

se naziva *monom*. Ako je $P(\boldsymbol{x})$ polinom iz prstena $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$ definisan sa (1.1.2) i $P(\boldsymbol{x}) \not\equiv 0$, tada se kao *stepen* polinoma $P(\boldsymbol{x})$ uzima maksimum stepena monoma koji se pojavljuju u polinomu. (Njihovi koeficijenti $a_{\boldsymbol{k}}$ su različiti od nule.)

Napomenimo da je stepen polinoma $P(\boldsymbol{x})$ nula ako i samo ako je $P(\boldsymbol{x}) = a x_1^0 \cdots x_m^0 = a$ $(a \neq 0)$.

Polinom $P(x_1, \dots, x_m)$ po m neodređenih može se razmatrati kao polinom po jednoj neodređenoj, recimo x_1, sa koeficijentima u $\mathbb{K}[x_2, \dots, x_n]$. Stepen d_1 takvog polinoma se naziva *stepen od* $P(x_1, \dots, x_m)$ *po* x_1. Jasno je da je d_1 najveći ceo broj koji se pojavljuje kao eksponent od x_1 u monomima $a_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}$ sa $a_{\boldsymbol{k}} \neq 0$. Slično se definiše stepen polinoma po bilo kojoj neodređenoj x_k $(k = 1, \dots, m)$. Naravno, ovi stepeni d_k su različiti od stepena polinoma $P(x_1, \dots, x_m)$, koji se ponekad naziva *totalni stepen*.

Primer 1.1.2. Polinom $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^2 x_3 + 2x_1^4 x_2$ ima totalni stepen 6, dok su 4, 2 i 1 redom stepeni po x_1, x_2 i x_3. $\triangle$

Definicija 1.1.8. Za polinom $P(x_1, \dots, x_m)$ kažemo da je *homogeni polinom* ako i samo ako su njegovi nenula monomi istog stepena. Stepen homogenog polinoma se naziva *stepen homogenosti* polinoma.

Ako je $P(x_1, \dots, x_m)$ homogeni polinom stepena homogenosti d tada je

$$P(tx_1, \dots, tx_m) \equiv t^d P(x_1, \dots, x_m).$$

Primer 1.1.3. 1° Polinom

$$P(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 x_2^2 - 5x_1 x_2 x_3 + x_3^3$$

je homogen stepena 3.

2° Ako je $P(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$ imamo

$$P(tx_1, tx_2, tx_3) = t^6 P(x_1, x_2, x_3).$$

Ovo znači da je posmatrani polinom homogen stepena homogenosti 6. $\triangle$

Polinomi se, takođe, mogu razmatrati nad strukturama koje su jednostavnije od polja, na primer, nad prstenom sa jedinicom. Razmotrimo sada jedan takav slučaj.

Saglasno teoremi 2.4.3 (glava III), skup M_m svih kvadratnih matrica reda m nad poljem skalara $\mathbb{K}$ (realnih ili kompleksnih brojeva), snabdeven operacijama sabiranje i množenje matrica, predstavlja prsten sa jedinicom I (jedinična matrica reda m). Ako $X \in M_m$ i $A_k \in M_m$ $(k = 0, 1, \dots, n)$, tada za

$$P(X) = A_0 + A_1 X + \cdots + A_n X^n = \sum_{k=0}^{n} A_k X^k \tag{1.1.3}$$

kažemo da je *polinom nad* M_m ili prosto *matrični polinom*. U slučaju kada su matrični koeficijenti A_k dati kao $A_k = a_k I$ $(k = 0, 1, \dots, n)$, gde su a_k

skalari iz polja $\mathbb{K}$, a I jedinična matrica reda m, tada se matrični polinom (1.1.3) svodi na

$$P(X) = a_0 I + a_1 X + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Na kraju ovog odeljka ukažimo na važnu činjenicu da se polinom može tretirati i kao funkcija. Naime, na osnovu (1.1.1) može se definisati preslikavanje $P\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, pomoću

$$t \mapsto P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n,$$

i uočiti homomorfizam $P(x) \mapsto P(t)$. Preslikavanje P nazivamo *polinomska funkcija*. Napomenimo da je ovde x neodređena, a t promenljiva. Ne ulazeći dublje u algebarsko tretiranje ovog problema[56)] napomenimo da se može dokazati sledeći važan rezultat:

Teorema 1.1.2. *Homomorfizam $P(x) \mapsto P(t)$ je izomorfizam ako i samo ako je polje $\mathbb{K}$ beskonačno.*

Dakle, za beskonačna polja jednostavno nećemo praviti razliku između polinoma i polinomske funkcije, a za neodređenu x koristićemo i termin promenljiva. Takva beskonačna polja su, na primer, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. Međutim, u konačnim poljima iz jednakosti polinomskih funkcija ne sleduje jednakost polinoma.

Kada ne može doći do zabune, umesto termina polinomska funkcija $t \mapsto P(t)$ koristićemo jednostavno termin polinom P. Skup svih polinomskih funkcija (polinoma) ne višeg stepena od n označavaćemo sa $\mathcal{P}_n$.

Slično se može definisati i polinomska funkcija sa više promenljivih.

1.2. Deljivost polinoma

Dokazaćemo, najpre, jednu veoma važnu osobinu polinoma.

Teorema 1.2.1. *Za svaki polinom $P(x)$ i svaki nenula polinom $Q(x)$, postoje jedinstveni polinomi $S(x)$ i $R(x)$ takvi da važi jednakost*

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x), \tag{1.2.1}$$

[56)] Za detalje videti, na primer, knjigu: N. Jacobson, *Basic Algebra I*, W. H. Freeman and Company, New York, 1985.

pri čemu je $R(x)$ *nula polinom ili* $\operatorname{dg} R(x) < \operatorname{dg} Q(x)$.

Dokaz. Pretpostavimo da $P(x)$ i $Q(x)$ imaju stepene n i m, respektivno, i da su

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \text{i} \quad Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m.$$

Ako je $n < m$ ili $P(x) = 0$, tada (1.2.1) važi sa $S(x) \equiv 0$ i $R(x) = P(x)$. Pretpostavimo zato da je $n \geq m$.

Posmatrajmo polinom

$$P_1(x) = P(x) - \frac{a_n}{b_m}\, x^{n-m} Q(x),$$

čiji je stepen, očigledno, manji od n. Sa n_1 označimo taj stepen, a sa $a_{n_1}^{(1)}$ najstariji koeficijent polinoma $P_1(x)$. Ako je $n_1 \geq m$ stavimo dalje

$$P_2(x) = P_1(x) - \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_m}\, x^{n_1 - m} Q(x),$$

i sa n_2 i $a_{n_2}^{(2)}$ označimo stepen i najstariji koeficijent ovog polinoma, respektivno. Proces nastavljamo ako je $n_2 \geq m$.

Jasno je da stepeni polinoma $P_1(x), P_2(x), \ldots$ opadaju i da posle konačnog broja koraka dobijamo jednakost

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) - \frac{a_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_m}\, x^{n_{k-1} - m} Q(x),$$

u kojoj je $P_k(x)$ nula polinom ili takav da mu je stepen n_k manji od m. U tom slučaju proces prekidamo, a $P_k(x)$ se, korišćenjem prethodnih jednakosti, može predstaviti u obliku $P_k(x) = P(x) - S(x)Q(x)$, gde smo stavili

$$S(x) = \frac{a_n}{b_m}\, x^{n-m} + \frac{a_{n_1}^{(1)}}{b_m}\, x^{n_1 - m} + \cdots + \frac{a_{n_{k-1}}^{(k-1)}}{b_m}\, x^{n_{k-1} - m}.$$

Dakle, ovaj polinom $S(x)$ i $R(x) = P_k(x)$ zadovoljavaju jednakost (1.2.1), pri čemu je $R(x)$ nula polinom ili je njegov stepen manji od stepena polinoma $Q(x)$.

Za dokaz jedinstvenosti polinoma $S(x)$ i $R(x)$, pretpostavimo da postoje i polinomi $\hat{S}(x)$ i $\hat{R}(x)$, koji zadovoljavaju jednakost

$$P(x) = \hat{S}(x) Q(x) + \hat{R}(x),$$

pri čemu je $\hat{R}(x) \equiv 0$ ili $\operatorname{dg} \hat{R}(x) < \operatorname{dg} Q(x)$. Tada je

$$\big(S(x) - \hat{S}(x)\big)Q(x) = \hat{R}(x) - R(x), \tag{1.2.2}$$

pri čemu je polinom na desnoj strani ove jednakosti nula polinom ili je, pak njegov stepen manji od stepena polinoma $Q(x)$. S druge strane, ako je $S(x) - \hat{S}(x) \not\equiv 0$, tada polinom na levoj strani u jednakosti (1.2.2) je ne manjeg stepena od stepena polinoma $Q(x)$. Prema tome, jednakost (1.2.2) je moguća samo ako je

$$\hat{S}(x) = S(x), \qquad \hat{R}(x) = R(x). \quad \square$$

Kao što je rečeno u prethodnom odeljku, za polinome u skupu $\mathbb{K}[x]$ ne postoji operacija deljenje, inverzna operaciji množenja. Može se, međutim, saglasno osobini iz prethodne teoreme, definisati *deljenje* polinoma polinomom sa *ostatkom*.

Definicija 1.2.1. Za polinom $S(x)$ koji zadovoljava (1.2.1) kažemo da je *količnik* pri deljenju polinoma $P(x)$ polinomom $Q(x)$ ($\not\equiv 0$), a za odgovarajući polinom $R(x)$ da je *ostatak* pri tom deljenju.

Ako je ostatak nula polinom, kažemo da je $P(x)$ deljivo sa $Q(x)$ i polinom $Q(x)$ zovemo *delilac* polinoma $P(x)$.

Činjenicu da je $Q(x)$ delilac polinoma $P(x)$ simbolizujemo sa $Q(x)|P(x)$. Neke osobine deljivosti polinoma navodimo u sledećoj teoremi.

Teorema 1.2.2. *Za proizvoljne polinome $P(x), Q(x), U(x)$ važe tvrđenja*:

(a) $P(x)|P(x)$;

(b) *Ako $Q(x)|P(x)$ i $P(x)|Q(x)$, tada je $P(x) = \alpha Q(x)$ za neko $\alpha \in \mathbb{K}$*;

(c) *Ako $U(x)|Q(x)$ i $Q(x)|P(x)$ tada $U(x)|P(x)$*;

(d) *Ako $U(x)|P(x)$ i $U(x)|Q(x)$, tada $U(x)|\alpha P(x) + \beta Q(x)$ za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.*

1.3. Najveći zajednički delilac

Definicija 1.3.1. Polinom $D(x)$ je *zajednički delilac* za polinome $P(x)$ i $Q(x)$ ako $D(x)|P(x)$ i $D(x)|Q(x)$.

Definicija 1.3.2. Polinom $D(x)$ je *najveći zajednički delilac* za polinome $P(x)$ i $Q(x)$, tj. $D(x) = \mathrm{NZD}(P(x), Q(x))$, ako je zajednički delilac za ove polinome i ako je deljiv sa svim ostalim zajedničkim deliocima ovih polinoma.

Primetimo da ako je $D(x) = \mathrm{NZD}(P(x), Q(x))$, tada je i polinom $\alpha D(x)$ $(\alpha \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{K})$ takođe najveći zajednički delilac polinoma $P(x)$ i $Q(x)$.

Teorema 1.3.1. *Za svaka dva polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ postoji najveći zajednički delilac $D(x)$ i on je jedinstven do na multiplikativnu konstantu.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$. Sa $S_1(x)$ i $R_1(x)$ označimo redom količnik i ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $Q(x)$. Ako je $R_1(x) \equiv 0$ tada je $Q(x)$ najveći zajednički delilac polinoma $P(x)$ i $Q(x)$. Međutim, ako $R_1(x)$ nije nula polinom, tada delimo polinom $Q(x)$ sa $R_1(x)$, i odgovarajući količnik i ostatak pri deljenju označavamo sa $S_2(x)$ i $R_2(x)$, respektivno. Ako je $R_2(x) \equiv 0$ tada je $R_1(x)$ najveći zajednički delilac za polinome $P(x)$ i $Q(x)$. Zaista, iz

$$\begin{aligned} P(x) &= S_1(x)Q(x) + R_1(x), \\ Q(x) &= S_2(x)R_1(x) + R_2(x), \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

sleduje $P(x) = (S_1(x)S_2(x) + 1)R_1(x)$ i $Q(x) = S_2(x)R_1(x)$, tj. $R_1(x)|P(x)$ i $R_1(x)|Q(x)$. Da bismo dokazali da je $R_1(x)$ najveći zajednički delilac za $P(x)$ i $Q(x)$ dovoljno je pretpostaviti da ovi polinomi imaju zajednički delilac $D(x)$ i primetiti da iz (1.3.1) sleduje $D(x)|R_1(x)$.

Međutim, ukoliko $R_2(x)$ nije nula polinom, prethodni postupak se nastavlja, saglasno sledećim jednakostima,

$$\begin{aligned} R_1(x) &= S_3(x)R_2(x) + R_3(x), \\ R_2(x) &= S_4(x)R_3(x) + R_4(x), \\ &\vdots \\ R_{k-1}(x) &= S_{k+1}(x)R_k(x) + R_{k+1}(x), \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

sve do ispunjenja uslova $R_{k+1}(x) \equiv 0$. Tada je $R_k(x) = \mathrm{NZD}(P(x), Q(x))$. Ovo zaključujemo sličnim rezonovanjem kao u slučaju $k = 1$. $\square$

Napomena 1.3.1. U dokazu ove teoreme korišćen je Euklidov algoritam, pri čemu su za određivanje najvećeg zajedničkog delioca (NZD) dva polinoma bitni samo ostaci $R_\nu(x)$, a ne i količnici $S_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Imajući na umu jedinstvenost NZD do na multiplikativnu konstantu moguće je u svakom koraku Euklidovog algoritma množiti ostatke $R_\nu(x)$ pogodnim konstantama različitim od nule u cilju dobijanja jednostavnijih izraza pri deljenju.

Definicija 1.3.3. Ako je najveći zajednički delilac za polinome $P(x)$ i $Q(x)$ konstanta, za te polinome kažemo da su *uzajamno prosti*.

Primer 1.3.1. Za polinome u $\mathbb{R}[x]$,

$$P(x) = 2x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x - 8, \qquad Q(x) = x^3 + x^2 + 4,$$

odredićemo NZD. Kako je

$$
\begin{array}{l}
(2x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x - 8) : (x^3 + x^2 + 4) = 2x + 2\\
\underline{2x^4 + 2x^3 \qquad\quad + 8x}\\
\qquad 2x^3 + x^2 - 10x - 8\\
\qquad \underline{2x^3 + 2x^2 \qquad\quad + 8}\\
\qquad\qquad - x^2 - 10x - 16
\end{array}
$$

imamo

$$P(x) = (2x + 2)Q(x) - (x^2 + 10x + 16).$$

Uzmimo da je $R_1(x) = x^2 + 10x + 16$ (pomnoženo sa -1) i podelimo $Q(x)$ sa $R_1(x)$. Dakle,

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + x^2 \qquad + 4) : (x^2 + 10x + 16) = x - 9\\
\underline{x^3 + 10x^2 + 16x}\\
\quad - 9x^2 - 16x + 4\\
\quad \underline{- 9x^2 - 90x - 144}\\
\qquad\qquad 74x + 148
\end{array}
$$

tj.

$$Q(x) = (x - 9)R_1(x) + 74x + 148.$$

Uzmimo $R_2(x) = x + 2$ (pomnoženo sa $1/74$) i podelimo $R_1(x)$ sa $R_2(x)$. Kako je $R_1(x) = (x + 8)R_2(x)$, zaključujemo da je

$$\mathrm{NZD}(P(x), Q(x)) = R_2(x) = x + 2. \qquad \triangle$$

Teorema 1.3.2. *Ako je* $D(x) = \mathrm{NZD}(P(x), Q(x))$ *tada postoje polinomi* $U(x)$ *i* $V(x)$ *takvi da je*

$$D(x) = U(x)P(x) + V(x)Q(x). \tag{1.3.3}$$

Dokaz. Na osnovu (1.3.1) i (1.3.2) imamo redom

$$R_1(x) = P(x) - S_1(x)Q(x),$$
$$R_2(x) = -S_2(x)P(x) + \big(1 + S_1(x)S_2(x)\big)Q(x),$$
$$R_3(x) = \big(1 + S_2(x)S_3(x))\big)P(x) - \big(S_1(x) + S_3(x) + S_1(x)S_2(x)S_3(x)\big)Q(x),$$

itd. Najzad, $D(x) = R_k(x)$ ima oblik (1.3.3). $\square$

1.4. Bézoutov stav i Hornerova šema

Neka je $a \in \mathbb{K}$ i $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Tada je

$$P(a) = a_0 + a_1a + \cdots + a_na^n$$

jedan element u polju $\mathbb{K}$. Za $P(a)$ kažemo da je *vrednost* polinoma u tački $x = a$.

Za element $a \in \mathbb{K}$ kažemo da je *nula* polinoma $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ ako je vrednost polinoma u toj tački jednaka nuli, tj. $P(a) = 0$. U tom slučaju, za polinom prvog stepena $x - a$ kažemo da je *linearni faktor*.

Teorema 1.4.1. *Ako je a nula polinoma $P(x) \in \mathbb{K}[x]$, tada je $P(x)$ deljiv linearnim faktorom $x - a$.*

Dokaz. Kako je

$$x^k - a^k = (x^{k-1} + x^{k-2}a + \cdots + xa^{k-2} + a^{k-1})(x - a),$$

imamo

$$\begin{aligned} P(x) - P(a) &= a_1(x - a) + a_2(x^2 - a^2) + \cdots + a_n(x^n - a^n) \\ &= \big[a_1 + a_2(x + a) + \cdots + a_n(x^{n-1} + \cdots + a^{n-1})\big]\,(x - a) \\ &= Q(x)(x - a), \end{aligned}$$

gde je $Q(x)$ polinom stepena $n - 1$. S druge strane, po pretpostavci je $P(a) = 0$, pa imamo da je $P(x) = Q(x)(x - a)$, što znači da je polinom $P(x)$ deljiv linearnim faktorom $x - a$. $\square$

Sledeće tvrđenje je poznato kao *Bézoutov*[57] *stav*:

---

[57] Etienne Bézout (1730–1783), francuski matematičar.

Teorema 1.4.2. *Ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x - a$ jednak je vrednosti polinoma $P(a)$.*

Dokaz. Kako je $Q(x) = x - a$ polinom prvog stepena, na osnovu teoreme 1.2.1, postoji jedinstveni polinom $S(x)$ i konstanta R (polinom stepena nula) tako da je

$$P(x) = S(x)(x - a) + R. \tag{1.4.1}$$

Stavljajući $x = a$ u (1.4.1) dobijamo $R = P(a)$. $\square$

Korišćenjem prethodne teoreme, svaki polinom $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ stepena n možemo na jedinstven način predstaviti (razložiti) po stepenima od $x - a$, tj.

$$P(x) = A_0 + A_1(x - a) + A_2(x - a)^2 + \cdots + A_n(x - a)^n, \tag{1.4.2}$$

gde su A_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ elementi polja $\mathbb{K}$. Zaista, na osnovu (1.4.1) imamo

$$P(x) = A_0 + P_1(x)(x - a), \tag{1.4.3}$$

gde smo stavili $A_0 = R = P(a)$ i $P_1(x) = S(x)$. Ako je $P_1(x)$ polinom nultog stepena traženi razvoj (1.4.2) je dobijen. U protivnom slučaju, delimo polinom $P_1(x)$ sa $x - a$, dobijajući pritom da je

$$P_1(x) = A_1 + P_2(x)(x - a), \tag{1.4.4}$$

gde je $A_1 = P_1(a)$. Na ovaj način, kombinujući (1.4.3) i (1.4.4), dobijamo

$$P(x) = A_0 + A_1(x - a) + P_2(x)(x - a)^2.$$

Nastavljajući ovaj postupak dobićemo razvoj (1.4.2).

Definicija 1.4.1. Ako je $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ proizvoljan polinom iz $\mathbb{K}[x]$, tada za polinom

$$P'(x) = a_1 + 2a_2 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} \in \mathbb{K}[x]$$

kažemo da je (*prvi*) *izvod* polinoma $P(x)$. Za preslikavanje $P(x) \mapsto P'(x)$ kažemo da je *diferenciranje* u prstenu $\mathbb{K}[x]$.

Viši izvodi $P^{(k)}(x)$ definišu se rekurzivno; na primer, izvod polinoma $P'(x)$ naziva se *drugi izvod* polinoma $P(x)$, itd. Po definiciji, $P^{(0)}(x) \equiv P(x)$.

Napomenimo da je $\operatorname{dg} P'(x) = \operatorname{dg} P(x) - 1$. Takođe, za svako $k > n = \operatorname{dg} P(x)$ imamo da je $P^{(k)}(x)$ nula polinom.

Očigledno, kada je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, polinomska funkcija $t \mapsto P(t)$ je realna funkcija realne promenljive t. Ona je, kao što znamo iz glave V, neprekidna i diferencijabilna za svako $t \in \mathbb{R}$, a za $|t| \to +\infty$ teži ka $+\infty$ ako je stepen $n \geq 1$. Kao što je rečeno u odeljku 1.1, za beskonačna polja ne pravimo razliku između polinoma i polinomske funkcije. U tom slučaju, primenom Taylorove formule (videti odeljak 1.12, glava V), koeficijenti A_k u razlaganju (1.4.2) mogu se izraziti pomoću

$$A_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{1.4.5}$$

Tako dobijamo Taylorovo razlaganje

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Ovi rezultati važe i u slučaju polja kompleksnih brojeva $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Jedan elementaran, ali važan problem je izračunavanje vrednosti polinoma za dato $x = a$. Predstavimo polinom po opadajućim stepenima

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n. \tag{1.4.6}$$

Ako bismo izračunavali vrednost polinoma $P(a)$, na osnovu (1.4.6), bilo bi potrebno $2n-1$ množenja i n sabiranja. Međutim, ukoliko $P(x)$ predstavimo u obliku

$$P(x) = (\cdots((a_0 x + a_1)x + a_2)x + \cdots + a_{n-1})x + a_n \tag{1.4.7}$$

potrebno je samo n množenja i n sabiranja.

Sa $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ označimo koeficijente polinoma $S(x)$ u (1.4.1) i stavimo $b_n = R$. Tada imamo

$$\begin{aligned} &a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \\ &\qquad = (b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1})(x-a) + b_n, \end{aligned}$$

odakle, upoređivanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene na levoj i desnoj strani prethodne jednakosti, dobijamo

$$a_0 = b_0, \qquad a_k = b_k - b_{k-1} a \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Na osnovu ovih jednakosti može se formirati rekurzivni postupak za izračunavanje vrednosti polinoma za $x = a$:

$$b_0 = a_0, \qquad b_k = a_k + b_{k-1}a \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{1.4.8}$$

koji posle n koraka daje vrednost polinoma, tj. $P(a) = b_n$. Primetimo da su koeficijenti b_k, u stvari, vrednosti u odgovarajućim zagradama u (1.4.7) izračunate za $x = a$.

Izloženi postupak (1.4.8) poznat je kao *Hornerova*[58] *šema i može se interpretirati kroz sledeću šemu:*

a	a_0	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
		b_0a	b_1a	b_2a		$b_{n-2}a$	$b_{n-1}a$
	b_0	b_1	b_2	b_3		b_{n-1}	$b_n = P(a)$

Prvu vrstu, dakle, započinjemo sa vrednošću $x = a$ za koju izračunavamo vrednost polinoma, a zatim pišemo koeficijente polinoma (1.4.6), počev od najstarijeg koeficijenta. U trećoj vrsti pišemo koeficijente b_k, koje izračunavamo sabiranjem odgovarajućih elemenata prve i druge vrste, pri čemu je $b_0 = a_0$. Elemente druge vrste formiramo množenjem vrednosti a sa prethodnim elementom iz treće vrste. Elementi treće vrste su, dakle, koeficijenti polinoma $S(x)$ i ostatak pri deljenju $R = P(a)$.

Nastavljajući postupak deljenja dobijenog količnika $S(x)$ sa $x - a$ moguće je dobiti razlaganje (1.4.2). *Koeficijenti u tom razlaganju A_k su, upravo, ostaci pri ovim deljenjima. Na taj način, Hornerovom šemom i korišćenjem* (1.4.5)*, mogu se odrediti svi izvodi polinoma $P(x)$ u tački $x = a$,*

$$P^{(k)}(a) = k!A_k, \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{1.4.9}$$

Primer 1.4.1. Neka je $P(x) = 4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 16x - 12 \in \mathbb{R}[x]$. Primenom Hornerove šeme odredićemo vrednost $P(2)$:

2	4	−4	13	−16	−12
		8	8	42	52
	4	4	21	26	40

Dakle, $P(2) = 40$. Količnik pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x - 2$ je polinom $S(x) = 4x^3 + 4x^2 + 21x + 26$, a ostatak deljenja je $R = P(2) = 40$. Navedena šema se može uprostiti izostavljanjem druge vrste. Na primer, za $a = -1/2$ imamo

[58] William George Horner (1773–1827), engleski matematičar.

$-1/2$	4	-4	13	-16	-12
	4	-6	16	-24	0

odakle zaključujemo da je $a = -1/2$ nula polinoma $P(x)$.

Primenimo sada postupak sukcesivnog deljenja u cilju dobijanja razlaganja polinoma $P(x)$ po stepenima od $x-2$ i izračunavanja izvoda polinoma u tački $x = 2$.

Postupak je prikazan u sledećoj tabeli:

2	4	-4	13	-16	-12
	4	4	21	26	40
	4	12	45	116	
	4	20	85		
	4	28			
	4				

Prema tome,

$$P(x) = 40 + 116(x-2) + 85(x-2)^2 + 28(x-2)^3 + 4(x-2)^4.$$

Na osnovu (1.4.9) imamo redom $P'(2) = A_1 = 116$, $P''(2) = 2A_2 = 170$, $P'''(2) = 6A_3 = 168$, $P^{(4)}(2) = 24A_4 = 96$. $\triangle$

1.5. Osnovni stav algebre i faktorizacija polinoma

U daljem izlaganju posmatraćemo polinome na tzv. *algebarski zatvorenim* poljima.

Definicija 1.5.1. Za polje $\mathbb{K}$ kažemo da je algebarski zatvoreno ako svaki polinom $P(x) \in \mathbb{K}[x]$, različit od konstante, ima bar jednu nulu u $\mathbb{K}$.

Da sva polja nisu algebarski zatvorena ukazuje sledeći primer.

Primer 1.5.1. Posmatrajmo polinom $P(x) = 1 + x^2$ nad poljem $\mathbb{K}$. Ako je $\mathbb{K}$ polje racionalnih brojeva ili polje realnih brojeva, $P(x)$ nema ni jednu nulu u $\mathbb{K}$. Međutim, na polju $\mathbb{C}$ ovaj polinom ima dve nule $x = i$ i $x = -i$. $\triangle$

Sledeća teorema o algebarskoj zatvorenosti polja kompleksnih brojeva tradicionalno se naziva *osnovna teorema algebre*:

Teorema 1.5.1. *Svaki polinom* $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ *stepena* $n \geq 1$ *ima bar jednu nulu.*

Postoji više različitih dokaza ove teoreme. Jedan kratak dokaz se može dati metodima *Kompleksne analize*. Korišćenje elementarnog matematičkog aparata zahteva komplikovan dokaz pa ćemo ga ovde zbog toga izostaviti.

Teorema 1.5.1 se često formuliše i u obliku:

Teorema 1.5.2. *Svaki polinom* $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ *stepena* $n \geq 1$ *je proizvod* n *linearnih faktora.*

Očigledno iz teoreme 1.5.2 sleduje teorema 1.5.1. Obrnuto, ako je x_1 nula polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ koja postoji na osnovu teoreme 1.5.1, tada je, na osnovu teoreme 1.4.1, $P(x)$ deljiv linearnim faktorom $x - x_1$, tj. važi

$$P(x) = (x - x_1)P_1(x),$$

gde je $P_1(x)$ polinom stepena $n - 1$. Ako je $n \geq 2$, tada ponovo primenom teoreme 1.5.1, zaključujemo da $P_1(x)$ ima bar jednu nulu, recimo x_2, tako da je

$$P_1(x) = (x - x_2)P_2(x), \qquad \operatorname{dg} P_2(x) = n - 2.$$

Dakle,

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)P_2(x).$$

Nastavljajući ovakav postupak dolazimo do faktorizacije

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)P_n(x),$$

gde je $\operatorname{dg} P_n(x) = 0$, tj. $P_n(x)$ se svodi na najstariji koeficijent polinoma $P(x)$.

Dakle, polinom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1.5.1}$$

sa kompleksnim koeficijentima $a_0, a_1, \ldots, a_n$ i $a_n \neq 0$ ima n nula x_1, x_2, ..., x_n, i važi

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n). \tag{1.5.2}$$

Među kompleksnim brojevima x_1, x_2, ..., x_n može biti i jednakih. U sledećoj definiciji uvodimo pojam *višestruke nule* polinoma $P(x)$.

Definicija 1.5.2. Za nulu x_1 polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ kažemo da je višestruka reda k $(\in \mathbb{N})$ ako postoji polinom $Q(x)$ takav da je

$$P(x) = (x - x_1)^k Q(x), \qquad Q(x_1) \neq 0. \tag{1.5.3}$$

Ako je $k = 1$ kažemo da je nula x_1 prosta ili jednostruka.

Teorema 1.5.3. *Ako je $x = x_1$ višestruka nula reda $k > 1$ polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, tada je ona nula reda $k - 1$ izvodnog polinoma $P'(x) \in \mathbb{C}[x]$.*

Dokaz. Pretpostavljajući da je $x = x_1$ višestruka nula reda $k > 1$ polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, na osnovu prethodne definicije postoji polinom $Q(x)$ takav da važi (1.5.3). Tada je[59)]

$$P'(x) = k(x - x_1)^{k-1}Q(x) + (x - x_1)^k Q'(x) = (x - x_1)^{k-1}Q_1(x),$$

gde je $Q_1(x) = kQ(x) + (x - x_1)Q'(x)$. Kako je $Q_1(x_1) = kQ(x_1) \neq 0$, zaključujemo da je $x = x_1$ višestruka nula reda $k - 1$ izvodnog polinoma $P'(x)$. $\square$

Teorema 1.5.4. *Kompleksan broj x_1 je višestruka nula reda k polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ ako i samo ako je*

$$P(x_1) = P'(x_1) = \cdots = P^{(k-1)}(x_1) = 0, \quad P^{(k)}(x_1) \neq 0. \tag{1.5.4}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $x = x_1$ višestruka nula reda k polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$. Tada, sukcesivnom primenom prethodne teoreme na $P(x)$, $P'(x)$, $\ldots$, $P^{(k-1)}(x)$, dobijamo (1.5.4).

Obrnuto, ako pretpostavimo da važi (1.5.4), tada se Taylorovo razlaganje polinoma u tački $x = x_1$ (videti odeljak 1.4)

$$P(x) = P(x_1) + \frac{P'(x_1)}{1!}(x - x_1) + \frac{P''(x_1)}{2!}(x - x_1)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^n$$

svodi na

$$P(x) = (x - x_1)^k \left[\frac{P^{(k)}(x_1)}{k!} + \frac{P^{(k+1)}(x_1)}{(k+1)!}(x - x_1) \cdots + \frac{P^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^{n-k} \right],$$

---

59) Ne pravimo razliku između polinoma i polinomske funkcije i koristimo pravila za diferenciranje funkcija.

tj. $P(x) = (x-x_1)^k Q(x)$, gde je $Q(x_1) = P^{(k)}(x_1)/k! \neq 0$, što znači da je x_1 višestruka nula reda k polinoma $P(x)$. $\square$

Primer 1.5.2. Da bismo dokazali da je polinom

$$P(x) = 2x^{n+1} - n(n+1)a^{n-1}x^2 + 2(n^2-1)a^n x - n(n-1)a^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

deljiv sa $(x-a)^3$ dovoljno je proveriti da li su ispunjeni uslovi $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$. Kako je

$$\begin{aligned} P'(x) &= 2(n+1)x^n - 2n(n+1)a^{n-1}x + 2(n^2-1)a^n, \\ P''(x) &= 2n(n+1)x^{n-1} - 2n(n+1)a^{n-1}, \end{aligned}$$

nalazimo redom

$$\begin{aligned} P(a) &= 2a^{n+1} - n(n+1)a^{n-1}a^2 + 2(n^2-1)a^n a - n(n-1)a^{n+1} = 0, \\ P'(a) &= 2(n+1)a^n - 2n(n+1)a^{n-1}a + 2(n^2-1)a^n = 0, \\ P''(a) &= 2n(n+1)a^{n-1} - 2n(n+1)a^{n-1} = 0. \quad \triangle \end{aligned}$$

Kao direktnu posledicu teoreme 1.5.2 imamo sledeći rezultat:

Teorema 1.5.5. *Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ među sobom različite nule polinoma $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ stepena n sa redom višestrukosti $k_1, k_2, \ldots, k_m$, respektivno. Tada važi faktorizacija*

$$P(x) = a_n (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \cdots (x-x_m)^{k_m}, \tag{1.5.5}$$

gde je $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, a a_n je najstariji koeficijent polinoma $P(x)$.

Faktorizacija (1.5.5) se naziva *kanoničko razlaganje polinoma $P(x)$ na faktore.*

Teorema 1.5.6. *Kanoničko razlaganje* (1.5.5) *je jedinstveno.*

Dokaz. Pretpostavimo da, pored kanoničkog razlaganja (1.5.5), postoji drugo kanoničko razlaganje

$$P(x) = a_n (x-y_1)^{l_1}(x-y_2)^{l_2} \cdots (x-x_r)^{l_r},$$

gde je $l_1 + l_2 + \cdots + l_r = n$. Tada mora važiti jednakost

$$(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \cdots (x-x_m)^{k_m} = (x-y_1)^{l_1}(x-y_2)^{l_2} \cdots (x-y_r)^{l_r}. \tag{1.5.6}$$

Nije teško videti da se skupovi nula

$$X_m = \{x_1, x_2, \dots , x_m\} \quad \text{i} \quad Y_r = \{y_1, y_2, \dots , y_r\}$$

moraju poklapati. Naime, ako to nije slučaj, jednakost nije moguća za svako $x \in \mathbb{C}$. Na primer, ako $x_1 \notin Y_r$, tada za $x = x_1$ leva strana u (1.5.6) postaje nula, dok je pri tome desna strana različita od nule. Prema tome, ako postoje dva kanonička razlaganja onda bi jednakost (1.5.6) eventualno bila moguća samo kada je $X_m = Y_r$, tj. kada je

$$(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_m)^{k_m} = (x - x_1)^{l_1}(x - x_2)^{l_2} \cdots (x - x_m)^{l_m}. \tag{1.5.7}$$

Pretpostavimo sada da je, na primer, $k_1 \neq l_1$ i neka je $k_1 > l_1$. Deobom (1.5.7) sa faktorom $(x - x_1)^{l_1}$ dobijamo

$$(x - x_1)^{k_1 - l_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_m)^{k_m} = (x - x_2)^{l_2} \cdots (x - x_m)^{l_m},$$

odakle, stavljajući $x = x_1$, zaključujemo da mora biti $k_1 = l_1$ jer bi u protivnom slučaju leva strana bila nula, a desna različita od nule. Na ovaj način dokazujemo da mora biti $k_i = l_i$ za svako $i = 1, \dots , m$, što znači da je kanoničko razlaganje (1.5.5) jedinstveno. $\square$

Napomena 1.5.1. Na kraju ovog odeljka ukažimo na mogućnost da se polinom sa višestrukim nulama, čije je kanoničko razlaganje dato sa (1.5.5), može redukovati na polinom sa samo prostim nulama x_1, x_2, $\dots$, x_m. Pretpostavimo da je $D(x)$ najveći zajednički delilac za polinome $P(x)$ i $P'(x)$, tj. $D(x) = \mathrm{NZD}(P(x), P'(x)$. Ukoliko je $D(x)$ konstanta, polinomi $P(x)$ i $P'(x)$ su uzajamno prosti, što znači da oni nemaju zajedničkih faktora, tj. polinom $P(x)$ ima samo proste nule. Međutim, ukoliko je $\mathrm{dg}\, D(x) \geq 1$, polinom $P(x)$ ima višestruke nule jer su tada faktori polinoma $D(x)$, upravo, zajednički faktori polinoma $P(x)$ i $P'(x)$. Zato deljenje polinoma $P(x)$ sa $D(x)$ daje kao količnik polinom koji ima iste nule kao i polinom $P(x)$, ali su one sve proste. Dakle, taj polinom ima faktorizaciju

$$\frac{P(x)}{D(x)} = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m),$$

gde je c neka konstanta.

1.6. Vièteove formule

Posmatrajmo polinom $P(x)$ sa kompleksnim koeficijentima stepena n koji je dat sa (1.5.1). Neka su njegove nule redom x_1, x_2, $\dots$, x_n. Iz jednakosti polinoma, na osnovu (1.5.1) i (1.5.2), dobijamo tzv. Vièteove[60] formule

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &\vdots \\ x_1x_2 \cdots x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Označimo leve strane u prethodnim jednakostima redom sa σ_1, σ_2, $\ldots$, σ_n. Detaljnije razmatranje ovih veličina koje se, inače, nazivaju *elementarne simetrične funkcije* biće dato u odeljku 3.1. Nije teško zaključiti da važi

$$\begin{aligned} a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} &+ a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 \\ &\equiv a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\ &\equiv a_n(x^n - \sigma_1x^{n-1} + \sigma_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^n\sigma_n). \end{aligned}$$

1.7. Nule realnih polinoma

Neka je

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \tag{1.7.1}$$

gde su koeficijenti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi i $a_n \neq 0$. Za takav polinom koristićemo termin *realni polinom*. Nule realnih polinoma su, u opštem slučaju, kompleksni brojevi. Dokazaćemo da se one javljaju kao parovi konjugovano-kompleksnih brojeva.

Teorema 1.7.1. *Ako je x_ν kompleksna nula reda k_ν realnog polinoma $P(x)$, tada je i $\bar{x}_\nu$ takođe njegova kompleksna nula istog reda.*

Dokaz. Na osnovu (1.7.1) imamo

$$\overline{P(x)} = a_n\bar{x}^n + a_{n-1}\bar{x}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{x} + a_0 = P(\bar{x}).$$

S druge strane, na osnovu faktorizacije (1.5.5), tj.

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_m)^{k_m} \qquad \big(k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n\big),$$

[60] François Viète (1540–1603), poznati francuski matematičar.

zaključujemo da je

$$\overline{P(x)} = P(\bar{x}) = a_n(\bar{x} - x_1)^{k_1}(\bar{x} - x_2)^{k_2} \cdots (\bar{x} - x_m)^{k_m},$$

tj.

$$P(x) = a_n(x - \bar{x}_1)^{k_1}(x - \bar{x}_2)^{k_2} \cdots (x - \bar{x}_m)^{k_m},$$

odakle neposredno sleduje tvrđenje teoreme. □

Na osnovu prthodnog izlaganja možemo zaključiti da realni polinom može imati realne nule i/ili parove konjugovano-kompleksnih nula. Pretpostavimo da polinom $P(x)$ ima realne nule $x_1, \ldots, x_m$, reda višestrukosti $k_1, \ldots, k_m$, respektivno, i parove konjugovano-kompleksnih nula $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_l \pm i\beta_l$, reda višestrukosti $s_1, \ldots, s_l$, takođe respektivno. Naravno, mora biti

$$\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu + 2\sum_{\nu=1}^{l} s_\nu = \operatorname{dg} P(x).$$

Kako je

$$(x - \alpha_\nu - i\beta_\nu)(x - \alpha_\nu + i\beta_\nu) = (x - \alpha_\nu)^2 + \beta_\nu^2 = x^2 + p_\nu x + q_\nu \quad (p, q \in \mathbb{R}),$$

parovima konjugovano-kompleksnih nula odgovaraju kvadratni faktori

$$x^2 + p_\nu x + q_\nu \qquad \big(p_\nu = -2\alpha_\nu,\ q_\nu = \alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2\big)$$

odgovarajuće višestrukosti s_ν.

Prema tome, realni polinom $P(x)$ se može faktorisati u obliku

$$P(x) = a_n \prod_{\nu=1}^{m} (x - x_\nu)^{k_\nu} \prod_{\nu=1}^{l} (x^2 + p_\nu x + q_\nu)^{s_\nu}, \tag{1.7.2}$$

gde je a_n najstariji koeficijent polinoma $P(x)$.

Primer 1.7.1. Neka je $P(x) = x^6 - 2x^3 + 1$. Kako je

$$P(x) = (x^3 - 1)^2 = \big((x - 1)(x^2 + x + 1)\big)^2,$$

faktorizacija (1.7.2) postaje $P(x) = (x-1)^2(x^2+x+1)^2$, što znači da polinom ima dvostruku realnu nulu $x = 1$ i par konjugovano-kompleksnih nula $x = \big(-1 \pm \sqrt{3}\big)/2$, čiji je red višestrukosti, takođe, dva. △

Primer 1.7.2. Jedna nula polinoma $P(x) = 4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 16x - 12$ je $-2i$. Kako je ovo realni prolinom, on mora imati i konjugovanu nulu $2i$. Polinom $P(x)$ je, dakle, deljiv faktorom $(x+2i)(x-2i) = x^2 + 4$. Kako je

$$(4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 16x - 12) : (x^2 + 4) = 4x^2 - 4x - 3 = 4\Big(x + \frac{1}{2}\Big)\Big(x - \frac{3}{2}\Big),$$

faktorizovani oblik polinoma $P(x)$ je

$$P(x) = 4\Big(x + \frac{1}{2}\Big)\Big(x - \frac{3}{2}\Big)(x^2 + 4).$$

Njegove nule su redom $x_1 = -1/2$, $x_2 = 3/2$, $x_3 = -2i$, $x_4 = 2i$. Napomenimo da smo, u primeru 1.4.1, Hornerovom šemom zaključili da je $P(-1/2) = 0$. $\triangle$

Razmotrimo sada potrebne uslove da jedan realni polinom sa celobrojnim koeficijentima ima racionalne nule.

Teorema 1.7.2. *Neka je $P(x)$ realni polinom sa celobrojnim koeficijentima,*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (a_k \in a_{,j,} b_{j,}\ a_0 a_n \neq 0).$$

Ako je $x_1 = p/q$ nula ovog polinoma, gde su p i q uzajamno prosti celi brojevi, tada a_0 deljivo sa p i a_n deljivo sa q, tj. važe relacije $p|a_0$ i $q|a_n$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $x_1 = p/q \in \mathbb{Q}$ nula polinoma $P(x)$, tj. da je

$$P(x_1) = a_n\Big(\frac{p}{q}\Big)^n + a_{n-1}\Big(\frac{p}{q}\Big)^{n-1} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Ako ovu jednakost pomnožimo sa q^{n-1} dobijamo da je

$$a_n\frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} = 0,$$

odakle zaključujemo da $q|a_n$ jer su p i q uzajamno prosti brojevi. Slično, množenjem poslednje jednakosti sa q/p dobijamo

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_0\frac{q^n}{p} = 0,$$

odakle zaključujemo da $p|a_0$. $\square$

Primer 1.7.3. Na polinom iz primera 1.7.2 možemo primeniti prethodnu teoremu. Faktori broja $12\,(= -a_0)$ su: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12. Pozitivni faktori broja $4\,(= a_4)$ su: 1, 2, 4. Na osnovu teoreme 1.7.2, racionalne nule polinoma (ukoliko postoje) pripadaju sledećem skupu:

$$\Big\{\pm1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm2,\ \pm3,\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{3}{4},\ \pm4,\ \pm6,\ \pm12\Big\}.$$

To su, kao što smo videli u primeru 1.7.2, $x_1 = -1/2$ i $x_2 = 3/2$. $\triangle$

Rolleova teorema (videti odeljak 1.11, glava V) može se ovde iskazati u obliku:

Teorema 1.7.3. *Između dve uzastopne realne nule x_1 i x_2 $(x_1 < x_2)$ realnog polinoma $P(x)$ nalazi se bar jedna nula izvodnog polinoma $P'(x)$.*

Takođe, za realne polinome važe sledeći rezultati koji su posledice Rolleove teoreme:

Teorema 1.7.4. *Između dve uzastopne realne nule x_1' i x_2' $(x_1' < x_2')$ realnog izvodnog polinoma $P'(x)$ nalazi se najviše jedna nula polinoma $P(x)$.*

Teorema 1.7.5. *Ako su sve nule realnog polinoma $P(x)$ realne, tada su i sve nule izvodnog polinoma $P'(x)$ realne i nule izvodnog polinoma $P'(x)$ razdvajaju nule polinoma $P(x)$.*

Teorema 1.7.6. *Realni polinom $P(x)$ ne može imati više od $k+1$ realnih nula ako izvodni polinom $P'(x)$ ima k realnih nula.*

1.8. Broj realnih nula

Ovaj odeljak posvećujemo pitanju broja realnih nula datog polinoma $P(x)$ u intervalu (a, b), u oznaci $N(a, b) \equiv N(a, b; P)$. Da bismo formulisali osnovne rezultate koji se odnose na broj $N(a, b)$, potrebno je najpre uvesti definiciju varijacije (promene znaka) u jednom konačnom nizu realnih brojeva

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \tag{1.8.1}$$

od kojih nijedan nije nula.

Definicija 1.8.1. Ako je $a_k a_{k+1} < 0$ $(1 \le k \le n-1)$ kažemo da na mestu k u nizu (1.8.1) postoji *varijacija* ili *promena znaka*.

Primer 1.8.1. Niz brojeva $\{-4, -2, 1, -3, -2, 5, 2\}$ ima ukupno tri varijacije koje postoje na drugom (članovi niza -2 i 1), trećem (1 i 3), i na petom mestu (sa članovima -2 i 5). $\triangle$

Napomena 1.8.1. Često se, radi lakšeg praćenja promene znaka, datom nizu realnih brojeva pridružuje niz simbola $+$ i $-$. Tako za niz iz primera 1.8.1 imamo

$$\{-4, -2, 1, -3, -2, 5, 2\} \mapsto \{-, -, +, -, -, +, +\}.$$

Broj varijacija u nizu koji ima i članove koji su jednaki nuli određuje se tako što se takvi članovi ne uzimaju u obzir.

Primer 1.8.2. Kod određivanja broja varijacija u nizu $\{0, -2, 0, 0, 3, 4, 0, 1, 3\}$ treba posmatrati niz $\{-2, 3, 4, 1, 3\}$. Ovaj niz ima samo jednu varijaciju. $\triangle$

Neka V označava broj varijacija u nizu

$$\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\} \qquad (a_0 > 0,\ a_n \neq 0) \tag{1.8.2}$$

čiji su članovi koeficijenti realnog polinoma

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \qquad (a_0 > 0). \tag{1.8.3}$$

Sledeće tvrđenje, koje navodimo bez dokaza, poznato je kao Descartesova teorema:

Teorema 1.8.1. *Broj pozitivnih nula polinoma* (1.8.3) *jednak je broju varijacija u nizu* (1.8.2) *ili je od njega manji za paran broj* $2m$, *tj.* $N(0, +\infty; P) = V - 2m$.

Napomena 1.8.2. U prethodnoj teoremi višestruke nule se računaju onoliko puta koliki je njihov red višestrukosti.

Napomena 1.8.3. Broj negativnih nula polinoma (1.8.3) moguće je analizirati primenom teoreme na polinom $Q(x) = (-1)^n P(-x)$.

Primer 1.8.3. Neka je $P(x) = x^5 - x^3 + 1$. Njegovi koeficijenti čine niz $\{1, 0, -1, 0, 0, 1\}$, čiji je broj varijacija $V = 2$. Na osnovu Descartesove teoreme, polinom $P(x)$ ima dve ili nijednu pozitivnu nulu. Za analizu broja negativnih nula posmatrajmo polinom $Q(x) = -P(-x) = x^5 + x^3 - 1$, čiji koeficijenti čine niz $\{1, 0, 1, 0, 0, -1\}$. Kako ovaj niz ima samo jednu varijaciju, zaključujemo da polinom $Q(x)$ ima jednu pozitivnu nulu, tj. polinom $P(x)$ ima samo jednu negativnu nulu. $\triangle$

Za određivanje tačnog broja realnih nula jednog realnog polinoma u datom intervalu postoji opšti metod, zasnovan na Sturmovoj[61)] teoremi. Za polinom bez višestrukih nula može se formirati niz polinoma, tzv. *Sturmov niz*, na osnovu koga se može odrediti tačan broj njegovih realnih nula u bilo kom intervalu (a, b). Kao što je poznato (videti napomenu 1.5.1) polinom $P(x)$ se uvek može „očistiti" od višestrukih nula, uzimajući umesto $P(x)$ polinom $P(x)/\operatorname{NZD}(P(x), P'(x))$.

Dakle, pretpostavimo da polinom $P(x)$ nema višestrukih nula i formirajmo niz polinoma

$$\boldsymbol{s}[x] = \bigl\{P_0(x), P_1(x), \ldots, P_m(x)\bigr\},$$

startujući sa

$$P_0(x) = P(x) \qquad \text{i} \qquad P_1(x) = P'(x).$$

[61)] Jacques Charles François Sturm (1803–1855), francuski matematičar.