Линеарна алгебра 1

шесто предавање

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Универзитет у Крагујевцу

Линеарна пресликавања (хомоморфизми)

Дефиниција

Пресликавање $f : V \to U$ је линеарно пресликавање (хомоморфизам) векторског простора $(V, +_V, \cdot_V, F)$ у векторски простор $(U, +_U, \cdot_U, F)$ ако важи:

1. $f(x +_V y) = f(x) +_U f(y) \quad (x, y \in V)$ - *адитивност*
2. $f(\alpha \cdot_V x) = \alpha \cdot_U f(x) \quad (x \in V, \alpha \in F)$ - *хомогеност.*

Линеарна пресликавања (хомоморфизми)

Дефиниција

Пресликавање $f : V \to U$ *је линеарно пресликавање (хомоморфизам) векторског простора* $(V, +_V, \cdot_V, F)$ *у векторски простор* $(U, +_U, \cdot_U, F)$ *ако важи:*

1. $f(x +_V y) = f(x) +_U f(y) \quad (x, y \in V)$ *- адитивност*
2. $f(\alpha \cdot_V x) = \alpha \cdot_U f(x) \quad (x \in V, \alpha \in F)$ *- хомогеност.*

$f(\alpha \cdot_V x +_V \beta \cdot_V y) = \alpha \cdot_U f(x) +_U \beta \cdot_U f(y) \; (x, y \in V, \alpha, \beta \in F)$
- линеарност

Линеарна пресликавања (хомоморфизми)

Дефиниција

Пресликавање $f : V \to U$ је линеарно пресликавање (хомоморфизам) векторског простора $(V, +_V, \cdot_V, F)$ у векторски простор $(U, +_U, \cdot_U, F)$ ако важи:

1. $f(x +_V y) = f(x) +_U f(y) \quad (x, y \in V)$ - *адитивност*
2. $f(\alpha \cdot_V x) = \alpha \cdot_U f(x) \quad (x \in V, \alpha \in F)$ - *хомогеност.*

$f(\alpha \cdot_V x +_V \beta \cdot_V y) = \alpha \cdot_U f(x) +_U \beta \cdot_U f(y)$ $(x, y \in V, \alpha, \beta \in F)$
- линеарност

Дефиниција

Линеарно пресликавање $f : V \to V$ векторског простора V у самог себе назива се ендоморфизам или линеарни оператор векторског простора V.

Дефиниција

Нека je $f : V \to U$ *линеарно пресликавање векторских простора.*
(1) f *je мономорфизам ако je „1-1”;*

Дефиниција

Нека је $f : V \to U$ *линеарно пресликавање векторских простора.*

(1) f *је мономорфизам ако је „1-1”;*

(2) f *је епиморфизам ако је „на”;*

Дефиниција

Нека је $f : V \to U$ *линеарно пресликавање векторских простора.*
(1) f *је мономорфизам ако је ,,1-1'';*
(2) f *је епиморфизам ако је ,,на'';*
(3) f *је изоморфизам ако је бијекција.*

Дефиниција

Нека је $f : V \to U$ *линеарно пресликавање векторских простора.*
(1) f *је мономорфизам ако је „1-1";*
(2) f *је епиморфизам ако је „на";*
(3) f *је изоморфизам ако је бијекција.*

Дефиниција

Векторски простори U *и* V *над пољем* F *су изоморфни, у ознаци* $U \cong V$*, ако постоји бар један изоморфизам* $f : U \to V$.

Лема

Ако је $f : V \to U$ линеарно пресликавање векторских простора, онда је

1. $f(0_V) = 0_U$,

Лема

Ако је $f : V \to U$ линеарно пресликавање векторских простора, онда је

1. $f(0_V) = 0_U$,
2. $f(-_V x) = -_U f(x), \quad x \in V$.

Лема

Ако је $f : V \to U$ линеарно пресликавање векторских простора, онда је

1. $f(0_V) = 0_U$,
2. $f(-_V x) = -_U f(x), \quad x \in V$.

Доказ. Заиста, важи да је

1. $f(0_V) = f(0_F \cdot_V x) = 0_F \cdot_U f(x) = 0_U$;

Лема

Ако је $f : V \to U$ линеарно пресликавање векторских простора, онда је

1. $f(0_V) = 0_U,$
2. $f(-_V x) = -_U f(x), \quad x \in V.$

Доказ. Заиста, важи да је

1. $f(0_V) = f(0_F \cdot_V x) = 0_F \cdot_U f(x) = 0_U;$
2. $f(-_V x) = f((-1)_F \cdot_V x) = (-1)_F \cdot_U f(x) =$
   $-_U(1_F \cdot f(x)) = -_U f(x).$ $\square$

Лема

Ако је $f : V \to U$ линеарно пресликавање векторских простора, онда је

1. $f(0_V) = 0_U$,
2. $f(-_V x) = -_U f(x), \quad x \in V.$

Доказ. Заиста, важи да је

1. $f(0_V) = f(0_F \cdot_V x) = 0_F \cdot_U f(x) = 0_U$;
2. $f(-_V x) = f((-1)_F \cdot_V x) = (-1)_F \cdot_U f(x) = -_U(1_F \cdot f(x)) = -_U f(x).$ $\square$

Пример

- $f : V \to V,\ f(x) = x$, *тј.* $f = i_V$ *-идентично пресликавање је изоморфизам.*

Лема

Ако је $f : V \to U$ линеарно пресликавање векторских простора, онда је

1. $f(0_V) = 0_U$,
2. $f(-_V x) = -_U f(x), \quad x \in V.$

Доказ. Заиста, важи да је

1. $f(0_V) = f(0_F \cdot_V x) = 0_F \cdot_U f(x) = 0_U$;
2. $f(-_V x) = f((-1)_F \cdot_V x) = (-1)_F \cdot_U f(x) = -_U(1_F \cdot f(x)) = -_U f(x).$ $\square$

Пример

- $f : V \to V,\ f(x) = x$, *тј.* $f = i_V$ *-идентично пресликавање је изоморфизам.*

Пример

- $f : V \to V,\ f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0$, тј. $f = 0$ - *нула функција је ендоморфизам простора* V,

Пример

- $f : V \to V,\ f(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0$, *тј.* $f = 0$ *- нула функција је ендоморфизам простора* V*, јер је* $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = 0 = 0 + 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y).$
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (2x + y, x - 2y + z)$ *је линеарно пресликавање* $\mathbb{R}^3$ *у* $\mathbb{R}^2$ *јер*

Пример

- $f: V \to V,\ f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0$, тј. $f = 0$ - *нула функција је ендоморфизам простора* V, *јер је* $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = 0 = 0 + 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$.
- $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (2x + y, x - 2y + z)$ *је линеарно пресликавање* $\mathbb{R}^3$ *у* $\mathbb{R}^2$ *јер*

$$f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x + x', y + y', z + z') =$$

Пример

- $f : V \to V,\ f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0$, *тј.* $f = 0$ *- нула функција је ендоморфизам простора* V, *јер је* $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = 0 = 0 + 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$.
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (2x + y, x - 2y + z)$ *је линеарно пресликавање* $\mathbb{R}^3$ *у* $\mathbb{R}^2$ *јер*

$$f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x + x', y + y', z + z') =$$
$$= (2(x + x') + (y + y'), (x + x') - 2(y + y') + (z + z'))$$

Пример

- $f : V \to V,\ f(x) \overset{\text{def}}{=} 0$, *тј.* $f = 0$ *- нула функција је ендоморфизам простора* V, *јер је* $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = 0 = 0 + 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$.
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (2x + y, x - 2y + z)$ *је линеарно пресликавање* $\mathbb{R}^3$ *у* $\mathbb{R}^2$ *јер*

$$
\begin{aligned}
& f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x + x', y + y', z + z') = \\
& = (2(x + x') + (y + y'), (x + x') - 2(y + y') + (z + z')) \\
& = ((2x + y) + (2x' + y'), (x - 2y + z) + (x' - 2y' + z'))
\end{aligned}
$$

Пример

- $f : V \to V,\ f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0$, *тј.* $f = 0$ *- нула функција је ендоморфизам простора* V, *јер је* $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = 0 = 0 + 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y).$
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (2x + y, x - 2y + z)$ *је линеарно пресликавање* $\mathbb{R}^3$ *у* $\mathbb{R}^2$ *јер*

$$
\begin{aligned}
&f((x,y,z) + (x',y',z')) = f(x + x', y + y', z + z') = \\
&= (2(x + x') + (y + y'), (x + x') - 2(y + y') + (z + z')) \\
&= ((2x + y) + (2x' + y'), (x - 2y + z) + (x' - 2y' + z')) \\
&= (2x + y, x - 2y + z) + (2x' + y', x' - 2y' + z')
\end{aligned}
$$

Пример

- $f : V \to V,\ f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0$, *тј.* $f = 0$ *- нула функција је ендоморфизам простора* V, *јер је* $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = 0 = 0 + 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$.
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (2x + y, x - 2y + z)$ *је линеарно пресликавање* $\mathbb{R}^3$ *у* $\mathbb{R}^2$ *јер*

$$\begin{aligned}
&f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x + x', y + y', z + z') = \\
&= (2(x + x') + (y + y'), (x + x') - 2(y + y') + (z + z')) \\
&= ((2x + y) + (2x' + y'), (x - 2y + z) + (x' - 2y' + z')) \\
&= (2x + y, x - 2y + z) + (2x' + y', x' - 2y' + z') \\
&= f(x, y, z) + f(x', y', z')
\end{aligned}$$

Пример

- $f : V \to V,\ f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0$, *тј.* $f = 0$ *- нула функција је ендоморфизам простора* V*, јер је* $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = 0 = 0 + 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$.
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (2x + y, x - 2y + z)$ *је линеарно пресликавање* $\mathbb{R}^3$ *у* $\mathbb{R}^2$ *јер*

$$
\begin{aligned}
&f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x + x', y + y', z + z') = \\
&= (2(x + x') + (y + y'), (x + x') - 2(y + y') + (z + z')) \\
&= ((2x + y) + (2x' + y'), (x - 2y + z) + (x' - 2y' + z')) \\
&= (2x + y, x - 2y + z) + (2x' + y', x' - 2y' + z') \\
&= f(x, y, z) + f(x', y', z')
\end{aligned}
$$

и

Пример

$$f(\alpha(x,y,z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) =$$

Пример

$$f(\alpha(x,y,z)) \quad = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (2\alpha x + \alpha y, \alpha x - 2\alpha y + \alpha z)$$

Пример

$$\begin{aligned} f(\alpha(x,y,z)) &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (2\alpha x + \alpha y, \alpha x - 2\alpha y + \alpha z) \\ &= (\alpha(2x+y), \alpha(x-2y+z)) \\ &= \alpha(2x+y, x-2y+z) \\ &= \alpha f(x,y,z). \end{aligned}$$

Пример

$$\begin{aligned} f(\alpha(x,y,z)) &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (2\alpha x + \alpha y, \alpha x - 2\alpha y + \alpha z) \\ &= (\alpha(2x+y), \alpha(x-2y+z)) \\ &= \alpha(2x+y, x-2y+z) \\ &= \alpha f(x,y,z). \end{aligned}$$

- $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$, $D(f) = f'$ *је линеарно пресликавање* $\mathbb{R}_n[x]$ *у* $\mathbb{R}_{n-1}[x]$

Пример

$$
\begin{aligned}
f(\alpha(x,y,z)) &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (2\alpha x + \alpha y, \alpha x - 2\alpha y + \alpha z) \\
&= (\alpha(2x+y), \alpha(x-2y+z)) \\
&= \alpha(2x+y, x-2y+z) \\
&= \alpha f(x,y,z).
\end{aligned}
$$

- $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$, $D(f) = f'$ *је линеарно пресликавање* $\mathbb{R}_n[x]$ *у* $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ *јер је*

  $$D(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)' = \alpha \cdot f' + \beta \cdot g' = \alpha \cdot D(f) + \beta \cdot D(g).$$

- $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ *-i-та пројекција је линеарно пресликавање* $\mathbb{R}^n$ *у* $\mathbb{R}$.

Пример

$$\begin{aligned} f(\alpha(x,y,z)) &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (2\alpha x + \alpha y, \alpha x - 2\alpha y + \alpha z) \\ &= (\alpha(2x+y), \alpha(x-2y+z)) \\ &= \alpha(2x+y, x-2y+z) \\ &= \alpha f(x,y,z). \end{aligned}$$

- $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$, $D(f) = f'$ *је линеарно пресликавање* $\mathbb{R}_n[x]$ *у* $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ *јер је*

  $$D(\alpha\cdot f+\beta\cdot g) = (\alpha\cdot f+\beta\cdot g)' = \alpha\cdot f'+\beta\cdot g' = \alpha\cdot D(f)+\beta\cdot D(g).$$

- $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ p_i(x_1,\ldots,x_n) = x_i$ *-i-та пројекција је линеарно пресликавање* $\mathbb{R}^n$ *у* $\mathbb{R}$.
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x+1, x+y)$ *није линеарно, јер* $f(0,0) = (1,0) \neq (0,0)$.

Пример

$$\begin{aligned} f(\alpha(x,y,z)) &= f(\alpha x,\alpha y,\alpha z) = (2\alpha x+\alpha y,\alpha x-2\alpha y+\alpha z) \\ &= (\alpha(2x+y),\alpha(x-2y+z)) \\ &= \alpha(2x+y,x-2y+z) \\ &= \alpha f(x,y,z). \end{aligned}$$

- $D:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_{n-1}[x]$, $D(f)=f'$ *је линеарно пресликавање* $\mathbb{R}_n[x]$ *у* $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ *јер је*

  $$D(\alpha\cdot f+\beta\cdot g)=(\alpha\cdot f+\beta\cdot g)'=\alpha\cdot f'+\beta\cdot g'=\alpha\cdot D(f)+\beta\cdot D(g).$$

- $p_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ p_i(x_1,\dots,x_n)=x_i$ *-i-та пројекција је линеарно пресликавање* $\mathbb{R}^n$ *у* $\mathbb{R}$.
- $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(x+1,x+y)$ *није линеарно, јер* $f(0,0)=(1,0)\neq(0,0)$.

Линеарна независност вектора

Нека је $(V, +, \cdot, F)$ векторски простор.

Линеарна независност вектора

Нека je $(V, +, \cdot, F)$ векторски простор.

Дефиниција

Вектор $x \in V$ *je линеарна комбинација вектора* $x_1, \dots, x_n \in V$ *ако постоје скалари* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ *такви да je*

$$x = \alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n.$$

Линеарна независност вектора

Нека је $(V, +, \cdot, F)$ векторски простор.

Дефиниција

Вектор $x \in V$ *је линеарна комбинација вектора* $x_1, \ldots, x_n \in V$ *ако постоје скалари* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ *такви да је*

$$x = \alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n.$$

Пример

Вектор $(1, 2, -3) \in \mathbb{R}^3$ *је линеарна комбинација вектора* $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ *јер је*

Линеарна независност вектора

Нека је $(V, +, \cdot, F)$ векторски простор.

Дефиниција

Вектор $x \in V$ *је линеарна комбинација вектора* $x_1, \ldots, x_n \in V$ *ако постоје скалари* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ *такви да је*

$$x = \alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n.$$

Пример

Вектор $(1, 2, -3) \in \mathbb{R}^3$ *је линеарна комбинација вектора* $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ *јер је*

$$\begin{aligned}(1, 2, -3) &= (1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, -3)\\ &= 1 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) - 3 \cdot (0, 0, 1).\end{aligned}$$

Пример

Покажимо да вектор $(1,2,3)$ *није линеарна комбинација следећих вектора* $(1,1,1),(1,1,0),(1,1,2)$.

Пример

Покажимо да вектор $(1,2,3)$ *није линеарна комбинација следећих вектора* $(1,1,1),(1,1,0),(1,1,2)$.
Потражимо $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ *такве да је*

$$(1,2,3)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,1,2)$$

Пример

Покажимо да вектор $(1,2,3)$ *није линеарна комбинација следећих вектора* $(1,1,1),(1,1,0),(1,1,2)$.
Потражимо $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ *такве да је*

$$\begin{aligned} & (1,2,3)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,1,2) \\ \Leftrightarrow\quad & (1,2,3)=(\alpha,\alpha,\alpha)+(\beta,\beta,0)+(\gamma,\gamma,2\gamma) \end{aligned}$$

Пример

Покажимо да вектор $(1,2,3)$ *није линеарна комбинација следећих вектора* $(1,1,1),(1,1,0),(1,1,2)$.

Потражимо $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ *такве да је*

$$\begin{aligned} & (1,2,3)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,1,2) \\ \Leftrightarrow\quad & (1,2,3)=(\alpha,\alpha,\alpha)+(\beta,\beta,0)+(\gamma,\gamma,2\gamma) \\ \Leftrightarrow\quad & (1,2,3)=(\alpha+\beta+\gamma,\alpha+\beta+\gamma,\alpha+2\gamma) \end{aligned}$$

Пример

Покажимо да вектор $(1,2,3)$ *није линеарна комбинација следећих вектора* $(1,1,1),(1,1,0),(1,1,2)$.
Потражимо $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ *такве да је*

$$\begin{aligned} & (1,2,3)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,1,2)\\ \Leftrightarrow\quad & (1,2,3)=(\alpha,\alpha,\alpha)+(\beta,\beta,0)+(\gamma,\gamma,2\gamma)\\ \Leftrightarrow\quad & (1,2,3)=(\alpha+\beta+\gamma,\alpha+\beta+\gamma,\alpha+2\gamma)\\ \Leftrightarrow\quad & \left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & \alpha+\beta+\gamma\\ 2 & = & \alpha+\beta+\gamma\\ 3 & = & \alpha+2\gamma. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Пример

Покажимо да вектор $(1,2,3)$ *није линеарна комбинација следећих вектора* $(1,1,1),(1,1,0),(1,1,2)$.

Потражимо $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ *такве да је*

$$\begin{aligned} & (1,2,3)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,1,2) \\ \Leftrightarrow\quad & (1,2,3)=(\alpha,\alpha,\alpha)+(\beta,\beta,0)+(\gamma,\gamma,2\gamma) \\ \Leftrightarrow\quad & (1,2,3)=(\alpha+\beta+\gamma,\alpha+\beta+\gamma,\alpha+2\gamma) \\ \Leftrightarrow\quad & \begin{cases} 1 = \alpha+\beta+\gamma \\ 2 = \alpha+\beta+\gamma \\ 3 = \alpha+2\gamma. \end{cases} \end{aligned}$$

Овај систем једначина нема решење (1=2), па $(1,2,3)$ *није линеарна комбинација вектора* $(1,1,1),(1,1,0),(1,1,2)$.

Пример

Да ли је полином $p = 2 - 3x + x^2 \in \mathbb{Q}[x]$ *линеарна комбинација полинома* $p_1 = 2 - x$, $p_2 = x + 2x^2$ *и* $p_3 = 3 - 2x + 3x^2$*?*

Пример

Да ли је полином $p = 2 - 3x + x^2 \in \mathbb{Q}[x]$ *линеарна комбинација полинома* $p_1 = 2 - x$, $p_2 = x + 2x^2$ *и* $p_3 = 3 - 2x + 3x^2$*?*

Испитајмо да ли постоје скалари $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Q}$ *такви да је*

$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3,$

Пример

Да ли је полином $p = 2 - 3x + x^2 \in \mathbb{Q}[x]$ *линеарна комбинација полинома* $p_1 = 2 - x$, $p_2 = x + 2x^2$ *и* $p_3 = 3 - 2x + 3x^2$*?*

Испитајмо да ли постоје скалари $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Q}$ *такви да је*

$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$, *тј.*

$2 - 3x + x^2 = \alpha_1(2 - x) + \alpha_2(x + 2x^2) + \alpha_3(3 - 2x + 3x^2),$

Пример

Да ли је полином $p = 2 - 3x + x^2 \in \mathbb{Q}[x]$ *линеарна комбинација полинома* $p_1 = 2 - x$, $p_2 = x + 2x^2$ *и* $p_3 = 3 - 2x + 3x^2$*?*
Испитајмо да ли постоје скалари $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Q}$ *такви да је*
$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$, *тј.*
$2 - 3x + x^2 = \alpha_1(2 - x) + \alpha_2(x + 2x^2) + \alpha_3(3 - 2x + 3x^2)$, *што је еквивалентно систему линеарних једначина*

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & 2\alpha_1 + 3\alpha_3 \\ -3 & = & -\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ 1 & = & 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \end{array}.$$

Пример

Да ли је полином $p = 2 - 3x + x^2 \in \mathbb{Q}[x]$ *линеарна комбинација полинома* $p_1 = 2 - x$, $p_2 = x + 2x^2$ *и* $p_3 = 3 - 2x + 3x^2$*?*
Испитајмо да ли постоје скалари $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Q}$ *такви да је* $p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$, *тј.*
$2 - 3x + x^2 = \alpha_1(2 - x) + \alpha_2(x + 2x^2) + \alpha_3(3 - 2x + 3x^2)$, *што је еквивалентно систему линеарних једначина*

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & 2\alpha_1 + 3\alpha_3 \\ -3 & = & -\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ 1 & = & 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \end{array}.$$

Овај систем једначина има јединствено решење
$\alpha_1 = -\frac{7}{8},\ \alpha_2 = -\frac{11}{8},\ \alpha_3 = \frac{5}{4}$,

Пример

Да ли је полином $p = 2 - 3x + x^2 \in \mathbb{Q}[x]$ *линеарна комбинација полинома* $p_1 = 2 - x$, $p_2 = x + 2x^2$ *и* $p_3 = 3 - 2x + 3x^2$*?*
Испитајмо да ли постоје скалари $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Q}$ *такви да је* $p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$, *тј.*
$2 - 3x + x^2 = \alpha_1(2 - x) + \alpha_2(x + 2x^2) + \alpha_3(3 - 2x + 3x^2)$, *што је еквивалентно систему линеарних једначина*

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & 2\alpha_1 + 3\alpha_3 \\ -3 & = & -\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ 1 & = & 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \end{array}.$$

Овај систем једначина има јединствено решење
$\alpha_1 = -\frac{7}{8},\ \alpha_2 = -\frac{11}{8},\ \alpha_3 = \frac{5}{4}$, *па је* $p = -\frac{7}{8}p_1 - \frac{11}{8}p_2 + \frac{5}{4}p_3$.

Пример

Да ли је полином $p = 2 - 3x + x^2 \in \mathbb{Q}[x]$ *линеарна комбинација полинома* $p_1 = 2 - x$, $p_2 = x + 2x^2$ *и* $p_3 = 3 - 2x + 3x^2$?
Испитајмо да ли постоје скалари $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Q}$ *такви да је* $p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$, *тј.*
$2 - 3x + x^2 = \alpha_1(2 - x) + \alpha_2(x + 2x^2) + \alpha_3(3 - 2x + 3x^2)$, *што је еквивалентно систему линеарних једначина*

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & 2\alpha_1 + 3\alpha_3 \\ -3 & = & -\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ 1 & = & 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \end{array}.$$

Овај систем једначина има јединствено решење $\alpha_1 = -\frac{7}{8},\ \alpha_2 = -\frac{11}{8},\ \alpha_3 = \frac{5}{4}$, *па је* $p = -\frac{7}{8}p_1 - \frac{11}{8}p_2 + \frac{5}{4}p_3$. *Дакле,* p *је линеарна комбинација вектора* p_1, p_2 *и* p_3.

Дефиниција

1. *Скуп вектора* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *је линеарно зависан ако постоје скалари* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *од којих је бар један различит од нуле, такви да је* $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$, *тј.*

Дефиниција

1. *Скуп вектора* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *је линеарно зависан ако постоје скалари* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *од којих је бар један различит од нуле, такви да је* $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$, *тј.*

$$(\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F)$$

$$(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \wedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)).$$

Дефиниција

1. *Скуп вектора* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *је линеарно зависан ако постоје скалари* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *од којих је бар један различит од нуле, такви да је* $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$, *тј.*

$$(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F)$$

$$(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \wedge (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)).$$

2. *Скуп вектора* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *је линеарно независан ако није линеарно зависан, тј.*

Дефиниција

1. *Скуп вектора* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *је линеарно зависан ако постоје скалари* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *од којих је бар један различит од нуле, такви да је* $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$, *тј.*

$$(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F)$$

$$(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \wedge (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)).$$

2. *Скуп вектора* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *је линеарно независан ако није линеарно зависан, тј.*

$$(\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F)(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0).$$

Дефиниција

- *Бесконачан скуп вектора $S \subseteq V$ је линеарно зависан ако је бар један његов коначан подскуп линеарно зависан.*

Дефиниција

- *Бесконачан скуп вектора* $S \subseteq V$ *је линеарно зависан ако је бар један његов коначан подскуп линеарно зависан.*
- *Бесконачан скуп вектора* $S \subseteq V$ *је линеарно независан ако је сваки његов коначан подскуп линеарно независан.*

Дефиниција

- *Бесконачан скуп вектора* $S \subseteq V$ *је линеарно зависан ако је бар један његов коначан подскуп линеарно зависан.*
- *Бесконачан скуп вектора* $S \subseteq V$ *је линеарно независан ако је сваки његов коначан подскуп линеарно независан.*

Теорема

(1) *Сваки надскуп линеарно зависног скупа вектора је линеарно зависан.*

Дефиниција

- *Бесконачан скуп вектора $S \subseteq V$ је линеарно зависан ако је бар један његов коначан подскуп линеарно зависан.*
- *Бесконачан скуп вектора $S \subseteq V$ је линеарно независан ако је сваки његов коначан подскуп линеарно независан.*

Теорема

(1) *Сваки надскуп линеарно зависног скупа вектора је линеарно зависан.*

(2) *Сваки подскуп линеарно независног скупа вектора је линеарно независан.*

Дефиниција

- *Бесконачан скуп вектора $S \subseteq V$ је линеарно зависан ако је бар један његов коначан подскуп линеарно зависан.*
- *Бесконачан скуп вектора $S \subseteq V$ је линеарно независан ако је сваки његов коначан подскуп линеарно независан.*

Теорема

(1) *Сваки надскуп линеарно зависног скупа вектора је линеарно зависан.*

(2) *Сваки подскуп линеарно независног скупа вектора је линеарно независан.*

(3) *Сваки скуп који садржи нула вектор је линеарно зависан.*

Доказ. (1) и (2) следе непосредно из дефиниције.

Доказ. (1) и (2) следе непосредно из дефиниције.
(3) Скуп $\{0_V\}$ је линеарно зависан, јер постоји скалар $\alpha = 1$ такав да је

$$1 \cdot 0_V = 0_V \quad \text{и} \quad 1 \neq 0_F.$$

Доказ. (1) и (2) следе непосредно из дефиниције.
(3) Скуп $\{0_V\}$ је линеарно зависан, јер постоји скалар $\alpha = 1$ такав да је

$$1 \cdot 0_V = 0_V \quad \text{и} \quad 1 \neq 0_F.$$

На основу (1) следи да је и сваки скуп који садржи 0_V линеарно зависан. $\square$

Доказ. (1) и (2) следе непосредно из дефиниције.
(3) Скуп $\{0_V\}$ је линеарно зависан, јер постоји скалар $\alpha = 1$ такав да је

$$1 \cdot 0_V = 0_V \quad \text{и} \quad 1 \neq 0_F.$$

На основу (1) следи да је и сваки скуп који садржи 0_V линеарно зависан. $\square$

Последица. Синглтон $\{x\}$ је линеарно зависан акко је $x = 0$.

Доказ. (1) и (2) следе непосредно из дефиниције.
(3) Скуп $\{0_V\}$ је линеарно зависан, јер постоји скалар $\alpha = 1$ такав да је

$$1 \cdot 0_V = 0_V \quad \text{и} \quad 1 \neq 0_F.$$

На основу (1) следи да је и сваки скуп који садржи 0_V линеарно зависан. $\square$

Последица. Синглтон $\{x\}$ је линеарно зависан акко је $x = 0$.

Пример

Скуп вектора $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *простора* $\mathbb{R}^3$ *је линеарно независан, јер*

$$\alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1) = 0$$

Доказ. (1) и (2) следе непосредно из дефиниције.
(3) Скуп $\{0_V\}$ је линеарно зависан, јер постоји скалар $\alpha = 1$ такав да је

$$1 \cdot 0_V = 0_V \quad \text{и} \quad 1 \neq 0_F.$$

На основу (1) следи да је и сваки скуп који садржи 0_V линеарно зависан. $\square$

Последица. Синглтон $\{x\}$ је линеарно зависан акко је $x = 0$.

Пример

Скуп вектора $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *простора* $\mathbb{R}^3$ *је линеарно независан, јер*

$$\alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Пример

Скуп вектора $\{f = x^2 + 3x + 1,\ g = 5x^2 + x,\ h = -3x^2 + 5x + 2\}$ *простора* $\mathbb{R}_2[x]$ *је линеарно зависан,*

Пример

Скуп вектора $\{f = x^2 + 3x + 1,\ g = 5x^2 + x,\ h = -3x^2 + 5x + 2\}$ *простора* $\mathbb{R}_2[x]$ *је линеарно зависан, јер из*

$$\alpha(x^2 + 3x + 1) + \beta(5x^2 + x) + \gamma(-3x^2 + 5x + 2) = 0$$

следи

Пример

Скуп вектора $\{f = x^2 + 3x + 1,\ g = 5x^2 + x,\ h = -3x^2 + 5x + 2\}$ *простора* $\mathbb{R}_2[x]$ *је линеарно зависан, јер из*

$$\alpha(x^2 + 3x + 1) + \beta(5x^2 + x) + \gamma(-3x^2 + 5x + 2) = 0$$

следи

$$(\alpha + 5\beta - 3\gamma)x^2 + (3\alpha + \beta + 5\gamma)x + (\alpha + 2\gamma) = 0$$

Пример

Скуп вектора $\{f = x^2+3x+1,\ g = 5x^2+x,\ h = -3x^2+5x+2\}$ *простора* $\mathbb{R}_2[x]$ *је линеарно зависан, јер из*

$$\alpha(x^2+3x+1)+\beta(5x^2+x)+\gamma(-3x^2+5x+2)=0$$

следи

$$(\alpha+5\beta-3\gamma)x^2+(3\alpha+\beta+5\gamma)x+(\alpha+2\gamma)=0$$

одакле добијамо систем једначина

$$\begin{aligned}\alpha+5\beta-3\gamma &= 0\\ 3\alpha+\beta+5\gamma &= 0\\ \alpha\quad+2\gamma &= 0\end{aligned}$$

Пример

Скуп вектора $\{f = x^2 + 3x + 1,\ g = 5x^2 + x,\ h = -3x^2 + 5x + 2\}$ *простора* $\mathbb{R}_2[x]$ *је линеарно зависан, јер из*

$$\alpha(x^2 + 3x + 1) + \beta(5x^2 + x) + \gamma(-3x^2 + 5x + 2) = 0$$

следи

$$(\alpha + 5\beta - 3\gamma)x^2 + (3\alpha + \beta + 5\gamma)x + (\alpha + 2\gamma) = 0$$

одакле добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} \alpha + 5\beta - 3\gamma &= 0 \\ 3\alpha + \beta + 5\gamma &= 0 \\ \alpha \quad + 2\gamma &= 0 \end{aligned}$$

који има и нетривијална решења, рецимо $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = -1.$

Пример

$\{1, x, x^2, x^3 \dots\}$ *је линеарно независан скуп вектора простора* $F[x]$.

Пример

$\{1, x, x^2, x^3 \dots\}$ *је линеарно независан скуп вектора простора* $F[x]$. *Заиста, уочимо произвољан коначан подскуп*

$$\{x^{m_1}, x^{m_2}, \dots, x^{m_k}\} \quad (m_1 < m_2 < \cdots < m_k).$$

Пример

$\{1, x, x^2, x^3 \dots\}$ је линеарно независан скуп вектора простора $F[x]$. Заиста, уочимо произвољан коначан подскуп

$$\{x^{m_1}, x^{m_2}, \dots, x^{m_k}\} \quad (m_1 < m_2 < \cdots < m_k).$$

Из

$$\alpha_1 x^{m_1} + \alpha_2 x^{m_2} + \cdots + \alpha_k x^{m_k} = 0$$

(где је 0 нула полином, тј. $0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \cdots + 0 \cdot x^{m_k}$) следи

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0,$$

Пример

$\{1, x, x^2, x^3 \ldots\}$ *је линеарно независан скуп вектора простора* $F[x]$. *Заиста, уочимо произвољан коначан подскуп*

$$\{x^{m_1}, x^{m_2}, \ldots, x^{m_k}\} \quad (m_1 < m_2 < \cdots < m_k).$$

Из

$$\alpha_1 x^{m_1} + \alpha_2 x^{m_2} + \cdots + \alpha_k x^{m_k} = 0$$

(где је 0 нула полином, тј. $0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \cdots + 0 \cdot x^{m_k}$*) следи*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0,$$

па је скуп вектора $\{x^{m_1}, \ldots, x^{m_k}\}$ *линеарно независан, а како је то произвољан коначан подскуп скупа* $\{1, x, x^2, \ldots\}$*, следи да је и* $\{1, x, x^2, \ldots\}$ *линеарно независан.*

Пример

$\{1, x, x^2, x^3 \dots\}$ *је линеарно независан скуп вектора простора* $F[x]$. *Заиста, уочимо произвољан коначан подскуп*

$$\{x^{m_1}, x^{m_2}, \dots, x^{m_k}\} \quad (m_1 < m_2 < \dots < m_k).$$

Из

$$\alpha_1 x^{m_1} + \alpha_2 x^{m_2} + \dots + \alpha_k x^{m_k} = 0$$

(где је 0 нула полином, тј. $0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^{m_k}$*) следи*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0,$$

па је скуп вектора $\{x^{m_1}, \dots, x^{m_k}\}$ *линеарно независан, а како је то произвољан коначан подскуп скупа* $\{1, x, x^2, \dots\}$*, следи да је и* $\{1, x, x^2, \dots\}$ *линеарно независан.*

Пример

Скуп $\{f, g\}$ *где* $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad f(x) = e^x, \quad g(x) = e^x \sin x$, *је линеарно независан.*

Пример

Скуп $\{f, g\}$ *где* $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\quad f(x) = e^x$, $\quad g(x) = e^x \sin x$, *је линеарно независан.*

Заиста,

$$
\begin{array}{rl}
 & \alpha f + \beta g = 0, \text{ за } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) & \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) = 0(x) \quad (0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ 0(x) = 0), \\
\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) & \alpha \cdot e^x + \beta \cdot e^x sinx = 0, \\
\overset{x=0}{\Rightarrow} & \alpha = 0 \\
\Rightarrow & (\forall x \in \mathbb{R})\, \beta \cdot e^x sinx = 0 \\
\overset{x=\frac{\pi}{2}}{\Rightarrow} & \beta \cdot e^{\frac{\pi}{2}} \cdot 1 = 0 \\
\Rightarrow & \beta = 0
\end{array}
$$

па је $\{f, g\}$ *линеарно независан скуп вектора.*

Често се за утврђивање линеарне зависности користи критеријум дат следећом теоремом.

Често се за утврђивање линеарне зависности користи критеријум дат следећом теоремом.

Теорема

Скуп вектора $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $n > 1$, *је линеарно зависан акко се бар један од њих изражава као линеарна комбинација осталих.*

Често се за утврђивање линеарне зависности користи критеријум дат следећом теоремом.

Теорема

Скуп вектора $\{x_1, \dots, x_n\}$, $n > 1$, је линеарно зависан акко се бар један од њих изражава као линеарна комбинација осталих.

Доказ. ($\rightarrow$) Нека је $\{x_1, \dots, x_n\}$ скуп линеарно зависних вектора.

Често се за утврђивање линеарне зависности користи критеријум дат следећом теоремом.

Теорема

Скуп вектора $\{x_1, \dots, x_n\}$, $n > 1$, *је линеарно зависан акко се бар један од њих изражава као линеарна комбинација осталих.*

Доказ. ($\rightarrow$) Нека је $\{x_1, \dots, x_n\}$ скуп линеарно зависних вектора. Тада постоје скалари $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ од којих је бар један различит од нуле, такви да је

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0.$$

Често се за утврђивање линеарне зависности користи критеријум дат следећом теоремом.

Теорема

Скуп вектора $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $n > 1$, *је линеарно зависан акко се бар један од њих изражава као линеарна комбинација осталих.*

Доказ. ($\rightarrow$) Нека је $\{x_1, \ldots, x_n\}$ скуп линеарно зависних вектора. Тада постоје скалари $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ од којих је бар један различит од нуле, такви да је

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0.$$

Нека је $\alpha_i \neq 0$.

Често се за утврђивање линеарне зависности користи критеријум дат следећом теоремом.

Теорема

Скуп вектора $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $n > 1$, је линеарно зависан акко се бар један од њих изражава као линеарна комбинација осталих.

Доказ. ($\rightarrow$) Нека је $\{x_1, \ldots, x_n\}$ скуп линеарно зависних вектора. Тада постоје скалари $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ од којих је бар један различит од нуле, такви да је

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0.$$

Нека је $\alpha_i \neq 0$. Тада постоји $\alpha_i^{-1} \in F$, па множењем претходне једнакости са α_i^{-1} добијамо

Често се за утврђивање линеарне зависности користи критеријум дат следећом теоремом.

Теорема

Скуп вектора $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $n > 1$, *је линеарно зависан акко се бар један од њих изражава као линеарна комбинација осталих.*

Доказ. ($\rightarrow$) Нека је $\{x_1, \ldots, x_n\}$ скуп линеарно зависних вектора. Тада постоје скалари $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ од којих је бар један различит од нуле, такви да је

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0.$$

Нека је $\alpha_i \neq 0$. Тада постоји $\alpha_i^{-1} \in F$, па множењем претходне једнакости са α_i^{-1} добијамо

$$\alpha_i^{-1}\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_i^{-1}\alpha_{i-1}x_{i-1} + \underbrace{\alpha_i \alpha_i^{-1}}_{=1} x_i + \alpha_i^{-1}\alpha_{i+1}x_{i+1} + \cdots + \alpha_i^{-1}\alpha_n \cdot x_n$$

$$= 0,$$

одакле је $x_i = -(\alpha_1 {\alpha_i}^{-1})x_1 - \cdots - (\alpha_{i-1}\alpha_i^{-1})x_{i-1}$
$-(\alpha_{i+1}\alpha_i^{-1})x_{i+1} - \cdots - (\alpha_n {\alpha_i}^{-1}) \cdot x_n,$

одакле је $x_i = -(\alpha_1 {\alpha_i}^{-1})x_1 - \cdots - (\alpha_{i-1}\alpha_i^{-1})x_{i-1}$ $-(\alpha_{i+1}\alpha_i^{-1})x_{i+1} - \cdots - (\alpha_n {\alpha_i}^{-1}) \cdot x_n$, тј. x_i је линеарна комбинација осталих вектора.

одакле je $x_i = -(\alpha_1 {\alpha_i}^{-1})x_1 - \cdots - (\alpha_{i-1}\alpha_i^{-1})x_{i-1}$
$-(\alpha_{i+1}\alpha_i^{-1})x_{i+1} - \cdots - (\alpha_n {\alpha_i}^{-1}) \cdot x_n$, тј. x_i je линеарна комбинација осталих вектора.

($\leftarrow$) Нека je x_i линеарна комбинација преосталих вектора скупа $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

одакле је $x_i = -(\alpha_1 {\alpha_i}^{-1})x_1 - \cdots - (\alpha_{i-1}\alpha_i^{-1})x_{i-1}$ $-(\alpha_{i+1}\alpha_i^{-1})x_{i+1} - \cdots - (\alpha_n {\alpha_i}^{-1}) \cdot x_n$, тј. x_i је линеарна комбинација осталих вектора.

($\longleftarrow$) Нека је x_i линеарна комбинација преосталих вектора скупа $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Тада постоје скалари $\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n$ такви да је

$$x_i = \beta_1 x_1 + \dots \beta_{i-1} x_{i-1} + \beta_{i+1} x_{i+1} + \cdots + \beta_n x_n,$$

одакле је $x_i = -(\alpha_1 {\alpha_i}^{-1})x_1 - \cdots - (\alpha_{i-1}\alpha_i^{-1})x_{i-1}$
$-(\alpha_{i+1}\alpha_i^{-1})x_{i+1} - \cdots - (\alpha_n {\alpha_i}^{-1}) \cdot x_n$, тј. x_i је линеарна комбинација осталих вектора.

($\leftarrow$) Нека је x_i линеарна комбинација преосталих вектора скупа $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Тада постоје скалари $\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n$ такви да је

$$x_i = \beta_1 x_1 + \dots \beta_{i-1}x_{i-1} + \beta_{i+1}x_{i+1} + \cdots + \beta_n x_n,$$

па је

$$\beta_1 x_1 + \quad \cdots + \beta_{i-1}x_{i-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} \cdot x_i + \beta_{i+1}x_{i+1} + \cdots + \beta_n x_n = 0 \quad \text{и}$$

$$(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, -1, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n) \neq (0, \dots, 0),$$

одакле је $x_i = -(\alpha_1 {\alpha_i}^{-1})x_1 - \cdots - (\alpha_{i-1}\alpha_i^{-1})x_{i-1}$ $-(\alpha_{i+1}\alpha_i^{-1})x_{i+1} - \cdots - (\alpha_n {\alpha_i}^{-1}) \cdot x_n$, тј. x_i је линеарна комбинација осталих вектора.

($\leftarrow$) Нека је x_i линеарна комбинација преосталих вектора скупа $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Тада постоје скалари $\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n$ такви да је

$$x_i = \beta_1 x_1 + \ldots \beta_{i-1}x_{i-1} + \beta_{i+1}x_{i+1} + \cdots + \beta_n x_n,$$

па је

$$\beta_1 x_1 + \quad \cdots + \beta_{i-1}x_{i-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} \cdot x_i + \beta_{i+1}x_{i+1} + \cdots + \beta_n x_n = 0 \quad \text{и}$$

$$(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, -1, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n) \neq (0, \ldots, 0),$$

што значи да је $\{x_1, \ldots, x_n\}$ линеарно зависан скуп вектора. $\square$

Напомена. Ако је скуп вектора линеарно зависан, не следи да се сваки елемент тог скупа може изразити као линеарна комбинација осталих вектора.

Напомена. Ако је скуп вектора линеарно зависан, не следи да се сваки елемент тог скупа може изразити као линеарна комбинација осталих вектора.

Пример

Скуп вектора $\{1-x, x, x^2, 1\}$ *простора полинома* $\mathbb{R}_2[x]$ *је линеарно зависан, али се вектор* x^2 *не може изразити као линеарна комбинација осталих вектора овог скупа.*

Напомена. Ако је скуп вектора линеарно зависан, не следи да се сваки елемент тог скупа може изразити као линеарна комбинација осталих вектора.

Пример

Скуп вектора $\{1-x, x, x^2, 1\}$ *простора полинома* $\mathbb{R}_2[x]$ *је линеарно зависан, али се вектор* x^2 *не може изразити као линеарна комбинација осталих вектора овог скупа.*

Линеарни омотач скупа вектора

Нека je $(V, +, \cdot, F)$ векторски простор над пољем F.

Линеарни омотач скупа вектора

Нека je $(V, +, \cdot, F)$ векторски простор над пољем F.

Дефиниција

Нека je $\emptyset \neq S \subseteq V$. Скуп свих коначних линеарних комбинација вектора скупа S се зове линеарни омотач (покривач) или линеал над скупом S и означава са $\mathcal{L}(S)$,

Линеарни омотач скупа вектора

Нека је $(V, +, \cdot, F)$ векторски простор над пољем F.

Дефиниција

Нека је $\emptyset \neq S \subseteq V$. Скуп свих коначних линеарних комбинација вектора скупа S се зове линеарни омотач (покривач) или линеал над скупом S и означава са $\mathcal{L}(S)$, тј.

$$\mathcal{L}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in S, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$$

Линеарни омотач скупа вектора

Нека је $(V, +, \cdot, F)$ векторски простор над пољем F.

Дефиниција

Нека је $\emptyset \neq S \subseteq V$. *Скуп свих коначних линеарних комбинација вектора скупа* S *се зове линеарни омотач (покривач) или линеал над скупом* S *и означава са* $\mathcal{L}(S)$, *тј.*

$$\mathcal{L}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in S, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$$

Теорема

Ако је $\emptyset \neq S \subseteq V$, *тада је* $\mathcal{L}(S)$ *најмањи потпростор векторског простора* V *који садржи скуп* S.

Доказ. Доказ изводимо по деловима.

Доказ. Доказ изводимо по деловима.

- $x \in S \Rightarrow x = 1 \cdot x \in \mathcal{L}(S)$, па je $S \subseteq \mathcal{L}(S)$.

Доказ. Доказ изводимо по деловима.

- $x \in S \Rightarrow x = 1 \cdot x \in \mathcal{L}(S)$, па је $S \subseteq \mathcal{L}(S)$.
- Докажимо да је $\mathcal{L}(S) \preceq V$.

Доказ. Доказ изводимо по деловима.

- $x \in S \Rightarrow x = 1 \cdot x \in \mathcal{L}(S)$, па је $S \subseteq \mathcal{L}(S)$.
- Докажимо да је $\mathcal{L}(S) \preceq V$.

$$x, y \in \mathcal{L}(S),\ \lambda, \mu \in F$$
$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,\ x_i \in S, \alpha_i \in F,\ i = 1, \ldots, n \\ y = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m,\ y_j \in S, \beta_j \in F,\ j = 1, \ldots, m \end{array}$$
$$\Rightarrow \lambda x + \mu y = \lambda(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) + \mu(\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m) =$$
$$= (\lambda\alpha_1)x_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n)x_n + (\mu\beta_1)y_1 + \cdots + (\mu\beta_m)y_m \in \mathcal{L}(S).$$

Доказ. Доказ изводимо по деловима.

- $x \in S \Rightarrow x = 1 \cdot x \in \mathcal{L}(S)$, па је $S \subseteq \mathcal{L}(S)$.
- Докажимо да је $\mathcal{L}(S) \preceq V$.

$$x, y \in \mathcal{L}(S),\ \lambda, \mu \in F$$
$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,\ x_i \in S, \alpha_i \in F,\ i = 1, \ldots, n \\ y = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m,\ y_j \in S, \beta_j \in F,\ j = 1, \ldots, m \end{array}$$
$$\Rightarrow \lambda x + \mu y = \lambda(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) + \mu(\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m) =$$
$$= (\lambda\alpha_1)x_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n)x_n + (\mu\beta_1)y_1 + \cdots + (\mu\beta_m)y_m \in \mathcal{L}(S).$$

- Покажимо да је $\mathcal{L}(S)$ најмањи од свих потпростора који садрже S.

Доказ. Доказ изводимо по деловима.

- $x \in S \Rightarrow x = 1 \cdot x \in \mathcal{L}(S)$, па је $S \subseteq \mathcal{L}(S)$.
- Докажимо да је $\mathcal{L}(S) \preceq V$.

$$x, y \in \mathcal{L}(S),\ \lambda, \mu \in F$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,\ x_i \in S, \alpha_i \in F,\ i = 1, \ldots, n \\ y = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m,\ y_j \in S, \beta_j \in F,\ j = 1, \ldots, m \end{array}$$

$$\Rightarrow \lambda x + \mu y = \lambda(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) + \mu(\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m) =$$

$$= (\lambda\alpha_1)x_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n)x_n + (\mu\beta_1)y_1 + \cdots + (\mu\beta_m)y_m \in \mathcal{L}(S).$$

- Покажимо да је $\mathcal{L}(S)$ најмањи од свих потпростора који садрже S.

  Нека је $U \preceq V$ такав да $S \subseteq U$.

Доказ. Доказ изводимо по деловима.

- $x \in S \Rightarrow x = 1 \cdot x \in \mathcal{L}(S)$, па је $S \subseteq \mathcal{L}(S)$.
- Докажимо да је $\mathcal{L}(S) \preceq V$.

$$x, y \in \mathcal{L}(S),\ \lambda, \mu \in F$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,\ x_i \in S, \alpha_i \in F,\ i = 1, \ldots, n \\ y = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m,\ y_j \in S, \beta_j \in F,\ j = 1, \ldots, m \end{array}$$

$$\Rightarrow \lambda x + \mu y = \lambda(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) + \mu(\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m) =$$

$$= (\lambda\alpha_1)x_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n)x_n + (\mu\beta_1)y_1 + \cdots + (\mu\beta_m)y_m \in \mathcal{L}(S).$$

- Покажимо да је $\mathcal{L}(S)$ најмањи од свих потпростора који садрже S.

Нека је $U \preceq V$ такав да $S \subseteq U$. Тада

$$x \in \mathcal{L}(S)$$

$$\Rightarrow \quad x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,\ x_i \in S, \alpha_i \in F, i = 1, \ldots, n$$

$\Rightarrow \quad x \in U$ (јер је $U \preceq V$, па је затворен за линеарне комбинације).

Доказ. Доказ изводимо по деловима.

- $x \in S \Rightarrow x = 1 \cdot x \in \mathcal{L}(S)$, па је $S \subseteq \mathcal{L}(S)$.
- Докажимо да је $\mathcal{L}(S) \preceq V$.

$$x, y \in \mathcal{L}(S),\ \lambda, \mu \in F$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,\ x_i \in S, \alpha_i \in F,\ i = 1, \ldots, n \\ y = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m,\ y_j \in S, \beta_j \in F,\ j = 1, \ldots, m \end{array}$$

$$\Rightarrow \lambda x + \mu y = \lambda(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) + \mu(\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m) =$$

$$= (\lambda\alpha_1)x_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n)x_n + (\mu\beta_1)y_1 + \cdots + (\mu\beta_m)y_m \in \mathcal{L}(S).$$

- Покажимо да је $\mathcal{L}(S)$ најмањи од свих потпростора који садрже S.

  Нека је $U \preceq V$ такав да $S \subseteq U$. Тада

$$x \in \mathcal{L}(S)$$

$$\Rightarrow \quad x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,\ x_i \in S, \alpha_i \in F, i = 1, \ldots, n$$

$\Rightarrow \quad x \in U$ (јер је $U \preceq V$, па је затворен за линеарне комбинације).

  Дакле, $\mathcal{L}(S) \subseteq U$. $\square$

Доказ. Доказ изводимо по деловима.

- $x \in S \Rightarrow x = 1 \cdot x \in \mathcal{L}(S)$, па је $S \subseteq \mathcal{L}(S)$.
- Докажимо да је $\mathcal{L}(S) \preceq V$.

$$x, y \in \mathcal{L}(S),\ \lambda, \mu \in F$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,\ x_i \in S, \alpha_i \in F,\ i = 1, \ldots, n \\ y = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m,\ y_j \in S, \beta_j \in F,\ j = 1, \ldots, m \end{array}$$

$$\Rightarrow \lambda x + \mu y = \lambda(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) + \mu(\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m) =$$

$$= (\lambda\alpha_1)x_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n)x_n + (\mu\beta_1)y_1 + \cdots + (\mu\beta_m)y_m \in \mathcal{L}(S).$$

- Покажимо да је $\mathcal{L}(S)$ најмањи од свих потпростора који садрже S.

Нека је $U \preceq V$ такав да $S \subseteq U$. Тада

$$x \in \mathcal{L}(S)$$

$$\Rightarrow \quad x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,\ x_i \in S, \alpha_i \in F, i = 1, \ldots, n$$

$\Rightarrow \quad x \in U$ (јер је $U \preceq V$, па је затворен за линеарне комбинације).

Дакле, $\mathcal{L}(S) \subseteq U$. $\square$

Пример

(1) *Ако је* $V = \mathbb{R}^2,\ S = \{(1,2)\}$, *тада* $\mathcal{L}(S) = \{\alpha(1,2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ *је права у* $\mathbb{R}^2$ *кроз тачке (1,2) и (0,0).*

Пример

(1) *Ако је* $V = \mathbb{R}^2,\ S = \{(1,2)\}$, *тада*
$\mathcal{L}(S) = \{\alpha(1,2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ *је права у* $\mathbb{R}^2$ *кроз тачке (1,2) и (0,0).*

(2) *Ако је* $V = \mathbb{R}^3,\ S = \{(1,2,3)\}$ *тада*
$\mathcal{L}(S) = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *је права у простору* $\mathbb{R}^3$ *одређена тачкама* $(0,0,0)$ *и* $(1,2,3)$.

Пример

(1) *Ако је* $V = \mathbb{R}^2,\ S = \{(1,2)\}$, *тада* $\mathcal{L}(S) = \{\alpha(1,2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ *је права у* $\mathbb{R}^2$ *кроз тачке (1,2) и (0,0).*

(2) *Ако је* $V = \mathbb{R}^3,\ S = \{(1,2,3)\}$ *тада* $\mathcal{L}(S) = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *је права у простору* $\mathbb{R}^3$ *одређена тачкама* $(0,0,0)$ *и* $(1,2,3)$.

(3) *Ако је* $V = \mathbb{R}^3$ *и* $S = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ *тада је* $\mathcal{L}(S)$ *раван* xOy.

Пример

(1) *Ако је* $V = \mathbb{R}^2,\ S = \{(1,2)\}$*, тада*
$\mathcal{L}(S) = \{\alpha(1,2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ *је права у* $\mathbb{R}^2$ *кроз тачке (1,2) и (0,0).*

(2) *Ако је* $V = \mathbb{R}^3,\ S = \{(1,2,3)\}$ *тада*
$\mathcal{L}(S) = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *је права у простору* $\mathbb{R}^3$ *одређена тачкама* $(0,0,0)$ *и* $(1,2,3)$.

(3) *Ако је* $V = \mathbb{R}^3$ *и* $S = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ *тада је* $\mathcal{L}(S)$ *раван* xOy.

Теорема

(1) $\mathcal{L}(S) = S$ *акко* $S \preceq V$;

Теорема

(1) $\mathcal{L}(S) = S$ *акко* $S \preceq V$*;*

(2) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$*, тј.* $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$ *(идемпотентност);*

Теорема

(1) $\mathcal{L}(S) = S$ акко $S \preceq V$;

(2) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$, тј. $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$ (идемпотентност);

(3) $S \subseteq T \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T)$;

Теорема

(1) $\mathcal{L}(S) = S$ акко $S \preceq V$;

(2) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$, тј. $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$ (идемпотентност);

(3) $S \subseteq T \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T)$;

(4) $\mathcal{L}(S \cup T) = \mathcal{L}(S) + \mathcal{L}(T)$;

Теорема

(1) $\mathcal{L}(S) = S$ акко $S \preceq V$;

(2) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$, тј. $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$ (идемпотентност);

(3) $S \subseteq T \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T)$;

(4) $\mathcal{L}(S \cup T) = \mathcal{L}(S) + \mathcal{L}(T)$;

(5) $S \subseteq T \subseteq \mathcal{L}(S) \Rightarrow \ \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T)$;

Теорема

(1) $\mathcal{L}(S) = S$ акко $S \preceq V$;

(2) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$, тј. $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$ (идемпотентност);

(3) $S \subseteq T \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T)$;

(4) $\mathcal{L}(S \cup T) = \mathcal{L}(S) + \mathcal{L}(T)$;

(5) $S \subseteq T \subseteq \mathcal{L}(S) \Rightarrow \ \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T)$;

(6) $x \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow \ \mathcal{L}(S \cup \{x\}) = \mathcal{L}(S)$.

Теорема

(1) $\mathcal{L}(S) = S$ *акко* $S \preceq V$;

(2) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$, *тј.* $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$ *(идемпотентност)*;

(3) $S \subseteq T \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T)$;

(4) $\mathcal{L}(S \cup T) = \mathcal{L}(S) + \mathcal{L}(T)$;

(5) $S \subseteq T \subseteq \mathcal{L}(S) \Rightarrow \ \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T)$;

(6) $x \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow \ \mathcal{L}(S \cup \{x\}) = \mathcal{L}(S)$.

Доказ.

(1) Следи непосредно из претходне теореме.

Теорема

(1) $\mathcal{L}(S) = S$ акко $S \preceq V$;

(2) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$, тј. $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$ (идемпотентност);

(3) $S \subseteq T \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T)$;

(4) $\mathcal{L}(S \cup T) = \mathcal{L}(S) + \mathcal{L}(T)$;

(5) $S \subseteq T \subseteq \mathcal{L}(S) \Rightarrow \ \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T)$;

(6) $x \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow \ \mathcal{L}(S \cup \{x\}) = \mathcal{L}(S)$.

Доказ.

(1) Следи непосредно из претходне теореме.

(2) $\mathcal{L}(S) \preceq V$ из претх. теореме $\Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$ из (1).

Теорема

(1) $\mathcal{L}(S) = S$ акко $S \preceq V$;

(2) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$, тј. $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$ (идемпотентност);

(3) $S \subseteq T \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T)$;

(4) $\mathcal{L}(S \cup T) = \mathcal{L}(S) + \mathcal{L}(T)$;

(5) $S \subseteq T \subseteq \mathcal{L}(S) \Rightarrow \ \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T)$;

(6) $x \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow \ \mathcal{L}(S \cup \{x\}) = \mathcal{L}(S)$.

Доказ.

(1) Следи непосредно из претходне теореме.

(2) $\mathcal{L}(S) \preceq V$ из претх. теореме $\Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$ из (1).

(3) Следи непосредно из дефиниције линеарног омотача скупа вектора.

Теорема

(1) $\mathcal{L}(S) = S$ акко $S \preceq V$;

(2) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$, тј. $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$ (идемпотентност);

(3) $S \subseteq T \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T)$;

(4) $\mathcal{L}(S \cup T) = \mathcal{L}(S) + \mathcal{L}(T)$;

(5) $S \subseteq T \subseteq \mathcal{L}(S) \Rightarrow \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T)$;

(6) $x \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow \mathcal{L}(S \cup \{x\}) = \mathcal{L}(S)$.

Доказ.

(1) Следи непосредно из претходне теореме.

(2) $\mathcal{L}(S) \preceq V$ из претх. теореме $\Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$ из (1).

(3) Следи непосредно из дефиниције линеарног омотача скупа вектора.

Доказ.

(4) $\mathcal{L}(S \cup T) = \mathcal{L}(S) + \mathcal{L}(T)$?

$$
\begin{aligned}
x \in \quad & \mathcal{L}(S \cup T) \Leftrightarrow x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, \quad x_i \in S \cup T, \alpha_i \in F \\
& \Leftrightarrow x = \underbrace{\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_k y_k}_{=y} + \underbrace{\gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_l z_l}_{=z}, y_i \in S, z_i \in T, \\
& \Leftrightarrow x = y + z, \quad y \in \mathcal{L}(S), z \in \mathcal{L}(T) \\
& \Leftrightarrow x \in \mathcal{L}(S) + \mathcal{L}(T).
\end{aligned}
$$

Доказ.

(4) $\mathcal{L}(S\cup T)=\mathcal{L}(S)+\mathcal{L}(T)$?

$$\begin{aligned} x\in\ &\mathcal{L}(S\cup T)\Leftrightarrow x=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n,\quad x_i\in S\cup T,\alpha_i\in F\\ &\Leftrightarrow x=\underbrace{\beta_1y_1+\cdots+\beta_ky_k}_{=y}+\underbrace{\gamma_1z_1+\cdots+\gamma_lz_l}_{=z},y_i\in S,z_i\in T,\\ &\Leftrightarrow x=y+z,\quad y\in\mathcal{L}(S),z\in\mathcal{L}(T)\\ &\Leftrightarrow x\in\mathcal{L}(S)+\mathcal{L}(T). \end{aligned}$$

(5) $S\subseteq T\subseteq\mathcal{L}(S)\ \Rightarrow\ \mathcal{L}(S)=\mathcal{L}(T)$?

$$\left.\begin{array}{r} S\subseteq T\overset{(3)}{\Rightarrow}\mathcal{L}(S)\subseteq\mathcal{L}(T)\\ T\subseteq\mathcal{L}(S)\overset{(3)}{\Rightarrow}\mathcal{L}(T)\subseteq\mathcal{L}(\mathcal{L}(S))\overset{(2)}{=}\mathcal{L}(S)\end{array}\right\}\Rightarrow\mathcal{L}(S)=$$

$\mathcal{L}(T)$.

Доказ.

(4) $\mathcal{L}(S \cup T) = \mathcal{L}(S) + \mathcal{L}(T)$?

$$\begin{aligned} x \in \ & \mathcal{L}(S \cup T) \Leftrightarrow x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, \quad x_i \in S \cup T, \alpha_i \in F \\ & \Leftrightarrow x = \underbrace{\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_k y_k}_{=y} + \underbrace{\gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_l z_l}_{=z}, y_i \in S, z_i \in T, \\ & \Leftrightarrow x = y + z, \quad y \in \mathcal{L}(S), z \in \mathcal{L}(T) \\ & \Leftrightarrow x \in \mathcal{L}(S) + \mathcal{L}(T). \end{aligned}$$

(5) $S \subseteq T \subseteq \mathcal{L}(S) \ \Rightarrow \ \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T)$?

$$\left.\begin{array}{r} S \subseteq T \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T) \\ T \subseteq \mathcal{L}(S) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \mathcal{L}(T) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) \stackrel{(2)}{=} \mathcal{L}(S) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T).$$

(6) $x \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow \mathcal{L}(S \cup \{x\}) = \mathcal{L}(S)$?

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{L}(S) \quad & \Rightarrow \quad S \subseteq S \cup \{x\} \subseteq \mathcal{L}(S) \\ & \Rightarrow \quad \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S \cup \{x\}) \quad (\text{из } (5)). \end{aligned}$$

$\square$

Доказ.

(4) $\mathcal{L}(S \cup T) = \mathcal{L}(S) + \mathcal{L}(T)$?

$$\begin{aligned} x \in\ & \mathcal{L}(S \cup T) \Leftrightarrow x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, \quad x_i \in S \cup T, \alpha_i \in F \\ & \Leftrightarrow x = \underbrace{\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_k y_k}_{=y} + \underbrace{\gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_l z_l}_{=z}, y_i \in S, z_i \in T, \\ & \Leftrightarrow x = y + z, \quad y \in \mathcal{L}(S), z \in \mathcal{L}(T) \\ & \Leftrightarrow x \in \mathcal{L}(S) + \mathcal{L}(T). \end{aligned}$$

(5) $S \subseteq T \subseteq \mathcal{L}(S) \ \Rightarrow\ \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T)$?

$$\left.\begin{aligned} S \subseteq T \overset{(3)}{\Rightarrow} \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T) \\ T \subseteq \mathcal{L}(S) \overset{(3)}{\Rightarrow} \mathcal{L}(T) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) \overset{(2)}{=} \mathcal{L}(S) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T).$$

(6) $x \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow\ \mathcal{L}(S \cup \{x\}) = \mathcal{L}(S)$?

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{L}(S) \quad & \Rightarrow \quad S \subseteq S \cup \{x\} \subseteq \mathcal{L}(S) \\ & \Rightarrow \quad \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S \cup \{x\}) \quad (\text{из } (5)). \end{aligned}$$

□

Дефиниција

Ако је $\mathcal{L}(S) = V$ кажемо да скуп S генерише простор V, а скуп S се зове генераторни скуп (генератриса) простора V.

Дефиниција

Ако је $\mathcal{L}(S) = V$ *кажемо да скуп* S *генерише простор* V*, а скуп* S *се зове генераторни скуп (генератриса) простора* V*.*

Пример

(1) $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\})$, *јер за произвољан вектор* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *важи*
$(x,y,z) = x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1).$

Дефиниција

Ако је $\mathcal{L}(S) = V$ кажемо да скуп S генерише простор V, а скуп S се зове генераторни скуп (генератриса) простора V.

Пример

(1) $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\})$, *јер за произвољан вектор* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *важи*
$(x,y,z) = x\cdot(1,0,0) + y\cdot(0,1,0) + z\cdot(0,0,1)$.

(2) $\mathbb{R}_3[x] = \mathcal{L}\{1, x, x^2, x^3\}$, *јер за свако* $f \in \mathbb{R}_3[x]$ *важи*
$f = a_0\cdot 1 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2 + a_3\cdot x^3$ *(*$a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$*).*
Приметимо да и сваки надскуп скупа $\{1, x, x^2, x^3\}$ *генерише простор* $\mathbb{R}_3[x]$*, као и да ниједан његов прави подскуп не генерише простор* $\mathbb{R}_3[x]$*.*

Дефиниција

Ако је $\mathcal{L}(S) = V$ кажемо да скуп S генерише простор V, а скуп S се зове генераторни скуп (генератриса) простора V.

Пример

(1) $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\})$, *јер за произвољан вектор* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *важи*
$(x,y,z) = x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1)$.

(2) $\mathbb{R}_3[x] = \mathcal{L}\{1, x, x^2, x^3\}$, *јер за свако* $f \in \mathbb{R}_3[x]$ *важи*
$f = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$ *(*$a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$*).*
Приметимо да и сваки надскуп скупа $\{1, x, x^2, x^3\}$ *генерише простор* $\mathbb{R}_3[x]$, *као и да ниједан његов прави подскуп не генерише простор* $\mathbb{R}_3[x]$.

(3) $\mathbb{R}[x] = \mathcal{L}\{1, x, x^2, \dots\}$.

Дефиниција

Ако је $\mathcal{L}(S) = V$ *кажемо да скуп* S *генерише простор* V*, а скуп* S *се зове генераторни скуп (генератриса) простора* V*.*

Пример

(1) $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\})$, *јер за произвољан вектор* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *важи*
$(x,y,z) = x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1)$.

(2) $\mathbb{R}_3[x] = \mathcal{L}\{1,x,x^2,x^3\}$, *јер за свако* $f \in \mathbb{R}_3[x]$ *важи*
$f = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$ *(*$a_0,a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{R}$*).*
Приметимо да и сваки надскуп скупа $\{1,x,x^2,x^3\}$ *генерише простор* $\mathbb{R}_3[x]$*, као и да ниједан његов прави подскуп не генерише простор* $\mathbb{R}_3[x]$*.*

(3) $\mathbb{R}[x] = \mathcal{L}\{1,x,x^2,\dots\}$.

Пример

Да ли скуп полинома $\{f = x^2 + x,\ g = x^2 - 1,\ h = x + 1\}$ *генерише простор* $\mathbb{R}_2[x]$*?*

Пример

Да ли скуп полинома $\{f = x^2 + x,\ g = x^2 - 1,\ h = x + 1\}$ *генерише простор* $\mathbb{R}_2[x]$*?*
Испитајмо да ли за произвољан полином $p = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$ *постоје скалари* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *такви да је*

$$\begin{aligned} & p = \alpha f + \beta g + \gamma h \\ \Leftrightarrow\ & ax^2 + bx + c = \alpha(x^2 + x) + \beta(x^2 - 1) + \gamma(x + 1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & a \\ \alpha + \gamma & = & b \\ -\beta + \gamma & = & c \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & a \\ -\beta + \gamma & = & b - a \\ -\beta + \gamma & = & c \end{array} \Leftrightarrow$$

Пример

Да ли скуп полинома $\{f = x^2 + x,\ g = x^2 - 1,\ h = x + 1\}$ *генерише простор* $\mathbb{R}_2[x]$*?*
Испитајмо да ли за произвољан полином $p = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$ *постоје скалари* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *такви да је*

$$\begin{aligned} & p = \alpha f + \beta g + \gamma h \\ \Leftrightarrow\quad & ax^2 + bx + c = \alpha(x^2 + x) + \beta(x^2 - 1) + \gamma(x + 1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & a \\ \alpha + \gamma & = & b \\ -\beta + \gamma & = & c \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & a \\ -\beta + \gamma & = & b - a \\ -\beta + \gamma & = & c \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & a \\ -\beta + \gamma & = & b - a \\ 0 & = & c - b + a. \end{array}$$

Пример

Добијени систем једначина је сагласан акко $c - b + a = 0$,

Пример

Добијени систем једначина је сагласан акко $c - b + a = 0$*, па скуп* $\{f, g, h\}$ *не генерише цео простор* $\mathbb{R}_2[x]$*, тј.* $\mathcal{L}\{f, g, h\} \subsetneqq \mathbb{R}_2[x]$.

Пример

Добијени систем једначина је сагласан акко $c - b + a = 0$*, па скуп* $\{f, g, h\}$ *не генерише цео простор* $\mathbb{R}_2[x]$*, тј.* $\mathcal{L}\{f, g, h\} \subsetneq \mathbb{R}_2[x]$.
Такође

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f, g, h\} &= \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \mid c - b + a = 0\} \\
&= \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \mid c = b - a\} \\
&= \{ax^2 + bx + (b - a) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a(x^2 - 1) + b(x + 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\{g, h\}.
\end{aligned}$$

Пример

Добијени систем једначина је сагласан акко $c - b + a = 0$, *па скуп* $\{f, g, h\}$ *не генерише цео простор* $\mathbb{R}_2[x]$, *тј.* $\mathcal{L}\{f, g, h\} \subsetneq \mathbb{R}_2[x]$.
Такође

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f, g, h\} &= \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \mid c - b + a = 0\} \\ &= \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \mid c = b - a\} \\ &= \{ax^2 + bx + (b - a) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(x^2 - 1) + b(x + 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\{g, h\}.\end{aligned}$$

До истог закључка се могло доћи и на следећи начин:
$f = 1 \cdot g + 1 \cdot h \in \mathcal{L}\{g, h\} \;\Rightarrow \mathcal{L}\{f, g, h\} = \mathcal{L}\{g, h\}$ *(особина (6)).*