Линеарна алгебра 1

седмо предавање

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Универзитет у Крагујевцу

База векторског простора

Нека je $(V, +, \cdot, F)$ векторски простор и $\emptyset \neq B \subseteq V$.

База векторског простора

Нека је $(V, +, \cdot, F)$ векторски простор и $\emptyset \neq B \subseteq V$.

Дефиниција

Скуп вектора B је база простора V ако је линеарно независан и генерише простор V, тј.

(B_1) $\mathcal{L}(B) = V$;

(B_2) B *је линеарно независан скуп вектора.*

База векторског простора

Нека је $(V, +, \cdot, F)$ векторски простор и $\emptyset \neq B \subseteq V$.

Дефиниција

Скуп вектора B је база простора V ако је линеарно независан и генерише простор V, тј.

(B_1) $\mathcal{L}(B) = V$;

(B_2) B *је линеарно независан скуп вектора.*

Пример

(1) $(F, +, \cdot, F)$, *једна база је* $B = \{1\}$.

(B_1) $F = \mathcal{L}\{1\}$ *јер* $(\forall x \in F)\ \underbrace{x}_{\text{вектор}} = \underbrace{x}_{\text{скалар}} \cdot \underbrace{1}_{\text{вектор}}$;

(B_2) $\{1\}$ *је линеарно независан, јер* $\alpha \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

Пример

(2) $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{R})$, *једна база је* $B = \{1, i\}$.

(B_1) $(\forall x \in \mathbb{C})(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ x = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot i \Rightarrow \mathbb{C} = \mathcal{L}\{1, i\}$;

(B_2) $\{1, i\}$ *је линеарно независан, јер* $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

Пример

(2) $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{R})$, *једна база је* $B = \{1, i\}$.

(B_1) $(\forall x \in \mathbb{C})(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ x = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot i \Rightarrow \mathbb{C} = \mathcal{L}\{1, i\}$;

(B_2) $\{1, i\}$ *је линеарно независан, јер* $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

(3) $(F^n, +, \cdot, F)$, *база* $B = \{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)\}$ *се зове стандардна база простора* F^n.

(B_1) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot (1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_n \cdot (0, \ldots, 0, 1)$, *сваки* $(x_1, \ldots, x_n) \in F^n$ *је линеарна комбинација вектора из* B.

(B_2)
$$\begin{aligned} & \alpha_1 \cdot (1, 0, \ldots, 0) + \cdots + \alpha_n \cdot (0, \ldots, 0, 1) = (0, \ldots, 0) \\ \Rightarrow\ & (\alpha_1, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, \alpha_n) = (0, \ldots, 0) \\ \Rightarrow\ & (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0) \\ \Rightarrow\ & B \text{ је линеарно независан скуп.} \end{aligned}$$

Пример

(4) $(F^{\mathbb{N}}, +, \cdot, F)$, *једна база је*
$B = \{(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), \dots\}$.

Пример

(4) $(F^{\mathbb{N}}, +, \cdot, F)$, *једна база је* $B = \{(1, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), \dots\}$.

(5) $(F_n[x], +, \cdot, F)$, *база* $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ *се зове стандардна база простора* $F_n[x]$.

Пример

(4) $(F^{\mathbb{N}}, +, \cdot, F)$, *једна база је* $B = \{(1,0,0,\dots),(0,1,0,\dots),\dots\}$.

(5) $(F_n[x], +, \cdot, F)$, *база* $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ *се зове стандардна база простора* $F_n[x]$.

(6) $(F^S, +, \cdot, F)$, *једна база је* $B = \{\chi_s \mid s \in S\}$, *где*
$\chi_s : S \to F$, $\chi_s(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & t = s \\ 0, & t \neq s \end{cases}$.

Теорема

Непразан скуп $B \subseteq V$ *је база векторског простора* V *акко је скуп* B *минимални скуп који генерише* V.

Теорема

Непразан скуп $B \subseteq V$ је база векторског простора V акко је скуп B минимални скуп који генерише V.

Доказ. Нека за B важе аксиоме (B_1) и (B_2).

- Из (B_1) следи да B генерише V.

Теорема

Непразан скуп $B \subseteq V$ је база векторског простора V акко је скуп B минимални скуп који генерише V.

Доказ. Нека за B важе аксиоме (B_1) и (B_2).

- Из (B_1) следи да B генерише V.
- Покажимо да је B минимални скуп са том особином, тј. да ниједан његов прави подскуп не генерише V.

Теорема

Непразан скуп $B \subseteq V$ је база векторског простора V акко је скуп B минимални скуп који генерише V.

Доказ. Нека за B важе аксиоме (B_1) и (B_2).

- Из (B_1) следи да B генерише V.
- Покажимо да је B минимални скуп са том особином, тј. да ниједан његов прави подскуп не генерише V.
  Претпоставимо супротно, тј. нека је $\emptyset \neq B' \subsetneq B$ такав да је $\mathcal{L}(B') = V$.

Теорема

Непразан скуп $B \subseteq V$ је база векторског простора V акко је скуп B минимални скуп који генерише V.

Доказ. Нека за B важе аксиоме (B_1) и (B_2).

- Из (B_1) следи да B генерише V.
- Покажимо да је B минимални скуп са том особином, тј. да ниједан његов прави подскуп не генерише V.
  Претпоставимо супротно, тј. нека је $\emptyset \neq B' \subsetneq B$ такав да је $\mathcal{L}(B') = V$.
  $(\exists x) x \in B \setminus B'$ (јер $B' \subsetneq B$)
  $\Rightarrow x \in \mathcal{L}(B')$ (јер B' генерише цео простор V)
  $\Rightarrow B' \cup \{x\}$ је линеарно зависан
  $\Rightarrow B$ је линеарно зависан(као надскуп лин. зав. скупа $B' \cup \{x\}$)
  Контрадикција са (B_2).

Обратно, нека је B минималан скуп вектора који генерише простор V.

(B_1) $\mathcal{L}(B) = V$ (по претпоставци);

Обратно, нека је B минималан скуп вектора који генерише простор V.

(B_1) $\mathcal{L}(B) = V$ (по претпоставци);

(B_2) Докажимо да је B линеарно независан скуп вектора.

Обратно, нека је B минималан скуп вектора који генерише простор V.

(B_1) $\mathcal{L}(B) = V$ (по претпоставци);

(B_2) Докажимо да је B линеарно независан скуп вектора. Претпоставимо супротно, тј. да је B линеарно зависан скуп. Тада постоји $x \in B$ који је линеарна комбинација осталих вектора из B, тј.

$$x \in \mathcal{L}(B'), \quad \text{где је } B' = B \setminus \{x\}.$$

Обратно, нека је B минималан скуп вектора који генерише простор V.

(B_1) $\mathcal{L}(B) = V$ (по претпоставци);

(B_2) Докажимо да је B линеарно независан скуп вектора. Претпоставимо супротно, тј. да је B линеарно зависан скуп. Тада постоји $x \in B$ који је линеарна комбинација осталих вектора из B, тј.

$$x \in \mathcal{L}(B'), \quad \text{где је } B' = B \setminus \{x\}.$$

Тада важи

$$\mathcal{L}(B') \overset{(6)}{=} \mathcal{L}(B' \cup \{x\}) = \mathcal{L}(B) = V$$

што је супротно претпоставци да је B минимални скуп који генерише V. Дакле, B је линеарно независан скуп вектора. $\square$

Теорема

Непразан скуп $B \subseteq V$ *је база векторског простора* V *акко је максималан линеарно независан скуп.*

Теорема

Непразан скуп $B \subseteq V$ је база векторског простора V акко је максималан линеарно независан скуп.

Доказ. Из (B_2) следи да је B линеарно независан. Покажимо да је B максималан такав скуп, тј. да је сваки његов прави надскуп линеарно зависан.

Теорема

Непразан скуп $B \subseteq V$ је база векторског простора V акко је максималан линеарно независан скуп.

Доказ. Из (B_2) следи да је B линеарно независан. Покажимо да је B максималан такав скуп, тј. да је сваки његов прави надскуп линеарно зависан.

Нека је $B \subsetneqq B'$. Тада

$$
\begin{aligned}
& (\exists x) x \in B' \setminus B \\
\Rightarrow \quad & x \in \mathcal{L}(B) \quad (\text{ jep } \mathcal{L}(B) = V) \\
\Rightarrow \quad & B \cup \{x\} \text{ је линеарно зависан} \\
\Rightarrow \quad & B' \text{ је линеарно зависан} \quad (\text{из } B \cup \{x\} \subseteq B')
\end{aligned}
$$

Дакле, B је максималан линеарно независан скуп вектора.

$(\leftarrow)$ Нека је B максималан линеарно независан скуп.

($\leftarrow$) Нека је B максималан линеарно независан скуп.

(B_2) Важи по претпоставци.

(B_1) Докажимо да B генерише цео простор V. Претпоставимо супротно, тј.

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(B) \subsetneq V \\ \Rightarrow \quad & (\exists x) x \in V \setminus \mathcal{L}(B) \\ \Rightarrow \quad & B' = B \cup \{x\} \text{ је линеарно независан} \end{aligned}$$

Контрадикција са претпоставком да је B максималан линеарно независан скуп.

Дакле, $\mathcal{L}(B) = V$. $\square$

($\leftarrow$) Нека је B максималан линеарно независан скуп.

(B_2) Важи по претпоставци.

(B_1) Докажимо да B генерише цео простор V. Претпоставимо супротно, тј.

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(B) \subsetneq V \\ \Rightarrow\quad & (\exists x) x \in V \setminus \mathcal{L}(B) \\ \Rightarrow\quad & B' = B \cup \{x\} \text{ је линеарно независан} \end{aligned}$$

Контрадикција са претпоставком да је B максималан линеарно независан скуп.

Дакле, $\mathcal{L}(B) = V$. $\square$

Теорема

(Карактеризација базе.) Скуп $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ је база простора V акко сваки $x \in V$ има јединствену репрезентацију

$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,$ *где* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$, *тј.*

$$(\forall x \in V)(\exists_1 (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n)\ x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n. \qquad (*)$$

Доказ. ($\rightarrow$) Егзистенција репрезентације: из (B_1) следи

$$\mathcal{L}(B) = V \Rightarrow (\forall x \in V)(\exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n)\, x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Доказ. ($\rightarrow$) Егзистенција репрезентације: из (B_1) следи

$$\mathcal{L}(B) = V \Rightarrow (\forall x \in V)(\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n)\, x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Јединственост:

Доказ. ($\rightarrow$) Егзистенција репрезентације: из (B_1) следи

$$\mathcal{L}(B) = V \Rightarrow (\forall x \in V)(\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n)\, x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Јединственост:

$$\begin{aligned} x = \alpha_1 x_1 + & \cdots + \alpha_n x_n,\ x = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n \quad (\alpha_i, \beta_i \in F) \\ \Rightarrow & \quad \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n \\ \Rightarrow & \quad (\alpha_1 - \beta_1) x_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) x_n = 0 \\ \Rightarrow & \quad \alpha_1 - \beta_1 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0 \text{ (следи из } (B_2)) \\ \Rightarrow & \quad \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n \\ \Rightarrow & \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_n). \end{aligned}$$

$(\leftarrow)$

(B_1) Из егзистенције репрезентације $(*)$ следи $V \subseteq \mathcal{L}(B)$. Обрнута инклузија свакако важи, па је $\mathcal{L}(B) = V$.

$(\leftarrow)$

(B_1) Из егзистенције репрезентације $(*)$ следи $V \subseteq \mathcal{L}(B)$. Обрнута инклузија свакако важи, па је $\mathcal{L}(B) = V$.

(B_2) Нека је

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F.$$

Свакако је

$$0_F \cdot x_1 + \cdots + 0_F \cdot x_n = 0.$$

Из јединствености репрезентације нула вектора преко вектора из B следи

$$\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0.$$

Дакле, B је линеарно независан скуп вектора. $\square$

$(\leftarrow)$

(B_1) Из егзистенције репрезентације $(*)$ следи $V \subseteq \mathcal{L}(B)$. Обрнута инклузија свакако важи, па је $\mathcal{L}(B) = V$.

(B_2) Нека је

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F.$$

Свакако је

$$0_F \cdot x_1 + \cdots + 0_F \cdot x_n = 0.$$

Из јединствености репрезентације нула вектора преко вектора из B следи

$$\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0.$$

Дакле, B је линеарно независан скуп вектора. $\square$

Дефиниција

Скаларе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из репрезентације $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ зовемо координатама вектора x у бази $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Пример

Како је $(1,2,3) = 1\cdot(1,0,0) + 2\cdot(0,1,0) + 3\cdot(0,0,1)$, *то вектор* $(1,2,3)$ *у стандардној бази* $e = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *има координате* $(1,2,3)$.

Пример

Како је $(1,2,3) = 1 \cdot (1,0,0) + 2 \cdot (0,1,0) + 3 \cdot (0,0,1)$, *то вектор* $(1,2,3)$ *у стандардној бази* $e = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *има координате* $(1,2,3)$.

Координате вектора $(1,2,3)$ *у бази* $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *су* $(-1,-1,3)$ *јер је* $(1,2,3) = -1 \cdot (1,0,0) - 1 \cdot (1,1,0) + 3 \cdot (1,1,1)$.

Пример

Како је $(1,2,3) = 1\cdot(1,0,0) + 2\cdot(0,1,0) + 3\cdot(0,0,1)$, *то вектор* $(1,2,3)$ *у стандардној бази* $e = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *има координате* $(1,2,3)$.
Координате вектора $(1,2,3)$ *у бази* $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *су* $(-1,-1,3)$ *јер је* $(1,2,3) = -1\cdot(1,0,0) - 1\cdot(1,1,0) + 3\cdot(1,1,1)$.

Теорема

Нека је $B = \{x_1,\dots,x_n\}$ *база простора* V. *Пресликавање*

$$k_B : V \to F^n, \quad k_B(x) \overset{\text{деф}}{=} (\alpha_1,\dots,\alpha_n), \quad \text{за } x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

је изоморфизам простора V *на простор* F^n.

Пример

Како је $(1,2,3) = 1 \cdot (1,0,0) + 2 \cdot (0,1,0) + 3 \cdot (0,0,1)$, *то вектор* $(1,2,3)$ *у стандардној бази* $e = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *има координате* $(1,2,3)$.
Координате вектора $(1,2,3)$ *у бази* $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *су* $(-1,-1,3)$ *јер је* $(1,2,3) = -1 \cdot (1,0,0) - 1 \cdot (1,1,0) + 3 \cdot (1,1,1)$.

Теорема

Нека је $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *база простора* V. *Пресликавање*

$$k_B : V \to F^n, \quad k_B(x) \overset{\text{деф}}{=} (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \text{за } x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

је изоморфизам простора V *на простор* F^n.

Доказ.

- k_B је добро дефинисано и "1-1": Према Теореми 3.13. произвољни вектори $x, y \in V$ имају јединствене репрезентације
  $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, \quad y = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n$. Тада
  $x = y \Leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \Leftrightarrow k_B(x) = k_B(y)$.

Доказ.

- k_B је добро дефинисано и "1-1": Према Теореми 3.13. произвољни вектори $x, y \in V$ имају јединствене репрезентације $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, \quad y = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n$. Тада $x = y \Leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \Leftrightarrow k_B(x) = k_B(y)$.
- k_B је "на" јер $(\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n)(\exists x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in V) k_B(x) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Доказ.

- k_B је добро дефинисано и "1-1": Према Теореми 3.13. произвољни вектори $x, y \in V$ имају јединствене репрезентације $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, \quad y = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n$. Тада $x = y \Leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \Leftrightarrow k_B(x) = k_B(y)$.
- k_B је "на" јер $(\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n)(\exists x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in V) k_B(x) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
- k_B је линеарно:

$$
\begin{aligned}
(1) \quad & k_B(x+y) = k_B((\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) + (\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n)) \\
& = k_B((\alpha_1 + \beta_1) x_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) x_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n \\
& = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n) = k_B(x) + k_B(y) \\
(2) \quad & k_B(\alpha x) = k_B(\alpha(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = k_B((\alpha\alpha_1) x_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n) \\
& = (\alpha\alpha_1, \ldots, \alpha\alpha_n) = \alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha k_B(x) \; \square
\end{aligned}
$$

Упоредимо број линеарно независних вектора са бројем генераторних вектора неког простора V.

Упоредимо број линеарно независних вектора са бројем генераторних вектора неког простора V.

Теорема

Ако је $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ линеарно независан скуп вектора и $G = \{y_1, \ldots, y_m\}$ генераторни скуп вектора векторског простора V, онда је $n \leq m$.

Упоредимо број линеарно независних вектора са бројем генераторних вектора неког простора V.

Теорема

Ако је $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ линеарно независан скуп вектора и $G = \{y_1, \dots, y_m\}$ генераторни скуп вектора векторског простора V, онда је $n \le m$.

Доказ.

$$x_1 \in V,\ \mathcal{L}(G) = V \Rightarrow G_1 = \{x_1, y_1, \dots, y_m\} \text{ је лин. зависан}$$

$$\Rightarrow (\exists \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F)(\beta x_1 + \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m = 0 \\ \wedge (\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq (0, \dots, 0))$$

- $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0 \Rightarrow\ \beta x_1 = 0 \Rightarrow \beta = 0 (x_1 \neq 0$, јер је S линеарно независан), па је G_1 линеарно независан. Контрадикција.

- Бар један од скалара $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ је различит од нуле. Уочимо y_s, $s \in \{1, \ldots, m\}$ такав да је y_s линеарна комбинација претходних у низу.

- Бар један од скалара $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ је различит од нуле. Уочимо y_s, $s \in \{1, \ldots, m\}$ такав да је y_s линеарна комбинација претходних у низу.

Тада је
$$\mathcal{L}(G_1 \setminus \{y_s\}) = \mathcal{L}(G_1) = V.$$

Избацимо y_s из G_1 и поновимо поступак.

$$G_2 = \{x_1, x_2, y_1, \ldots, \widehat{y_s}, \ldots, y_m\}$$

(где $\widehat{y_s}$ означава да је елемент y_s избачен) је линеарно зависан.

- Бар један од скалара $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ је различит од нуле. Уочимо y_s, $s \in \{1, \dots, m\}$ такав да је y_s линеарна комбинација претходних у низу.

Тада је

$$\mathcal{L}(G_1 \setminus \{y_s\}) = \mathcal{L}(G_1) = V.$$

Избацимо y_s из G_1 и поновимо поступак.

$$G_2 = \{x_1, x_2, y_1, \dots, \widehat{y_s}, \dots, y_m\}$$

(где $\widehat{y_s}$ означава да је елемент y_s избачен) је линеарно зависан. Уочимо y_t који је линеарна комбинација претходних и избацимо га. Тада $G_2 \setminus \{y_t\}$ генерише V, па је

$$G_3 = \{x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, \widehat{y_s}, \dots, \widehat{y_t}, \dots, y_m\}$$

линеарно зависан.

$\vdots$

У $n-$том кораку добијамо

$$G_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad \underbrace{y_k, \ldots}_{\text{бар једно } y_k} \quad \}$$

У $n-$том кораку добијамо

$$G_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \underbrace{y_k, \ldots}_{\text{бар једно } y_k}\}$$

који је линеарно зависан (по конструкцији), па садржи бар један y_k (ако не садржи ниједно y_k онда $G_n = S$, па би био линеарно независан). Како смо у сваком од претходних $n-1$ кораку убацили по један x_i и избацили по један елемент скупа G, следи да је $n \leq m$. $\square$

Последица. Ако векторски простор V има коначну базу, онда свака његова база има исти број вектора.

Последица. Ако векторски простор V има коначну базу, онда свака његова база има исти број вектора.

Доказ. Нека простор V има коначну базу и нека су $B_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $B_2 = \{y_1, \ldots, y_m\}$ две базе простора V. Тада, према Теореми 3.15.

$$\left.\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{ll} B_1 & \text{је линеарно независан} \\ B_2 & \text{генерише } V \end{array}\right\} & \Rightarrow \quad n \leq m \\ \left.\begin{array}{ll} B_2 & \text{је линеарно независан} \\ B_1 & \text{генерише } V \end{array}\right\} & \Rightarrow \quad m \leq n \end{array}\right\} \Rightarrow n = m.$$

Последица. Ако векторски простор V има коначну базу, онда свака његова база има исти број вектора.

Доказ. Нека простор V има коначну базу и нека су $B_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $B_2 = \{y_1, \dots, y_m\}$ две базе простора V. Тада, према Теореми 3.15.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} B_1 & \text{је линеарно независан} \\ B_2 & \text{генерише } V \end{array}\right\} \Rightarrow \quad n \le m \\ \left.\begin{array}{ll} B_2 & \text{је линеарно независан} \\ B_1 & \text{генерише } V \end{array}\right\} \Rightarrow \quad m \le n \end{array}\right\} \Rightarrow n = m.$$

Теорема

Сваки векторски простор $V \neq \{0\}$ има базу.

Димензија векторског простора

Дефиниција

Димензија векторског простора V *се обележава са* $\dim V$ *и дефинише на следећи начин:*

(1) *Ако је* $V = \{0\}$*, онда* $\dim V = 0$*.*

(2) *Ако простор* V *има базу од* n *елемената, онда* $\dim V = n$*.*

(3) *Ако простор нема коначну базу, онда* $\dim V = \infty$*.*

Ако је $\dim V \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *онда је* V *коначнодимензионалан векторски простор.*

Димензија векторског простора

Дефиниција

Димензија векторског простора V *се обележава са* $\mathrm{dim}V$ *и дефинише на следећи начин:*

(1) *Ако је* $V = \{0\}$, *онда* $\mathrm{dim}V = 0$.

(2) *Ако простор* V *има базу од* n *елемената, онда* $\mathrm{dim}V = n$.

(3) *Ако простор нема коначну базу, онда* $\mathrm{dim}V = \infty$.

Ако је $\mathrm{dim}V \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *онда је* V *коначнодимензионалан векторски простор.*

Пример

1. $(F, +, \cdot, F)$ *има базу* $B = \{1\}$, *па је* $\dim F$=1.

Пример

1. $(F, +, \cdot, F)$ *има базу* $B = \{1\}$, *па је* $\dim F$*=1*.
2. $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = (\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{R})$ *има базу* $B = \{1, i\}$, *па је* $\dim \mathbb{C}_{\mathbb{R}} = 2$.

Пример

1. $(F, +, \cdot, F)$ *има базу* $B = \{1\}$, *па је* $\dim F$=1.
2. $\mathbb{C}_\mathbb{R} = (\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{R})$ *има базу* $B = \{1, i\}$, *па је* $\dim \mathbb{C}_\mathbb{R} = 2$.
3. $(F^n, +, \cdot, F)$ *има базу* $B = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$, *па је* $\dim F^n = n$.

Пример

1. $(F, +, \cdot, F)$ *има базу* $B = \{1\}$, *па је* $\dim F$*=1*.
2. $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = (\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{R})$ *има базу* $B = \{1, i\}$, *па је* $\dim \mathbb{C}_{\mathbb{R}} = 2$.
3. $(F^n, +, \cdot, F)$ *има базу* $B = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$, *па је* $\dim F^n = n$.
4. $(F_n[x], +, \cdot, F)$ *има базу* $B = \{1, x, \dots, x^n\}$, *па је* $\dim F_n[x] = n + 1$.

Пример

1. $(F,+,\cdot,F)$ *има базу* $B=\{1\}$, *па је* $\dim F$*=1.*
2. $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}=(\mathbb{C},+,\cdot,\mathbb{R})$ *има базу* $B=\{1,i\}$, *па је* $\dim\mathbb{C}_{\mathbb{R}}=2$.
3. $(F^n,+,\cdot,F)$ *има базу* $B=\{(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\}$, *па је* $\dim F^n=n$.
4. $(F_n[x],+,\cdot,F)$ *има базу* $B=\{1,x,\dots,x^n\}$, *па је* $\dim F_n[x]=n+1$.
5. $(F[x],+,\cdot,F)$ *нема коначну базу, па је* $\dim F[x]=\infty$.

Пример

1. $(F, +, \cdot, F)$ *има базу* $B = \{1\}$, *па је* $\mathrm{dim}F$*=1.*
2. $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = (\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{R})$ *има базу* $B = \{1, i\}$, *па је* $\mathrm{dim}\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = 2$.
3. $(F^n, +, \cdot, F)$ *има базу* $B = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$, *па је* $\mathrm{dim}F^n = n$.
4. $(F_n[x], +, \cdot, F)$ *има базу* $B = \{1, x, \ldots, x^n\}$, *па је* $\mathrm{dim}F_n[x] = n + 1$.
5. $(F[x], +, \cdot, F)$ *нема коначну базу, па је* $\mathrm{dim}F[x] = \infty$.
6. $(F^{\mathbb{N}}, +, \cdot, F)$ *нема коначну базу, па је* $\mathrm{dim}F^{\mathbb{N}} = \infty$.

Пример

Дати су скупови вектора
$T_1 = \{(1,2,3),(2,4,5)\}$,
$T_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1),(1,2,3)\}$,
$T_3 = \{(1,1,1),(2,0,2),(0,1,0)\}$,
$T_4 = \{(2,0,0),(2,2,0),(2,2,2)\}$ *простора* $\mathbb{R}^3$.
Који од датих скупова су
(i) *линеарно независни,*
(ii) *генераторни за* $\mathbb{R}^3$,
(iii) *база за* $\mathbb{R}^3$?

Пример

За сваки од датих потпростора простора $\mathbb{R}^3$ одредити по једну базу и димензију:

- $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$.
- $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.
- $U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 0\}$.
- $U_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + z\}$.

Пример

За сваки од датих потпростора простора $\mathbb{R}^3$ одредити по једну базу и димензију:

- $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$.
- $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.
- $U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 0\}$.
- $U_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + z\}$.

Теорема

Сваки линеарно независан скуп вектора коначно димензионог простора V је или база или се може проширити до базе тог простора.

Пример

За сваки од датих потпростора простора $\mathbb{R}^3$ *одредити по једну базу и димензију:*

- $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$.
- $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.
- $U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 0\}$.
- $U_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + z\}$.

Теорема

Сваки линеарно независан скуп вектора коначно димензионог простора V *је или база или се може проширити до базе тог простора.*

Доказ. Нека је $\dim V = n$ и нека је $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$ линеарно независан скуп.

Доказ. Нека је $\dim V = n$ и нека је $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$ линеарно независан скуп.
Тада, по Теореми 3.15. $m \leq n$.

Доказ. Нека је $\dim V = n$ и нека је $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$ линеарно независан скуп.
Тада, по Теореми 3.15. $m \leq n$.

- $m = n$ следи да је S база за V (по Теореми 3.12.)

Доказ. Нека је $\dim V = n$ и нека је $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$ линеарно независан скуп.
Тада, по Теореми 3.15. $m \leq n$.

- $m = n$ следи да је S база за V (по Теореми 3.12.)
- $m < n \Rightarrow \mathcal{L}(S) \neq V \Rightarrow \exists x_{m+1} \in V \setminus \mathcal{L}(S)$

Доказ. Нека је $\dim V = n$ и нека је $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$ линеарно независан скуп.
Тада, по Теореми 3.15. $m \leq n$.

- $m = n$ следи да је S база за V (по Теореми 3.12.)
- $m < n \Rightarrow \mathcal{L}(S) \neq V \Rightarrow \exists x_{m+1} \in V \setminus \mathcal{L}(S)$
  $\Rightarrow S_1 = \{x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}\}$ је линеарно независан.

Доказ. Нека је $\dim V = n$ и нека је $S = \{x_1, \dots, x_m\}$ линеарно независан скуп.
Тада, по Теореми 3.15. $m \leq n$.

- $m = n$ следи да је S база за V (по Теореми 3.12.)
- $m < n \Rightarrow \mathcal{L}(S) \neq V \Rightarrow \exists x_{m+1} \in V \setminus \mathcal{L}(S)$
  $\Rightarrow S_1 = \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$ је линеарно независан.
  - $m + 1 = n \;\Rightarrow S_1$ је база за V

Доказ. Нека је $\dim V = n$ и нека је $S = \{x_1, \dots, x_m\}$ линеарно независан скуп.

Тада, по Теореми 3.15. $m \leq n$.

- $m = n$ следи да је S база за V (по Теореми 3.12.)
- $m < n \Rightarrow \mathcal{L}(S) \neq V \Rightarrow \exists x_{m+1} \in V \setminus \mathcal{L}(S)$
  $\Rightarrow S_1 = \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$ је линеарно независан.
  - $m + 1 = n \;\Rightarrow S_1$ је база за V
  - $m + 1 \neq n$ настављамо поступак

Доказ. Нека је $\dim V = n$ и нека је $S = \{x_1, \ldots, x_m\}$ линеарно независан скуп.

Тада, по Теореми 3.15. $m \leq n$.

- $m = n$ следи да је S база за V (по Теореми 3.12.)
- $m < n \Rightarrow \mathcal{L}(S) \neq V \Rightarrow \exists x_{m+1} \in V \setminus \mathcal{L}(S)$
  $\Rightarrow S_1 = \{x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}\}$ је линеарно независан.
  - $m + 1 = n \ \Rightarrow S_1$ је база за V
  - $m + 1 \neq n$ настављамо поступак

  $\vdots$

  $S_k = \{x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+k}\}$, при чему $m + k = n$, је линеарно независан

Доказ. Нека је $\dim V = n$ и нека је $S = \{x_1, \dots, x_m\}$ линеарно независан скуп.
Тада, по Теореми 3.15. $m \leq n$.

- $m = n$ следи да је S база за V (по Теореми 3.12.)
- $m < n \Rightarrow \mathcal{L}(S) \neq V \Rightarrow \exists x_{m+1} \in V \setminus \mathcal{L}(S)$
  $\Rightarrow S_1 = \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$ је линеарно независан.
  - $m + 1 = n \;\Rightarrow S_1$ је база за V
  - $m + 1 \neq n$ настављамо поступак

  $\vdots$

  $S_k = \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+k}\}$, при чему $m + k = n$, је линеарно независан

$\Rightarrow \mathcal{L}(S_k) = V$ (у супротном би постојало $n + 1$ линеарно независних вектора, контрадикција са $\dim V = n$)
$\Rightarrow S_k$ је база за V. $\square$

Пример

Уколико је могуће, проширити до базе следеће скупове вектора:
(i) $\{1, x+2\}$ *у простору* $\mathbb{R}_2[x]$
(ii) $\{(1,1),(2,2)\}$ *у простору* $\mathbb{R}^2$.

Пример

Уколико је могуће, проширити до базе следеће скупове вектора:
(i) $\{1, x+2\}$ *у простору* $\mathbb{R}_2[x]$
(ii) $\{(1,1), (2,2)\}$ *у простору* $\mathbb{R}^2$.

Теорема

Нека је $(V, +, \cdot, F)$ *коначнодимензиони векторски простор и нека су* U, U_1, U_2 *његови потпростори. Тада*

(1) $\dim U \leq \dim V$,

(2) $\dim U = \dim V \;\Rightarrow\; U = V$,

(3) $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$ - *Грасманова формула.*
Посебно, ако $V = U_1 \oplus U_2$, *онда* $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$.

Пример

Уколико је могуће, проширити до базе следеће скупове вектора:
(i) $\{1, x+2\}$ *у простору* $\mathbb{R}_2[x]$
(ii) $\{(1,1),(2,2)\}$ *у простору* $\mathbb{R}^2$.

Теорема

Нека је $(V,+,\cdot,F)$ *коначнодимензиони векторски простор и нека су* U, U_1, U_2 *његови потпростори. Тада*

(1) $\dim U \leq \dim V$,

(2) $\dim U = \dim V \;\Rightarrow\; U = V$,

(3) $\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$ - *Грасманова формула.*
Посебно, ако $V = U_1 \oplus U_2$, *онда* $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$.

Доказ.

(1) Потростор U има коначну базу, иначе би у U, а тиме и у V, постојао бесконачан линеарно независан скуп вектора, што би противречило претпоставци да је V коначнодимензионалан.
Нека је $B_U = \{x_1, \ldots, x_n\}$ база простора U.
$\Rightarrow B_U$ је линеарно независан скуп вектора
$\Rightarrow B_U$ се може проширити до базе простора V
$\Rightarrow \ \mathrm{dim} U \leq \mathrm{dim} V$.

(2) Нека је

$$U \preceq V, \quad \dim U = \dim V = n \quad i \quad B_U = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ база од } U$$

$\Rightarrow B_U$ је линеарно независан скуп вектора у простору V димензије n
$\Rightarrow \mathcal{L}(B_U) = V$
$(\mathcal{L}(B_U) \neq V \Rightarrow$ постоји $x \in V \setminus \mathcal{L}(B_U)$
$\Rightarrow \{x_1, \ldots, x_n, x\}$ је лин. нез. скуп, контрадикција са $\dim V = n)$
$\Rightarrow U = \mathcal{L}(B_U) = V.$

(3) $\begin{array}{c} U_1, U_2 \preceq V \Rightarrow U_1 \cap U_2 \preceq V \\ V \text{ коначне димензије} \end{array} \Rightarrow$
$U_1 \cap U_2$ коначне димензије.

(3) Нека је $\dim(U_1 \cap U_2) = m > 0$ и $B' = \{x_1, \ldots, x_m\}$ једна база од $U_1 \cap U_2$.
$\Rightarrow B'$ је линеарно независан скуп у U_1
$\Rightarrow B'$ је или база или се може проширити до базе простора U_1.

- B' је база за $U_1 \Rightarrow \dim U_1 = \dim(U_1 \cap U_2) \overset{(2)}{\Rightarrow} U_1 = U_1 \cap U_2$
  $\Rightarrow \; U_1 \subseteq U_2, U_1 + U_2 = U_2$
  $\Rightarrow \dim(U_1 + U_2) = \dim U_2 = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_1 = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$,
- B' се може се проширити до базе $\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_k\}$ од U_1.
  B' се може проширити до базе $\{x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_l\}$ простора U_2. Докажимо да је

  $$B = \{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l\} \text{ база простора } U_1 + U_2.$$

(B_1) $\mathcal{L}(B) = U_1 + U_2$?

Ако $x = y + z \in U_1 + U_2$, онда $y \in U_1$ и $z \in U_2$ су облика

$y = \alpha_1 x_1 + \dots \alpha_m x_m + \beta_1 y_1 + \dots + \beta_k y_k$,

$(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_k \in F)$

$z = \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_m x_m + \delta_1 z_1 + \dots + \delta_l z_l$,

$(\gamma_1, \dots, \gamma_m, \delta_1, \dots, \delta_l \in F)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow x = \ & (\alpha_1 + \gamma_1)x_1 + \dots + (\alpha_m + \gamma_m)x_m + \\ & + \beta_1 y_1 + \dots + \beta_k y_k + \delta_1 z_1 + \dots + \delta_l z_l \in \mathcal{L}(B) \end{aligned}$$

$\Rightarrow U_1 + U_2 = \mathcal{L}(B)$

(B_2) B је линеарно независан скуп вектора?

Нека је

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_k y_k + \underbrace{\gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_l z_l}_{=z} = 0.$$

$$z = \gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_l z_l \in U_2$$
$$z = (-\alpha_1)x_1 + \cdots + (-\alpha_m)x_m + (-\beta_1)y_1 + \cdots + (-\beta_k)y_k \in U_1$$

$\Rightarrow z \in U_1 \cap U_2$.

$$\Rightarrow z = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m \quad (\lambda_i \in F)$$

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = \gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_l z_l$$

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m + (-\gamma_1) z_1 + \cdots + (-\gamma_l) z_l = 0$$

$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = \gamma_1 = \cdots = \gamma_l = 0$

(јер је $\{x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_l\}$ база за U_2)

$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_k y_k = 0$ $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$(јер је $\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_k\}$ база за U_1)
$\Rightarrow B$ је линеарно независан скуп вектора.
B је база простора $U_1 + U_2$, па је
$\dim(U_1 + U_2) = m + k + l = (m + k) + (m + l) - m = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$.
$V = U_1 \oplus U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) = 0$
$\Rightarrow \dim(U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.