# Линеарна алгебра 1

## девето предавање

Институт за математику и информатику
Природно-математички факултет
Универзитет у Крагујевцу

# Дефиниција матрице

Нека je $(F, +, \cdot, 0, 1)$ поље, $n, m \in \mathbb{N}$.

## Дефиниција

*Матрица типа $m \times n$ над пољем $F$ je свако пресликавање*

$$A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \to F.$$

*Ако je $A(i, j) = a_{ij} \in F$, матрицу $A$ записујемо у облику*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ *или краће,* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

## Дефиниција

*Скалари $a_{ij}$ се зову елементи матрице,*
$v_i = [a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}]$ *је $i$-та врста $(i \in \{1,\dots,m\})$,*

$$k_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$ *је $j-$та колона* $(j \in \{1,\dots,n\})$ *матрице $A$.*

*Први индекс означава број врсте, а други индекс број колоне у којој се елемент налази. Матрица типа $m \times n$ има $m$ врста и $n$ колона.*

$M_{m\times n}(F)$ - скуп свих матрица типа $m \times n$ над пољем $F$. Ако је $m = n$ (број врста једнак броју колона) кажемо да је $A$ квадратна матрица реда $n$. $M_n(F)$ - скуп свих квадратних матрица реда $n$ над пољем $F$.

## Пример

*Матрице* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $C = [1\ 3\ -2\ 5]$ *су типа, редом,* $3 \times 2$ *(3 врсте, 2 колоне),* $3 \times 1$ *(матрица колона) и* $1 \times 4$ *(матрица врста)*

$a_{12} = 2,\ a_{21} = 3,\ a_{32} = 6,\ b_{11} = 1,\ b_{31} = 4,\ c_{12} = 3,\ c_{13} = -2,$

$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ *квадратна матрица реда 3.*

## Дефиниција

*Нека су* $A = [a_{ij}],\ B = [b_{ij}] \in M_{m\times n}(F)$. *Тада*

$$A = B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall i \in \{1, \ldots, m\})(\forall j \in \{1, \ldots, n\})\ a_{ij} = b_{ij}.$$

## Пример

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \\ u &= 4. \end{cases}$$

На скупу $M_{m\times n}(F)$ дефинишемо бинарну операцију сабирање матрица на следећи начин:

## Дефиниција

*Ако су* $A = [a_{ij}],\ B = [b_{ij}] \in M_{m\times n}(F)$, *тада*

$$A + B \overset{\text{def}}{=} [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}, \quad \textit{тј.}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

## Пример

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 9 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

## Дефиниција

- *Матрица* $0 \stackrel{\text{def}}{=} [0]_{m\times n}$ *(тј. сви елементи су једнаки 0) се зове нула матрица.*
- *Матрица* $-A \stackrel{\text{def}}{=} [-a_{ij}]_{m\times n}$ *се зове супротна матрица матрице* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

## Теорема

$(M_{m\times n}(F), +)$ *је Абелова група.*

*Доказ.* Лако се проверавају аксиоме Абелове групе:

(0) $A, B \in M_{m\times n}(F) \Rightarrow A + B \in M_{m\times n}(F)$;

(1) $(A + B) + C = A + (B + C), \quad A, B, C \in M_{m\times n}(F)$;

(2) $A + B = B + A$
$A + B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} =$
$[b_{ij} + a_{ij}]_{m\times n} = [b_{ij}]_{m\times n} + [a_{ij}]_{m\times n} = B + A$;

(3) $A + 0 = A$ (нула матрица је неутрални за сабирање матрица);

(4) $A + (-A) = 0$. $\square$

Дефинишемо и множење матрице скаларом.

## Дефиниција

*Нека* $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(F)$ *и* $\lambda \in F$. *Тада*

$$\lambda \cdot A \stackrel{\text{def}}{=} [\lambda a_{ij}]_{m\times n}, \quad tj.$$

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

## Пример

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}.$$

## Теорема

*Ако* $A, B \in M_{m\times n}(F)$ *и* $\lambda, \mu \in F$ *онда*

(1) $\lambda(A+B) = \lambda\cdot A + \lambda\cdot B$;

(2) $(\lambda+\mu)\cdot A = \lambda\cdot A + \mu\cdot A$;

(3) $\lambda\cdot(\mu\cdot A) = (\lambda\mu)\cdot A$;

(4) $1\cdot A = A$.

*Доказ.* (1)

$$\begin{aligned}
\lambda(A+B) &= \lambda([a_{ij}]+[b_{ij}])\\
&= \lambda[a_{ij}+b_{ij}] \quad \text{(по деф. сабирања матрица)}\\
&= [\lambda(a_{ij}+b_{ij})] \quad \text{(по деф. множења скаларом)}\\
&= [\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij}] \quad \text{(дистрибутивност + и } \cdot \text{ у пољу)}\\
&= [\lambda a_{ij}]+[\lambda b_{ij}] \quad \text{(по деф. сабирања матрица)}\\
&= \lambda[a_{ij}]+\lambda[b_{ij}] \quad \text{(по деф. множења скаларом)}\\
&= \lambda A+\lambda B.
\end{aligned}$$

Слично се проверавају остале особине. $\square$

**Последица.** $(M_{m\times n}(F), +, \cdot, F)$ је векторски простор димензије $mn$.

*Доказ.*

- Из Теореме 4.1. и Теореме 4.2. непосредно следи да је $M_{m\times n}(F)$ векторски простор.
- Нека је

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},\ 1 \text{ је у } i\text{-тој врсти и } j\text{-тој колони.}$$

$B = \{E_{ij} | i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n\}$ је једна база простора $M_{m\times n}(F)$ јер:

$(B_1)$ за свако $A \in M_{m\times n}(F)$ важи

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \cdots + a_{mn}E_{mn} \in \mathcal{L}(B),$$

$(B_2)$ $B$ је линеарно независан скуп вектора (очигледно).

$$\Rightarrow \quad dim(M_{m\times n}(F)) = m \cdot n. \ \square$$

## Пример

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

*је једна база простора* $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$,

$$\Rightarrow \quad dim(M_{2\times 3}(\mathbb{R})) = 6.$$

# Множење матрица. Транспонована матрица

## Дефиниција

*Ако* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times p}$, *тада*

$$A \cdot B = [c_{ij}]_{m\times p}, \quad \text{где је}$$

$$c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \ tj.$$

## Дефиниција

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kp} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kp} \end{bmatrix}.$$

## Пример

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0\cdot 1+1\cdot 3+2\cdot 5 & 0\cdot 2+1\cdot 4+2\cdot 6 \\ 3\cdot 1+0\cdot 3-1\cdot 5 & 3\cdot 2+0\cdot 4-1\cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad \textit{није дефинисано,}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 12 & 3 \\ 18 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ако је $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times p}$, онда

- за $m \neq p$ производ $BA$ није дефинисан
- за $m = p$ производ $BA$ је дефинисан,
  - за $m \neq n$ матрице $AB$ и $BA$ нису истог типа,
  - за $m = n = p$ матрице $AB$ и $BA$ су истотипне, али не морају бити једнаке.

$AB \neq BA$ у општем случају, па операција $\cdot$ није комутативна.

**Дефиниција**

*Квадратне матрице $A$ и $B$ истог реда су комутативне ако је $AB = BA$.*

## Пример

*Матрице* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *и* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *су комутативне, јер*
$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = BA.$

## Дефиниција

*Квадратна матрица* $I_n = [\delta_{ij}] \in M_n(F)$, *где*
$\delta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, $tj.$ $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ *се зове јединична матрица реда* $n$.

### Теорема

*Важе следеће једнакости (под условом да сви наведени производи постоје):*

(1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ - *асоцијативност множења матрица,*

(2) $A \cdot I_n = A = I_m \cdot A, \quad A \in M_{m\times n}(F),$

(3) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$

(4) $\lambda \cdot (AB) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B).$

*Доказ.*

(1) Нека $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{n\times p}, C = [c_{ij}]_{p\times q},$
$BC = [d_{ij}]_{n\times q}, AB = [f_{ij}]_{m\times p}, A(BC) = [e_{ij}]_{m\times q},$
$(AB)C = [g_{ij}]_{m\times q}$. Тада

$$\begin{array}{rcl} e_{ij} & = & \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (\sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj}) = \\ & = & \sum_{l=1}^{p} (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl}) c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} f_{il} c_{lj} = g_{ij} \end{array} \quad (i = 1, \ldots m, j$$

(2) Нека је $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $I_n=[\delta_{ij}]$ и $A\cdot I_n=[b_{ij}]_{m\times n}$. Тада $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj}=a_{i1}\underbrace{\delta_{1j}}_{=0}+\cdots+a_{ij}\underbrace{\delta_{jj}}_{=1}+\cdots+a_{in}\underbrace{\delta_{nj}}_{=0}=a_{ij}$

$$\Rightarrow A\cdot I_n=A.$$

(3) и (4) се слично доказују. □

Из Теореме 4.1. и Теореме 4.3. добија се следећа последица.

**Последица.** Структура $(M_n(F),+,\cdot)$, где је $+$ сабирање матрица, а $\cdot$ множење матрица, је некомутативан прстен са јединицом $I_n$.

**Напомена.** Прстен $M_n(F)$ има делиоце нуле, јер постоје ненула матрице чији је производ нула матрица.

**Пример**

*За $n=2$:*

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

У семигрупи $(M_n(F), \cdot)$ индуктивно дефинишемо степен квадратне матрице $A$:

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad \dots, \quad A^{m+1} = A^m \cdot A, \ (m \in \mathbb{N}).$$

## Дефиниција

*Ако je $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ онда се матрица*

$$A^T \stackrel{\text{def}}{=} [a_{ji}]_{n\times m}$$

*се зове транспонована матрица матрице $A$.*

Другим речима, $A^T$ се добија из $A$, пишући, редом, врсте од $A$ као колоне од $A^T$.

## Пример

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Особине транспоновања су дате у следећој теореми.

## Теорема

(1) $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$,

(2) $(\lambda \cdot A)^\top = \lambda \cdot A^\top$,

(3) $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$,

(4) $(A^\top)^\top = A$.

*Доказ.*

- (1), (2) и (4) се једноставно доказују.
- (3) Нека је
  $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times p}$, $A^T = [e_{ij}]_{n\times m}$,
  $B^T = [f_{ij}]_{p\times n}$
  $AB = [c_{ij}]_{m\times p}$, $(A \cdot B)^\top = [d_{ij}]_{p\times m}$ и $B^T \cdot A^T = [g_{ij}]_{p\times m}$.
  Тада
  $d_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} e_{kj}f_{ik} = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}e_{kj} = g_{ij}$,
  $(i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, m) \Rightarrow (AB)^T = B^T A^T$. $\square$

**Дефиниција**

*Квадратна матрица $A \in M_n(F)$ је*

- *симетрична ако је $A^T = A$,*
- *кососиметрична ако је $A^T = -A$.*

## Пример

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ је симетрична, јер}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \text{ је кососиметрична, јер}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Дефиниција

*Траг квадратне матрице* $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$, *у ознаци* $tr(A)$, *је збир свих елемената на главној дијагонали матрице* $A$, *тј.*

$$tr(A) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

## Пример

*Ако* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, *онда* $tr(A) = 1 + 4 + 6 = 11.$

## Теорема

*За матрице* $A, B$ *и* $\lambda \in F$ *важи:*

(1) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$,

(2) $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$,

(3) $tr(A^T) = tr(A)$,

(4) $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

*Доказ.* (4) Нека је $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times m}$, $AB = [c_{ij}]_{m\times m}$, $BA = [d_{ij}]_{n\times n}$. Тада

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{m} c_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_{ji}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}a_{ji} = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = tr(BA). \ \square$$

# Регуларне матрице

## Дефиниција

- *Квадратна матрица* $A \in M_n(F)$ *је регуларна ако постоји квадратна матрица* $B \in M_n(F)$ *таква да важи* $A \cdot B = I_n \quad$ *и* $\quad B \cdot A = I_n$. *Тада се матрица* $B$ *зове инверзна матрица матрице* $A$ *и обележава са* $A^{-1}$.
- *Матрица* $A \in M_n(F)$ *је сингуларна ако није регуларна.*

Инверзна матрица регуларне матрице $A$ је јединствена, јер из претпоставке да матрица $A$ има инверзне матрице $B$ и $C$ следи

$$AB = BA = I_n,\ AC = CA = I_n \Rightarrow B = I_nB = CAB = CI_n = C.$$

## Теорема

*Ако су $A$ и $B$ регуларне матрице онда су и матрице $A \cdot B$ и $A^T$ регуларне и важи:*

(1) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$,

(2) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

*Доказ.* $A$ и $B$ су регуларне $\Rightarrow$ постоје $A^{-1}, B^{-1} \in M_n(F) \Rightarrow$ постоје $B^{-1}A^{-1}, (A^{-1})^T$.

(1) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$,
$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = I_n$.

(2) $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$, $(A^{-1})^TA^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n$. $\square$

**Теорема**

*Ако су сви елементи неке врсте (колоне) матрице $A$ једнаки нули, онда је та матрица сингуларна.*

*Доказ.* $A \in M_n(F)$ има нула врсту (колону) $\Rightarrow$ $AB$ ($BA$) има нула врсту (колону), за свако $B \in M_n(F)$ $\Rightarrow$ $AB \neq I_n$ ($BA \neq I_n$) $\Rightarrow$ $A$ је сингуларна. $\square$

**Дефиниција**

*Нека је $A \in M_{m\times n}(F)$. Елементарне операције врста или $v$-операције су:*

- $v_{ij}$ - *размена $i$-те и $j$-те врсте матрице $A$,*
- $v_i^{\lambda}$, $\lambda \neq 0$ - *множење елемената $i$-те врсте бројем $\lambda \neq 0$,*
- $v_{ij}^{\lambda}$ - *множење елемената $j$-те врсте бројем $\lambda$ и додавање елементима $i$-те врсте.*

Аналогно се дефинишу елементарне операције на колонама ($k$-операције):
$k_{ij}, \quad k_i^{\lambda}, \lambda \neq 0, \quad k_{ij}^{\lambda}.$

**Дефиниција**

- *Матрица $A$ је $v$-еквивалентна матрици $B$ истог типа, у ознаци $A \sim_v B$, ако се $B$ добија из $A$ коначном применом $v$-операција.*
- *Матрица $A$ је $k$-еквивалентна матрици $B$ истог типа, у ознаци $A \sim_k B$, ако се $B$ добија из $A$ коначном применом $k$-операција.*
- *Матрица $A$ је еквивалентна матрици $B$ истог типа, у ознаци $A \sim B$, ако се $B$ добија из $A$ коначном применом $v$ или $k$-операција.*

Очигледно, релације $\sim_v$, $\sim_k$, $\sim$ су релације еквиваленције на скупу $M_{m\times n}(F)$.

**Дефиниција**

- *Матрица $A$ је степенаста по врстама ($v$-степенаста) ако број нула које претходе првом ненула елементу врсте расте од врсте до врсте.*
  *Први ненула елемент врсте ћемо звати истакнути елемент те врсте.*
- *$v$-степенаста матрица $A$ је редукована ако су сви њени истакнути елементи једнаки 1, а сви остали елементи у њиховим колонама су једнаки 0.*

## Пример

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ *је $v$-степенаста, али није редукована $v$-степенаста матрица, истакнути елементи су 2 и 5.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ *није $v$-степенаста,* $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ *је редукована $v$-степенаста матрица.*

## Теорема

(a) *Свака не-нула матрица $A \in M_{m\times n}(F)$ је $v$-еквивалентна некој $v$-степенастој матрици истог типа.*

## Теорема

(б) *Свака не-нула матрица $A \in M_{m\times n}(F)$ је $v$-еквивалентна некој редукованој $v$-степенастој матрици истог типа.*

(в) *Свака не-нула матрица $A \in M_{m\times n}(F)$ је еквивалентна матрици*

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

*($r$ јединица на дијагонали, остало нуле, $r \le m, n$) коју краће записујемо у облику блок матрице* $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

*Доказ.*

(a) Алгоритам за довођење матрице на $v$-степенасту матрицу применом елементарних $v$-операција:

1) Налазимо прву ненула колону (постоји јер $A \neq 0$).
2) У тој колони налазимо не-нула елемент.
3) Ако је нађени елемент у $i$-тој врсти заменимо $i$-ту и прву врсту, тј. $v_{1i}(A)$.
4) Помножимо прву врсту инверзом нађеног ненула елемента (тако добијамо да је истакнути елемент прве врсте једнак 1).
5) Прву врсту множимо погодним скаларима и додајемо преосталим врстама, тако да се испод добијене јединице добију све нуле.
6) Посматрамо подматрицу добијену избацивањем прве врсте, свих почетних нула-колона (ако их има) и прве не-нула колоне. Прелазимо на корак 1) и понављамо поступак на добијеној подматрици. Уколико оваква подматрица не постоји - крај поступка.

(б) Поступком описаним под (а) добијамо $v$-степенасту матрицу чији су сви истакнути елементи једнаки 1. Множењем сваке ненула врсте погодно изабраним скаларима и додавањем претходним врстама постиже се да у свакој не-нула колони, осим једне јединице сви остали елементи буду једнаки 0.

(в) Поступцима под (а) и (б) добија се $v$-еквивалентна редукована $v$-степенаста матрица.

Нека се истакнута јединица прве врсте налази у $l$ колони. Заменимо прву и $l$-ту колону.

Множењем прве колоне погодно изабраним скаларима и додавањем преосталим колонама постиже се да сви елементи прве врсте, осим првог, буду једнаки нули.

Посматрамо матрицу $D$ добијену избацивањем прве врсте и прве колоне.

- Ако је $D$ нула матрица, теорема је доказана
- ако $D$ није нула матрица, понављамо поступак на матрици $D$, и даље, све док не добијемо 0 матрицу или стигнемо до последње врсте. □

## Пример

*Одредимо $v$-степенасту матрицу $B$ и редуковану $v$-степенасту матрицу $C$ које су $v$-еквивалентне матрици*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 9 & -7 \\ 2 & 5 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 9 & -7 \\ 2 & 5 & -9 & 3 \end{bmatrix} \sim_v \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & -5 & -3 \end{bmatrix} \sim_v$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} = B$$ *(применом најпре $v_{21}^{3},\ v_{31}^{-2}$, а затим $v_3^4,\ v_{32}^{9}$).*

## Пример

$$B \sim_v \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix} \sim_v \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix} \sim_v$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{bmatrix} = C$ *(применом најпре* $v_2^{-\frac{1}{4}}$, $v_3^{\frac{1}{7}}$, *затим* $v_{12}^2$ *па* $v_{13}^{\frac{7}{2}}$, $v_{23}^{\frac{3}{4}}$*).*

## Дефиниција

*Ако је* $A \in M_{m\times n}(F)$ *и* $A \sim \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(r \leq m, n)$ *онда се блок матрица* $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *зове нормална форма матрице* $A$.

## Пример

*Одредити нормалну форму матрице* $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{v}_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{k}_1^{\frac{1}{2}}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{v}_{31}^{-2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{k}_{21}^{-3},\mathrm{k}_{31}^{-5},\mathrm{k}_{41}^{-4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{k}_2^{\frac{1}{2}}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{v}_{32}^{-1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{k}_{32}^{-3},\ \mathrm{k}_{42}^{-4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Применом елементарних $v$-операција на јединичну матрицу добијамо елементарне $v$-матрице.
Применом елементарних $k$-операција на јединичну матрицу добијамо елементарне $k$-матрице.

## Дефиниција

*Елементарне $v$-матрице су*

$$P_{ij} \stackrel{def}{=} v_{ij}(I_n),$$
$$P_i^\lambda \stackrel{def}{=} v_i^\lambda(I_n),\ \lambda \neq 0$$
$$P_{ij}^\lambda \stackrel{def}{=} v_{ij}^\lambda(I_n),$$

*Елементарне $k$-матрице су*

$$Q_{ij} \stackrel{def}{=} k_{ij}(I_n),$$
$$Q_i^\lambda \stackrel{def}{=} k_i^\lambda(I_n),\ \lambda \neq 0$$
$$Q_{ij}^\lambda \stackrel{def}{=} k_{ij}^\lambda(I_n).$$

## Пример

$$n = 3: \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_{12} = v_{12}(I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = k_{12}(I_3) = Q_{12},$$

$$P_3^5 = v_3^5(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = k_3^5(I_3) = Q_3^5,$$

$$P_{31}^2 = v_{31}^2(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = k_{13}^2(I_3) = Q_{13}^2.$$

Лако се може приметити да важи:

$$P_{ij} = Q_{ij}, \qquad P_i^\lambda = Q_i^\lambda,\ \lambda \neq 0, \qquad P_{ij}^\lambda = Q_{ji}^\lambda.$$

Применом $v(k)$-операције на неку матрицу постиже се исти ефекат као множењем те матрице са леве (десне) стране елементарном $v(k)$ матрицом одговарајућег типа.

### Теорема

*Ако је $A \in M_n(F)$ тада:*

(1) $v_{ij}(A) = P_{ij} \cdot A, \qquad v_i^{\lambda}(A) = P_i^{\lambda} \cdot A,\ \lambda \neq 0,$
$v_{ij}^{\lambda}(A) = P_{ij}^{\lambda} \cdot A,$

(2) $k_{ij}(A) = A \cdot Q_{ij}, \qquad k_i^{\lambda}(A) = A \cdot Q_i^{\lambda},\ \lambda \neq 0,$
$k_{ij}^{\lambda}(A) = A \cdot Q_{ij}^{\lambda}.$

*Доказ.*

$$P_i^\lambda \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$= v_i^\lambda(A)$. Слично се доказују остали делови тврђења. $\square$

**Последица.**

(а) $A \sim_v B$ акко $B = P_r \cdot \cdots \cdot P_1 \cdot A$, где су $P_i$ елементарне $v$-матрице.

(б) $A \sim_k B$ акко $B = A \cdot Q_1 \cdot \cdots \cdot Q_s$, где су $Q_i$ елементарне $k$-матрице.

(в) $A \sim B$ акко $B = P_r \cdot \cdots \cdot P_1 \cdot A \cdot Q_1 \cdot \cdots \cdot Q_s$, где су $P_i$ елементарне $v$-матрице, а $Q_j$ елементарне $k$-матрице.

**Теорема**

*Елементарне матрице су регуларне.*

*Доказ.* $P_{ij} \cdot P_{ij} = v_{ij}(P_{ij}) = v_{ij}(v_{ij}(I_n)) = I_n \ \Rightarrow \ P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.

Слично, $(P_i^{\lambda})^{-1} = P_i^{\lambda^{-1}}$, $\lambda \neq 0$, $\qquad (P_{ij}^{\lambda})^{-1} = P_{ij}^{-\lambda}$. $\square$

## Теорема

*Матрица $A \in M_n(F)$ је регуларна акко $A \sim_v I_n$.*

*Доказ.*

$(\to)$ Нека је $A \in M_n(F)$ регуларна матрица
$\Rightarrow A \neq 0$
$\Rightarrow A \sim_v B$ где је $B \in M_n(F)$ редукована $v$-степенаста матрица (Теорема 8(б))
$\Rightarrow B = P_r \dots P_1 A$, где су $P_1, \dots, P_r$ елементарне $v$-матрице (Последица (а))
$\Rightarrow B$ је регуларна матрица (као производ регуларних матрица)
$\Rightarrow B$ нема нула врсту (иначе би била сингуларна)
$\Rightarrow B$ има $n$ јединица као истакнуте елементе
$\Rightarrow B = I_n$ ($B$ је редукована, па изнад (наравно и испод) сваке јединице су све нуле)
$\Rightarrow A \sim_v I_n$.

$(\leftarrow)$ $A \sim_v I_n \quad \Rightarrow \; I_n \sim_v A$ (јер је $\sim_v$ симетрична)

$\Rightarrow$ постоје елементарне $v$-матрице $P_1, \ldots, P_k$ такве да је $A = P_k \ldots P_1 I_n$

$\Rightarrow$ $A$ је регуларна (као производ регуларних матрица). $\square$

## Пример

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{v}_{12}}{\sim}_v \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -9 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{v}_{21}^{-2}}{\sim}_v \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$
$$\overset{\mathrm{v}_2^{\frac{1}{3}}}{\sim}_v \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{v}_{32}^{2}}{\sim}_v \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{v}_{23}^{3}}{\sim}_v \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$\Rightarrow I_3 = P_{23}^3 P_{32}^2 P_2^{\frac{1}{3}} P_{21}^{-2} P_{12} A \Rightarrow \; A \sim_v I_3$

$\Rightarrow$ *$A$ је регуларна* и $A = P_{12} P_{21}^2 P_2^3 P_{32}^{-2} P_{23}^{-3}$

Један од поступака за налажење инверзне матрице регуларне матрице $A \in M_n(F)$: из
$A \sim_v I_n \Rightarrow I_n = P_r \dots P_1 A \ / \cdot A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = P_r \dots P_1 I_n$ следи да $A^{-1}$ добијамо применом на $I_n$ истих елементарних $v$-операција чијом применом на $A$ добијамо $I_n$, тј.

$$[A|I_n] \sim_v [I_n|A^{-1}].$$

## Пример

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim_v \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

$$\sim_v \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim_v \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim_v \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right] \sim_v \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{14}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right] = [I$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & -\frac{14}{3} & 3 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

**Теорема**

*Матрица $A \in M_n(F)$ је сингуларна акко је $v$-еквивалентна матрици $B$ која има бар једну нула врсту.*

*Доказ.*

($\rightarrow$) Нека је $A \in M_n(F)$ сингуларна.
$A \sim_v B$, где је $B$ редукована $v$-степенаста матрица (Теорема 4.8.(б)).
Ако $B$ нема нула врсту онда $B = I_n$, тј. $A \sim_v I_n$, па је $A$ регуларна (Теорема 4.10.). Контрадикција.

($\leftarrow$) Ако $A \sim_v B$ и $B$ има нула врсту, тада $B$ је сингуларна (Теорема 4.7.) и $B = P_r \dots P_1 A$ (Последица), па је и $A$ сингуларна (у супротном $B$ би била регуларна као производ регуларних матрица). $\square$

## Пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim_v \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & -7 & 14 \end{bmatrix} \sim_v \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ *$A$ је сингуларна матрица.*